Теория вероятностей

K6 (?)

ნიკო ლომჯარია

სრულიად სავსე სივრცე

დისერტაცია

ქ. ტფილისი.

1943.

## ს ა რ ჩ ე ვ ი

# შესავალი

მას შემდეგ, რაც წარსული საუკუნის მათემატიკამ ზედი-ზედ ახალი და ახალი პრობლემები წამოჭრა გეომეტრიაში, საბოლოოდ გარდაიქმნა კლასიკური წარმოდგენა თვითონ გეომეტრიის საგანზე, ხოლო როდესაც ეს პრობლემები ცალკე დარგების წარმოქმნას დაედო საფუძვლად და ამ დარგების წარმოშობა სინამდვილედ იქცა, შეიცვალა გეომეტრიის, როგორც მათემატიკის ნაწილის განმარტებაც. ამ დიდი მათემატიკური რევოლუციის დამწყებნი არიან გეგმილური გეომეტრიის ავტორები და ამათში ყველაზე მეტად Poncelet , n -განზომილების ელემენტური გეომეტრიის ამგებნი H. Grassmann-ი და Schläfli და ბოლოს B. Riemann-ი, ღრმა გეომეტრიული იდეებით და უწინარეს ყოვლისა თავისი ფართეულთა თეორიით [1] .

საგანი გეომეტრიისა უკვე აღარ ეტევა ჩვეულებრივ გეომეტრიულ ინტუიციაში. თუ აქამდე იგი აგებული იყო სამგანზომილებიანი სივრცის ელემენტებით, როგორიცაა წერტილი, წრფე, სიბრტყე - ახლა იგი წარმოადგენს ფიგურას, ერთობლიობას თავისთავად განურჩეველი ელემენტებისა, რომლებიც ამ ფიგურას იმის და მიხედვით ჰქმნიან, თუ როგორია ელემენტთა ურთიერთდამოკიდებულება და სწორედ ეს დამოკიდებულებაა ელემენტთა სიმრავლეს რომ სივრცედ აქცევს, ხოლო ამ სივრცის თვისებათა ერთობლიობას მის გეომეტრიად აყალიბებს.

ტოპოლოგია, რომელიც სწორედ ამ თვალსაზრისზე დგას, როგორც განკვეთული მეცნიერება G. Cantor-ისა და H. Poincaré-ს ნაშრომებით იწყება [2], თუმც ბევრი ტოპოლოგიური ფაქტი ამათზე ადრეც იყო ცნობილი /მაგ. L. Euler-ის ნაწერებში/. სივრცე, როგორც გეომეტრიის საგანი წარმოადგენს წერტილთა სიმრავლეს, რომელშიაც რაიმე საშუალებით რაღაც შინაგანი წესია დამყარებული

/Eine topologisches Anordnung /. თუ ყოველი M სიმრავლისათვის, რომელიც მოცემულში შედის, ამ წესის მიხედვით გარკვეულია $\overline{M}$ სიმრავლე, რომელიც თვითონაც მოცემულ სიმრავლეს ეკუთვნის, საქმე გვაქვს ზოგად ტოპოლოგიურ სივრცესთან. ამის მისაღწევად სამი მთავარი გზა გვაქვს:

პირველი გზა: - წერტილთა ყოველი თვლადი მიმდევრობისათვის გარკვეულია ერთ-ერთი შემდეგ სახელწოდებათაგან - კრებადი, განშლადი და ყოველი კრებადი მიმდევრობისათვის დანიშნულია მოცემული სიმრავლის წერტილი, რომელსაც ამ მიმდევრობის ზღვარი ეწოდება.

მეორე გზა. - ყოველი წერტილისათვის შემოღებულია მისი მიდამო /Umgebung / რომელიც ამ წერტილს შეიცავს[1].

მესამე გზა. - წერტილთა ყოველი წყვილისათვის დანიშნულია გარკვეული ნამდვილი რიცხვი, რომელიც უარყოფითი არ არის.

პირველ გზას მივყევართ კრებადობის სივრცის /Konvergenzraum/ მეორე გზას მიდამოებრივი სივრცის /Umgebungsraum /, ხოლო მესამე გზას მეტრიკული სივრცის /Metrisches Raum / განმარტებამდე.

კლასიკური მათემატიკის წყალობით მეტრიკა ყველაზე გავრცელებული გზაა წერტილთა სიმრავლეს რომ ამავე წერტილთა სივრცედ გარდაქმნის. ცხადია, როდესაც წერტილს ვამბობთ, ეს უსათუოდ ფანქრის წვერით ქაღალდზე დასმული წერტილი კი არ არის, არამედ სიმრავლის ელემენტია. იგი შეიძლება იყოს რიცხვი, თვითონაც წარმოადგენს სიმრავლეს და სხვა.

---

/1. ეს შეიძლება სხვადასხვა გზით შესრულდეს, როგორც მაგ. დადგენა იმისა, თუ რომელია ჩვენ სიმრავლეში შეკრული ქვესიმრავლე და რომელი არა, ასევე - რომელია ღია ქვესიმრავლე და რომელი არა. ამ შემთხვევებს ცალკე არ გამოვყოფ.

მეტრიკული სივრცის ცნება უძველესთაგანია გეომეტრიაში. საკუთრივ თეორია მეტრიკული სივრცეებისა პირველად M.Fréchet-მ დაიწყო [3], თითქმის ორმოცი წლის წინად და კვლევა ძიება კი ამ დარგში დღესაც გაცხოველებით მიმდინარეობს. აქ დავასახელებ გამოჩენილ მცოდნეს ტოპოლოგიაში, П.С. Александров-ს, რომელმაც Урысон-თან ერთად პირველად გამოთქვა და დაამტკიცა ე.წ. მეტრიზაციის ზოგადი თეორემა ე.ი. მოძებნა აუცილებელი და საკმარისი პირობები იმისა, რომ მოცემული მიდამოებრივი სივრცისათვის ისეთი მეტრიკა გამოიძებნოს, რომელიც ამ სივრცეს გეომეტრიას არსებითად არ შეცვლის /ან როგორ ამბობენ, რომელიც ტოპოლოგიას უცვლელად დატოვებს/.

რაკი სივრცე განისაზღვრება მეტრიკით, საჭიროა თვით ეს მეტრიკა იყოს გარკვეული უწინარეს ყოვლისა. მანძილი წერტილიდან წერტილამდე ამ წერტილთა ფუნქციაა და საქმე უნდა დავიწყოთ ორი ცვალებადი წერტილის სწორედ ამ ფუნქციის შესწავლით. ამ მიმართულებით პირველი დიდი ნაშრომი -ს ეკუთვნის [4]. შემდეგში Menger-ის კვლევაძიება სხვა გზით წავიდა. დაიწყო სივრცის ამოზნექილობის /Konvexität / შესწავლა. ამოზნექილი სივრცე, Menger-ისეული განმარტებით ის სივრცეა, რომლის ყოველი ორი წერტილის შუა წერტილი არსებობს ე.ი. წერტილი, რომლიდანაც თვითეულ მოცემულ წერტილამდე მანძილი ამათ მანძილის ნახევარია. წარმოიშვა ცნებები და ამათზე აიგო მთელი თეორიები: სრულიად ამოზნექილი სივრცე /Aronszajn /, კვაზი ამოზნექილი სივრცე /Blanc / და თანაგვარი [5]. მეტრიკის ზოგად შესწავლას შემდეგში განაგრძობდა ვენის კოლა, Beer-ი და სხვა [6].

ამ რადიკალურ მიმართულებას წინ უსწრებდა სავსე სივრცის გეომეტრიის წარმოშობა /Fréchet/. საზოგადოდ უნდა აღვნიშნო, რომ Fréchet დღევანდელ მათემატიკოსებში მრავალი ნამოწყებით გამოირჩევა, მაგრამ თითქმის ყოველთვის მის ნამოწყებას ნამდვილი და ღრმა შესწავლის საქმედ სხვა აქცევდა. სავსე სივრცის ცნება Cauchy-ს მიმდევრობის კლასიკურ ცნებაზეა აგებული, წინასწარ მოითხოვს მეტრიკის არსებობას და მისი გეომეტრიაც სავსებით მეტრიკული სახით ყალიბდება. უამრავი შრომა იწერებოდა და იწერება ამ მიმართულებით. აქვე მოვიხსენებ სხვადასხვა კომპაქტობის სივრცეთა თეორიას. კერძოდ, კომპაქტური სივრცის თეორია ორივე სახით გვევლინება: მეტრიკულადაც და მიდამოებრივადაც [1].

მესამე მიმართულებით /Hahn, Banach, Schauder/ წერტილები შებმულია ადიციურად ჩაწერილი ჯგუფთათეორიული ოპერაციით და სივრცეს ვღებულობთ ნორმის ცნების შემოღებით. ამ გზით ვითარდება წრფივ მეტრიკულ სივრცეთა თეორია, როგორც თეორია Abel-ის გარკვეული ჯგუფისა.

მეოთხე მიმართულებაა Bouligand-ის მიმართულება, რომელიც დიდ სკოლად ჩამოყალიბდა და მრავალი შრომა გამოიწვია, როგორც რუსეთში /А.Н.Колмогоров, И.Я.Верченко და სხვა/ ისე, და განსაკუთრებით, უცხოეთში [7].

ჩემი ნაშრომის მიზანია შემოღება და შესწავლა ახალი ტიპის მეტრიკული სივრცისა, რომელიც კომპაქტურზე ზოგადია ხოლო ლოკალურად კომპაქტურსა და სავსე სივრცეზე კერძოა. ამ ახალ სივრცეს მე სრულად სავსე სივრცე ვუწოდე. შრომა დაწყებულია 1940 წელს, ომამდე, შეწყდა ჩემი ფრონტზე გამგზავ-

რების გამო და თბილისში დაბრუნების შემდეგ ისევ განახლდა. მისი საკმაოდ მნიშვნელოვანი ნაწილი მოფიქრებული და ნაწილობრივ კი ჩაწერილიცაა ერთერთ სამხედრო ჰოსპიტალში. რასაკვირველია, ამ სივრცის შესწავლა მომავალშიაც გაგრძელებული იქნება, რადგან გარკვეული სივრცის გეომეტრიის შექმნა, თუ ეს სივრცე მდიდარია თვისებებით, ზოგჯერ რამოდენიმე პირის ხანგრძლივ მუშაობას მოითხოვს. მომავალი დაგვანახვებს როგორ წარიმართება შემდგომი კვლევა-ძიება.

ნაშრომის ბოლოში მივუთითებ ზოგ ლიტერატურულ წყაროს და ეს არავითარ შემთხვევაში არ უნდა მივიჩნიოთ სრულ ბიბლიოგრაფიად, რადგან მე ასეთი მიზანი არც მქონია. მე ყოველი დიდი საკითხის გამო თითო ისეთი წყარო მაინც აღვნიშნე, რომელთა გამოყოლებით მსურველს შეუძლია იმ იდეებამდე მოვიდეს, რა იდეებთანაც ჩემი ნაშრომია დაკავშირებული. სხვა თანამედროვე მიმართულებებით, რომლებსაც შესავალში გაკვრით ვეხები, ლიტერატურა არ მომყავს. ყოველ შემთხვევაში მრავალი ძირითადი ცნების გასაგებად საუკეთესო წიგნია Alexandroff u. Hopf, Topologie, Springer 1935 და Hausdorff, Mengenlehre, Göschen 1927 /უკანასკნელის რუსული შევსებული და გადამუშავებული გამოცემა გამოვიდა 1935 წელს, П.С. Александров-ის რედაქციით/. მიუხედავად ამისა, ნაშრომში გამოყენებული ძველი ცნებები, თუ კი ეს გრძელ სიტყვას არ მოითხოვდა, მე განმარტებული მაქვს, რადგან უცხო ენებზე ეს ცნებები ზოგისათვის მიუწვდომელი იქნებოდა და ნაშრომის გამგებთა რიცხვს ეს შეამცირებდა.

დასასრულ, ტერმინოლოგიისათვის. მე თავისუფლად ვხმარობ ასეთ გამოთქმებს: უსასრულოდ ბევრი, უსასრულოდ მრავალი - unendlichviele, რაც საშუალებას იძლევა უკუვაგდოთ შემდეგი

სიტყვახმარება: ავიღოთ $x_i$ წერტილები, რომელთა სიმრავლე უსასრულოა, და თანაგვარი. ნაცვლად ამისა მე ვამბობ: ავიღოთ უსასრულოდ ბევრი $x_i$ წერტილი. მოხერხებულად მიმაჩნია შემდეგი სიტყვახმარებაც: $\varrho(x_i,x)<\varepsilon$, რომელიც არ უნდა იყოს $(x_i)$ მიმდევრობის $x_i$ წერტილი; $\varrho(x,x_0)<\varepsilon$, რა $x$ ფუნქციაც არ უნდა ავიღოთ, $x\in X$; $\varrho(x,x_0)<\varepsilon$, როგორიც არ უნდა იყოს $x$ — კონტექსტის საერთო აზრის მიხედვით. რუსულისაგან განსხვავებით, /რომელშიაც ყველა შემთხვევისათვის ერთი სტერეოტიპული სიტყვახმარებაა/, დასავლურ ენებზე ხშირად ასეა.

დარწმუნებული ვარ მათემატიკურად ეს ბუნდოვანებას არ გამოიწვევს, ენას კი აბუნებრივებს.

მე მაინც ვერიდებოდი ახალი სიტყვის შემოღებას, თუ საკმაოდ მისაღები ძველი არსებობდა. სამწუხაროდ, ახალ მათემატიკაში ქართული ტერმინოლოგია თითქმის არა გვაქვს, თუმც კლასიკურში ეს ტერმინოლოგია უკვე საკმაოდ შემუშავებულია.

ტექსტში ხმარებული ყოველი ახალი განმარტება გამოყოფილი და დანომრილია, აქამდე ცნობილი განმარტებებისაგან გამოსარჩევად; ახალი თეორემების დიდი ნაწილიც ასეა, გარდა ისეთებისა, რომელთა ცალკე გამოყოფა ჩემის აზრით დაარღვევდა კონტექსტის სათანადო ადგილის მთლიანობას და უმიზნოდ გაზრდიდა დამტკიცებული თეორემების რიცხვს.

ჩემ სასიამოვნო მოვალეობად მიმაჩნია მადლობა მოვახსენო პროფ. ვ. კუპრაძეს, რომლის მზრუნველი დახმარება ძვირფასი იყო ჩემთვის იმ მრავალი დაბრკოლებების დასაძლევად, ამ შრომის დაწერას რომ ხელს უშლიდა.-

თბილისი,

1943. აგვისტო.

# I - მიმდევრობანი

## II. წინასწარი ცნებები. განმარტებანი.

თუ რაიმე სიმრავლის წერტილთა ყოველ წყვილს გარკვეული ნამდვილი რიცხვი შეესაბამება, რომელიც უარყოფითი არ არის, ამ სიმრავლეს ზოგადად მეტრიკული სივრცე ეწოდება. აღნიშნულ რიცხვს წერტილთა $(a,b)$ წყვილისათვის $a$-დან $b$-მდე მანძილი ჰქვია და ასე აღინიშნება: $\rho(a,b)$.

ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი სამი დებულება:

I $\rho(a,b)=0$ მაშინ და მარტოოდენ მაშინ, როდესაც $a=b$.

II $\rho(a,b)=\rho(b,a)$.

III $\rho(a,b) \leq \rho(a,c)+\rho(c,b)$.

როდესაც სივრცის წერტილთა ნებისმიერი კომბინაციისათვის სამივე ამ დებულებას აქვს ადგილი, მოცემული სივრცე მეტრიკული სივრცეა. ეს დებულებები ცნობილია მეტრიკულობის აქსიომების სახელით. პირველს - იგივობის ანუ რეფლექსურობის აქსიომა ეწოდება, მეორეს უკუქცევის ანუ სიმეტრიის აქსიომა ჰქვია, მესამე კი სამკუთხედის აქსიომაა.

მოქმედებას, რომელმაც სიმრავლე მეტრიკულ სივრცედ გარდაქმნა მეტრიზაცია ჰქვია.

მეტრიკული სივრცის წერტილთა მიმდევრობა

(1) $x_1, x_2, \ldots$

ფუნდამენტური ანუ Cauchy-ს მიმდევრობაა, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობა: რაგინდ მცირეც არ უნდა იყოს დადებითი $\varepsilon$ რიცხვი, მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი $N(\varepsilon)$, რომ უტოლობა

$$\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$$

სწორია ყოველთვის, როდესაც $m,n \geq N(\varepsilon)$. სხვა სიტყვებით იგივე განმარტება ასე ჩაიწერება: მიმდევრობა /1/ ფუნდამენტურია თუ $\rho(x_i,x_j)\to 0$, როდესაც ნებისმიერი გზით $i,j\to\infty$.

აღნიშნულ მიმდევრობას შემდეგში ამნაირად ჩავწერთ: $(x_i)$.

ყველგან, აქაც და შემდეგშიაც იგულისხმება რომ წერტილის ნიშნაკი ნატურალური რიცხვია.

ავიღოთ მეტრიკული სივრცის რაიმე $x$ წერტილი და მისივე წერტილთა რაიმე სიმრავლე, ვთქვათ $M$. მანძილი $x$ წერტილიდან $M$ სიმრავლემდე ეწოდება $\rho(x,y)$ რიცხვთა სიმრავლის ნამდვილ ქვედა საზღვარს, როდესაც $y$ გაირბენს მთელ $M$ სიმრავლეს. ეს გარემოება ასე ჩაიწერება: $\rho(x,M)=\inf\limits_{y\in M}\rho(x,y)$

სიმრავლის დიამეტრია $\rho(y',y'')$ რიცხვთა სიმრავლის ნამდვილი ზედა საზღვარი, როდესაც $y'$ და $y''$ ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლივ მთელ $M$ სიმრავლეს გაირბენს. ამ გარემოებას ასე აღვნიშნავთ: $d(M)=\sup\rho(y',y'')$.

სიმრავლე, რომლის დიამეტრი სასრულია, შემოსაზღვრული სიმრავლეა. მეტრიკული სივრცის წერტილთა რაიმე სასრულო $B$ სიმრავლეს ამავე სივრცის $\varepsilon$-ბადე ეწოდება, თუ $\rho(y,B)\leq\varepsilon$ რომელიც არ უნდა იყოს მოცემული სივრცის $y$ წერტილი.

სივრცეს, რომელსაც სასრულო $\varepsilon$-ბადე გააჩნია, სრულიად შემოსაზღვრული სივრცე ჰქვია.

$S(x,r)$ სფერო მეტრიკულ $R$ სივრცეში ამავე სივრცის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეა, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $\rho(x,y)<r$. ამ სფეროს $\varepsilon$ მიდამოს კი ის $y$ წერტილები შეადგენს, რომელთათვისაც შემდეგი უტოლობაა შესრულებული $|\rho(x,y)-r|<\varepsilon$.

მოცემული ორი $M_1$ და $M_2$ სიმრავლის ჯამი ეწოდება სიმრავლეს ყველა იმ წერტილებისა, რომლებიც მოცემულთაგან ერთერთ სიმრავლეს მაინც ეკუთვნის. ეს ჯამი ასე ჩაიწერება $M_1+M_2$.

იმ გარემოებას, რომ $x$ წერტილი $M$ სიმრავლის ელემენტია ასე ჩავწერთ $x \in M$, ხოლო ის, რომ $M_1$ სიმრავლის ყოველი წერტილი $M$ სიმრავლეში შედის აღინიშნება შემდეგნაირად $M_1 \subset M$.

უკანასკნელი დამოკიდებულება ზოგჯერ ასეთაც გამოითქმის: $M_1$ სიმრავლე $M$-ის ქვესიმრავლეა.

სიმრავლე, რომელიც შემდეგი ელემენტებისაგან შედგება

$$a, b, c, \ldots$$

ზოგჯერ ასე აღინიშნება $\{a, b, c, \ldots\}$.

III. შემოვიღოთ $L$-მიმდევრობის ცნება, რომელიც ძირითად როლს ასრულებს მთელ ჩვენ ნაშრომში.

განმარტება 1. მეტრიკული სივრცის წერტილთა რაიმე $(x_i)$ მიმდევრობას $L$-მიმდევრობა ვუწოდოთ, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობა: რაგინდ მცირეც არ უნდა იყოს დადებითი $\varepsilon$ რიცხვი მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი $N(\varepsilon)$, რომ უტოლობა

$$(1) \qquad \left|\rho(x_m, x_{m+p}) - \rho(x_m, x_{m+q})\right| < \varepsilon$$

სამართლიანია ყოველთვის, როდესაც $m \geq N(\varepsilon)$, ხოლო $p$ და $q$ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვებია.

იგივე განმარტება სხვა სახით ასეთაც ჩამოყალიბდება: $(x_i)$ მიმდევრობა $L$-მიმდევრობაა, თუ

$$(2) \qquad \rho(x_m, x_{m+p}) - \rho(x_m, x_{m+q}) \to 0,$$

როდესაც $m \to \infty$, ხოლო $p$ და $q$ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვებია.

ადვილად შევნიშნავთ, რომ ყოველი ფუნდამენტური მიმდევრობა $L$-მიმდევრობაც არის. მართლაც, თუ $(x_i)$ ფუნდამენტურია, მაშინ /2/ სხვაობის წევრები ცალცალკე ნულისაკენ მიის-

წრაფის, როდესაც $m \to \infty$, ამიტომ /2/ დამოკიდებულება შესრულებულია. მაშასადამე $(x_i)$ მიმდევრობა $L$ -მიმდევრობაა.

მაგრამ არსებობს $L$ -მიმდევრობა, რომელიც ფუნდამენტური არ არის.

მაგალითი [illegible]. ავიღოთ უსასრულო მიმდევრობა რაიმე ნამდვილი რიცხვებისა $x_1, x_2, \ldots$ ყოველ ამ მიმდევრობას ვუწოდოთ კომპლექსი ანუ წერტილი და ასე აღვნიშნოთ $y=(x_1, x_2, \ldots)$. შემოვიღოთ ორი კომპლექსის იგივობის ცნება: $y_{k'}=(x_1^{(k')}, x_2^{(k')}, \ldots)$ და $y_{k''}=(x_1^{(k'')}, x_2^{(k'')}, \ldots)$ იგივურია მაშინ და მარტოოდენ მაშინ, როდესაც $x_i^{(k')}=x_i^{(k'')}$ $(i=1,2,\ldots)$. ამ გარემოებას ასე ჩავწერთ $y_{k'}=y_{k''}$. მანძილი $y_{k'}$ წერტილიდან $y_{k''}$ წერტილამდე ასე განვსაზღვროთ:

$$\rho(y_{k'}, y_{k''}) = \sqrt{\sum_i \left(x_i^{(k')} - x_i^{(k'')}\right)^2}.$$

ავარჩიოთ $y_k$ კომპლექსები შემდეგი პირობის მიხედვით:

$$x_i^{(k)} = \begin{cases} 0, & \text{თუ } i \neq k \\ 1, & \text{თუ } i = k. \end{cases}$$

ცხადია, რომ $y_1, y_2, \ldots$ კომპლექსების სიმრავლეში, რომელიც $Y$ ასოთი აღვნიშნოთ, გვექნება $\rho(y_{k'}, y_{k''})=\sqrt{2}$, სადაც $y_{k'}$ და $y_{k''}$ წარმოადგენს $Y$ სიმრავლის ორ ერთმანეთისაგან განსხვავებულ წერტილს.

ცხადია, რომ $Y$ მეტრიკული სივრცეა. მართლაც, ადვილად შევამჩნევთ, რომ მეტრიკულობის სამივე აქსიომა შესრულებულია

$(y_i)$ მიმდევრობა $\perp$ -მიმდევრობაა. მართლაც $\rho(y_m, y_{m+p}) = \rho(y_m, y_{m+q}) = \sqrt{2}$ და /2/ პირობა შესრულებულია ნულთან ტოლობის სახით. ამავე დროს $(y_i)$ ფუნდამენტური მიმდევრობა არ არის, რადგან $\rho(y_m, y_{m+p}) = \sqrt{2}$.

12. <u>შემოსაზღვრულობა, ფუნდამენტურობა და $\perp$ -მიმდევრობა.</u>

დავამტკიცოთ

<u>თეორემა 1.</u> <u>ყოველი $\perp$ -მიმდევრობა შემოსაზღვრულია.</u>

ავიღოთ რაიმე დადებითი $\varepsilon$ რიცხვი. მაშინ $\perp$ -მიმდევრობის განმარტების ძალით მისი გარკვეული ადგილიდან მოყოლებული შემდეგი უტოლობა შესრულდება

$$(1) \qquad |\rho(x_m, x_{m+p}) - \rho(x_m, x_{m+q})| < \varepsilon,$$

სადაც $p$ და $q$ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვებია.

სამკუთხედის აქსიომის თანახმად ორი ნებისმიერი $x_P, x_Q$ წერტილისათვის დავწეროთ უტოლობა

$$(2) \qquad \rho(x_P, x_Q) \leq \rho(x_P, x_m) + \rho(x_m, x_Q)$$

(1) უტოლობაში ავიღოთ გარკვეული $m$, ხოლო $P$ და $Q$ იყოს ნებისმიერი ნატურალური რიცხვები. თუ (2) უტოლობის მარჯვენა მხარის ორივე შესაკრები შემოსაზღვრული აღმოჩნდა, მაშინ $\perp$ მიმდევრობაც შემოსაზღვრული ყოფილა. ცხადია სიმრავლეები, რომელთაც $\rho(x_P, x_m)$ და $\rho(x_m, x_Q)$ რიცხვები შეადგენს, იგივურია, ამიტომ განვიხილოთ $\rho(x_P, x_m)$ რიცხვთა სიმრავლე. იგი ორი სიმრავლის ჯამის სახით წარმოვადგინოთ:

ერთია – იმ რიცხვთა სიმრავლე, რომელთათვის $P \leq m$. ცხადია ეს სასრული სიმრავლეა, ამიტომ იგი შემოსაზღვრულია.

მეორე - სიმრავლე რიცხვებისა, რომელთათვის $P > m$.

შეგვიძლია დავწეროთ $P = m + p$; მაშინ (1) უტოლობიდან შემდეგს მივიღებთ

$$\rho(x_P, x_m) = \rho(x_{m+p}, x_m) < \varepsilon + \rho(x_m, x_{m+q}).$$

ავიღოთ $q = \mathrm{const}$. მაშინ ჩვენი უტოლობის მარჯვენა მხარე მუდმივია და ამიტომ მოხსენებული სიმრავლე შემოსაზღვრულია.

ახლა შეგვიძლია ვთქვათ, რომ $\rho(x_P, x_m)$ რიცხვთა სიმრავლე, როდესაც $P$ გაირბენს ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობას შემოსაზღვრულია, რადგან იგი ჯამია ამ ორი გარჩეული სიმრავლისა. მაგრამ მაშინ (2) ფორმულის მარჯვენა მხარე რიცხვთა აგრეთვე შემოსაზღვრულ სიმრავლეს გვაძლევს. ამის გამო $\rho(x_P, x_Q)$ რიცხვთა სიმრავლე, როდესაც $P$ და $Q$ ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად გაირბენს ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობას, შემოსაზღვრულია აგრეთვე და მაშასადამე შემოსაზღვრულია $L$-მიმდევრობაც.

ჩვენი თეორემა დამტკიცებულია.

<u>თეორემა 2.</u> <u>ყოველი შემოსაზღვრული მიმდევრობა $L$-მიმდევრობას შეიცავს.</u>

ვთქვათ $(x_i^{(0)})$ მოცემული შემოსაზღვრული მიმდევრობაა, ხოლო $(x_i^{(k)})$ გარკვეული წესით აღებული მისი ქვემიმდევრობა. თუ მოცემულია $(x_i^{(k)})$ აქედან $(x_i^{(k+1)})$ შემდეგნაირად გამოვყოთ: ავიღოთ სიმრავლე $E_{k+1} = \{x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, \ldots\}$, მოვძებნოთ მანძილი $d_k = \rho(x_1^{(k)}, E_{k+1})$, დავნიშნოთ რაიმე დადებითი $\varepsilon$ რიცხვი და მაშინ $(x_i^{(k+1)})$ იყოს მიმდევრობა, რომლის ელემენტები შემდეგ პირობას აკმაყოფილებს

$$(\text{ა}) \qquad \rho(x_1^{(k)}, x_i^{(k+1)}) - d_k < \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}.$$

ცხადია, ამ უტოლობის მარცხენა მხარე უარყოფითი არ არის და $(x_i^{(k+1)})$ მიმდევრობა ყოველთვის არსებობს.

$d_k$ რიცხვების სიმრავლე, განმარტების გამო, შემოსაზღვრული სიმრავლეა, ამიტომ იგი შეიცავს კრებად მიმდევრობას

$$d_{m_1}, d_{m_2}, \dots$$

ვთქვათ $\lim\limits_{i\to\infty} d_{m_i} = d$.

განვიხილოთ ახლა მოცემულის შემდეგი ქვემიმდევრობა

$$x_1^{(m_1)}, x_1^{(m_2)}, \dots$$

შეგვიძლია ასეთი უტოლობა დავწეროთ

$$(1) \qquad \left|\rho\left(x_1^{(m_k)}, x_1^{(m_l)}\right) - d\right| < \left|\rho\left(x_1^{(m_k)}, x_1^{(m_l)}\right) - d_{m_k}\right| + \left|d_{m_k} - d\right|.$$

ვიგულისხმოთ, რომ $l>k$. ადვილად შევნიშნავთ, რომ (ა) პირობის გამო ადგილი ექნება შემდეგს

$$(2) \qquad \left|\rho\left(x_1^{(m_k)}, x_1^{(m_l)}\right) - d_{m_k}\right| < \frac{\varepsilon}{2^{m_k+2}} < \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}.$$

მაგრამ რაკი $d_{m_i} \to d$, შეგვიძლია მოვძებნოთ ისეთი ნატურალური $N(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ უტოლობა

$$(3) \qquad \left|d_{m_k} - d\right| < \frac{\varepsilon}{2^2},$$

შესრულდება ყოველთვის, როდესაც $m_k \geq N(\varepsilon)$. სწორედ ასეთი $m_k$ ავიღოთ (1) და (2) უტოლობებში, მაშინ (1) ასეთ უტოლობას მოგვცემს

$$\left|\rho\left(x_1^{(m_k)}, x_1^{(m_l)}\right) - d\right| < \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} + \frac{\varepsilon}{2^2}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $x_1^{m_k} = y_k$; მაშინ უკანასკნელი უტოლობა ასე ჩაიწერება

$$\left|\rho(y_k, y_l) - d\right| < \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} + \frac{\varepsilon}{2^2}.$$

ავიღოთ ახლა $l = k+p$, $l = k+q$, სადაც $p$ და $q$ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვებია. ჩვენი უტოლობიდან შემდეგი გამოიყვანება

$$\left|\rho(y_k, y_{k+p}) - \rho(y_k, y_{k+q})\right| < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon,$$

რაც იმის მაჩვენებელია, რომ $(y_j)$ მიმდევრობა $\perp$-მიმდევრობაა. მაგრამ $(y_j) \subset (x_i^{(0)})$.

თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემას შემდეგი ნეგატიური სახეც შეიძლება მივცეთ: მიმდევრობა, რომელიც არც ერთ $\perp$-მიმდევრობას არ შეიცავს, შემოსაზღვრული არ არის.

თეორემა 3. ყოველი $\perp$-მიმდევრობა, რომელიც ფუნდამენტურ მიმდევრობას შეიცავს, თვითონაც ფუნდამენტურია.

მართლაც, ვთქვათ $(x_i)$ მოცემული $\perp$-მიმდევრობაა, ხოლო $(x_{m_i})$ კი $(i=1,2,\dots)$, მისი ქვემიმდევრობა, რომელიც ფუნდამენტურია. ეს ორი გარემოება ასე შეიძლება ჩავწეროთ: $(x_{m_i})$ ფუნდამენტური მიმდევრობის გარკვეული წევრიდან მოყოლებული $\rho(x_{m_i}, x_{m_j}) < \frac{\varepsilon}{4}$, ხოლო $(x_i)$ მიმდევრობის გარკვეული წევრიდან დაწყებული

$$\left|\rho(x_m, x_{m+p}) - \rho(x_m, x_{m+q})\right| < \frac{\varepsilon}{4},$$

სადაც $p$ და $q$ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვებია, $\varepsilon$ კი წინასწარ აღებული დადებითი რიცხვია.

შევარჩიოთ $m$ და $q$ ისე, რომ რაღაც $m_i$ და $m_j$ ნიშნაკე-ბისათვის შემდეგ ტოლობებს ჰქონდეს ადგილი

$$x_{m_i}=x_m \quad , \quad x_{m_j}=x_{m+q} \, .$$

მივიღებთ შემდეგს

$$\text{(I)} \qquad \left|\rho(x_{m_i}, x_{m_i+p})-\rho(x_{m_i}, x_{m_j})\right|<\frac{\varepsilon}{4} \, ,$$

მაგრამ რაკი $\rho(x_{m_i}, x_{m_j})<\frac{\varepsilon}{4}$ ჩვენი (I) უტოლობიდან მივიღებთ ასეთს

$$\text{(II)} \qquad \rho(x_{m_i}, x_{m_i+p})<\frac{\varepsilon}{2} \, .$$

ავიღოთ ახლა ორი წერტილი $x_{m_i+p'}$ და $x_{m_i+p''}$, სადაც $p'$ და $p''$ სრულიად ნებისმიერი ნატურალური რიცხვებია. გამოვიყენოთ სამკუთხედის აქსიომა:

$$\text{(III)} \qquad \rho(x_{m_i+p'}, x_{m_i+p''}) \leq \rho(x_{m_i+p'}, x_{m_i})+\rho(x_{m_i}, x_{m_i+p''}) \, .$$

(II) უტოლობაში ჯერ ავიღოთ $p=p'$ და შემდეგ $p=p''$, რის გამოც (III) ასე გადაიწერება

$$\rho(x_{m_i+p'}, x_{m_i+p''})<\varepsilon \, .$$

უკანასკნელი უტოლობის გამო $(x_i)$ მიმდევრობა ფუნდამენტური მიმდევრობაა და ამით 3-ე თეორემა დამტკიცებულია.

<u>შედეგი.</u> <u>თუ $\perp$ -მიმდევრობის რაიმე ქვემიმდევრობა კრებადია, $\perp$ -მიმდევრობაც კრებადია და მას იგივე ზღვარი აქვს.</u>

ვთქვათ $x_{m_i} \to x$, როდესაც $i \to \infty$.

სამკუთხედის აქსიომით გვექნება შემდეგი.

$$\rho(x_j, x) \leq \rho(x_j, x_{m_i})+\rho(x_{m_i}, x) \, .$$

მარჯვენა მხარის მეორე წევრი, პირობის თანახმად ნულისაკენ მიისწრაფის, ხოლო 3-ე თეორემის გამო $(x_j)$ ფუნდამენტურია და ამიტომ პირველი წევრიც ნულისაკენ მიისწრაფის. ორივე ამ გარემოების გამო

$$\rho(x_j, x) \to 0$$

როდესაც $i \to \infty$.

შემდეგი დამტკიცებულია.

<u>თეორემა 4.</u> <u>ყოველი $\perp$ -მიმდევრობიდან ისეთი ქვემიმდევრობის გამოყოფა შეიძლება, რომლის ყოველი წერტილის გარკვეული სფეროს ნებისმიერ მიდამოში ამავე მიმდევრობის უსასრულოდ ბევრი წერტილი მოთავსდება.</u>

<u>დამტკიცება.</u> ვთქვათ $(x_i)$ რაიმე $\perp$ -მიმდევრობაა. მაშინ, განმარტების თანახმად მოცემული $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის ისეთი ნატურალური $N(\varepsilon)$ რიცხვი მოიძებნება, რომ უტოლობას

$$|\rho(x_m, x_{m+p}) - \rho(x_m, x_{m+q})| < \varepsilon$$

ადგილი ექნება ყოველთვის, თუ $m \geqslant N(\varepsilon)$, როგორიც არ უნდა იყოს ნატურალური $p$ და $q$ რიცხვები. ფიქსაცია ვუყოთ $m$ და $p$ რიცხვებს. გვექნება

$$\rho(x_m, x_{m+q}) < \rho(x_m, x_{m+p}) + \varepsilon = \tau .$$

ამგვარად $[0, \tau]$ მონაკვეთში მოექცევა $\rho(x_m, x_{m+q})$ რიცხვები, სადაც

$$q = 1, 2, \dots$$

ავილოთ $\rho(x_m, x_{m+q})$ რიცხვთა ერთ-ერთი ზღვრული წერტილი /თუ

ყველა $\rho(x_m, x_{m+q})$ რიცხვი თანაცრილია, ზღვრულ წერტილად თვი-თონ ამ რიცხვს ვიღებთ/. ვთქვათ ესაა $r$. მაშინ $S(x_m, r)$ სფეროს ყოველ მახლობლობაში მოთავსდება ჩვენი $(x_i)$ მიმდევ-რობის უსასრულო ბევრი წერტილი, სახელდობრ:

$$x_{m_1}, x_{m_2}, \dots$$

სადაც $m \leq m_1 \leq m_2 \leq \dots$

თეორემა დამტკიცებულია.

## 2. სივრცეები.



21 კომპაქტურობა და სრულად სისავსე. გავიხსენოთ მეტრი-კული სივრცის კომპაქტურობის განმარტება. კომპაქტური სივრცე ისეთი სივრცეა, რომელშიაც ყოველი უსასრულო მიმდევრობა შეი-ცავს კრებად ქვემიმდევრობას.

ეს ცნება Fréchet-ს შემოღებულია. იგი გამოითქმის არამეტ-რიკული ტერმინებითაც, ტოპოლოგიური სივრცისათვის. ამის გამო განასხვავებენ მეტრიკულ კომპაქტურ სივრცეს და მას კომპაქტს უწოდებენ. რადგან ჩვენ მარტო მეტრიკულ სივრცეებთან გვექნება საქმე, ასეთ გარჩევას არ გავყვებით.

შემოვიღოთ ახლა შემდეგი

განმარტება 2. მეტრიკულ სივრცეს, რომელშიაც მისი წერ-ტილების ყოველი $L$-მიმდევრობა კრებადია, სრულად სავსე სივ-რცე ეწოდება.

დავამტკიცოთ

თეორემა 5. კომპაქტური სივრცე სრულად სავსეა.

ვთქვათ $(x_i)$ რაიმე $L$-მიმდევრობაა კომპაქტური სივრცის წერტილებისა. იგი შეიცავს კრებად ქვემიმდევრობას, ვთქვათ ესაა $(x_{m_i})$ და ამისი ზღვარია $x$, რომელიც მოცემულ კომ-

პაქტურ სივრცეს ეკუთვნის. მე-4-ე თეორემის შედეგის ძალით $(x_i)$ თვითონაც ფუნდამენტურია და იმავე $x$ წერტილისაკენ იკრიბება.

თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. კომპაქტურ სივრცეში ყოველი $\perp$-მიმდევრობა იმავე დროს ფუნდამენტური მიმდევრობაა.

თუ ახლა მხედველობაში მივიღებთ, რომ ყოველი ფუნდამენტური მიმდევრობა იმავე დროს $\perp$-მიმდევრობაც არის, შეგვიძლია შემდეგი დებულება გამოვთქვათ:

თეორემა 6. კომპაქტურ სივრცეში $\perp$-მიმდევრობა და ფუნდამენტური მიმდევრობა ერთი და იგივეა.

212. მე-5 დებულების შებრუნება არ შეიძლება. მოვიყვანოთ მაგალითი სივრცისა, რომელიც თუმც სრულიად სავსეა, მაგრამ კომპაქტური არ არის. ასეთია ევკლიდური წრფე. მართლაც, ყოველი $\perp$-მიმდევრობა შემოსაზღვრულია /თეორემა 1/, შემოსაზღვრულ მიმდევრობაში, რომელიც ევკლიდურ წრფეზე მდებარეობს, Weierstrass-ის თეორემის თანახმად კრებადი ქვემიმდევრობა გამოიყოფა, მაგრამ მაშინ მე-4 თეორემის შედეგის მიხედვით, აღებული $\perp$-მიმდევრობაც კრებადია. ამგვარად ევკლიდური წრფე სრულიად სავსე სივრცეა. როგორც ცნობილია ამავე დროს იგი კომპაქტური არ არის/1.

213. გავიხსენოთ ახლა შემდეგი განმარტებანი:

$x$ წერტილს მოცემული $X$ სიმრავლის ზღვარითი წერტილი ჰქვია, თუ არსებობს ამ სიმრავლის წერტილთა მიმდევრობა,

---

/1. მართლაც, ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობა, რომელიც ევკლიდურ წრფეზე მოთავსდება, არავითარ კრებად ქვემიმდევრობას არ შეიცავს /გავიხსენოთ, რომ უსასრულო შორი წერტილი ევკლიდურ წრფეს არ გააჩნია/.

ვთქვათ $(x_i)$, რომელიც $x$ წერტილისაკენ იკრიბება ე.ი. რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\lim_{i\to\infty} x_i = x$.

რაიმე $M$ სიმრავლის შეკვრა ისეთ $\bar{M}$ სიმრავლეს ეწოდება, რომელიც ტოლია თვითონ $M$ სიმრავლისა და ყველა მისი ზღვარითი წერტილების ჯამისა.

ვთქვათ $R$ რაიმე მეტრიკული სივრცეა, ხოლო $M$ კი მისი წერტილების რაიმე სიმრავლე. თუ $M$ სიმრავლეში წერტილიდან წერტილამდე მანძილად იმავე ავიღებთ, რაც ამ წერტილებისათვის $R$ სივრცეში იყო შემოღებული, $M$ სიმრავლე მეტრიკული სივრცე გახდება. ასე განმარტებულ სივრცეს ფარდობითი სივრცე ეწოდება /Relativraum /, მის მეტრიკას ინდუცირებული, ხოლო მოქმედებას, რომელმაც $M$ სიმრავლე ფარდობით სივრცედ გარდაქმნა, განფარდება ანუ რელატივაცია (Relativierung).

$M$ სიმრავლეს, თუ ფარდობითი $M$ სივრცე კომპაქტურია, ეწოდება კომპაქტური სიმრავლე. ეს იმას ნიშნავს, რომ $M$ სიმრავლის წერტილთა ყოველი უსასრულო მიმდევრობა შეიცავს $M$ სივრცეში კრებად ქვემიმდევრობას. ამ შემთხვევაში ზოგჯერ $M$ სიმრავლეს თავისთავად კომპაქტურს უწოდებენ (in sich kompakte Menge). თუ კი $M$ სიმრავლის წერტილთა ყოველ მიმდევრობაში $R$ სივრცეში კრებადი ქვემიმდევრობა შედის, მაშინ ამბობენ, რომ $M$ სიმრავლე კომპაქტურია $R$ სივრცისადმი (in bezug auf $R$). ცხადია კომპაქტური სიმრავლე იმ სივრცისადმიც კომპაქტურია, რომლის ქვესიმრავლესაც იგი წარმოადგენს. შებრუნებითი მსჯელობა საზოგადოდ მართალი არ იქნება. მაგ. ევკლიდური წრფის რაიმე ინტერვალი წრფისადმი კომპაქტურია, მაგრამ კომპაქტური კი არ არის. სეგმენტი კომპაქტურია ისედაც და ასედაც.

ამის მსგავსადვე ხდება ზოგი სხვა ცნების რელატივაცია, მაგ. შეკვრის, სისავსის და სხვა. შემოვიღოთ ახლა

განმარტება 3. მეტრიკული სივრცის წერტილთა რაიმე სიმრავლე სრულიად სავსეა, თუ ეს სიმრავლე, განხილული როგორც ფარდობითი სივრცე, სრულიად სავსეა.

მეტრიკული სივრცის ისეთ ქვესიმრავლეს, რომელიც თვით ამ სივრცისაგან ერთი მაინც წერტილით განსხვავებულია, მისი მკვეთრი ქვესიმრავლე ანუ მკვეთრი ნაწილი ეწოდება (eine echte Untermenge oder ein echter Teil).

თეორემა 7. $R$ სივრცე სრულიად სავსეა მაშინ და მარტოოდენ მაშინ, როდესაც ყოველი მისი მკვეთრი შეკრული ნაწილი სრულიად სავსეა.

დავამტკიცოთ აუცილებლობა. ვთქვათ $R$ სრულიად სავსე სივრცეა და $\overline{M}\subset R$. მაშინ $\overline{M}$ აგრეთვე სრულიად სავსე უნდა იყოს.

მართლაც, ავიღოთ რაიმე $L$-მიმდევრობა $(x_i)\subset\overline{M}$. რაკი $R$ სრულიად სავსეა, არსებობს $x$ ისეთი, რომ $x_i\to x$. მაგრამ მაშინ $x\in\overline{M}$, როგორც $\overline{M}$ სიმრავლის წერტილთა ზღვარითი წერტილი. მაშ $\overline{M}$ სრულიად სავსეა.

აუცილებლობა დამტკიცებულია.

დავამტკიცოთ საკმარისობა. ვთქვათ $\overline{M}\subset R$ და ყოველი ასეთი $M$ სრულიად სავსეა. მაშინ $R$ აგრეთვე სრულიად სავსე უნდა იყოს.

მართლაც, ავიღოთ რაიმე $L$-მიმდევრობა $(x_i)\subset R$. ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $R-(x_i)$ ერთ წერტილს მაინც შეიცავს.

აღვნიშნოთ ახლა $(x_i)$ მიმდევრობის შეკვრა ასე $\overline{(x_i)}$. ცხადია $\overline{(x_i)}$ არის $R$ სივრცის მკვეთრი ნაწილი, რადგან თუ დავუშვებთ, რომ $\overline{(x_i)}=R$, მაშინ $(x_i)$ მიმდევრობას ორი ზღვარითი

წერტილი მაინც ჰქონია, ეს კი შეუძლებელია, როგორც ეს უშუალოდ ჩანს მე-4 თეორემის შედეგიდან. მაგრამ $\overline{(x_i)}$ ამავე დროს შეკრული სიმრავლეა.

ორი უკანასკნელი გარემოებიდან ის დასკვნა მიიღება, რომ $\overline{(x_i)}$ სრულიად სავსეა და მაშასადამე $(x_i)$ კრებადია. ამგვარად, $R$ სივრცის წერტილთა ყოველი $L$-მიმდევრობა კრებადია და მაშასადამე $R$ სრულიად სავსე სივრცეა.

საკმარისობა და ამით 7-ე თეორემაც დამტკიცებულია.

<u>თეორემა 8.</u> <u>თუ სიმრავლე კომპაქტურია, იგი შემოსაზღვრულიც არის.</u>

დავუშვათ წინააღმდეგი: ვთქვათ $M$ კომპაქტური სიმრავლეა, მაგრამ შემოსაზღვრული არ არის. მაშინ ყოველი ნატურალური $n$ რიცხვისათვის $M$ სიმრავლის ისეთი $x_n$ და $y_n$ ორი წერტილი მოიძებნება, რომელთათვის ადგილი ექნება უტოლობას

$$(1) \qquad \rho(x_n, y_n) > n .$$

ავიღოთ ახლა მიმდევრობანი $(x_i)$ და $(y_i)$. რადგან $M$ კომპაქტური სიმრავლეა, ამ მიმდევრობათაგან კრებადი მიმდევრობების გამოყოფა შეიძლება. ვთქვათ ესაა $(x_{n_k})$ და $(y_{n_k})$, რომელთა ზღვრებია შესაბამად $x$ და $y$. სამკუთხედის აქსიომით

$$(2) \qquad \rho(x_{n_k}, y_{n_k}) \leqslant \rho(x_{n_k}, x) + \rho(x, y) + \rho(y, y_{n_k})$$

ამისი მარცხენა მხარე, როდესაც $k \to \infty$, (1) უტოლობის გამო უსასრულოდ დიდი ხდება, მარჯვენა მხარეში კი პირველი და მესამე წევრი რაგინდ მცირეა, მაშასადამე $\rho(x,y)$ უსასრულოდ დიდია, რაც შეუძლებელია, რადგან $x$ და $y$ ჩვენი სიმრავლის ორი გარკვეული წერტილია. ამიტომ შეუძლებელია ისიც, რომ ადგილი ჰქონდეს (1) უტოლობას.

ამით ჩვენი თეორემა დამტკიცებულია.

ეს თეორემა კლასიკურია და იგი ჩვეულებრივ სულ სხვა გზით მტკიცდება /ჯერ შემოაქვთ სრულიად შემოსაზღვრულობის ცნება, შემდეგ მტკიცდება, რომ სრულიად შემოსაზღვრული შემოსაზღვრულიც არის, მერმე ამტკიცებენ, რომ კომპაქტური სრულიად შემოსაზღვრულია და აქედან თავისთავად ცხადია კომპაქტური სიმრავლის შემოსაზღვრულობაც/. ჩვენ ვიძლევით მის უშუალო დამტკიცებას. მე-8 თეორემის ერთგვარ შებრუნებას წარმოადგენს

<u>თეორემა 9.</u> <u>სრულიად სავსე სივრცის წერტილთა შეკრული სიმრავლე მაშინ და მარტოოდენ მაშინ არის კომპაქტური, როდესაც ეს სიმრავლე შემოსაზღვრულია.</u>

წინა თეორემის ძალით, თუ სიმრავლე კომპაქტურია, იგი შემოსაზღვრულიც არის. ამიტომ საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ თუ სრულიად სავსე სივრცის შეკრული ქვესიმრავლე შემოსაზღვრულია, იგი კომპაქტურიცაა და ამით ჩვენი თეორემა დამტკიცებული იქნება.

ვთქვათ $M$ აღნიშნული სიმრავლეა. რაკი $M$ შემოსაზღვრულია, მისი წერტილების ყოველი მიმდევრობაც შემოსაზღვრულია. მე-4 თეორემის ძალით ეს მიმდევრობა რაიმე $L$-მიმდევრობას შეიცავს და რაკი მოცემული სივრცე სრულიად სავსეა, ეს $L$-მიმდევრობა ჩვენ სივრცეში კრებადია. მაგრამ $M$ შეკრულია, მაშასადამე აღებული $L$-მიმდევრობის ზღვარი $M$ სიმრავლეს ეკუთვნის. ამგვარად $M$ სიმრავლის წერტილთა ყოველი უსასრულო მიმდევრობა შეიცავს ამავე სიმრავლეში კრებად ქვემიმდევრობას, ამიტომ $M$ კომპაქტურია.

თეორემა 10. მეტრიკული სივრცე სრულიად სავსეა მაშინ და მარტოოდენ მაშინ, როდესაც მისი წერტილების ყოველი შემოსაზღვრული სიმრავლე ამ სივრცის მიმართ კომპაქტურია.

ვთქვათ $R$ -მეტრიკული სივრცეა, $M$ კი მისი რაიმე შემოსაზღვრული ქვესიმრავლე.

დავამტკიცოთ აუცილებლობა. ვთქვათ $R$ სრულიად სავსეა, ხოლო $M$ კი $R$ სივრცის წერტილთა ნებისმიერი შემოსაზღვრული სიმრავლეა. მაშინ ყოველი $M$ იმავე $R$ სივრცის მიმართ კომპაქტური უნდა იყოს. მართლაც წინა თეორემის ძალით $\overline{M}$ კომპაქტურია და მაშასადამე კომპაქტურია $M$ სიმრავლეც მოცემული $R$ სივრცის მიმართ.

აუცილებლობა დამტკიცებულია.

დავამტკიცოთ ახლა პირობის საკმარისობა.

ვთქვათ $R$ სივრცის წერტილთა ნებისმიერი შემოსაზღვრული $M$ სიმრავლე კომპაქტურია $R$ სივრცის მიმართ,, მაშინ $R$ [მართლაც] სრულიად სავსე უნდა იყოს. მართლაც, ავიღოთ რაიმე $L$-მიმდევრობა $R$ სიმრავლის წერტილებისა. $L$ შემოსაზღვრულია /თეორემა 1/ და ამიტომ მისი ელემენტები რაიმე შემოსაზღვრულ სიმრავლეს შეადგენს. ესაა რალაც $M$ სიმრავლე და რაკი მოცემულობის თანახმად უკანასკნელი კომპაქტურია $R$ სივრცის მიმართ, ამიტომ $L$ -მიმდევრობა, რომელიც $M$ სიმრავლეში შედის, $R$ სივრცეში კრებადი ქვემიმდევრობის შემცველია. მაგრამ ასეთ შემთხვევაში (მე-3-ე თეორემის შედეგით) თვითონ $L$ -მიმდევრობაც კრებადია.

უკანასკნელი გარემოების გამო $R$ სივრცე სრულიად სავსეა. ამით საკმარისობა და, მაშასადამე, მე-10 თეორემაც დამტკიცებულია. ეს ეს არის დამტკიცებული თეორემა საშუალებას გვაძლევს შემდეგი დებულება ჩამოვაყალიბოთ:

განმარტება. სრულიად სავსე სივრცე ისეთ მეტრიკულ სივრცეს ეწოდება, რომლის წერტილთა ყოველი შემოსაზღვრული სიმრავლე კომპაქტურია ამავე სივრცის მიმართ.

ადვილად შევამჩნევთ, რომ მე-10 თეორემისათვის ასეთი სახეც შეიძლებოდა მიგვეცა:

თეორემა 10'. მეტრიკული სივრცე მაშინ და მარტოოდენ მაშინ არის სრულიად სავსე, როდესაც მისი წერტილების ყოველი შეკრული შემოსაზღვრული სიმრავლე კომპაქტურია.

211. ბუნებრივად ისმება საკითხი: როგორია აუცილებელი და საკმარისი პირობები მეტრიკული სივრცის კომპაქტურობისა?

ამ საკითხზე არსებობს შემდეგი კლასიკური თეორემა (Hausdorff): მეტრიკული სივრცე კომპაქტურია მაშინ და მარტოოდენ მაშინ, როდესაც იგი სრულიად შემოსაზღვრული და სავსეა. ეს თეორემა იმავე დროს მეტრიკული სივრცის კომპაქტურობის კრიტერიუმსაც წარმოადგენს.

დავამტკიცოთ თეორემა, რომელიც ამ სივრცის კომპაქტურობის სრულიად ახალ კრიტერიუმს გვაძლევს. ესაა

თეორემა 11. მეტრიკული სივრცე კომპაქტურია მაშინ და მარტოოდენ მაშინ, როდესაც იგი ერთდროულად შემოსაზღვრულიცაა და სრულიად სავსეც.

დავამტკიცოთ აუცილებლობა. ვთქვათ სივრცე კომპაქტურია. მაშინ იგი შემოსაზღვრული უნდა იყოს და სრულიად სავსეც.

მართლაც, კომპაქტური სივრცე შემოსაზღვრულია /თეორემა 8/ და ამავე დროს სრულიად სავსეა /თეორემა მე-5/.

აუცილებლობა დამტკიცებულია.

დავამტკიცოთ საკმარისობა. ვთქვათ სივრცე შემოსაზღვრული და სრულიად სავსეა. მაშინ იგი კომპაქტური უნდა იყოს.

მართლაც, განვიხილოთ მოცემული სივრცის ყველა წერტილე-ბის სიმრავლე. ეს სიმრავლე შემოსაზღვრულია, ამიტომ იგი, როგორც სრულიად სავსე სივრცის შემოსაზღვრული სიმრავლე კომ-პაქტურია ამავე სივრცის მიმართ /თეორემა მე-9/, რაც გან-ფარდების თვითონ ცნების თანახმად იმას ნიშნავს, რომ კომ-პაქტურია მოცემული სივრცე. საკმარისობა და ამით მე-11 თეორემაც დამტკიცებულია.

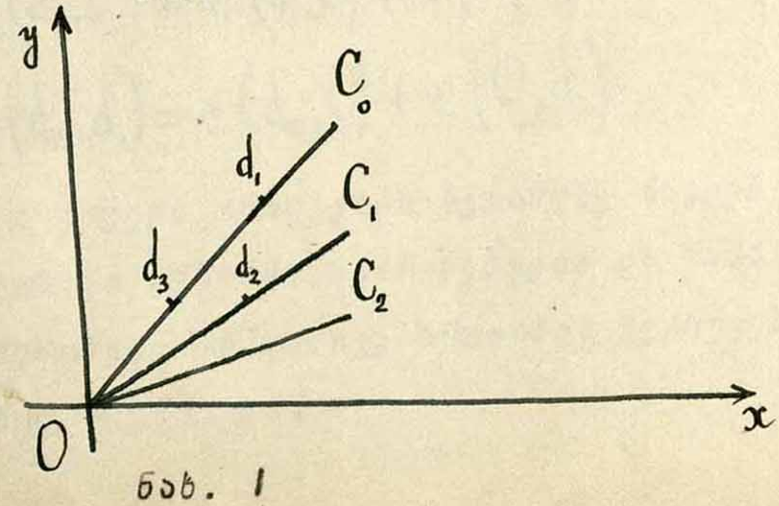
22. <u>სისავსე და სრულიად სისავსე</u>. ადვილად დავამტკიცებთ, რომ სამართლიანია შემდეგი

<u>თეორემა 12.</u> <u>სრულიად სავსე სივრცე იმავე დროს სავსე სივრცეა.</u>

მართლაც, რაკი ყოველი ფუნდამენტური მიმდევრობა იმავე დროს $\perp$-მიმდევრობაც არის (III) და ეს კი კრებადია, რად-გან მოცემული სივრცე სრულიად სავსეა, ყოველი ფუნდამენტური მიმდევრობაც კრებადი იქნება და მაშასადამე სივრცე სავსე ყოფილა.

ამ დებულების შებრუნება არ შეიძლება. ამის დასამტკიცებ-ლად ისეთი სივრცე ავაგოთ, რომელიც თუმც სავსე სივრცეს წარმოადგენს, მაგრამ სრულიად სავსე კი არ არის.

<u>მაგალითი.</u> ევკლიდურ სიბრტყეში ავიღოთ კოორდინატთა სათავე $O(0,0)$ და მიმდევრობა შემდეგი წერ-ტილებისა $C_0(1,1), C_1(1,\frac{1}{2}), \ldots, C_k(1,\frac{1}{2^k}), \ldots$




ნახ. 1

შევაერთოთ $O$ წერტილი $C_i$ წერტილებთან $OC_i$ სხივებით ($i=1,2,\ldots$). განვიხილოთ სიმრავლე ყველა იმ წერტილებისა, რომლებიც $OC_i$ ($i=1,2,\ldots$) სხივებზე ძევს. შემოვიღოთ მეტრიკა: მანძილი ორ წერტილს შორის წარმოადგენს უმოკლეს განუწყვეტელ გზას, რომელიც წერტილიდან წერტილამდე $OC_i$ ნაკვეთების სიმრავლეშიგადის. მაგ. $\rho(d_1,d_2)=e(d_1,O)+e(O,d_2)$, $\rho(d_1,d_3)=e(d_1,d_3)$; აქ $e$ ევკლიდურ მანძილს ნიშნავს.

ჩვენი სივრცე მეტრიკულია. მართლაც იგივობისა და უკუქცევის აქსიომათა შესრულება უშუალოდ ჩანს, დავამტკიცოთ სამკუთხედის აქსიომის სამართლიანობაც. ავიღოთ ჩვენი სივრცის რაიმე სამი წერტილი $d_1, d_2, d_3$. სამი შემთხვევაა შესაძლო:

1. სამივე წერტილი ერთ სხივზე თავსდება.
2. სამივე წერტილი ერთზე არა, მაგრამ ორ სხივზე თავსდება.
3. სამი წერტილი ერთსა და ორზე არა, მაგრამ სამ სხივზეა მოთავსებული.

1 და 2 შემთხვევაში სამივე წერტილი მოთავსებულია წრფის სეგმენტის იზომეტრიულ ფიგურაზე და ამ იზომეტრიის გამო სამკუთხედის აქსიომა შესრულებულია: მე-3 შემთხვევაში ჩვენი მეტრიკის განმარტების თანახმად გვექნება ტოლობანი

$$\rho(d_1,d_2)=e(d_1,O)+e(O,d_2),$$
$$\rho(d_1,d_3)=e(d_1,O)+e(O,d_3),$$
$$\rho(d_2,d_3)=e(d_2,O)+e(O,d_3).$$

ამ სამიდან ყოველი ორის ჯამი მესამეზე ნაკლები არ არის, ამიტომ სამკუთხედი აქსიომა შესრულებულია და მაშასადამე ყველა განხილულ შემთხვევაში სამივე აქსიომის შესრულების გამო აღებული სივრცე მეტრიკულია.

ეს სივრცე სავსე სივრცეა. ავიღოთ ჩვენი სივრცის წერტილთა რაიმე ფუნდამენტური მიმდევრობა. მაშინ ორი შემთხვევა წარმოგვიდგება:

1. არსებობს გარკვეული სხივი, რომელზედაც მოცემული მიმდევრობის უსასრულოდ ბევრი წერტილი მოთავსდება.

2. ერთი ისეთი სხივი არ არსებობს, რომელზედაც ჩვენი მიმდევრობის წერტილთა უსასრულო რიცხვია მოთავსებული.

შემთხვევა 1. სხივი სავსე სიმრავლეა საკუთარი წერტილებისა, ამ სხივზე მოთავსებული წერტილები ფუნდამენტური მიმდევრობისა დალაგდება ნიშანთა უმცროს-უფროსობის მიხედვით და თვითონაც ფუნდამენტურ მიმდევრობას წარმოადგენს და რაკი სხივი სავსე სიმრავლეა წერტილებისა, ეს ფუნდამენტური მიმდევრობა კრებადია, ამიტომ კრებადია მოცემული ფუნდამენტური მიმდევრობა და მას იგივე ზღვარი აქვს.

შემთხვევა 2. მოცემული ფუნდამენტური მიმდევრობა ცხადია სხივთა სასრულო რიცხვზე არ თავსდება, რადგან მაშინ ერთ ერთ სხივზე მაინც ამ მიმდევრობის უსასრულოდ ბევრი წერტილი მოთავსდებოდა და საქმე 1-ლ შემთხვევასთან გვექნებოდა. ამიტომ ვიგულისხმოთ, რომ მოცემული ფუნდამენტური მიმდევრობა უსასრულოდ ბევრ სხივზე დალაგდა. თითო ასეთ სხივზე ავიღოთ თითო წერტილი ჩვენი მიმდევრობისა. მაშინ მანძილისათვის გვექნება

$$\rho(d_i, d_j) = e(d_i, O) + e(O, d_j).$$

ეს ჯამი ნულისაკენ მარცოოდენ მაშინ მიისწრაფის, როდესაც ორივე შესაკრები აგრეთვე ნულისაკენ იკრიბება ეს გარემოება კი იმის მაჩვენებელია, რომ $d_i$ წერტილი $(i=1,2,\dots)$ გარკვეული გზით მიისწრაფის $O$ წერტილისაკენ; ცხადია ჩვენი ფუნდამენტური მიმდევრობაც კრებადია და მისი ზღვარი იგივე $O$ წერტილია.

ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ ორივე შესაძლო შემთხვევაში აღებული ფუნდამენტური მიმდევრობა კრებადია.

აგებული სივრცე სავსე ყოფილა.

ეს სივრცე სრულიად სავსე არ არის. ავიღოთ ამ სივრცის წერტილთა შემდეგი მიმდევრობა

$$C_0, C_1, C_2, \ldots$$

ეს $L$ -მიმდევრობაა. მართლაც

$$\rho(C_m, C_{m+p}) = \rho(C_m, 0) + \rho(0, C_{m+p}) = \rho(C_m, 0) + \sqrt{1 + \frac{1}{2^{2(m+p)}}}$$

$$\rho(C_m, C_{m+q}) = \rho(C_m, 0) + \sqrt{1 + \frac{1}{2^{2(m+q)}}}$$

$$\rho(C_m, C_{m+p}) - \rho(C_m, C_{m+q}) = \sqrt{1 + \frac{1}{2^{2(m+p)}}} - \sqrt{1 + \frac{1}{2^{2(m+q)}}}$$

მარჯვენა მხარე ნულთან მიისწრაფის, როდესაც $m \to \infty$, მაშასადამე ასევე

$$\rho(C_m, C_{m+p}) - \rho(C_m, C_{m+q}) \to 0.$$

ამგვარად $(C_i)$ მიმდევრობა $L$ -მიმდევრობაა, ამავე დროს კი ეს მიმდევრობა კრებადი არ არის:

$$\lim_{m \to \infty} \rho(C_m, C_{m+p}) = 2.$$

მაგალითები ისეთი მეტრიკული სივრცეებისა, რომლებიც თუმც სავსეა, მაგრამ სრულიად სავსე კი არაა, აქამდე ცნობილ სივრცეთა შორისაც მოიპოვება. ასეთებია მაგ. Hilbert -ისა და გარკვეული პირობით Baire -ის სივრცეც (ამის შესახებ დაწვრილებით იხ. 25)

221. ზევით დამტკიცებული მე-3, მე-7 თეორემები და მათი შებრუნების შეუძლებლობა. შემდეგი ლოგიკური სქემის სამართლიანობის მაჩვენებელია:

კომპაქტური $\longrightarrow$ სრულიად სავსე $\longrightarrow$ სავსე.

ისარი მოგეწულია კერძოობითიდან ზოგადისაკენ.

## 23. ლოკალური კომპაქტურობა და სრულიად სისავსე.

231. შემოვიღოთ ახლა ზოგი ცნება, რომლებსაც აქვე ექნება გამოყენება. გავიხსენოთ ლოკალური კომპაქტურობის ცნება.

მეტრიკულ სივრცეს ლოკალურად კომპაქტური სივრცე ეწოდება, თუ ამ სივრცის ყოველ წერტილს ისეთი მიდამო გააჩნია, რომლის შეკვრა კომპაქტურია.

შემოვიღოთ ახლა შემდეგი

განმარტება 3. რაიმე $x$ წერტილს ლოკალური კომპაქტურობის ნეგატიური წერტილი ვუწოდოთ, თუ ყოველი დადებითი $\varepsilon$ რიცხვისათვის ისეთი $\delta$ რიცხვი მოიძებნება $(0<\delta<\varepsilon)$, რომ $S(x,\varepsilon)$ სფეროს $\delta$-მიდამო შეიცავს უსასრულო მიმდევრობას წერტილებისა, რომლის არც ერთი ქვემიმდევრობა კრებადი არ არის.

აღნიშნული თვისების წერტილს შემდეგში მოკლედ ნეგატიურ წერტილად დავასახელებთ.

ნეგატიურ წერტილს ცხადია არ შეიძლება წარმოადგენდეს იზოლირებული წერტილი მეტრიკული სივრცისა.

232. დავამტკიცოთ ახლა თეორემა, რომელიც ლოკალურად კომპაქტური სივრცის სტრუქტურაზე ერთგვარ წარმოდგენას მოგვცემს.

თეორემა 14. მეტრიკული სივრცე მაშინ და მარტოოდენ მაშინ არის ლოკალურად კომპაქტური, თუ იგი არც ერთ ნეგატიურ წერტილს არ შეიცავს.

ამ თეორემის დამტკიცება ორი ნაწილისაგან შედგება:

1. თუ სივრცე ლოკალურად კომპაქტური არ არის, იგი ნეგატიურ წერტილს შეიცავს.

2. თუ სივრცე ნეგატიური წერტილის შემცველია, იგი ლოკალურად კომპაქტური არ იქნება.

დავამტკიცოთ 1. რადგან სივრცე ლოკალურად კომპაქტური არ არის, არსებობს მისი ერთი წერტილი მაინც, რომლის არც ერთი მიდამოს შეკვრა კომპაქტური არ არის. ვთქვათ ესაა $x$, ხოლო მიმდევრობა, რომლის არც ერთი ქვემიმდევრობა არ იკრიბება და $x$ წერტილის $\varepsilon$-მიდამოშია $(x_i)$ იყოს /აქაც და შემდეგშიაც $\varepsilon$-მახლობლობა აღნიშნავს სფეროს/. ავაგოთ მიდამოთა მიმდევრობა:

$$S\left(x,\frac{\varepsilon}{2}\right), S\left(x,\frac{\varepsilon}{2^2}\right),\dots, S\left(x,\frac{\varepsilon}{2^k}\right),\dots$$

ყოველი ამათგანი რომ ჩვენი $(x_i)$ მიმდევრობის წერტილს შეიცავდეს, მაშინ $(x_i)$ მიმდევრობის რაიმე ქვემიმდევრობა იარსებებდა, რომელიც $x$ წერტილისაკენ იკრიბება, ეს კი სიმართლეს არ შეესაბამება. ამგვარად, რომელიღაც $S\left(x,\frac{\varepsilon}{2^k}\right)$ სფეროდან მოყოლებული უკვე არც ერთი სფერო $(x_i)$ მიმდევრობის არც ერთ წერტილს არ შეიცავს. ამგვარად $\frac{\varepsilon}{2^k}\leq\rho(x,x_i)<\varepsilon$, რომელიც არ უნდა იყოს $i$. ყველა $\rho(x,x_i)$ რიცხვი წრფის სასრულო მონაკვეთში მოექცა და მაშასადამე ასეთ რიცხვთა სიმრავლეს ერთი მაინც ზღვარითი წერტილი აქვს [თუ ყველა ეს რიცხვი თანატოლია, ზღვრული წერტილია $\rho(x,x_i)$]. ავილოთ ერთი ერთი ზღვრული წერტილი, ვთქვათ $\mu$, ისე, რომ $\frac{\varepsilon}{2^k}\leq\mu\leq\varepsilon$. ამგვარად უტოლობა $|\rho(x,x_i)-\mu|<\delta$ სამართლიანია უსასრულოდ

ბევრი $x_i$ წერტილისათვის როგორიც არ უნდა იყოს $\delta$ . აღნიშნული გარემოება გეომეტრიულად იმას ნიშნავს, რომ $x_i$ წერტილთა ეს სიმრავლე $S(x,r)$ სფეროს $\delta$ -მიდამოში მოექცა. მაგრამ $\varepsilon$ ნებისმიერია ე.ი. როგორიც არ უნდა იყოს $\varepsilon>0$, მოიძებნება ისეთი $S(x,r)$ სფერო /აქ $0<r\le\varepsilon$ /, რომლის ყოველ მიდამოში ისეთი მიმდევრობა იმყოფება, არც ერთ კრებად ქვემიმდევრობას, რომ არ შეიცავს, ეს კი იმის მაჩვენებელია, რომ $x$ ნეგატივური წერტილია.

<u>დავამტკიცოთ 2.</u> ავიღოთ ნეგატივური $x$ წერტილი. დავუშვათ, რომ არსებობს მისი რაღაც მიდამო, რომლის შეკვრა კომპაქტურია. რადგან სივრცე მეტრიკულია, იგი როგორც ცნობილია, შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც მიდამოებრივი სივრცე, რომლის მიდამოებს სფეროები წარმოადგენს . ვთქვათ $x$ წერტილის სწორედ ის მიდამო, რომლის შეკვრა კომპაქტურია, არის $S(x,r)$ სფერო.

ახლა ავიღოთ $S(x,\varepsilon)$ სფერო, რომლის $\delta$ -მიდამოში ისეთი მიმდევრობა იმყოფება, არც ერთ კრებად ქვემიმდევრობას რომ არ შეიცავს. იყოს $\varepsilon\le\frac{r}{2}$ , მაშინ $S(x,\varepsilon)$ სფეროს $\delta$ -მიდამო, რომელიც $s$ ასოთი აღვნიშნოთ, შედის $S(x,r)$ სფეროში. მართლაც ეს მიდამო იმ $y$ წერტილებისაგან შედგება შემდეგ პირობას რომ აკმაყოფილებს

$$|\rho(x,y)-\varepsilon|<\delta$$

ანუ პირობას

$$\rho(x,y)<\delta+\varepsilon.$$

მაგრამ $\delta<\varepsilon$, $\varepsilon\le\frac{r}{2}$, ამიტომ $\delta+\varepsilon<\frac{r}{2}+\frac{r}{2}=r$ და მაშასადამე $\rho(x,y)<r$. ამგვარად $s\subset S(x,r)$, მაგრამ რაკი $\overline{S(x,r)}$ დათქმულობის თანახმად კომპაქტურია, $s$ მიდამო არ შეიცავს ისეთ მიმდევრობას, რომლის არც ერთი ქვემიმდევრობა კრებადი არ არის, ეს კი მოცემულობას ეწინააღმდეგება. ამიტომ $\overline{S(x,r)}$ კომპაქტური არ არის.

ამით ჩვენი თეორემის მე-2 ნაწილიც და თვითონ თეორემაც დამტკიცებულია.

ახლა შეგვიძლია ლოკალური კომპაქტურობის ჩვეულებრივი განმარტების შემდეგი მოდიფიკაცია შემოვიღოთ:

განმარტება 4. მეტრიკულ სივრცეს ლოკალურად კომპაქტური სივრცე ეწოდება, თუ მისი არც ერთი წერტილი ნეგაციევური არ არის.

თეორემა 15. სრულიად სავსე სივრცე ლოკალურად კომპაქტურია.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ ეს სივრცე ლოკალურად კომპაქტური არ არის. მაშინ მისი რაღაც $x$ წერტილი ნეგაციევური წერტილია და ნებისმიერი, მაგ. $S(x,r)$ სფეროს საკმაოდ მცირე მიდამოში იმყოფება რაიმე $(x_i)$ მიმდევრობა (12), რომლის არც ერთ კრებად ქვემიმდევრობას არ შეიცავს. დავამტკიცოთ, რომ აქედან შეგვიძლია $L$-მიმდევრობა გამოვყოთ. ამით დამტკიცებული იქნება, რომ $x$ ნეგაციევური არ არის და რომ მოცემული სივრცე ლოკალურად კომპაქტური ყოფილა.

მართლაც, ავიღოთ გარკვეული $\varepsilon>0$. მაშინ

$$\rho(x_i,x_j)\le\rho(x_i,x)+\rho(x,x_j)<2(r+\varepsilon).$$

რაკი $\rho(x_i,x_j)$ რიცხვების სიმრავლე და მაშასადამე $\rho(x,x_j)$ რიცხვებისაც შემოსაზღვრულია, უკანასკნელს ერთი მაინც ზღვა

რითი წერტილი ექნება. ვთქვათ ესაა $r_1$; $r_1 \le 2(r+\varepsilon)$. ავიღოთ $\frac{\varepsilon}{2}$. მაშინ იარსებებს $(x_i)$ მიმდევრობის ქვემიმდევრობა, ვთქვათ $\left(x_i^{(1)}\right)$, რომლისათვისაც შესრულდება უტოლობანი

$$\left|\rho\left(x_1, x_i^{(1)}\right) - r_1\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left|\rho\left(x_1, x_j^{(1)}\right) - r_1\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

აქედან მივიღებთ შემდეგს

$$\left|\rho\left(x_1, x_i^{(1)}\right) - \rho\left(x_1, x_j^{(1)}\right)\right| < \varepsilon,$$

სადაც $i, j$ ნატურალური რიცხვებია. ცხადია, რომ რადგან $\left(x_i^{(1)}\right) \subset (x_i)$ აქაც გვექნება

$$\rho\left(x_i^{(1)}, x_j^{(1)}\right) < 2(r+\varepsilon),$$

ამიტომ $\rho\left(x_1^{(1)}, x_i^{(1)}\right)$ რიცხვთა სიმრავლეს ერთი მაინც ზღვარითი წერტილი აქვს. ვთქვათ ესაა $r_2$. ავიღოთ $\frac{\varepsilon}{2^2}$, მაშინ იარსებებს $\left(x_i^{(1)}\right)$ მიმდევრობის ქვემიმდევრობა, ვთქვათ $\left(x_i^{(2)}\right)$, რომლისათვისაც შესრულდება უტოლობანი

$$\left|\rho\left(x_1^{(1)}, x_i^{(2)}\right) - r_2\right| < \frac{\varepsilon}{2^2},$$

$$\left|\rho\left(x_1^{(1)}, x_j^{(2)}\right) - r_2\right| < \frac{\varepsilon}{2^2}.$$

აქედან მივიღებთ შემდეგს

$$\left|\rho\left(x_1^{(1)}, x_i^{(2)}\right) - \rho\left(x_1^{(1)}, x_j^{(2)}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

სადაც $i$ და $j$ ნატურალური რიცხვებია. განვაგრძოთ ასე შემდეგ.

განვიხილოთ მიმდევრობა

(ა) $\qquad x_1, x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots$

რომელიც $(x_i)$ მიმდევრობის ქვემიმდევრობაა. ზემომოყვანილ უტოლობათა საფუძველზე აქ შემდეგს მივიღებთ

$$\left|\rho\left(x_1^{(m)}, x_1^{(m+p)}\right) - \rho\left(x_1^{(m)}, x_1^{(m+q)}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2^m},$$

რაიც იმის მაჩვენებელია, რომ (ა) წარმოადგენს $L$-მიმდევრობას და რაკი სივრცე სრულიად სავსეა, (ა) კრებადია, ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $x$ ნეგაცივური წერტილი არ არის და მაშასადამე ჩვენი სივრცე ლოკალურად კომპაქტური ყოფილა.

თეორემა დამტკიცებულია.

233. ჩვენი თეორემის შებრუნება არ შეიძლება. მაგალითს ისეთი სივრცისა, რომელიც ლოკალურად კომპაქტურია, მაგრამ სრულიად სავსე არ არის /და მეტიც კიდევ, სავსეც კი არ არის/ წარმოადგენს ევკლიდური სფერო. ამგვარად ლოკალური კომპაქტურობის ცნება სრულიად სისავსისაზე უფრო ვიწროა.

ანალოგიური მიმართება ლოკალურ კომპაქტურობასა და ჩვეულებრივ სისავსეს შორის უკვე აღარ არსებობს. ზემონათქვამს თუ მხედველობაში მივიღებთ და ისეთი სივრცის მაგალითს მოვიყვანთ, რომელიც სავსეა, მაგრამ ლოკალურად კომპაქტური არ არის, ჩვენი მოსაზრება დამტკიცებული იქნება. ასეთი კი Hilbert-ის სივრცის ერთეული რადიუსის შეკრული სფერო კოორდინატთა სათავის გარს. აქ ნეგაცივური წერტილი თვით კოორდინატთა სათავეა.

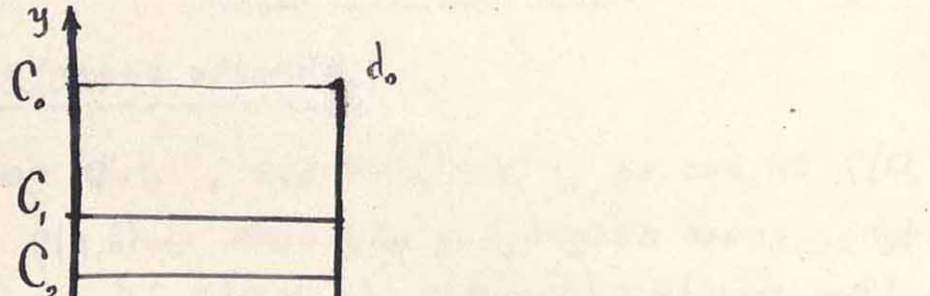
ამგვარად ვღებულობთ შემდეგ ლოგიკურ სქემას /ისარი მოვებულია კერძოობითიდან ზოგადისაკენ/.

$$\text{კომპაქტური} \longrightarrow \text{სრულიად სავსე} \begin{cases} \nearrow \text{სავსე} \\ \searrow \text{ლოკალურად კომპაქტური.} \end{cases}$$

## 24. სრულიად სისავსე, სისავსე და ლოკალური კომპაქტურობა.

241. ბუნებრივად იბმება საკითხი: რაკი სრულიად სავსე სივრცე ერთდროულად ლოკალურად კომპაქტურიცაა და სავსეც, უკანასკნელი ორი პირობა ხომ არ არის იმავე დროს საკმარისიც იმისათვის, რომ მეტრიკული სივრცე სრულიად სავსე იყოს? მე ავაგებ ნეგატიურ მაგალითს ე.ი. დავამტკიცებ, რომ არსებობს მეტრიკული სივრცე, რომელიც თუმც სავსეა და ლოკალურად კომპაქტური, მაგრამ სრულიად სავსე კი არ არის.

მაგალითი. განვიხილოთ სიმრავლე შედგენილი ევკლიდური სიბრტყის $C_0(0,1), C_1(0,\frac{1}{2}), \dots, C_k(0,\frac{1}{2^k}), \dots$ წერტილებისა და ამას გარდა იმ $d_0d_1$ სეგმენტის ყველა წერტილებისაგან, რომლის თავბოლო წერტილებია $d_1(1,0)$, $d_0(1,1)$.




ჩვენი სიმრავლის ყოველი $a$ წერტილი $d_0d_1$ სეგმენტზე $x$-თა ღერძის პარალელურად დავაგეგმილოთ და გეგმილი ასე აღვნიშნოთ გეგ$a$. ცხადია, სეგმენტის რაიმე წერტილის გეგმილი თვით იგივე წერტილია.

შემოვიღოთ ჩვენი სიმრავლის ყოველი $a$ და $b$ წერტილისათვის ასეთი $\mathcal{D}(a,b)$ ფუნქცია:

$$\mathcal{D}(a,b) = \begin{cases} 0, & \text{როდესაც} \quad a=b, \\ 1, & \text{როდესაც} \quad a\neq b. \end{cases}$$

ეს ფუნქცია სიმეტრიულია $a$ და $b$ წერტილების მიმართ, ე.ი. $\mathcal{D}(a,b)=\mathcal{D}(b,a)$. ევკლიდური მანძილი $a$ წერტილიდან $b$ -მდე ასე აღვნიშნოთ $e(a,b)$.

ახლა ჩვენი სიმრავლის წერტილთა ყოველ $a,b$ წყვილს შევუსაბამოთ გარკვეული $\rho(a,b)$ ნამდვილი რიცხვი, რომელიც უარყოფითი არ არის და შემდეგნაირადაა განმარტებული:

$$\rho(a,b) = \mathcal{D}(a,b)\Big[e(a,\text{პრ}\,a) + e(b,\text{პრ}\,b) + e(\text{პრ}\,a,\text{პრ}\,b)\Big].$$

მივიღეთ რაღაც სივრცე, რომელსაც $M$ სივრცე დავარქვათ. დავამტკიცოთ, რომ $M$ სივრცე მეტრიკულია.

I. უკუქცევის აქსიომა.

თუ $a=b$, მაშინ $\mathcal{D}=0$ და ამიტომ $\rho(a,b)=0$

თუკი $\rho(a,b)=0$, ორში ერთ გარემოებას მაინც ექნება ადგილი:

ა/ $\mathcal{D}(a,b)=0$ ბ/ $e(a,\text{პრ}\,a)+e(b,\text{პრ}\,b)+e(\text{პრ}\,a,\text{პრ}\,b)=0$.

ა/ შემთხვევაში $\mathcal{D}(a,b)$ ფუნქციის განმარტებით $a=b$;

ბ/ შემთხვევაში გვექნება $e(a,\text{პრ}\,a)=e(b,\text{პრ}\,b)=e(\text{პრ}\,a,\text{პრ}\,b)=0$ და ევკლიდური მეტრიკის გამო $a=\text{პრ}\,a$, $b=\text{პრ}\,b$, $\text{პრ}\,a=\text{პრ}\,b$, საიდანაც $a=b$.

ამგვარად დავამტკიცეთ, $\rho(a,b)=0$ მაშინ და მარტოოდენ მაშინ, როდესაც $a=b$. უკუქცევის აქსიომა შესრულებულია.

II. სიმეტრიის აქსიომა.

განმარტების თანახმად $\mathcal{D}$ ფუნქცია სიმეტრიულია $a$ და $b$ წერტილების მიმართ, ევკლიდური $e(a,\text{პრ}\,a)$, $e(b,\text{პრ}\,b)$, $e(\text{პრ}\,a,\text{პრ}\,b)$

მანძილებიც და მაშასადამე ამ მანძილების ჯამიც ასევე სიმეტრიულია, ამიტომ $\rho(a, b)$ როგორც $a$ და $b$ წერტილების მიმართ სიმეტრიული ორი ფუნქციის ნამრავლი ამავე წერტილების სიმეტრიული ფუნქციაა ე.ი.

$$\rho(a,b) = \rho(b,a).$$

სიმეტრიის აქსიომა შესრულებულია.

III. სამკუთხედის აქსიომა.

ავიღოთ $M$ სივრცის სამი წერტილი $a, b$ და $c$. ორი შემთხვევა წარმოგვიდგება:

ა) მოცემულ სამ წერტილში ერთმანეთის თანხვდენილი წერტილებიც ურევია.

ბ) მოცემული სამი წერტილი წყვილ-წყვილად სხვადასხვაა.

შემთხვევა ა).

ვთქვათ თანხვდენილია სამივე წერტილი $a=b=c$. მაშინ $\rho(a,b)=\rho(a,c)=\rho(b,c)=0$ და სამკუთხედის აქსიომა სრულდება ტოლობის სახით.

ვთქვათ ახლა ორი წერტილია თანხვდენილი, მესამე კი განსხვავებულია, $a=b\neq c$. მაშინ $\rho(a,b)=0$, $\rho(a,c)=\rho(b,c)$. აქ სამი $\rho(a,b), \rho(a,c), \rho(b,c)$ რიცხვიდან არც ერთი არ აღემატება ორი დანარჩენის ჯამს. ამგვარად აქაც სამკუთხედის აქსიომა შესრულებულია.

ა) შემთხვევაში სამკუთხედის აქსიომის სამართლიანობა დამტკიცებულია.

შემთხვევა ბ).

რაკი სამი მოცემული წერტილიდან ყოველი ორი სხვადასხვაა, გვექნება

$$\rho(a,b) = \rho(a,c) = \rho(b,c) = 1.$$

მანძილის განმარტება შემდეგს მოგვცემს:

$$\rho(a,b) = e(a, \text{ჯყ}a) + e(b, \text{ჯყ}b) + e(\text{ჯყ}a, \text{ჯყ}b),$$

$$\rho(a,c) = e(a, \text{ჯყ}a) + e(c, \text{ჯყ}c) + e(\text{ჯყ}a, \text{ჯყ}c),$$

$$\rho(b,c) = e(b, \text{ჯყ}b) + e(c, \text{ჯყ}c) + e(\text{ჯყ}b, \text{ჯყ}c).$$

შევადაროთ ერთმანეთს სამი მარჯვენა ჯამი. ყოველი მათგანის ორი პირველი წევრი ორ დანარჩენ ჯამში თითო თითოდ შედის, მესამე წევრი კი ორი მესამე წევრის ჯამს არ აღემატება; ამიტომ არც ერთი მარჯვენა ჯამი ორ დანარჩენ მარჯვენა ჯამზე მეტი არ არის და მაშასადამე ამასვე ადგილი ექნება $\rho$ მანძილებისათვისაც. სამკუთხედის აქსიომა აქაც სამართლიანი აღმოჩნდა.

ამგვარად ორივე ა) და ბ) შემთხვევაში სამკუთხედის აქსიომა სამართლიანია და ამიტომ იგი სამართლიანია საზოგადოდ.

ახლა უკვე შეგვიძლია ვთქვათ, რომ რაკი სამივე აქსიომა $M$ სიმრავლეში ყოველთვის შესრულებულია, აგებული სივრცე მეტრიკული სივრცეა.

დავამტკიცოთ ახლა, რომ $M$ სივრცე სავსეა.

ავიღოთ $M$ სიმრავლის რაიმე ფუნდამენტური მიმდევრობა $a_1, a_2, \dots$ განმარტების თანახმად $\rho(a_m, a_n) < \varepsilon$, როდესაც $m$ და $n$ საკმაოდ დიდია. ორი შემთხვევა წარმოგვიდგება:

1. ჩვენ მიმდევრობაში ნებისმიერი წევრის შემდეგ გვხვდება $C_0, C_1, \dots$ მიმდევრობის წერტილი, ვთქვათ მაგ. $C_i = a_m$, მაშინ

$$\rho(C_i, a_m) < \varepsilon.$$

შევნიშნოთ ახლა, რომ თუ $a_n \neq C_i$, მაშინ $\rho(C_i, a_n) \geq 1$, რასაც უშუალოდ გამოვიყვანთ $M$ სიმრავლეში შემოღებული მანძილის განმარტებიდან. ეს უტოლობა წინა უტოლობას ეწინააღმდეგება;

ამიტომ $a_n = C_i$, რაგინდ დიდიც არ უნდა იყოს $n$. ეს იმის მაჩვენებელია, რომ გარკვეული წევრიდან მოყოლებული ჩვენი მიმდევრობა სტაციონარულია, ე.ი. გვექნება $C_i, C_i, \ldots$ ამისი ზღვარი კი ისევ $C_i$ არის.

2. ჩვენ მიმდევრობაში ისეთი წევრი არსებობს, რომლის შემდეგ ყველა წერტილი $d_0d$ სეგმენტს მიეკუთვნება.

რაკი სეგმენტი სასრულოა, ეს მიმდევრობა გარკვეული ზღვრისაკენ იკრიბება.

ორივე შემთხვევაში ფუნდამენტური მიმდევრობა კრებადი აღმოჩნდა, მაშასადამე $M$ სივრცე სავსეა.

დავამტკიცოთ, რომ $M$ სივრცე ლოკალურად კომპაქტურია.

ავიღოთ ორი წერტილი $C_i$ და $C_j$. გვექნება შემდეგი:

$$\rho(C_i,C_j)=\vartheta(C_i,C_j)\left[\rho(C_i,\text{პრ}\,C_i)+\rho(C_j,\text{პრ}\,C_j)+\rho(\text{პრ}\,C_i,\text{პრ}\,C_j)\right]$$

და თუ $i \neq j$, მივიღებთ ტოლობას

$$\rho(C_i,C_j)=2+\left|\frac{1}{2^i}-\frac{1}{2^j}\right|.$$

აღვნიშნოთ ახლა $d_0d_1$ სეგმენტის რაიმე წერტილი $d$ ასოთი. მაშინ $\rho(C_i,d)=\rho(C_i,\text{პრ}\,C_i)+\rho(d,\text{პრ}\,d)+\rho(\text{პრ}\,C_i,\text{პრ}\,d)$, მაგრამ $\rho(C_i,\text{პრ}\,C_i)=1$, $\rho(d,\text{პრ}\,d)=\rho(d,\text{პრ}\,d)=\rho(d,d)=0$, ამიტომ $\rho(C_i,d)\geq 1$. ტოლობას ადგილი აქვს მაშინ, როდესაც $\rho(\text{პრ}\,C_i,\text{პრ}\,d)=0$ ანუ როდესაც $d=\text{პრ}\,C_i$.

ავიღოთ ახლა სფერო $S(C_i,1)$. მისი შეკვრა შეიცავს ერთად ერთ $C_i$ წერტილს ეს სიმრავლე კი კომპაქტურია. ასევე $S(d,1)$ სფეროს შეკვრა შეიცავს მთელ $d_0d_1$ სეგმენტს და აგრეთვე კომპაქტურია.

ჩვენ გამოვარკვიეთ, რომ $M$ სივრცის ყოველ წერტილს გააჩნია მიდამო, რომლის შეკვრა კომპაქტურია. ეს კი ამტკიცებს, რომ $M$ სივრცე ლოკალურად კომპაქტურია.

უკანასკნელად დავამტკიცოთ, რომ $M$ სივრცე სრულად სავსე არ არის.

მართლაც, მიმდევრობა

$$C_0, C_1, C_2, \dots$$

$L$ -მიმდევრობაა:

$\rho(C_m, C_{m+p}) = 2 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+p}}$ , როგორიც არ უნდა იყოს ნატურალური ან ნულის ტოლი $m$ , როცა $p>0$. თუ ავიღებთ ახლა ნებისმიერ $p'$ და $p''$ ნატურალურ რიცხვებს, მივიღებთ ტოლობას

$$\rho(C_m, C_{m+p'}) - \rho(C_m, C_{m+p''}) = \frac{1}{2^{m+p'}} - \frac{1}{2^{m+p''}}.$$

როცა $m \to \infty$ , ეს სხვაობა ნულთან მიისწრაფის და მაშასადამე $(C_i)$ წარმოადგენს $L$ -მიმდევრობას. ამავე დროს კი

$$\lim_{m \to \infty} \rho(C_m, C_{m+p}) = \lim\left(2 + \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^{m+p}}\right) = 2.$$

უკანასკნელი გარემოება კი იმის მაჩვენებელია, რომ $(C_i)$ მიმდევრობა კრებადი არ არის. $M$ სივრცე სრულად სავსე არ ყოფილა.

ყველა ზემოთქმულის მიხედვით $M$ სივრცე თუმც სავსე და ლოკალურად კომპაქტურია, მაგრამ სრულად სავსე არ არის.

## 25. $R^n$, $R^\infty$ და Baire -ის სივრცეები.

განვიხილოთ ახლა სრულად სავსეა თუ არა ზოგი, თანამედროვე მათემატიკაში ძალიან ცნობილი სივრცე.

251. ავიღოთ სივრცე, რომელიც წარმოადგენს $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ წერტილთა ერთობლიობას, როცა ყოველი $x_k$ $(k=\text{const})$ კოორდი-

ნაცრი გაირჩევს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს და რომლის ყოველი ორი წერტილისათვის

$$x_1=\left(x_1^{(1)},x_2^{(1)},\dots,x_n^{(1)}\right),\quad x_2=\left(x_1^{(2)},x_2^{(2)},\dots,x_n^{(2)}\right)$$

მანძილი შემდეგი ფორმულით განისაზღვრება:

$$\rho(x_1,x_2)=\sqrt{\sum_{k}^{n}\left(x_k^{(1)}-x_k^{(2)}\right)^2}.$$

ამ სივრცეს $n$ განზომილების ევკლიდური სივრცე ეწოდება და იგი ასე აღინიშნება $R^n$.

ცნობილია, რომ $R^n$ სავსეა, მაგრამ კომპაქტური არ არის/1/.

<u>თეორემა 16.</u> <u>ევკლიდური $R^n$ სივრცე სრულიად სავსეა.</u>

ავიღოთ ამ სივრცის წერტილთა რაიმე $L$-მიმდევრობა, ვთქვათ $(x_i)=\left(\left(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\dots,x_n^{(i)}\right)\right)$, სადაც $i=1,2,\dots$ განმარტების თანახმად

$$\left|\rho(x_m,x_{m+p})-\rho(x_m,x_{m+q})\right|<\varepsilon,$$

---

/1. რომ ის არაა კომპაქტური, ამაში უშუალოდ დავრწმუნდებით, თუ ავიღებთ შემდეგ უსასრულო მიმდევრობას:

$(1,0,\dots,0),(2,0,\dots,0),\dots,(n,0,\dots,0),\dots$

ეს წერტილები მთლიანად $x_1$-ების ღერძზე მოთავსებული და არ შეიცავს არავითარ კრებად მიმდევრობას.

რომ ის სავსეა, ეს ჩვენი მე-16 თეორემის შედეგია, რადგან ყოველი სრულიად სავსე ამავე დროს სავსეა. ჩვეულებრივ სისავსე დამოუკიდებლად მტკიცდება.

$R^n$ სივრცე შეგვიძლია განვიხილოთ აგრეთვე, როგორც $n$ სივრცის მეტრიკული ნამრავლი, სადაც თითეული მამრავლი ევკლიდური წრფეა.

როგორიც არ უნდა იყოს $\varepsilon$ , როდესაც $m \geqslant N(\varepsilon)$, $p,q$ ნატურალური და სადაც $N(\varepsilon)$ გარკვეული, $\varepsilon$ სიდიდეზე დამოკიდებული ნატურალური რიცხვია. თავის დროზე დამტკიცებულის გამო /თეორემა მე-4/ ვღებულობთ, რომ $\rho(x_i,x_j)$ შემოსაზღვრულია და მაშასადამე გვექნება, რომ შემოსაზღვრულია აგრეთვე $|x_k^{(i)}-x_k^{(j)}|$.

ავიღოთ $j=\text{const.}$, $k=\text{const}$. მაშინ მივიღებთ, რომ $x_k^{(i)}$ $(i=1,2,\ldots)$ შემოსაზღვრულია და ამიტომ არსებობს მისი ერთი მაინც ზღვარითი წერტილი, ვთქვათ $x_k^{(0)}$ (ქვევით აღმოჩნდება, რომ იგი ერთადერთია). გამოვყოთ ჩვენი $x_k^{(i)}$ $(i=1,2,\ldots)$ მიმდევრობიდან ის ფუნდამენტური მიმდევრობა, რომლის ზღვარია $x_k^{(0)}$.

თუ ასე ვიმსჯელებთ დანარჩენ კოორდინატებზედაც, მივიღებთ, რომ მოცემული $L$ -მიმდევრობიდან გამოყოფილია ისეთი ფუნდამენტური ქვემიმდევრობა, რომლის ზღვარიც შემდეგი წერტილია

$$x_0=\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}\right).$$

მაგრამ მაშინ, როგორც ცნობილია თვითონ $L$ -მიმდევრობაც ფუნდამენტურია აგრეთვე და მას იგივე ზღვარი აქვს /შენ. 3 /. ამიტომ $\lim x_i \to x_0$.

თეორემა დამტკიცებულია.

252. Hilbert-ის სივრცე. ეს სივრცე კერძო შემთხვევაა $l_p$ სივრცისა, რომლის განმარტება აქვე მოგყავს.

ავიღოთ ნამდვილ რიცხვთა ისეთი მიმდევრობა $x=(x_1,x_2,\ldots)$, რომელსაც შემდეგი თვისება აქვს: მწკრივი $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p$ , სადაც $p=\text{const}\geqslant 1$, კრებადი მწკრივია. განვიხილოთ ამ თვისების ყველა მიმდევრობათა სიმრავლე. ვთქვათ $x=(x_i)$ და $y=(y_i)$ აღნიშნული სიმრავლის რაიმე ორი ელემენტია. შემოვიღოთ მეტრიკა:

$$\rho(x,y)=\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^p}.$$

მივიღოთ რაღაც სივრცე. ამ სივრცეს $l_p$ სივრცე ეწოდება.

ცნობილია, რომ $l_p$ სივრცე მეტრიკული სივრცეა. დავამტკიცოთ

თეორემა 17. $l_p$ სივრცე სრულიად სავსე არ არის.

მართლაც, ავიღოთ წერტილთა შემდეგი მიმდევრობა:

(ა) $(1,0,\dots),(0,1,\dots),\dots$

განმარტების თანახმად ამ მიმდევრობის ყოველ ორ წერტილს შორის მანძილი შემდეგი აღმოჩნდება $\sqrt[p]{1^p+1^p}=\sqrt[p]{2}$. ამ გარემოების გამო (ა) არ შეიცავს არც ერთ ფუნდამენტურ მიმდევრობას და მაშასადამე არ შეიძლება კრებადი იყოს. ამავე დროს (ა) წარმოადგენს $L$-მიმდევრობას:

$$\rho(x_m,x_{m+p})-\rho(x_m,x_{m+q})=\sqrt[p]{2}-\sqrt[p]{2}=0.$$

ამგვარად (ა) ისეთი $L$-მიმდევრობაა $l_p$ სივრცის წერტილებისა, რომელიც კრებადი არ არის.

თეორემა დამტკიცებულია.

იმ კერძო შემთხვევაში, როდესაც $p=2$, ჩვენ $l_p$ სივრცეს Hilbert-ის სივრცე ეწოდება და იგი ჩვეულებრივ ასე აღინიშნება $R^\infty$. ჩვენი თეორემის თანახმად, Hilbert-ის სივრცე სრულიად სავსე არ არის. ამავე დროს კი ეს სივრცე სავსეა.

253. Baire-ის სივრცე.

ავიღოთ რაღაც $X_i$ სიმრავლეები, სადაც $i=1,2,\dots$. შევადგინოთ სიმრავლე შემდეგი ელემენტებისა $x=(x_1,x_2,\dots)$, სადაც $x_i\in X_i$. ახლა ყველა $x$ წერტილთა სიმრავლეში შემდეგი მეტრიკა შემოვიღოთ:

თუ $x_1=(x_1^{(1)},x_2^{(1)},\dots)$, $x_2=(x_1^{(2)},x_2^{(2)},\dots)$ ჩვენი სიმრავლის ორი ელემენტია სადაც

$$x_k^{(1)},\ x_k^{(2)}\in X_k,$$

მაშინ

$$\rho(x_1, x_2) = \frac{1}{k},$$

სადაც k ისეთი ნატურალური რიცხვია, რომლისათვისაც, შესრულებულია ტოლობანი

$$x_1^{(1)} = x_1^{(2)},\ x_2^{(1)} = x_2^{(2)}, \dots, x_{k-1}^{(1)} = x_{k-1}^{(2)}, \qquad x_k^{(1)} \neq x_k^{(2)}.$$

მიღებულ სივრცეს Baire -ის სივრცე ეწოდება. იგი მეტრიკული და სავსე სივრცეა. დავამტკიცოთ

<u>თეორემა</u> 13. Baire -ის <u>სივრცე სრულიად სავსე მარტოოდენ მაშინ არის, როდესაც ყველა</u> $X_i$ <u>სასრულია</u>.

ვთქვათ ყველა $X_i$ სასრულია. ავიღოთ მაშინ რაიმე $L$ -მიმდევრობა, ვთქვათ $(x_i)$ და დავამტკიცოთ რომ იგი კრებადია. ამისათვის საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ $(x_i)$ ფუნდამენტურია. სიტყვის გასაადვილებლად $X_i$ სიმრავლეებს წარმომქნელი სიმრავლეები დავარქვათ, ხოლო $x_i^{(j)}$ ელემენტები $(j=1,2,\dots)$ აღებული $x_i$ წერტილის კოორდინატები. თუ $(x_i)$ მიმდევრობა შეიცავს უსასრულო ქვემიმდევრობას ელემენტებისა, რომელთაგან ყოველი ორის პირველი კოორდინატი სხვადასხვაა, მაშინ მის ნებისმიერ ორ ელემენტს შორის მანძილი $=1$. მაგრამ ეს არ შეიძლება, რადგან $X_i$ სასრულია.

ვთქვათ მოცემულია რაიმე დადებითი $\varepsilon$ რიცხვი და შესრულებულია უტოლობა

$$|\rho(x_m, x_{m+p}) - \rho(x_m, x_{m+q})| < \varepsilon,$$

რომელსაც $m$ საკმარისად დიდი რიცხვია, ხოლო $p$ და $q$ ნების-მიერი ნატურალური რიცხვებია.

ავიღოთ გარკვეული $x_m$. განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

1. არსებობს უსასრულოდ ბევრი $x_{m+p}$ ისეთი, რომ $x_m$ და $x_{m+p}$ ელემენტებს სხვადასხვა პირველი კოორდინატი აქვს.

2. ასეთი $x_{m+p}$ ელემენტების რიცხვი სასრულია.

<u>შემთხვევა 1.</u> აქ გვექნება $\rho(x_m, x_{m+p})=1$, ამიტომ

$$|1-\rho(x_m, x_{m+q})|<\varepsilon,$$

თანახმად $L$-მიმდევრობის განმარტებისა, რომელსაც $q$ ნატურალური ნებისმიერი რიცხვია. მაგრამ $\rho(x_m, x_{m+q})$ შემდეგი სახისაა $\frac{1}{k}$, სადაც $k$ ნატურალურია. ამიტომ $|1-\frac{1}{k}|<\varepsilon$. ვთქვათ ახლა $\varepsilon=\frac{1}{2}$. მაშინ წინა უტოლობიდან

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{k}<\frac{3}{2},$$

$$2>k>\frac{2}{3},$$

საიდანაც $k=1$, რაც იმის მაჩვენებელია, რომ $x_m$ და ნებისმიერ $x_{m+q}$ წევრს სხვადასხვა პირველი კოორდინატი აქვს.

<u>შემთხვევა 2.</u> გამოვრიცხოთ $L$-მიმდევრობიდან ყველა ის $x_{m+p}$, რომელთაც $x_m$ ელემენტისაგან პირველი კოორდინატი განასხვავებს. მაშინ გვრჩება $L$-მიმდევრობა, რომელშიაც ყველა წევრებს ერთნაირი პირველი კოორდინატი აქვს.

უკუვაგდოთ ახლა ჩვენი მიმდევრობის პირველი $N$ წევრი და ვცვალოთ $m$.

შეუძლებელია, რომ პირველ შემთხვევას ადგილი დაურჩეს უსასრულოდ ბევრი $m$ რიცხვისათვის, რადგან მაშინ მივიღებდით უსასრულოდ მრავალ ერთმანეთისაგან ორ-ორად განსხვავებულ

პირველ კოორდინატს, რაც შეუძლებელია, რადგან $X_1$, სასრულოა. ამიტომ ამოვაგდოთ მიმდევრობიდან ის $x_m$, რომელთათვისაც პირველ შემთხვევას აქვს ადგილი. რჩება $L$-მიმდევრობა, რომელშიაც ყველა ელემენტებს ერთნაირი პირველი კოორდინატი აქვს.

გადავიდეთ მეორე კოორდინატებზე და განვაგრძოთ ა.შ. მოცემული მიმდევრობიდან ამ გზით გამოიყოფა სტაციონარული მიმდევრობა. ამგვარად ყოველი $L$-მიმდევრობა შეიცავს სტაციონარულ ქვემიმდევრობას. ეს კი ფუნდამენტურია.

ვთქვათ ახლა Baire-ის სივრცე სრულიად სავსეა, დავამტკიცოთ მაშინ, რომ ყოველი წარმომქნელი $X_i$ სიმრავლე სასრულოა. ვთქვათ $X_1$ უსასრულოა. შევადგინოთ $x_i=(x_1^{(i)}, x_2^{(i)},\dots)$ პირობის გამო შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $x_1^{(i)} \neq x_1^{(j)}$, თუ $i \neq j$. მაშინ $\rho(x_i,x_j)=1$ და $(x_i)$ არის $L$-მიმდევრობა, თუმც არც ერთ ფუნდამენტურ მიმდევრობას არ შეიცავს; ეს კი შეუძლებელია, მაშ $X_i$ სასრულოა. ავიღოთ ახლა $L$-მიმდევრობა ისეთი ელემენტებისა, რომელთა პირველი კოორდინატი ერთი და იგივეა, ხოლო მეორე კი ყოველ ორ ელემენტში სხვადასხვაა. უკანასკნელი პირობა იმის ეკვივალენტურია, რომ $X_2$ უსასრულოა. მაშინ $\rho(x_i,x_j)=\frac{1}{2}$, როდესაც $i \neq j$ და ჩვენი მიმდევრობა არ შეიცავს არც ერთ ფუნდამენტალურ ქვემიმდევრობას. თუ ასე განვაგრძობთ, დავრწმუნდებით, რომ როგორიც არ უნდა იყოს $k$, სიმრავლე $X_k$ სასრულოა.

თეორემა დამტკიცებულია.

## 26. კომპაქტურობა $C$, $L_p$ და $K$ სივრცეებში.

261. გავიხსენოთ ამ სივრცეთა განმარტებანი.

ავიღოთ $[0, 1]$ სეგმენტზე განუწყვეტელ ყველა ფუნქციათა სიმრავლე. აღვნიშნოთ იგი $C$ ასოთი, შემოვიღოთ მეტრიკა

$$\rho(y_1, y_2) = \max |y_1(x) - y_2(x)| ,$$

სადაც $y_1(x), y_2(x) \in C$.

მიღებული სივრცე მეტრიკული სავსე სივრცეა, მაგრამ კომპაქტური კი არ არის. მას $C$ სივრცე ეწოდება.

განვიხილოთ სიმრავლე $[0, 1]$ სეგმენტზე ზომადი ყველა ფუნქციებისა, რომელთათვისაც არსებობს შემდეგი ინტეგრალი

$$\int_0^1 |y(x)|^p dx ,$$

სადაც $p > 1$.

აღვნიშნოთ ეს სიმრავლე ასე $L_p$. შემოვიღოთ მეტრიკა

$$\rho(y_1, y_2) = \left( \int_0^1 |y_1(x) - y_2(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} .$$

მიღებული სივრცე მეტრიკულია. მას $L_p$ სივრცე ეწოდება.

ვთქვათ ახლა $K$ აღნიშნავს სიმრავლეს მთელ რიცხვთა წრფეზე შემოსაზღვრული ყველა ფუნქციებისა. შემოვიღოთ მეტრიკა

$$\rho(y_1, y_2) = \sup |y_1(x) - y_2(x)| .$$

მიღებულ მეტრიკულ სივრცეს $K$ სივრცე ჰქვია.

262. თითეული აღნიშნულ სივრცეთაგანი მეტრიკული სივრცეა, მათი ელემენტების რაიმე ქვესიმრავლე, განხილული როგორც დახურული სივრცე, აგრეთვე მეტრიკულია. ავიღოთ ახლა C სივრცის ელემენტთა რაიმე $Y_C$ ქვესიმრავლე, $L_p$ სივრცის ელემენტთა ქვესიმრავლე $Y_p$ და სიმრავლე ყველა თითქმის პერიოდული ფუნქციებისა (Fastperiodische Funktionen), რომელიც K სივრცის ქვესიმრავლეა და ასე აღვნიშნოთ $Y_K$. დავსვათ საკითხი: როგორია აუცილებელი და საკმარისი პირობები $Y_C$, $Y_p$ და $Y_K$ სიმრავლეების კომპაქტურობისა C, $L_p$ და K სივრცეებში შესაბამად? ეს საკითხი სამმა სხვადასხვა ავტორმა ამოხსნა სამი თეორემის სახით, რომელთაც თითქოს არაფერი აერთიანებთ. ესაა ცნობილი თეორემები Arzela -სი, Колмогоров -ისა და Bochner -ისა. ამათ ჩამოსაყალიბებლად განვიხილოთ კიდევ შემდეგი ცნებები:

ფუნქციათა რაიმე Y სისტემას თანაბრად შემოსაზღვრული სისტემა ეწოდება, თუ არსებობს ისეთი დადებითი N რიცხვი, რომ უტოლობას

$$|y(x)| < N$$

ადგილი აქვს ყოველი y ფუნქციისათვის, $y \in Y$, როგორიც არ უნდა იყოს $x$, ოღონდ იგი იმ შუალედში ავიღოთ, რომელშიაც Y სისტემაა განმარტებული.

სისტემას თანაბარხარისხოვნად განუწყვეტელი ეწოდება, თუ შემდეგი პირობაა შესრულებული:

ყოველი დადებითი $\varepsilon$ -რიცხვისათვის ისეთი დადებითი $\delta$ მოიძებნება, რომ უტოლობას

$$|y(x) - y(x_1)| < \varepsilon$$

ადგილი აქვს ყოველთვის, როდესაც $|x-x_1|<\eta$. ამასთან $\eta\to 0$, თუ $\varepsilon\to 0$.

263. ახლა შეგვიძლია სამივე ზემოაღნიშნული თეორემის ერთობლივ ჩამოყალიბება:

აუცილებელი და საკმარისი პირობები იმისა, რომ $\mathcal{Y}_C, \mathcal{Y}_P, \mathcal{Y}_K$ სიმრავლეები კომპაქტური $C, L_p$ და $K$ სივრცეებში შესაბამად, შემდეგია:

I. $\mathcal{Y}_C$ - სიმრავლისათვის (Arzela -ს თეორემა).

1. $\mathcal{Y}_C$ თანაბრად შემოსაზღვრულია
2. $\mathcal{Y}_C$ თანაბარხარისხოვნად განუწყვეტელია.

II. $\mathcal{Y}_P$ - სიმრავლისათვის (Колмогоров -ის თეორემა)

1. $\int_0^1 |y|^p dx \le K^p$, როგორიც არ უნდა იყოს $y\in\mathcal{Y}$, თუ $K$ მუდმივია.
2. არსებობს $\eta(h)$ ფუნქცია, სადაც $h$ და $\eta$ უარყოფითი არ არის, ისეთი, რომ $\eta\to 0$, როდესაც $h\to 0$ და შესრულებულია უტოლობა

$$\rho(y,y_h)\le\eta(h),$$

როგორიც არ უნდა იყოს $y\in\mathcal{Y}$; აქ $y_h(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} y(x)\,dx$

III. $\mathcal{Y}_K$ სიმრავლისათვის (Bochner -ის თეორემა).

1. $\mathcal{Y}_K$ თანაბრად შემოსაზღვრულია,
2. $\mathcal{Y}_K$ თანაბარხარისხოვნად განუწყვეტელია.
3. ყოველი დადებითი $\eta$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $l(\eta)$, რომ ნებისმიერ შუალედში $l(\eta)$ სიგრძისა მოქცეულია $s$ რიცხვი, რომელიც $\eta$-პერიოდია $\mathcal{Y}_K$ სიმრავლის ყოველი ფუნქციისა, ე.ი.

$$|y(x+s)-y(s)|\leq \eta ,$$

როგორიც არ უნდა იყოს $x$.

შემდეგში ამ თეორემებს შესაბამისად (A),(K) და (B) ნიშნებით დავასახელებთ.

264. დავამტკიცოთ, რომ სამივე თეორემა წარმოადგენს ჩვენ მე-12 თეორემას $Y_C, Y_P$ და $Y_K$ სიმრავლეებისათვის, ჩამოყალიბებულს ფუნქციონალური ანალიზის ტერმინებით. ამის დასამტკიცებლად შემდეგ გზას მივმართავთ: $Y_J$ ($J = C,P,K$) სიმრავლე განვიხილოთ როგორც ფარდობითი სივრცე $J$ სივრცის მიმართ. დავამტკიცოთ, რომ ამ შემთხვევაში ჩვენი თეორემის I პირობა გვაძლევს შემომოყვანილი თეორემების პირველ პირობებს და შებრუნებით, ეს პირობები გვაძლევს მე-11 თეორემის პირველ პირობას ფარდობითი $J$ სივრცისათვის. ესაა ჩვენი და (A),(K),(B) თეორემების პირველ პირობათა ექვივალენტობა $C, L_p, K$ სივრცეებში შესაბამისად. ახლა, რადგან მე-12 თეორემა და თეორემები (A),(K) და (B), სიმრავლის კომპაქტობის აუცილებელი და საკმარისი პირობებია, აქედან გამომდინარეობს, რომ მე-11 თეორემის მე-2 პირობა, თუ ნაგულისხმევია პირველ პირობათა შესრულება, ექვივალენტურია (A),(K) და (B) თეორემების დანარჩენი პირობებისა. ამით დამტკიცებული იქნება, რომ (A),(K) და (B) თეორემები ერთსა და იმავე ფაქტს გამოსახავს სხვადასხვა სივრცისათვის, სახელდობრ ნებისმიერი მეტრიკული სივრცისათვის დამტკიცებულ ჩვენ თეორემას /1/.

/1. დამტკიცების ასეთი წესი საკმაოდ გავრცელდა აქსიომათა ექვივალენტური სისტემების კვლევასთან დაკავშირებული შრომების წყალობით. რაც შეეხება (A),(K) და (B) თეორემების მე-2 პირობების უშუალოდ გამოყვანას ჩვენი მე-11 თეორემიდან, ეს ამ თეორემების ახალ დამტკიცებას მოგვცემს. ჩვენი მიზანი საკითხის არსებითი გამორკვევაა მხოლოდ და ამ შემთხვევაში ვკმაყოფილდებით შემომოყვანილი დამტკიცებით.

გადავიდეთ ექვივალენტობის დამტკიცებაზე.

<u>თეორემა 19.</u> <u>თუ</u> $Y_C$ <u>ფარდობითი სივრცე შემოსაზღვრულია, მაშინ ფუნქციათა</u> $Y_C$ <u>სიმრავლე თანაბრად შემოსაზღვრულია და შებრუნებით.</u>

ვთქვათ $Y_C$ სიმრავლე $C$ სივრცის მიმართ ფარდობითი შემოსაზღვრული სივრცეა. მაშინ განმარტების თანახმად გვექნება შემდეგი

$$\rho\left(y_0(x), y(x)\right) = \max|y_0 - y| < N,$$

სადაც $N$ გარკვეული დადებითი რიცხვია და დამოუკიდებელია $y_0(x)$ და $y(x)$ ფუნქციათა არჩევისაგან. აქედან

$$|y_0 - y| < N, \quad |y| < |y_0| + N.$$

დავნიშნოთ $y_0$ ფუნქცია. მაშინ $|y_0|+N$ განუწყვეტელია $[0,1]$ სეგმენტზე, ამავე სეგმენტზე შემოსაზღვრულია და მაშასადამე $|y_0(x)|+N<N_1$, როგორიც არ უნდა იყოს $x$. ამიტომ ნებისმიერი $y(x)$ ფუნქციისათვის გვექნება ეს უტოლობა.

$$|y(x)| < N_1$$

რაც ამის მაჩვენებელია, რომ ფუნქციათა $Y_C$ სისტემა თანაბრად შემოსაზღვრულია.

ვთქვათ ახლა $Y_C$ -ფუნქციათა თანაბრად შემოსაზღვრული სისტემაა, რის გამოც შეგვიძლია ყოველი $y(x)$ ფუნქციისათვის, $y(x)\in Y$, შესრულებულად ვიგულისხმოთ უტოლობა

$$|y(x)| < \frac{N}{2}$$

სადაც $N$ დამოუკიდებელია $x$ და $y$ ცვალებადებზე. ავიღოთ $C$ სივრცის მეტრიკა, რაც მოგვცემს შემდეგს

გამოვიყენოთ ცნობილი უტოლობა

$$\max|y-y_0| \leq \max|y_0| + \max|y| .$$

ეს მოგვცემს შემდეგ დამოკიდებულებას

$$\rho(y_0,y) \leq \max|y_0| + \max|y| < \frac{N}{2} + \frac{N}{2} = N ,$$

რაც იმის მაჩვენებელია, რომ $Y_c$ სივრცე შემოსაზღვრულია.

ამით დამტკიცებულია (A) თეორემის პირველი პირობის ეკვივალენტობა მე-1[illegible] თეორემის I პირობასთან C სივრცეში.

<u>თეორემა 20.</u> თუ $Y_p$ ფარდობითი სივრცე შემოსაზღვრულია, ფუნქციათა $Y_p$ სიმრავლე თანაბრად შემოსაზღვრულია და შებრუნებით.

ვთქვათ $Y_p$ სიმრავლე $L_p$ სივრცის მიმართ ფარდობითი შემოსაზღვრული სივრცეა. მაშინ $L_p$ სივრცის მეტრიკის განმარტების გამო შემდეგს მივიღებთ:

$$\rho(y_0,y) \leq K ,$$

სადაც K მუდმივია და დამოუკიდებელია $y_0$ და $y$ ფუნქციათა არჩევანზე.

ავიღოთ $y_0(x)=0$, მაშინ

$$\rho(y_0,y) = \left\{ \int_0^1 |y_0-y|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{ \int_0^1 |y|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leq K ;$$

აქედან

$$\int_0^1 |y|^p dx \le K^p$$

რაც (K) თეორემის პირველი პირობაა.

ვთქვათ ახლა შებრუნებით, უკანასკნელი უტოლობა შესრულებულია ფუნქციათა $Y_p$ სიმრავლისათვის. განვიხილოთ ეს სისტემა როგორც ფარდობითი სივრცე. მაშინ $L_p$ სივრცის მეტრიკის გამო Minkowski-ს ცნობილი უტოლობის მიხედვით შემდეგი დაიწერება*)

$$\rho(y_0,y)=\left\{\int_0^1|y_0-y|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\le\left\{\int_0^1|y_0+(-y)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\le\left\{\int_0^1|y_0|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}+\left\{\int_0^1|-y|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}=$$

$$=\left\{\int_0^1|y_0|^p\right\}^{\frac{1}{p}}+\left\{\int_0^1|y|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\le 2K$$

ეს იმის მაჩვენებელია, რომ $Y_p$ სივრცე შემოსაზღვრულია, რაც მე-12 თეორემის პირველი პირობაა.

ამით დამტკიცებულია, რომ (K) თეორემის პირველი პირობის ეკვივალენტობა მე-12 თეორემის 1-ლ პირობასთან $L_p$ სივრცეში.

თეორემა 21. თუ $Y_K$ ფარდობითი სივრცე შემოსაზღვრულია, $Y_K$ სიმრავლე თანაბრად შემოსაზღვრულია და შებრუნებით.

ვთქვათ $Y_K$ სიმრავლე $K$ სივრცის მიმართ ფარდობითი შემოსაზღვრული სივრცეა. მაშინ $K$ სივრცის მეტრიკის განმარტების გამო მივიღებთ შემდეგს

$$\rho(y_0,y)=\sup|y(x)-y_0(x)|<N_0,$$

---

*) Minkowski-ს უტოლობა შემდეგია: თუ $p\ge 1$, მაშინ $\left\{\sum|x_i+y_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}}\le\left\{\sum|x_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}}+\left\{\sum|y_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$, რომლიდანაც ასეთი უტოლობა მიიღება

$$\left\{\int|x+y|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\le\left\{\int|x|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}+\left\{\int|y|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

სწორედ ამ უკანასკნელით ვსარგებლობ ტექსტში.

სადაც $N_0$ დამოუკიდებელია $y_0$ და $y$ ფუნქციათა არჩევაზე. გამოვიყენოთ ცნობილი უტოლობა

$$\sup|y(x)| \le \sup|y(x)-y_0(x)| + \sup|y_0(x)|,$$

რაცა მოგვცემს შემდეგს

$$\sup|y(x)| \le N_0 + \sup|y_0(x)|.$$

ფიქსაცია ვუყოთ $y_0(x)$ ფუნქციას. რადგან ეს ფუნქცია შემოსაზღვრულია, გვექნება

$$|y_0(x)| \le N_1,$$

სადაც $N_1$ დამოუკიდებელია $x$ ცვალებადზე. ამიტომ $\sup|y_0(x)| \le N_1$, მაშასადამე

$$\sup|y(x)| \le N_0 + N_1,$$

როგორიც არ უნდა იყოს $y(x) \in Y_K$. ამიტომ

$$|y(x)| \le N,$$

სადაც

$$N = N_0 + N_1.$$

უკანასკნელი უტოლობა იმის მაჩვენებელია, რომ $Y_K$ ფუნქციათა თანაბრად შემოსაზღვრული სისტემაა.

ვთქვათ ახლა $Y_K$ ფუნქციათა თანაბრად შემოსაზღვრული სისტემაა, ე.ი.

$$|y(x)| \le N,$$

სადაც N დამოუკიდებელია $x$ და $y$ ცვლადთაგან. K სივრცის მეტრიკის გამო შემდეგი გვექნება

$$\rho(y_0,y)=\sup|y(x)-y_0(x)|\le \sup|y(x)|+\sup|y_0(x)|\le 2N,$$

სადაც $y_0$ და $y$ ნებისმიერი ფუნქციებია $\mathcal{Y}_K$ სისტემისა. ეს იმის მაჩვენებელია, რომ ფარდობითი $\mathcal{Y}_K$ სივრცე შემოსაზღვრულია.

ამით დამტკიცებულია (B) თეორემის პირველი პირობის ექვივალენტობა მე-11 თეორემის 1-ლ პირობასთან K სივრცეში.

**265.** თუ ახლა გავიხსენებთ იმას, რაც ექვივალენტობის დამტკიცებას წინ უსწრებდა, შემდეგ დებულებას მივიღებთ: <u>Arzela-სა, Bochner-ისა და Колмогоров-ის თეორემები ერთსა და იმავე მე-12 თეორემას წარმოადგენს C, K და $L_p$ სივრცეებში შესაბამად.</u>

## 3. სრულიად სავსე სივრცეების მეტრიკული ნამრავლი.

31. ჯერ მეტრიკული ნამრავლის თვით ცნება გავიხსენოთ.

ორი $X$ და $Y$ მეტრიკული სივრცის მეტრიკული ნამრავლი $XY$ ეწოდება $(x,y)$ წერტილთა სიმრავლეს, სადაც მეტრიკა შემდეგი ტოლობითაა მოცემული

$$\rho\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big)=\sqrt{\rho(x_1,x_2)^2+\rho(y_1,y_2)^2}\,.$$

აქ $x_1,x_2\in X$; $y_1,y_2\in Y$, ხოლო $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in XY$.

წერის გამამარტივებლად აქ სამივე მეტრიკისათვის [$X$ სივრცისა, $Y$ სივრცისა და ამათი მეტრიკული ნამრავლის მეტრიკისათვის] ერთი და იგივე $\rho$ ნიშანია ნახმარი, რაც ამ მეტრიკების იგივეობას სრულიად არ ნიშნავს. ამას გარდა, ამ კარში ყველა შედეგი სამართლიანი დარჩება, თუ ნამრავლის მეტრიკა შემდეგი იქნება

$$\rho\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big)=\sqrt[p]{\rho(x_1,x_2)^p+\rho(y_1,y_2)^p}\,,$$

სადაც $p>1$. ცნობილია, რომ ყველა ეს მეტრიკები ექვივალენტურია, ე.ი. თუ წერტილთა რაიმე $((x_i,y_i))$ მიმდევრობისათვის ერთი მათგანის თვალსაზრისით $\rho\to 0$, ყველა დანარჩენის მიხედვითაც იგივე მოხდება.

მეტრიკულ ნამრავლთა შესახებ ცნობილია, რომ ნამრავლი თვითონაც მეტრიკულ სივრცეს წარმოადგენს.

311. დავამტკიცოთ შემდეგი

<u>თეორემა</u> 22. <u>ორი სრულიად სავსე სივრცის მეტრიკული ნამრავლი სრულიად სავსე სივრცეა.</u>

ვთქვათ $X$ და $Y$ სრული სავსე სივრცეებია, ხოლო $Z$ კი მათი მეტრიკული ნამრავლია. ამ სივრცეთა წერტილები ნუსხა $x, y, z$ ასოებით აღვნიშნოთ შესაბამად.

ავიღოთ $Z$ სივრცის წერტილთა რაიმე $L$-მიმდევრობა, ვთქვათ $(z_i)$.

გავიხსენოთ, რომ ყოველი $L$-მიმდევრობა შემოსაზღვრულია. ჩვენ შემთხვევაში შემოსაზღვრულია სიმრავლე რიცხვებისა

$$\rho(z_m, z_{m+r}) = \sqrt{\rho^{2}(x_m, x_{m+r})^{2} + \rho(y_m, y_{m+r})^{2}}$$

რის გამოც შემოსაზღვრულია $\rho(x_m, x_{m+r})$ და $\rho(y_m, y_{m+r})$ რიცხვთა სიმრავლეები.

თავის დროზე დამტკიცებული იყო, რომ ყოველი შემოსაზღვრული მიმდევრობა $L$-მიმდევრობას შეიცავს. ამის მიხედვით $(z_i)$ მიმდევრობაში ჯერ ავიღოთ ისეთი მიმდევრობა წერტილებისა, რომელთა $x_i$ წარმოადგენს $L$-მიმდევრობას, ხოლო მიღებული მიმდევრობიდან ისეთი ქვემიმდევრობა გამოვყოთ, რომელთა $y_i$ რაიმე $L$-მიმდევრობას შეადგენს. ვთქვათ ესაა მიმდევრობა

$$(z_{m_i}) = \left((x_{m_i}, y_{m_i})\right).$$

აქ უკვე $(x_{m_i})$ და $(y_{m_i})$ წარმოადგენს $L$-მიმდევრობას და ასევე $(z_{m_i})$, რადგან ეს უკანასკნელი მოცემული $L$-მიმდევრობის ქვემიმდევრობაა.

პირობის თანახმად, $X$ და $Y$ სივრცეები სრული სავსეა, ამიტომ არსებობს მათი $x$ და $y$ წერტილები შესაბამად, რომელიც შემდეგ პირობებს აკმაყოფილებს

$$\lim_{i\to\infty} x_{m_i} = x, \quad \lim y_{m_i} = y.$$

მეტრიკული ნამრავლის განმარტებით $z=(x,y)$ წერტილი ეკუთვნის $Z$ სივრცეს. შეგვიძლია დავწეროთ

$$\rho\left(z_{m_i},z\right)=\sqrt{\rho\left(x_{m_i},x\right)^2+\rho\left(y_{m_i},y\right)^2},$$

მაგრამ ამ ტოლობის მარჯვენა მხარე ნულისაკენ მიისწრაფის, როდესაც $i\to\infty$, რადგან $\lim x_{m_i}=x$, $\lim y_{m_i}=y$, მაშასადამე

$$\lim \rho\left(z_{m_i},z\right)=0,$$

რაც იმის მაჩვენებელია, რომ $z$ წერტილი $(z_{m_i})$ მიმდევრობის ზღვარია. თუ ახლა გავიხსენებთ მე- თეორემას, მივიღებთ შემდეგ დასკვნას

$$\lim_{i\to\infty}\rho(z_i,z)=0.$$

ეს ტოლობა იმას ნიშნავს, რომ მოცემული $L$ -მიმდევრობა $(z_i)$, კრებადია, მაშასადამე $Z$ სივრცე სავსეა და ამით ჩვენი თეორემა დამტკიცებულია.

მეტრიკული სივრცის ცნება ადვილად ზოგადდება ნამრავლთა სასრული რიცხვისათვის. ჩვეულებრივ აქსიომად ღებულობენ, რომ ნამრავლი ფორმალურად ემორჩილება ასოციაციურ კანონს ე.ი. ღებულობენ, რომ ერთი და იგივეა წერტილები

$$\left((x,y),z\right),\ \left(x,(y,z)\right)$$

და თანაგვარად უფრო მეტი ნამრავლების შემთხვევაში.

312. დამტკიცებული დებულების საფუძველზე შეგვიძლია შემდეგი თეორემა გამოვთქვათ:

სრულიად სავსე სივრცეთა სასრულო რიცხვის ნამრავლი თვითონაც სრულიად სავსე სივრცეა.

ადვილად აღმოვაჩენთ, რომ თეორემას ადგილი არა აქვს, თუ მამრავლ სივრცეთა რიცხვი უსასრულოა. ამისათვის გავიხსენოთ $Q^{\infty}$ სივრცის ცნება. ასე ეწოდება სივრცეს, რომელიც მიიღება ევკლიდის წრფეთა უსასრულო დიდი რიცხვის გადამრავლებით. თუმც თვითეული წრფე სრულიად სავსეა, მაგრამ $Q^{\infty}$ სრულიად სავსეა, მაგრამ      სრულიად სავსე არ არის. მართლაც, თუ ავიღებთ შემდეგ მიმდევრობას

$$(1,0,0,\ldots),(0,1,0,\ldots),(0,0,1,\ldots),\ldots$$

დავრწმუნდებით, რომ იგი $L$ -მიმდევრობაა, მაგრამ არავითარი ზღვრისაკენ არ მიისწრაფის.

313. როდესაც ორ მამრავლთან გვაქვს საქმე, ადგილი ექნება შემდეგ თეორემას

თეორემა 23. თუ $X$ და $Y$ მეტრიკულ სივრცეთაგან ერთი სრულიად სავსეა და სრულიად სავსეა მოცემულ სივრცეთა მეტრიკული $Z$ ნამრავლიც, მეორე სივრცეც სრულიად სავსე იქნება.

დამტკიცება. ვთქვათ სრულიად სავსე $X$ და $Z$ არის. დავამტკიცოთ, რომ მაშინ $Y$ სივრცეც სრულიად სავსეა. ავიღოთ $Y$ სივრცეში რაღაც $L$ -მიმდევრობა, ვთქვათ $y_i$ , ხოლო $X$ სივრცეში კი ფუნდამენტური $x_i$ მიმდევრობა. ამასთან $x_i \to x$; თეორემა დამტკიცებული იქნება თუ აღმოვაჩენთ, რომ $y_i$ კრებადია ამავე სივრცის რაღაც $y$ წერტილისაკენ.

ჯერ დავამტკიცოთ, რომ $((x_i,y_i))$ კრებადია. ამისათვის შემდეგი გამოსახვა განვიხილოთ

$$(ა)\quad \left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right)\left(\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right)=(a+a_1)(a-a_1)+(b+b_1)(b-b_1),$$

სადაც $a=\rho(x_m,x_{m+p}),\ b=\rho(y_m,y_{m+p}),\ a_1=\rho(x_m,x_{m+q}),\ b_1=\rho(y_m,y_{m+q})$. აქ $\lim\limits_{m\to\infty}(a-a_1)=0$, რადგან $(x_i)$ ფუნდამენტურია. ასევე $\lim(b-b_1)=0$, რადგან $(y_i)$ მიმდევრობა $L$-მიმდევრობაა. ამასთან, თავის დროზე დამტკიცებული თეორემის მიხედვით $a+a_1$ და $b+b_1$ შემოსაზღვრული სიდიდეებია, ამიტომ (ა) ტოლობის მარჯვენა მხარე ნულისაკენ მიისწრაფის, მაშ ასევე მარცხენა მხარეც და აქედან კი

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a_1^2+b_1^2}\right)=0$$

უკანასკნელი გარემოება იმის მაჩვენებელია, რომ $((x_i,y_i))$ მიმდევრობა $L$-მიმდევრობაა და რაკი $Z$ სივრცე სრულიად სავსეა გვექნება

$$((x_i,y_i))\to(\xi,\eta),\quad i\to\infty,$$

სადაც $(\xi,\eta)\in Z$. სხვანაირად ეს უკანასკნელი ასე ჩაიწერება

$$\sqrt{\rho(x_i,\xi)^2+\rho(y_i,\eta)^2}\to 0$$

საიდანაც $\rho(y_i,\eta)\to 0$, ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $(y_i)$ მიმდევრობა $Y$ სივრცის რაღაც $\eta$ წერტილისაკენ მიისწრაფის. მაშ $Y$ სრულიად სავსეა.

ცხადია, ასევე დამტკიცდება, რომ როდესაც $Y$ და $Z$ სრულიად სავსეა, ასეთივეა $X$ . ამის დასამტკიცებლად, ჩატარებულ მსჯელობაში საკმარისია მხოლოდ $X$ და $Y$ ნიშნებს ერთმანეთში ადგილები შევუცვალოთ /ეს ეხება როგორც მთავრულ, ისე ნუსხა ასოებს/.

ამგვარად ჩვენი თეორემა სავსებით დამტკიცებულია.

## ლიტერატურა

/ფრჩხილებში ჩასმული რიცხვი - გამოცემის წელიწადს აჩვენებს, ფრჩხილის წინა-ტომს. ჟურნალები ჩაწერილია ქარაგმულად/


[1] Poncelet, Traité des propriétés projectives des figures, Paris (1822)

H. Grassmann. სამი ნაშრომი მესამე რიგის ფართეულისათვის Journ. f. Math. 36 /1848/, 49 /1854/, 52 /1856/, ამათგან პირველი და მესამე იკვლევს მესამე რიგის წრფოვან ფართეულს.

B. Riemann.

1. Lehrsätze aus d. Analysis situs...
   Journ. f. Math. 54 (1857).
2. Über die Hipotesen die der Geometrie zugrunde liegen. Göttingen (1867).
3. über die Fläche...
   Abh. Ges. Gött. 13 (1867).

[2] G. Cantor. პირველი დიდი ნაშრომები იხ. Math. Ann. 15, 17, 20, 21, 23 /1879-1884/ და სხვა.

განსაკუთრებით მესანიშნავი ნაშრომები თავმოყრილია წიგნში G. Cantor's Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts, Brl, Springer (1932),

გამოცემულია E. Zermelo -ს მიერ, თანდართულია Cantor-ის ბიოგრაფია/A. Fränkel -ის შედგენილი/ და მიმოწერა R. Dedekind -თან

H. Poincaré. Analysis situs. Journ. d. l'école politechnique, 1 (1895).


ბრწყინვალე ნაშრომი, რომელიც მრავალ დიდ იდეასთან ერთად ბევრ შეცდომასაც შეიცავდა. მეცნიერული კრიტიკის შემდეგ, რომელმაც ეს შეცდომები თუმც აღმოაჩინა,

მაგრამ გამოსწორება ვერ მოახერხა, Poincaré -მ 1899 წელს თვითონ დასწერა ახალი შრომა, რომელშიაც ჯერ ნაწილობრივ, ხოლო ერთი წლის შემდეგ სავსებით თავიდან აცილებულია აღნიშნული შეცდომები.

[3] M. Fréchet

ნაშრომი, რომელშიაც პირველადაა შემოღებული მეტრიკული სივრცის განმარტება, აგრეთვე სავსე და კომპაქტური სივრცეების ცნებები.
Rendiconti Palermo, 22 (1906) , 22 /1906/

[4]. K. Menger

Untersuchungen über allgemeine Metrik, Math. Ann. 100 /1928/

4-კარიანი დიდი ნაშრომი, რომლითაც იწყება მეტრიკის თეორია. გარჩეულია ნახევრად მეტრიკული სივრცე /ე.ი. ისეთი, რომელსაც აკლია სამკუთხედის აქსიომა/ და სხვა. აქვე გამორკვეულია ამოზნექილი სივრცის მრავალი თვისება და დასმულია ზოგი პრობლემა, რომელთაგან ზოგი შემდეგში ამოხსნეს, კერძოდ ასეთი: შეიძლება თუ არა Hahn -ის თვალსაზრისით ბმული /ე.ი. ლოკალურად ბმული/ სივრცის იმნაირი მეტრიზაცია, რომ იგი ამოზნექილი იყოს /სხვათაშორის ამოზნექილობა ტოპოლოგიურ ინვარიანტს არ წარმოადგენს/. ეს პრობლემა კერძო შემთხვევაში 1938 წ., ისიც ძალიან რთული გზით, ამოხსნა -მა ნ. ამავე მეტრიკის თეორიას მიეკუთვნება

V. Niemytzki

über die Axiome des Metrischen Raumes, Math. Ann. 104 (1931)

ვენის სკოლის ნაშრომები გამოდიოდა ცალკე ჩვეულებად. იხ. აგრეთვე Menger -ის მიმოხილვა Fund. Math. /1935/, მისივე La géometrie des distances, Ens. Math. 35/1936/. მეტრიკის თეორიის სრული შინაარსი გადმოცემულია L. Blumenthal -ის წიგნში Distance geometries, Columbia, Missouri (1938), მისურის უნივერსიტეტის გამოცემა.

[5] E. Blanc — სხვადასხვა თვალსაზრისით ამოზნექილი სივრცის გეომეტრია, უპირატესად კი დაწვრილებითი გამოკვლევა კვაზი-ამოზნექილი სივრცისა. Ann. normale 1 /1938/.

იქვე იხ. Aronszajn -ის ვარშავული დისერტაციის გამო.

[6] G. Beer — Beweis des Satzes, dass jede im kleinen zusammenhängende Kurve konvex metrisiert werden kann. Fund. Math. 31 (1938)

სწორედ ის ნაშრომი, რომელშიაც ამოხსნილია Menger -ის ზემოაღნიშნული პრობლემა იხ. [4]

[7] A.Н. Колмогоров -ისა და И.Я. Верченко-ის შრომა დაბეჭდილია Comptes rendus d. Paris ჟურნალში (1935 წ.). იხ. აგრეთვე P.J. Schmidov, Metrical Contingents, Doklady, 7 (1943)

Ch. Pauc. — Directions, contingents et paratingents dans les espaces distanciées, Comptes rendus d. Paris, 203 (1936) ნაშრომი, რომელიც მეტრიკულ სივრცეებში განმარტავს და იკვლევს გეზისა, კონტინგენციისა და პარატინგენციის ცნებებს, რომელთაგან ორი ბოლონდელი Bouligand -ის შემოღებულია.