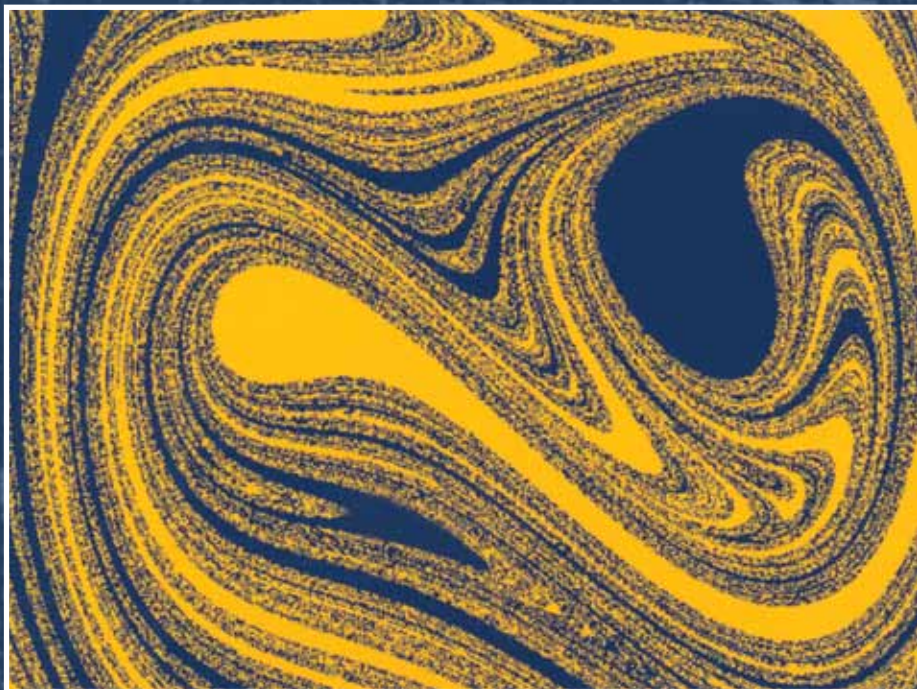


ქაოსი და არაწრფივი სისტემების დინამიკა



შესავალი კურსი მეცნიერებისა
და ინჟინრებისთვის

პირველი ქართული გამოცემა

რობერტ ჰილბორნი

რობერტ ჰილბორნი

qaosi da arawrfi vi sistemebi s di nami ka

Sesaval i kur si mecni er ebi sa
da i nJi nr ebi sTvi s



il ias saxel mwifo universitetis gamomceml oba

Tbil isi 2010

ქაოსი და არაწრფივი სისტემების დინამიკა: შესავალი მეცნიერებასა და ხელოვნებაში.

მე-2 გამოცემა. რობერტ ჰილბორნი

Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers.

2nd Ed. Robert C. Hilborn

ეს ერთადერთი წიგნია, რომელიც არაწრფივი დინამიკის სწრაფად მზარდ სფეროში საქმიანობათა სრულ სპექტრს აცნობს სტუდენტებს, მეცნიერებს და ინჟინრებს. ტექსტში საფეხურებად არის წარმოდგენილი დინამიკისა და გეომეტრიის ახსნა უძრავ სივრცეში, როგორც არაწრფივი დინამიკის ახსნის საფუძველი. ნაშრომში შესავალ დონეზეა ახსნილი მზარდი მნიშვნელობის მქონე კვანტური ქაოსის რთული საკითხები. მნიშვნელოვანი ანალიტიკური ინსტრუმენტები დეტალურად არის ახსნილი. 200-ზე მეტი სქემითა და დიაგრამით, ყოველი თავის ბოლოს მოცემული ანალიზური და კომპიუტერული სავარჯიშოებით ნაშრომი იდეალურია მასწავლებელთა სახელმძღვანელოდ ან დამოუკიდებლად სწავლისათვის. გამოყენებული ლიტერატურის ვრცელი ჩამონათვალი მკითხველს არაწრფივი დინამიკის შესახებ ლიტერატურას აცნობს, რომლის გასაცნობად მას წინამდებარე სახელმძღვანელოს გაცნობა მოამზადებს.

წიგნის თარგმანი დაფინანსდა საქართველოს მეცნიერებისა და განათლების სამინისტროს პროგრამით - „საუნივერსიტეტო სახელმძღვანელოების განვითარება“. წიგნი მომზადდა ილიას სახელმწიფო უნივერსიტეტის მიერ.

პირველი ქართული გამოცემა

ISBN 978-9941-9116-0-6

ილიას სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა

ქაქუცა ჩოლოყაშვილის 3/5, თბილისი, 0162, საქართველო

Iliia State University Publishing

3/5 K. Cholokashvili Ave, Tbilisi, 0162, Georgia

სარჩევი

თავი 1 – ქაოსის ფენომენოლოგია -11

1. სამი ქაოსური სისტემა-11
 - 1.1 შესავალი-11
 - 1.2 წრფივი და არაწრფივი სისტემები-13
 - 1.3 არაწრფივი ელექტრული სისტემა -18
 - 1.4 ბიოლოგიური პოპულაციის ზრდის მათემატიკური მოდელი -29
 - 1.5 კონვექციური სითხეების ლორენცის მოდელი -41
 - 1.6 ტრაექტორიების დეტერმინიზმი, არაპროგნოზირებადობა და დივერგენცია -54
 - 1.7 დასკვნები – 57
 - 1.8 დამატებითი ლიტერატურა - 58

თავი 2 – ქაოსის უნივერსალურობა – 63

- 2.1 შესავალი-63
- 2.2 ფეიგენბაუმის რიცხვები -64
- 2.3 კრებადობის კოეფიციენტი რეალური სისტემებისთვის -68
- 2.4 δ -ს გამოყენება პროგნოზირებისათვის -71
- 2.5 ფეიგენბაუმის მასშტაბის სკალა -73
- 2.6 თვითმსგავსება -75
- 2.7 სხვა უნივერსალური მახასიათებლები -76
- 2.8 ქაოსის მოდელები და უნივერსალობა -77
- 2.9 კომპიუტერი და ქაოსი -81
- 2.10 დამატებითი ლიტერატურა - 83
- 2.11 კომპიუტერული სავარჯიშოები -84

თავი 3 – არაწრფივი დინამიკისა და ქაოსის თეორიის საწყისები-89

- 3.1 შესავალი -89
- 3.2 მდგომარეობათა სივრცე-90
- 3.3 პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებებით აღწერილი სისტემები -94
- 3.4 არათანაკვეთადობის თეორემა -97
- 3.5 დისიპაციური სისტემები და მიმზიდველები -99

- 3.6 მდგომარეობათა ერთგანზომილებიანი სივრცე-101
- 3.7 გაწრფივება ტეილორის მწკრივის სახით ფიქსირებული წერტილის მიდამოში -106
- 3.8 ტრაექტორიები ერთგანზომილებიან მდგომარეობათა სივრცეში -107
- 3.9 განსხვავებული თვალსაზრისით განხილული დისიპაცია -110
- 3.10 მდგომარეობათა ორგანზომილებიანი სივრცე -112
- 3.11 მდგომარეობების ორგანზომილებიანი სივრცე: ზოგადი შემთხვევა-116
- 3.12 დინამიკა და კომპლექსური მახასიათებელი მნიშვნელობები -121
- 3.13 დისიპაცია და დივერგენციის თეორემა -123
- 3.14 მახასიათებელი მნიშვნელობების იაკობიანი -125
- 3.15 ზღვრული ციკლები -129
- 3.16 პუნკარეს კვითები და ზღვრული ციკლების სტაბილურობა -132
- 3.17 ბიფურკაციათა თეორია -137
- 3.18 დასკვნა -146
- 3.19 დამატებითი ლიტერატურა -147
- 3.20 კომპიუტერული ამოცანები -148

- თავი 4 – მდგომარეობების სამგანზომილებიანი სივრცე და ქაოსი -149
- 4.1 შესავალი -149
- 4.2 ევრისტიკები -151
- 4.3 გზები, რომელთაც „ქაოსისაკენ მივყავართ“ -154
- 4.4 სამგანზომილებიანი დინამიკური სისტემები -156
- 4.5 ფიქსირებული წერტილები სამ განზომილებაში -158
- 4.6 ზღვრული ციკლები და პუნკარეს კვითები -163
- 4.7 კვაზიპერიოდული ქმედება -171
- 4.8 პირველი გზა ქაოსისაკენ: პერიოდის გაორმაგება -174
- 4.9 მეორე გზა ქაოსისაკენ: კვაზიპერიოდულობა -175
- 4.10 მესამე გზა ქაოსისაკენ: წყვეტა და კრიზისები -176
- 4.11 მეოთხე გზა ქაოსისაკენ: ქაოსური გარდამავალი სტადიები და ჰომოკლინიკური ორბიტები -177
- 4.12 ჰომოკლინიკური მარყუევები და ნალები -187
- 4.13 ლიაპუნოვის ექსპონენტები და ქაოსი -189
- 4.14 დამატებითი ლიტერატურა -197
- 4.15 კომპიუტერული ამოცანები -198

თავი 5 – იტერაციული ასახვები -200

- 5.1 შესავალი-200
- 5.2 პუანკარეს კვთები და იტერაციული ასახვები -201
- 5.3 ერთგანზომილებიანი იტერაციული ასახვები -208
- 5.4 ბიფურკაციები იტერაციულ ასახვებში: პერიოდის გაორმაგება, ქაოსი და ლიაპუნოვის ექსპონენტები -212
- 5.5 თვისობრივად უნივერსალური ქმედება: U – მიმდევრობები -221
- 5.6. ფეიგენბაუმის უნივერსალობა -234
- 5.7 კარვის ასახვა -237
- 5.8 წანაცვლების ასახვები და სიმბოლური დინამიკა -241
- 5.9 გაუსის ასახვა-247
- 5.10 ორგანზომილებიანი იტერაციული ასახვები-253
- 5.11 სმეილის ნალის ასახვა-255
- 5.12 დასკვნა-261
- 5.13 დამატებითი ლიტერატურა -261
- 5.14 კომპიუტერული ამოცანები -264

თავი 6 – კვაზიპერიოდულობა და ქაოსი -267

- 6.1 შესავალი -267
- 6.2 კვაზიპერიოდულობა და პუანკარეს კვთები-270
- 6.3 კვაზიპერიოდული გზა ქაოსისაკენ-272
- 6.4 ქაოსისკენ მიმავალი კვაზიპერიოდული გზის უნივერსალობა-274
- 6.5 სიხშირეთა სინქრონიზაცია-276
- 6.6 ნახვევთა რიცხვი-278
- 6.7 წრიული ასახვა-279
- 6.8 ეშმაკის საფეხურები და ფეირის ხე-290
- 6.9 უსასრულო წილადები და ფიბანაჩის რიცხვები-294
- 6.10 ქაოსისა და უნივერსალობის შესახებ-298
- 6.11 ზოგიერთი გამოყენება-305
- 6.12 დამატებითი ლიტერატურა -313
- 6.13 კომპიუტერული სავარჯიშოები -315

თავი 7 – წყვეტა და კრიზისები -316

- 7.1 შესავალი-316
- 7.2 რა არის წყვეტა?-316
- 7.3 წყვეტის მიზეზები-319
- 7.4 წყვეტის რიცხვითი თეორია-324
- 7.5 წყვეტის ტიპები და ექსპერიმენტული კვლევები-327
- 7.6 კრიზისები-330
- 7.7 ზოგიერთი დასკვნა-339
- 7.8 დამატებითი ლიტერატურა -339
- 7.9 კომპიუტერული ამოცანები-341

თავი 8 – ჰამილტონისეული სისტემები-342

- 8.1 შესავალი-342
- 8.2 ჰამილტონის განტოლებები და ჰამილტონის ფუნქცია-344
- 8.3. ფაზური სივრცე-347
- 8.4 მოძრაობის მუდმივები და *ინტეგრებადი* ჰამილტონიანები -351
- 8.5 არაინტეგრებადი სისტემები, **KAM** თეორემა და პერიოდის გაორმაგება-364
- 8.6 ჰენონ-ჰეილსის ჰამილტონიანი-373
- 8.7 ჩირიკოვის სტანდარტული ასახვა-382
- 8.8 არნოლდის კატის ასახვა-388
- 8.9 დისიპაციური სტანდარტული ასახვა-390
- 8.10 ჰამილტონისეული დინამიკის გამოყენება-392
- 8.11 დამატებითი ლიტერატურა -394
- 8.12 კომპიუტერული ამოცანები-396

თავი 9 – ქაოსის გაზომვა-397

- 9.1 შესავალი-397
- 9.2 დინამიკური ცვლადების დროითი მწკრივები-398
- 9.3. ლიაპუნოვის ექსპონენტები-402
- 9.4 ლიაპუნოვის ექსპონენტის უნივერსალური ნორმირება-407
- 9.5 ინვარიანტული ზომა-411

- 9.6 კოლმოგოროვ-სინაის ენტროპია-418
- 9.7 ფრაქტალური განზომილებები-425
- 9.8 კორელაციური განზომილება-443
- 9.9 კომენტარები და დასკვნები-459
- 9.10 დამატებითი ლიტერატურა -460
- 9.11 კომპიუტერული ამოცანები-464

თავი 10 – მრავალი განზომილება და მულტიფრაქტალები-465

- 10.1 ზოგადი კომენტარები და შესავალი-465
- 10.2 ჩადგმული სივრცეები-466
- 10.3 პრაქტიკული მოსაზრებები ჩადგმის მეთოდთან დაკავშირებული გამოთვლების შესახებ-475
- 10.4 განზოგადებული განზომილებები და კორელაციური ჯამები-482
- 10.5 მულტიფრაქტალები და ნორმირების ინდექსების $f(\alpha)$ სპექტრი-487
- 10.6 განზოგადებული ენტროპია და $g(\Delta)$ სპექტრი-501
- 10.7 ქაოსის დახასიათება პერიოდული ორბიტების მეშვეობით-512
- 10.8 *სტატისტიკურ-მექანიკური და თერმოდინამიკური ფორმალიზმი-516
- 10.9 იმპულსის ანალიზი, \mathcal{J} -არიცხვა და მომიჯნავე საკითხები-522
- 10.10 დასკვნები-523
- 10.11 დამატებითი ლიტერატურა -525
- 10.12 კომპიუტერული ამოცანები-530

თავი 11 – სტრუქტურის წარმოქმნა და დრო-სივრცეში გამოხატული ქაოსი -531

- 11.1 შესავალი-531
- 11.2 სითხის ორგანზომილებიანი ნაკადი-534
- 11.3. კორელირებადი ოსცილატორების მოდელები, ფიჭური ავტომატი და ქსელები-541
- 11.4 გადატანის მოდელები-551
- 11.5 დიფუზიურ - რეაქციული სისტემები: სტრუქტურის წარმოქმნის მოდელი-565
- 11.6 დიფუზიით შეზღუდული აგრეგაცია, ელექტროდეკომპოზიცია და სიბლანტის ენები: დაბრუნება ფრაქტალებთან -580
- 11.7 თვითორგანიზებული კრიტიკული მდგომარეობა: ფრაქტალების ფიზიკა?-588

11.8. დასკვნები -590

11.9 დამატებითი ლიტერატურა -591

11.10. კომპიუტერული ამოცანები-597

თავი 12 – კვანტური ქაოსი, კომპლექსურობის თეორია და სხვა საკითხები-599

12.1 შესავალი-599

12.2 კვანტური მექანიკა და ქაოსი-599

12.3 ქაოსი და ალგორითმული კომპლექსურობა-622

12.4 სხვადასხვა საკითხები: უბან-უბან წრფივი და დროში წანაცვლების მოდელები, ინფორმაციული თეორია, სტოქასტიური რეზონანსი, კომპიუტერული ქსელები, ქაოსის კონტროლი და ქაოსის სინქრონიზაცია-625

12.5 ქაოსთან დაკავშირებული ზოგიერთი მარტივი ექსპერიმენტი -635

12.6 ზოგადი კომენტარები და განხილვა: ქაოსის მომავალი-635

12.7 დამატებითი ლიტერატურა -637

დანართი A—ფურიეს ენერგეტიკული სპექტრები-649

A.1 შესავალი და ძირითადი განსაზღვრებები-649

A.2 ექსპონენციალური მწკრივები-651

A.3 ენერგეტიკული სპექტრი-653

A.4 არაპერიოდული ფუნქციები-654

A.5 ფურიეს ანალიზი და არაწრფივი დინამიკა-658

A.6 ფურიეს სივრცითი გარდაქმნები და რიცხვით მეთოდებთან დაკავშირებული კომენტარები-658

დანართი B -ბიფურკაციის თეორია-660

B.1 შესავალი-660

B.2 ლოკალური ბიფურკაციები-662

B.3 გლობალური ბიფურკაციები-665

B.4 დამატებითი ლიტერატურა -666

დანართი C - ლორენცის მოდელი-667

C.1 შესავალი-667

C.2. ნავე-სტოქსის განტოლებები-670

C.3 უგანზომილებო ცვლადები-673

C.4 ნაკადის ფუნქცია-675

C.5 ფურიეს მწკტივები, გალერკინის პროცედურა და სასაზღვრო პირობები-677

C.6 ლორენცის განტოლებების საბოლოო ფორმა-678

C.7 არაკონვექციური მდგომარეობის სტაბილურობის ანალიზი-681

C.8 დამატებითი ლიტერატურა -682

დანართი D - ქაოსის კვლევასთან დაკავშირებული პერიოდული გამოცემები-
683

დანართი E - კომპიუტერული პროგრამები-684

E.1 ზოგადი კომენტარები-684

E.2 ტრაექტორიის წერტილების გამოთვლისა და მათი გრაფიკულად გამოსახვის
პროგრამა ლოჯისტიკური ასახვისათვის-684

E.3. BIFUR, ბიფურკაციული დიაგრამის ამგები პროგრამა ლოჯისტიკური ასახვისათვის-
687

E.4 ასახვის ფუნქციათა გრაფიკული იტერაციების გამომსახველი პროგრამა-690

დანართი F - ფეიგენბაუმის უნივერსალური რიცხვების თეორია-694

F.1 ფეიგენბაუმის -694

F.2. * ფეიგენბაუმის რიცხვის განსაზღვრა-702

F.3 დამატებითი ლიტერატურა -707

დანართი G - დაფინგის ოსცილატორი ორი პოტენციალური ორმოთი-708

G.1. მოდელი-708

G.2 დამატებითი ლიტერატურა -713

G.3 კომპიუტერული ამოცანები -713

დანართი H - ერთგანზომილებიანი იტერაციული ასახვების დამახასიათებელი
სხვა უნივერსალური თვისებები-714

H.1 შესავალი-714

H.2 ენერგეტიკული სპექტრი-714

H.3 ხმაურისათვის დამახასიათებელი ეფექტები-717

H.4 დამატებითი ლიტერატურა -719

დანართი I - ვან დერ პოლის ოსცილატორი-720

I.1 ვან დერ პოლის მოდელი-720

I.2 დამატებითი ლიტერატურა -729

I.3 კომპიუტერული ამოცანები-730

დანართი J - ლაზერის დინამიკის მარტივი მოდელები-731

J.1 მარტივი მოდელი-731

J.2 ლაზერის გაუმჯობესებული მოდელი-735

J.3 დამატებითი ლიტერატურა -739

J.3 კომპიუტერული ამოცანა-739

I

ქაოსის ფენომენოლოგია

1

სამი ქაოსური სისტემა

„პირველად იყო ქაოსი“

ჰესიოდე, თეოგონია 116.

1.1. შესავალი

ცნება ქაოსი გამოიყენება ისეთი სისტემების კომპლექსური ქცევის აღსაწერად, რომელთაც ჩვენ ვთვლით მარტივად და მოწესრიგებულად. ერთი შეხედვით, ქაოსური ქმედება გამოიყურება როგორც ექსცენტრული და სრულიად მოუწესრიგებელი – ანალოგიურად ისეთი სისტემისა, რომელიც განიცდის გარეშე, მოუწესრიგებელი „ხმაურის“ ძლიერ გავლენას ან წააგავს დიდი რაოდენობით თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემის რთულ ქმედებას, როდესაც თითოეული ხარისხი „აკეთებს იმას, რაც მოესურვება“.

უნდა აღინიშნოს, რომ ქმედების ისეთი ტიპი, რომელსაც ბოლო ოცი წლის განმავლობაში ქაოსურს უწოდებენ, თავს იჩენს ძალიან მარტივ სისტემებშიც კი, რომელთაც გააჩნიათ თავისუფლების მცირე რაოდენობით ხარისხი და ხმაურისაგან თითქმის მთლიანად თავისუფალნი არიან. სინამდვილეში, ასეთი სისტემები არსებითად დეტერმინისტულია – ღრის რაღაც მომენტის შესაბამისი სისტემის მდგომარეობის ზუსტი ცოდნა, პრინციპში, საშუალებას გვაძლევს ვიწინასწარმეტყველოთ, თუ როგორი იქნება მისი ქმედება მომავალში. ქაოსის შეცნობის პრობლემა ერთი შეხედვით კონფლიქტში მყოფი ცნებების – უწესრიგობისა და დეტერმინიზმის ერთმანეთთან მორგებაში მდგომარეობს.

ასეთი შეცნობის ძირითადი ელემენტია არაწრფივობის ცნება. ჩვენ შეგვიძლია განვაავითაროთ არაწრფივობის ინტუიციური გაგება, თუკი სისტემის ქმედებას დავახასიათებთ ზემოქმედების და რეაქციის ცნებების მეშვეობით. ვთქვათ, სისტემას „ვუბიძგეთ“ და დავაკვირდეთ მის გარკვეულ რეაქციას ასეთ ბიძგზე. შემდეგ დავსვათ კითხვა; რა მოხდება, თუ სისტემას ვუბიძგებთ ორჯერ ძლიერად? თუკი სისტემის რეაქცია ორჯერ ძლიერი იქნება,

ამ შემთხვევაში სისტემის ქმედება შეგვიძლია შევაფასოთ, როგორც წრფივი (ჩვენს მიერ გამოყენებული ქმედების ფარგლებში). მაგრამ თუ რეაქცია არ არის ორჯერ ძლიერი (იგი შეიძლება იყოს უფრო ძლიერი ან სუსტი), მაშინ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ სისტემის ქმედება არის არაწრფივი. ისეთ აკუსტიკურ სისტემებში, როგორიცაა აუდიო-ჩამწერი, მაგნიტოფონი ან ფლეიერი, არაწრფივობა თავს იჩენს გენერირებული ბგერის დისტორსიის სახით. შემდეგ თავში ჩვენ არაწრფივობის უფრო მკაცრ განმარტებას წარმოვადგენთ. არაწრფივი ქმედების შემსწავლელ დარგს **არაწრფივი დინამიკა** ეწოდება.

რატომ დაინტერესდნენ ქაოსით მეცნიერები, ინჟინრები და მათემატიკოსები? პასუხი ორი ნაწილისაგან შედგება: (1) ქაოსის შესწავლა გზას უხსნის ახალ კონცეპტუალურ და თეორიულ საშუალებებს, რომლებიც საშუალებას გვაძლევენ შევისწავლოთ და კატეგორიებად დავყოთ ისეთი კომპლექსური ქმედებები, რომელთაც ჩინში შეჰყავდათ წინამორბედი თეორიები. (2) ქაოსური ქმედება უნივერსალურია – იგი ვლინდება მექანიკურ ოსცილატორებში, ელექტრულ წრედებში, ლაზერებში, არაწრფივ ოპტიკურ სისტემებში, ქიმიურ რეაქციებში, ნერვული სისტემის უჯრედებში, მაღალტემპერატურულ სითხეებში და ბევრ სხვა სისტემაში. უფრო მეტად მნიშვნელოვანია ის გარემოება, რომ ქაოსური ქმედება თვისობრივი და რაოდენობრივი თვალსაზრისით უნივერსალურ თავისებურებებს ავლენს. უნივერსალური თვისებები დამოკიდებული არაა კონკრეტული სისტემის დეტალებზე. უნივერსალობა ნიშნავს, რომ ის მეთოდები, რომლებსაც მარტივი ელექტრული წრედების ან უბრალო მათემატიკური მოდელების კვლევისას მივმართავთ, შეგვიძლია გამოვიყენოთ უშუალოდ ლაზერებისა და გულის პულსაციური უჯრედების ქაოსური ქცევის შესასწავლადაც.

მოცემულ თავში ჩვენ გავეცნობით ქაოსის შესწავლასთან დაკავშირებულ ძირითად პრობლემებს სამი სრულიად განსხვავებული სისტემის – ნახევარგამტარული დიოდური წრედის, ბიოლოგიური პოპულაციის ზრდისა და კონვექციური ხსნარის მათემატიკური მოდელების აღწერის მეშვეობით. ჩვენი მიდგომა მდგომარეობს იმაში, რომ ვაჩვენოთ, თუ რა სახეს მიიღებს ამ სისტემების ქმედება მისი მაკონტროლებელი რომელიმე პარამეტრის ცვლილებისას. როგორც ქვემოთ ვნახავთ, ზემოთხსენებული სამი სისტემის ქმედება საკმაოდ რთულია, მაგრამ ეს „სიძნელები“ მსგავსია თვისობრივად და, რაც არ უნდა საოცარი იყოს, რაოდენობრივი თვალსაზრისითაც. ეს დებულება ფაქტიურად მოკლე ფორმულირებაა იმ ორი საკითხისა რომლებიც წარმოადგენენ ამ კურსის შინაარსს: (1) არაწრფივი დინამიკა, რომლის მეშვეობითაც ვახდენთ ამგვარი ტიპის სისტემების ქმედებათა აღწერას და კლასიფიცირებას; (2) ქაოსის თეორია, რომელიც საშუალებას გვაძლევს შევისწავლოთ კომპლექსურ მოვლენათა არსი და უნივერსალური ხასიათი.

მკითხველის საყურადღებოდ უნდა ითქვას, რომ ამ თავში მოყვანილი შედეგები წარმოადგენს არაწრფივი სისტემების ქმედების უაღრესად მდიდარი სპექტრის მხოლოდ მცირე ნაწილს. ქაოსისა და არაწრფივი დინამიკის თეორია გვასწავლის გარემომცველი სამყაროს მრავალფეროვნების სათანადოდ შეფასებას მაშინაც კი, როდესაც ჩვენ შემოფარგლული ვართ ძალიან მარტივი სისტემებით. მკითხველს ვურჩევთ, რომ მოგვიანებით გააკეთოს დასკვნები ქვემოთ აღწერილი სამი შემთხვევის უნიკალურობის ან საყოველთაო ხასიათის შესახებ. უფრო ზუსტად რომ ვთქვათ, იგი უნდა მოგვევლინოს იმ ნატურალისტიკის როლში, რომელიც ფრთხილად აკვირდება და გაიაზრებს ახალი სამყაროს „ფლორასა და ფაუნას“.

1.2. წრფივი და არაწრფივი სისტემები.

ვიდრე „ახალ სამყაროში“ მოგზაურობას შევუდგებით, სასურველია, რომ მოკლედ მიმოვიხილოთ იმ „ეგზოტიკური ქვეყნების ლანდშაფტი“, რომელთა „წვევასაც“ ჩვენ ვაპირებთ.

სიტყვა *ქაოსი* ჟარგონის ნაწილია, რომელიც ქცევის განსაკუთრებით რთული ტიპის აღსაწერად გამოიყენება. ქაოსი არსებითად არაწრფივი სისტემების ქმედების მხოლოდ ერთ ტიპია. კვლევის სფეროს კი, გაცილებით ზუსტად (და უფრო განზოგადებულად) რომ ვთქვათ, *არაწრფივი დინამიკა* – არაწრფივი სისტემის დინამიკური (ანუ დროის მიხედვით) განვითარება წარმოადგენს. მაგრამ რა არის არაწრფივი სისტემა? აქ ჩვენ მოვიყვანთ ზედაპირულ განსაზღვრებას, რომლის უფრო მკაცრი სახით ჩამოყალიბებასა და ახსნას შემდგომში მოვახდენთ.

არაწრფივია სისტემა, რომლის შესაბამის დინამიკურ განტოლებებს გააჩნიათ არაწრფივი სახე, ანუ სისტემის თვისებების აღმწერი დინამიკური სიდიდეები (მაგალითად, მდებარეობა, სიჩქარე, აჩქარება, წნევა და ა. შ.) განტოლებაში წარმოდგენილია არაწრფივი სახით.

მაგალითისათვის მოვიყვანოთ ორი შემთხვევა ელემენტარული მექანიკიდან. ვთქვათ, ერთი სისტემა წრფივია, ხოლო მეორე კი – არაწრფივი. კლასიკურ მექანიკაში m მასის მქონე მატერიალური წერტილისაგან შემდგარი სისტემის მოძრაობა, რომელიც განიცდის F_x ძალის ზემოქმედებას და გადაადგილდება მხოლოდ x ღერძის გასწვრივ, მოიცემა ნიუტონის მეორე კანონის მეშვეობით:

$$F_x(x, t) = ma = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (1.2-1)$$

განვიხილოთ კარგად ნაცნობი შემთხვევა ელემენტარულ ფიზიკიდან, როდესაც წერტილოვანი მასა განიცდის იდეალური ზამბარის ზემოქმედებას. მასზე მოქმედი ძალა მოიცემა შემდეგი სახით:

$$F_x(x) = -kx \quad (1.2-2)$$

აქ x ცვლადი წარმოადგენს ზამბარის წანაცვლებას წონასწორული მდებარეობიდან (სადაც $F_x=0$), k კი ე. წ. ზამბარის მუდმივაა, რაც მისი სინისტის საზომს წარმოადგენს. (1.2-1) და (1.2-2) განტოლებების შეკრებით მივიღებთ ნაწილაკის მდებარეობის დროში ცვლილების განტოლებას:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad (1.2-3)$$

ეს განტოლება წრფივია x -სა და მისი მეორე რიგის წარმოებულის მიმართ (აჩქარება). აქედან გამომდინარე, ჩვენ სახეზე გვაქვს წრფივი სისტემა. თუკი მასას წავანაცვლებთ წონასწორული მდებარეობიდან და თავისუფლებას მივანიჭებთ, იგი დაიწყებს რხევას წონასწორული მდებარეობის მიმართ სინუსოიდურად შემდეგი წრეული სიხშირით:

$$\omega = \sqrt{k/m} \quad (1.2-4)$$

მეორე შემთხვევაში F_x ძალას მივანიჭებთ უფრო რთული დამოკიდებულება x -ის მიმართ. მაგალითად, თუ $F=bx^2$, მაშინ მოძრაობის განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{b}{m}x^2 \quad (1.2-5)$$

და სისტემა ამ შემთხვევაში არაწრფივია, რადგანაც მატერიალური წერტილის x მდებარეობა განტოლებაში წარმოდგენილია კვადრატული სახით.

სისტემა წრფივია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც სრულდება შემდეგი პირობები: ვთქვათ, $g(x,t)$ და $h(x,t)$ ფუნქციები წარმოადგენენ წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნებს მოცემული სისტემისათვის; მაშინ $cg(x,t)+dh(x,t)$ წრფივი კომბინაციაც ასევე ამონახსნია, სადაც c და d ნებისმიერი რიცხვებია. შევნიშნოთ, რომ $g(x,t)$ და $h(x,t)$ წრფივად დამოუკიდებელი ფუნქციებია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\alpha g(x,t)+\beta h(x,t)=0$ დამოკიდებულება ჰქმნარა ნებისმიერი x -ისა და t -თვის, როდესაც $\alpha=0$ და $\beta=0$.

არაწრფივობის ცნება ასევე შეგვიძლია გამოვხატოთ გარეშე ზემოქმედებაზე სისტემის რეაქციის მეშვეობით. ვთქვათ, რომ $h(x,t)$ ფუნქცია წარმოადგენს სისტემის რეაქციას კონკრეტულ $S(t)$ ზემოქმედებაზე. თუ $S(t)$ ფუნქციას შევცვლით $2S(t)$ -თი, წრფივი სისტემის რეაქცია იქნება $2h(x,t)$. არაწრფივი სისტემისათვის კი რეაქცია $2h(x,t)$ -ზე ან მეტი იქნება, ან ნაკლები.

ამოცანა 1.2-1. დაუმატეთ გარეშე ზემოქმედების გამომხატველი წევრი (1.2-3) განტოლების მარჯვენა ნაწილს. გამოიყენეთ წინა პარაგრაფში მოყვანილი არგუმენტი და აჩვენეთ, რომ (1.2-3) განტოლების მეშვეობით აღწერილი სისტემა წრფივია, თუ **ზემოქმედება** დამოკიდებული არ არის x -სა და მის წარმოებულებზე, ან ისინი წარმოდგენილი არიან ზემოქმედების გამომხატველ წევრში წრფივად.

არაწრფივობის მნიშვნელობა

არაწრფივი დინამიკა დაკავებულია ისეთი სისტემების შესწავლით, რომელთა დინამიკური განტოლებები არაწრფივია. რა წინააღმდეგობებს აწყდება არაწრფივი თეორია? ძირითადი იდეა მდგომარეობს შემდეგში: თუ წრფივი სისტემის აღმწერი ისეთი პარამეტრი, როგორცაა (1.2-3) განტოლებაში შემავალი ზამბარის k მუდმივა, იცვლება, მაშინ შედეგად მიღებული რხევის სიხშირე და ამპლიტუდა შეიცვლება, მაგრამ პროცესის ხასიათი თვისობრივად იგივე რჩება (მოცემულ შემთხვევაში გვაქვს ელემენტარული ჰარმონიული რხევა). ფაქტიურად, მანძილისა და დროის გამომხატველ ღერძებზე მასშტაბის შესაბამისად შეცვლით k -ს ნებისმიერი მნიშვნელობის შესაბამისი პროცესები ერთმანეთის იდენტური იქნება. როგორც ქვემოთ ვნახავთ, რომ არაწრფივი სისტემებისათვის პარამეტრის მცირე ვარიაციამ შესაძლებელია გამოიწვიოს სწრაფი და დრამატული ცვლილებები სისტემის ქმედებაში როგორც თვისობრივი, ასევე რაოდენობრივი თვალსაზრისით. პარამეტრის ერთი მნიშვნელობისათვის პროცესს პერიოდული ხასიათი ექნება, ხოლო მეორე, ოდნავ განსხვავებული მნიშვნელობის შემთხვევაში კი სრულ არაპერიოდულობასთან გვექნება საქმე. (საკითხს, თუ რატომ არის არაწრფივობა არსებითი და როგორ მივყავართ მას ასეთ დრამატულ ცვლილებებამდე, მომდევნო თავებში შევეხებით). უნდა აღინიშნოს, რომ თითქმის ყოველი რეალური სისტემა არაწრფივია გარკვეული მცირე დოზით მაინც. აქედან გამომდინარე, იმ ტიპის პროცესები, რომლებსაც მოცემულ კურსში განვიხილავთ, ატარებენ ბევრად ზოგად ხასიათს, ვიდრე წრფივი იდეალიზაცია, რომელიც ბოლო 300 წლის განმავლობაში ფიზიკის ძირითად პრინციპს წარმოადგენდა. ცნობილი მათემატიკოსის, სტანისლავ ულამის, სიტყვებით რომ ვთქვათ, „საგნები არაწრფივი დინამიკის გარეშე იგივეა, რაც ზოოლოგია სპილოს გარეშე“ [Gleick, 1987]. თუმცა, კვლევის ამ სფეროსათვის შეგვეძლო „ზოგადი დინამიკის“ დარქმევა, რადგანაც მხოლოდ წრფივი სისტემების შესწავლა წააგავს ვიწრო ბილიკით მოძრაობას დინამიკის ვრცელი „ტერიტორიის“ ფარგლებში.

არაწრფივობა და ქაოსი

არაწრფივ სისტემებში ზოგიერთმა სწრაფმა და დრამატულმა ცვლილებამ შესაძლოა ბიბეი მისცეს ისეთ კომპლექსურ პროცესს, რომელსაც ჩვენ ქაოსს ვუწოდებთ. ტერმინები „ქაოსი“ და „ქაოსური“ გამოიყენება სისტემის ქმედების აღსაწერად, რომელიც არაპერიოდულ ხასიათს ატარებს (ზუსტად ერთნაირად არასოდეს მეორდება) და ერთი შეხედვით გამოიყურება როგორც მოუწესრიგებელი ანუ „ხმაურიანი“. მთავარი სიტყვა აქ არის „ერთი შეხედვით“. ამგვარი ერთი შეხედვით ქაოსური მოუწესრიგებლობის უკან დგას გარკვეული კანონზომიერება, რომელსაც განსაზღვრავს სისტემის აღმწერი განტოლებები. ფაქტობრივად, ჩვენს მიერ განსახილველი სისტემების უმეტესობა სრულიად დეტერმინისტულია. საზოგადოდ, სისტემის ქმედების განსასაზღვრად ჩვენ გვესაჭიროება შემდეგი სამი კომპონენტი:

1. დინამიკური განტოლებები;
2. სისტემის აღმწერი პარამეტრების მნიშვნელობები;
3. საწყისი პირობები.

სისტემა *დეტერმინისტულია*, თუ დინამიკური განტოლებების, სისტემის აღმწერი პარამეტრების მნიშვნელობებისა და საწყისი პირობების ცოდნა (მაგალითად, x მდებარეობა და dx/dt სიჩქარე $t=0$ -თვის, (1.2-3) და (1.2-5) განტოლების შემთხვევაში), ფაქტობრივად სისტემის მომავალი ქმედების მთლიანად განსაზღვრის საშუალებას გვაძლევს. მნიშვნელოვანი პრობლემაა, თუ როგორ მივუსადაგოთ ამგვარი დეტერმინიზმი ერთი შეხედვით მოუწესრიგებელ პროცესს.

შესაძლოა, ამ პრობლემისათვის ნათელის მოფენაში ტრადიციული (ანუ „ქაოსამდელი“) მეცნიერის როლის შესრულება დაგვეხმაროს. თუკი სისტემას კომპლექსური, მოუწესრიგებელი სახით განვიხილავთ, შევეცადოთ ავხსნათ მისი ქმედება, როგორც ტერმინ „ხმაურის“, ასევე „კომპლექსურობაზე“ დამყარებული არგუმენტის მეშვეობით. პირველ შემთხვევაში, კომპლექსური ქმედება შეიძლება დამოკიდებულებაში იმყოფებოდეს ისეთ არაკონტროლირებად გარემო ფეხქტებთან, როგორიცაა ძაბვის მკვეთი მატება, მექანიკური ვიბრაციები და ტემპერატურული ფლუქტუაციები. ვინაიდან ასეთი გარე ფაქტორები არაკონტროლირებადი სახით იცვლება, სისტემის ქმედება გამოიყურება როგორც მოუწესრიგებელი. კომპლექსურობის არგუმენტზე დაყრდნობით ჩვენ ვათვიცნობიერებთ, რომ ბიოლოგიაში, ქიმიასში, ფიზიკასა და საინჟინრო ტექნოლოგიებში არსებულ რეალურ სისტემათა უმრავლესობა შედგება მილიონობითა და მილიარდობით ატომისა და მოლეკულისაგან. ვინაიდან ჩვენ ზუსტად ვერ ვაკონტროლებთ (ან არც კი ვიცით) ყველა ამ ატომისა და მოლეკულის ქმედებას (საუკეთესო შემთხვევაში შეგვიძლია შევისწავლოთ

მათი გასაშუალოებული მოძრაობა), სულაც არაა გასაკვირი, რომ კონტროლის ნაკლებობამ გამოიწვიოს ფლუქტუაციები და მოუწესრიგებლობა სისტემის ქმედებაში. უფრო ტექნიკურად რომ ვთქვათ, რომ ასეთ კომპლექსურ სისტემებს თავისუფლების მრავალი ხარისხი გააჩნიათ და სწორედ ამ ხარისხების აქტიურობითაა გამოწვეული ერთი შეხედვით მოუწესრიგებელი ქმედება. (მე-3 თავში ჩვენ უფრო ზუსტად განვმარტავთ, თუ რას ნიშნავს თავისუფლების ხარისხი. ამჯერად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ ესაა სისტემის ქმედების აღწერისათვის საჭირო ცვლადი). უმეტესწილად, როგორც ხმაურს, ისე კომპლექსურობას შეაქვთ ქმედებაში თავ-თავიანთი წვლილი.

ქაოსის არსებითი მნიშვნელობა მდგომარეობს იმაში, რომ იგი გვაძლევს გარეგნული უწესრიგობის ალტერნატიულ ახსნას, რაც დამოკიდებულებაში არაა არც ხმაურთან, არც კომპლექსურობასთან. ქაოსი თავს იჩენს ისეთ სისტემებშიც კი, რომლებიც შედარებით მარტივი და ხმაურისაგან არსებითად თავისუფალი არიან – აქ თავისუფლების ხარისხების მხოლოდ მცირე რაოდენობა იმყოფება აქტიურ მდგომარეობაში. თუ ჩავთვლით, რომ ქაოსი ნებისმიერ ექსპერიმენტში გარკვეულ როლს ასრულებს, მაშინ უნდა დავადგინოთ, წარმოადგენს თუ არა ხმაური უმთავრეს ფაქტორს და რას უდრის თავისუფლების ხარისხთა აქტიური რაოდენობა. ქაოსის თეორია უზრუნველგვყოფს სათანადო მექანიზმებით ამგვარი ანალიზის ჩასატარებლად.

აქამდე განსაკუთრებულ ყურადღებას ვანიჭებდით სისტემის ქმედებას დროში. არაწრფივი დინამიკის სხვა მნიშვნელოვანი განშტოება განავრცობს ზემოთხსენებულ კვლევებს მნიშვნელოვანი სივრცული მასშტაბების მქონე სისტემების მიმართ. ზოგიერთ ამ სისტემათაგანს, მაგალითად, ტურბულენტური ხსნარებს, დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს. მათ უმეტესობას გააჩნია საოცარი უნარი სრულიად სპონტანურად წარმოქმნას რთული და უმეტესწილად მშვენიერი სტრუქტურები. მას შემდეგ რაც წიგნის პირველ ნაწილში ჩვენ განვიხილავთ დროში მიმდინარე პროცესებს, შევეხებით ასევე სივრცულ სტრუქტურებს და მათ კავშირს ქაოსთან.

მნიშვნელოვანი კითხვები

ზემოთმოყვანილი მოკლე მიმოხილვის საფუძველზე ჩვენ შეგვიძლია ჩამოვთვალოთ შეკითხვები, რომელთა პასუხის გაცემასაც „ქაოტიკოსი“ შეეცდება:

1. რომელი ტაპის არაწრფივი სისტემები წარმოაჩენენ ქაოსს? (ყველა ქაოსური სისტემა არაწრფივია, მაგრამ ნებისმიერი არაწრფივი სისტემა არაა ქაოსური.)
2. როგორ იცვლება არაწრფივი სისტემის ქმედება, თუკი სისტემის მახასიათებელი პარამეტრები იცვლება?

3. როგორ ვადგენთ, რომ სისტემა ნამდვილად ქაოსურია და როგორ აღვწერთ ქაოსს რაოდენობრივად?
4. რა უნივერსალური მახასიათებლებია ნაპოვნი მრავალი არაწრფივი სისტემისათვის? არის თუ არა ეს თვისებები ჭეშმარიტად უნივერსალური, თუ ისინი ქაოსის სხვადასხვა ტიპს წარმოადგენენ?
5. როგორ გვესმის ჩვენ ამგვარი უნივერსალობა?
6. რას გვაძლევს ქაოსის შესწავლა მეცნიერული და ტექნიკური თვალსაზრისით?
7. რა არის ქაოსის ფილოსოფიური და მეთოდოლოგიური არსი?

რაც უფრო სიღრმისეულად გავერკვევით მოცემულ კურსში, მით უფრო ნათლად ჩამოვაყალიბებთ და ხელახლა გავიაზრებთ კითხვებსა და მათზე პასუხებს განსხვავებული მიდგომების მეშვეობით.

1.3. არაწრფივი ელექტრული სისტემა.

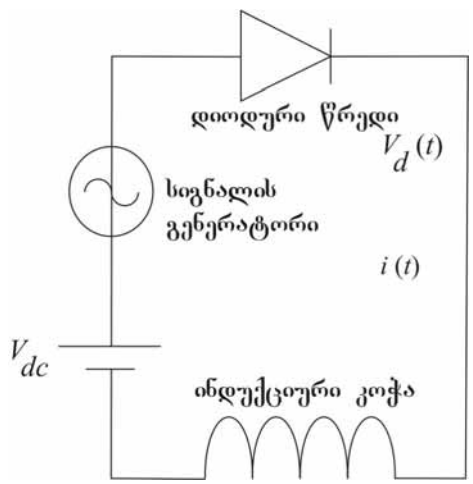
ქაოსური სისტემის ჩვენი პირველი მაგალითია უბრალო ელექტრული წრედი. იგი ავირჩიეთ ორი მნიშვნელოვანი გარემოების გამო. უპირველეს ყოვლისა, ქაოსურ ქცევას ადგილი აქვს რეალურ სისტემებში; იგი არ წარმოადგენს ადამიანის მიერ შექმნილ არაბუნებრივ, თეორიულ თუ რიცხობრივ თვალსაზრისით შეზღუდულ მოდელს. მეორე მხრივ, ქაოსს ადგილი აქვს ისეთ მეტად მარტივ სისტემებშიც კი, რომლებიც ყოველდღიურ ცხოვრებაში გვხვდებიან. დიოდური წრედის ყოველი კომპონენტი მსგავსია იმისა, რაც თითქმის ყველა რადიომიმღებში, ტელევიზორსა და ვიდეოაპარატურაში გვხვდება. მოცემული სქემა წარმოადგენს სინუსოიდურ წრედს, რომელიც შედგება სიგნალის გენერატორის, ინდუქციური კოჭისა და ნახევარგამტარული დიოდისაგან. წრედის სქემა მოცემულია (1.1) ნახაზზე.

როგორ ფუნქციონირებს წრედი

მოკლედ შევეხოთ წრედის მუშაობის პრინციპს. მიუხედავად იმისა, რომ ეს დისკუსია არ წარმოადგენს ქაოსის თეორიასთან ჩვენი პირველი კონტაქტის აუცილებელ პირობას, მკითხველთა უმეტესობისათვის უმჯობესი იქნება, თუ მას გარკვეულ წარმოდგენას შეუქმნით წრედში მიმდინარე ფიზიკური პროცესების შესახებ. მკითხველი, რომელიც არ არის დაინტერესებული ასეთი დეტალებით, შეუძლია გამოტოვოს ეს ნაწილი და გადავიდეს მომდევო სექციაზე – *რა ხდება წრედში*.

დავიწყით დიოდით. იგი გახლავთ ელექტრული მოწყობილობა, რომლის დანიშნულებაა თავისუფლად გაატაროს ელექტრული დენი ერთი მიმართულებით და წინააღმდეგობა გაუწიოს მას საპირისპირო მიმართულებით მოძრაობისას. დენის გატარების მიმართულება ნაჩვენებია დიდი სამკუთხედის მეშვეობით (იხ. ნახაზი 1.2). მოვიყვანოთ მარტივი ანალოგია დიოდში მიმდინარე ფიზიკური პროცესის გასაგებად. წარმოვიდგინოთ წყალსადენი მილი მასში ჩადგმული ჩამკეტი სარქველით. სარქველი შეიძლება გაიხსნას მარჯვნივ და წყალი ადვილად გაედინება ამ მიმართულებით, რასაც გამტარობის მიმართულება ეწოდება. წყლის საპირისპირო მიმართულებით გადაადგილებისას სარქველი ჩაიკეტება და შეაჩერებს მის დინებას – გვაქვს ე.წ. უკუდინების მიმართულება. (აღამიანის გულის სარქველი ანალოგიური გზით არეგულირებს გულის სექციებს შორის სისხლის ნაკადის მოძრაობას.)

დიოდურ წრედში არსებული ქოსის გასაგებად მნიშვნელოვანია ზემოთმოყვანილი ანალოგიის საში თვისება. უპირველეს ყოვლისა, სარქველი საჭიროებს დროის გარკვეულ პერიოდს, რათა გამტარობის მიმართულებით აწევის შემდეგ ჩაიკეტოს. ამგვარად, ვიდრე სარქველი დაიხურება, აუცილებლად ადგილი ექნება მცირე რაოდენობის ნაკადის გაღწევას უკუდინების მიმართულებით. სარქველის (დიოდის) ჩაკეტვისათვის საჭირო დროის ინტერვალს **უკუ-აღდგენის დრო** ეწოდება. აქ წარმოდგენილი დიოდის ტიპებისათვის ეს სიდიდე რამდენიმე მიკროწამის ტოლია.

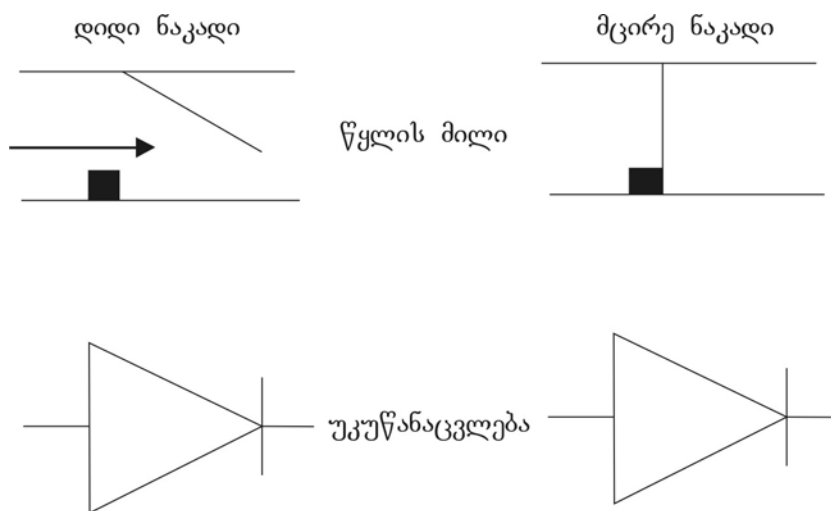


ნახაზი 1.1. დიოდური წრედი. სიგნალის გენერატორი და ცვლადი დენის წყარო ატარებს $i(t)$ ელექტრულ დენს მიმდევრობით ჩართული ინდუქციური კოჭისა და დიოდის გავლით. $V_d(t)$ წარმოადგენს დროზე დამოკიდებულ პოტენციალთა სხვაობას.

შეგვიძლია დავრწმუნდეთ, რომ როდესაც წრედში გამავალი დენი იცვლება **უკუ-აღდგენის დროის** რიგის ინტერვალში, თავს იჩენენ საინტერესო ეფექტები. გარდა ამისა, ჩაკეტვის დრო გარკვეულწილად დამოკიდებულია გამტარობის მიმართულებით არსებული დენის ძალაზე. თუ გვექნება მცირე სიმძლავრის ნაკადი, მაშინ სარქველი სწრაფად ჩაიკეტება, რადგანაც იგი არ იქნება მარჯვნივ ძალიან აწეული. თუკი ნაკადი შედარებით მძლავრია, სარქველი მეტ ხანს მოანდომებს დახურვას და ნაკადს საშუალება ექნება დროებით გააღწიოს უკუწინაცვლების მიმართულებით.

ჩვენი ანალოგიის მესამე დამახასიათებელი თვისება სარქველისადმი მინიჭებული ენერგიაა, როდესაც წყლის ნაკადი მას ძალა სწევს. ეს პოტენციალური ენერგია უბრუნდება ნაკადს სარქველის ჩაკეტვისას. იგი ანალოგია დიოდის ელექტრულ ტევადობაში დაგროვებული ენერგიისა. ეს ტევადობა გახლავთ საზომი იმისა, თუ რა რაოდენობის ელექტროენერგიაა (დროებით) დაგროვებული დიოდის ელექტრულ მუხტთა შრებში. აქ მოყვანილი დიოდისათვის ტევადობა დაახლოებით 100 პიკოფარადია, რაც ტიპიურია რადიოებისა და ტელევიზორების ელექტროსქემებში გამოყენებული მცირე კონდენსატორებისათვის.

დავუბრუნდეთ ინდუქციურ კოჭას. იგი ელექტრული მოწყობილობაა, რომელიც ფორმით დახვეულ მავთულს გავს და მას მასში დენის ძალის ცვლილებისადმი პროპორციული ელექტრულ პოტენციალთა სხვაობის დამყარების უნარი გააჩნია. პროპორციულობის მუდმივას კოჭის ინდუქციურობა ეწოდება. ამგვარად, ჩვენ ვამბობთ, რომ კოჭა წრედში დენის ცვლილებას ეწინააღმდეგება. (წყლის ნაკადის შემთხვევაში ანალოგიაა ტურბინა ან ფრთიანი ბორბალი, რომლის ბრუნვის მექანიკური ბრუნვითი ინერცია წყლის ნაკადის ცვლილებებს ეწინააღმდეგება.) ინდუქციური კოჭა წრედში ორ ფუნქციას ასრულებს. უპირველეს ყოვლისა, იგი იძლევა სქემაში ქაოსის წარმოსაქმნელად საჭირო დამატებით „თავისუფლების ხარისხს“. კოჭისაგან თავისუფალ სქემაში დენის ძალა და პოტენციალთა სხვაობა იმდენად მჭიდროდ უკავშირდება ერთმანეთს, რომ ქაოსი ვეღარ დაისადგურებს. გარდა ამისა, კოჭა, დიოდის ელექტრულ ტევადობასთან კომბინაციაში, დენისა და ძაბვის მნიშვნელობების რხევის გარკვეულ სიხშირეს ამყარებს. როდესაც რხევების პერიოდი (რომელიც რხევების სიხშირის უკუპროპორციულია)



ნახ. 1.2 წყალსადენი მილისა და სარქველის ანალოგია დიოდისათვის. სარქველი თავისუფლად მოძრაობს ზედა შეერთების წერტილის მიმართულებით. როდესაც წყალი

გადაადგილებას ცდილობს მარჯვნიდან მარცხნისკენ (მარჯვენა ზედა კუთხე), მიღში სარქველი კვლავ ჩაიკეტება და წყლის გადაადგილებას საპირისპირო მიმართულებით შეაჩერებს. როდესაც დიოდი გამტარობის მიმართულებითაა (მარცხენა მხარე), ელექტროდენი თავისუფლად გაივლის. იდეალური დიოდისათვის უკუმიმართულების სტაბილური დენი არ არსებობს (დიაგრამის მარჯვენა მხარე).

დაახლოებით იგივეა, რაც უკუაღდგენის დრო. დენი და ძაბვა იმდენად სწრაფად იცვლება, რომ პირდაპირი მიმართულებიდან უკუმიმართულებაზე გადასვლასთან დაკავშირებული არაწრფივი ეფექტი მნიშვნელოვანი ხდება და ქაოსიც უკვე შესაძლებელია. აქ მოყვანილი სქემისათვის ინდუქციურობა 50 მილიჰენრის ტოლია. მსგავსი ინდუქციურობის მქონე ელექტრო ხელსაწყოებს ბევრ ოჯახში შეხვდებით.

სიგნალის გენერატორი დროში ცვალებად ძაბვას უზრუნველყოფს, რაც თავის მხრივ წრედში დენის აღძვრას განაპირობებს. მოცემული წრედისთვის ჩვენ ვსარგებლობთ გენერატორით, რომელიც დროში სინუსოიდურად ცვალებად პოტენციალთა სხვაობას გამოიმუშავებს:

$$v(t) = V_o \sin 2\pi ft \quad (1.3-1)$$

V_o -ს გენერატორის პოტენციალთა სხვაობის ამპლიტუდა ეწოდება; f სიგნალის სიხშირეა, რაც ერთ წამში მომხდარი რხევების რაოდენობის ტოლია. ზემოთაღწერილ სქემაში f როგორც წესი 20-70 კჰც-ის საზღვრებშია (20,000-70,000 ციკლი წამში). ამგვარი რხევების პერიოდი შესაბამისად 50-14 მიკროწამს შორის მერყეობს, რაც რამდენჯერმე დიდია დიოდების უკუაღდგენის დროზე.

ექსპერიმენტების კომპიუტერული კონტროლისას მოხერხებულია სიგნალის გენერატორის ძაბვას წავუმატოთ მუდმივი, ე.წ. წანაცვლების ძაბვა V_{dc} . ეს უკანასკნელი ცვლის ძაბვის მთავარ მნიშვნელობას, რომლის გარშემოც სიგნალის გენერატორის ძაბვა ფლუქტუირებს.

რა ხდება წრედში: გზა ქაოსისაკენ

მართვადი არაწრფივი სისტემების ფენომენოლოგიის, ქაოსური ქმედებისა და შესაბამისი ტერმინოლოგიის წარმოსადგენად, ჩვენ წრედის ქმედებას სისტემის ერთ-ერთი ცვალებადი პარამეტრის მიხედვით დავახასიათებთ. ამ შემთხვევაში სიგნალის გენერატორის ძაბვის ამპლიტუდას შევცვლით და ამ ცვლად სიდიდეს **კონტროლის პარამეტრს** დავარქმევთ. დავაკვირდეთ დიოდის ბოლოებზე არსებული $V_d(t)$ პოტენციალთა სხვაობისა და დიოდში

გამავალ $i(t)$ დენის დროზე დამოკიდებულებას, და ამავე დროს გენერატორის ძაბვის სინუსოიდური სიგნალის V_0 ამპლიტუდა შევცვალოთ.

როდესაც V_0 დაახლოებით 0,5 ვოლტის ტოლია (დიოდის მაქსიმალურ პოტენციალთა სხვაობის მიახლოებითი მნიშვნელობა, როდესაც იგი დენს გამტარობის მიმართულებით ატარებს), საქმე გვაქვს ჩვეულებრივ დიოდთან. V_d -ს ჩვეულებრივი „ნახევარტალღური მუდულირების“ ფორმა აქვს, რომელიც ნახ. 1.3-ზეა გამოსახული. ტერმინი **ნახევარტალღური** იმიტომ გამოიყენება, რომ მოცემულ ტალღას იმ სინუსოიდალური ტალღის ნახევრის ფორმა აქვს, რომელსაც სიგნალის გენერატორი გამოიმუშავებს. ყურადღება მიაქციეთ, რომ ესთეტიკური მოსაზრებით ოსციოგრაფი მოძარათულია ისე, რომ მრუდი გადაიხრება ზემოთ, როდესაც დიოდში საქმე გვაქვს უკუწანაცვლებასთან. აქამდე დიოდი ისე იქცეოდა, როგორც ამას ელემენტარული ელექტრობიდან ველოდით: დიოდის სიგნალის პერიოდი იგივეა რაც სიგნალის გენერატორისა.

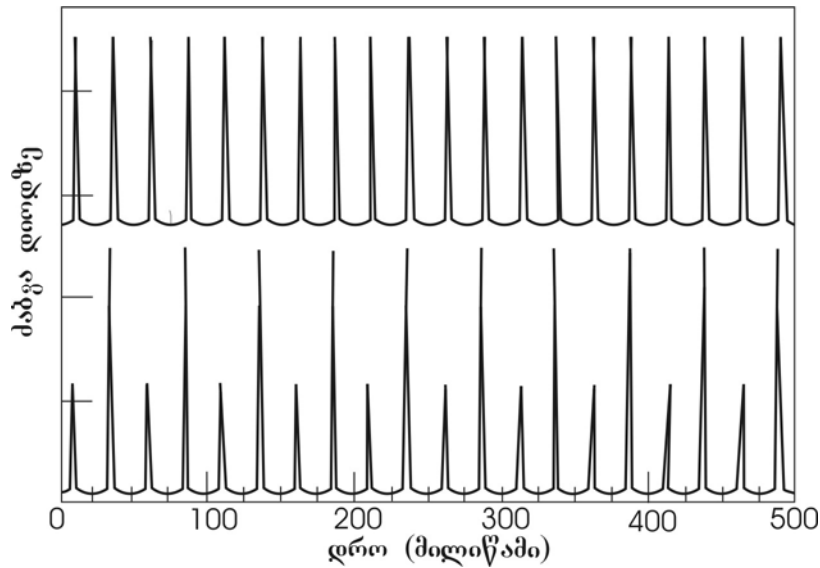
როდესაც V_0 სიდიდე 1 და 2 ვოლტს შორის მერყეობს, სახეზეა პირველი სიურპრიზი – ძაბვის სრულიად განსაზღვრული მნიშვნელობისათვის (ავლნიშნოთ იგი V_I - ით) უკუწანაცვლების „პულსების“ რეგულარული მატრიცა ალტერნატიულ სერიებად იშლება.

1.3 ნახაზზე გამოსახული ქვედა მრუდი გვიჩვენებს, რომ V_d –ს პიკების პერიოდი სიგნალის გენერატორის ძაბვის პერიოდზე ორჯერ მეტია. ამგვარ ქმედებას ჩვენ „პერიოდი-2“-ს ვუწოდებთ. (იგივე ტერმინოლოგიის გამოყენებით, 1.3 ნახაზის ზედა მრუდზე გამოსახულ ტალღის ფორმას შეგვიძლია პერიოდი-1 ვუწოდოთ.) პერიოდი-1-დან პერიოდი-2-ზე გადასვლას *პერიოდის გაორმაგების ბიფურკაცია* ეწოდება.

ბიფურკაცია ორ ნაწილად დაშლას ნიშნავს. ეს ტერმინი არაწრფივ დინამიკაში სისტემის რომელიმე პარამეტრის მყისიერი ცვლილების შედეგად სისტემის ქმედების ცვლილების დასახასიათებლად გამოიყენება. ამ შემთხვევაში **ბიფურკაცია** წარმოდგენილია სისტემის ქმედების ორ ნაწილად გაყოფაში პარამეტრის იმ მნიშვნელობის ზემოთ და ქვემოთ, რომლისთვისაც ზემოთხსენებულ ცვლილებას აქვს ადგილი.

რა არის პერიოდის **ბიფურკაციის** მიზეზი? ფიზიკური ახსნა შემდეგია: როდესაც სიგნალის გენერატორის ძაბვის ამპლიტუდა მატულობს, გამტარობის დენი აგრეთვე იზრდება. როდესაც ამპლიტუდა უმნიშვნელოა, დიოდს უკუწანაცვლების დენის მთლიანად შეჩერებისათვის საკმარისი დრო აქვს. წყლის ნაკადის ანალოგია ამგვარია: თუ სარქველი სრულყოფილად იკეტება, წნევის ვარდნა სარქველის გავლით (რაც შესაბამისობაშია დიოდის

ელექტრულ პოტენციალთა სხვაობასთან), უკუმიმართულებით ყველაზე დიდი იქნება და ამ მიმართულებით დენი აღარ გაივლის.

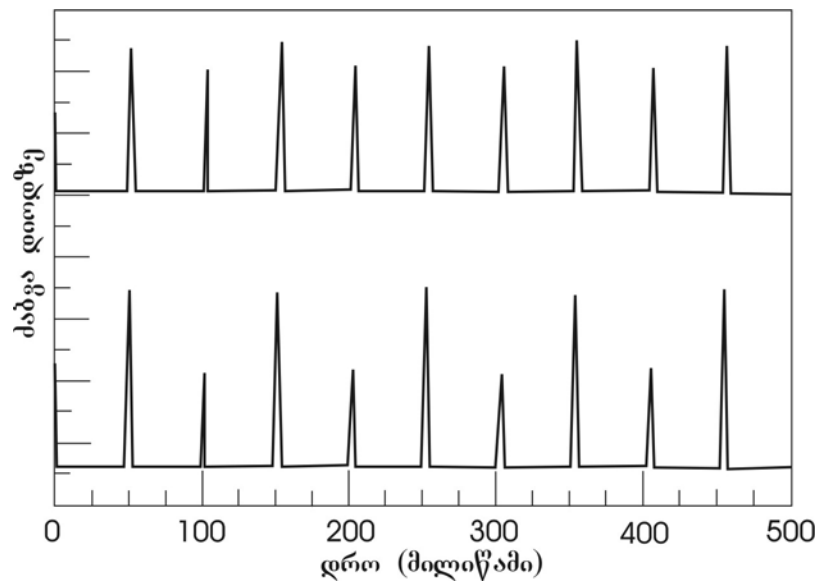


ნახ. 1.3. დიოდზე მოდებული დაბვა, როგორც დროის ფუნქცია. ზედა მრუდი: *პერიოდი-1*. დაბვის პულსებს იგივე პერიოდი აქვს, რაც სიგნალის გენერატორის დაბვას. ქვედა მრუდი: *პერიოდი-2*. სიგნალის პერიოდი ამჯერად სიგნალის გენერატორის დაბვის პერიოდს ორჯერ აღემატება. გენერატორის სიხშირე დაახლოებით 40 კჰც-ა. თითოეული დანაყოფი ორდინატთა ღერძზე 0,2 ვოლტის ტოლია.

როდესაც დიოდის დაბვას გამტარობის მიმართულების პოლარობა აქვს, დენი მყისიერად გაივლის ამ მიმართულებით და ნაკადის სიდიდე მაქსიმალურ მნიშვნელობას მიიღებს, ასწევს რა სარქველს ზედა მდებარეობაში. როდესაც პოლარობა შებრუნდება უკუწანაცვლების მიმართულებით, მაშინ სარქველი ვერ მოასწრებს დახურვას, თუ იგი საკმარისად მაღლაა აწეული და ადგილი ექნება გარკვეულ გაღინებას უკუწანაცვლების უკუ-აღდგენის დროის უმეტესი ნაწილის განმავლობაში. შედეგად წნევის ვარდნა (ელექტრულ პოტენციალთა სხვაობა) უკუწანაცვლების მიმართულებით უფრო მცირეა, ვიდრე ეს იქნებოდა სარქველის მთლიანად ჩაკეტვის შემთხვევაში. როდესაც პოლარობა გამტარობის მიმართულებას უბრუნდება, სანამ პირდაპირი მიმართულებით გადაადგილებას დაიწყებს, ნაკადი უკუმიმართულებით ჩერდება. აქედან გამომდინარე, გამტარობის მიმართულებით ნაკადი უფრო მცირე იქნება და სარქველიც ადრინდელივით დიდად აღარ გაიხსნება. ამ დროს, როდესაც დიოდის პოტენციალთა სხვაობა კვლავ უკუმიმართულებით შეიცვლება, სარქველი მთლიანად ჩაკეტვას ასწრებს და ციკლი მეორდება. დაბალ ამპლიტუდებზე სარქველი ყოველთვის

სრულყოფილად იკეტება. ამგვარად, დენის ნაკადი გამტარობის მიმართულებით ერთიდაიგივე იქნება.

როდესაც V_0 მიიღებს V_1 -ზე მეტ მნიშვნელობას, მრუდის პიკებიდან ზოგი უფრო მაღალი ხდება, დანარჩენი კი დადაბლდება. როდესაც V_0 აღწევს V_2 მნიშვნელობას, მიმდევრობა კვლავ იცვლება. ნახ. 1.4. გვიჩვენებს პერიოდის გაორმაგების ბიფურკაციის სხვა შემთხვევას. ამჯერად ოთხი განსხვავებული ზომის პიკისაგან შემდგარი სიგნალები გვაქვს, რომელთაც გენერატორის დაბვაზე ოთხჯერ დიდი პერიოდი აქვთ. ასეთ შემთხვევას „პერიოდი-4 მიმდევრობას“ ვუწოდებთ.



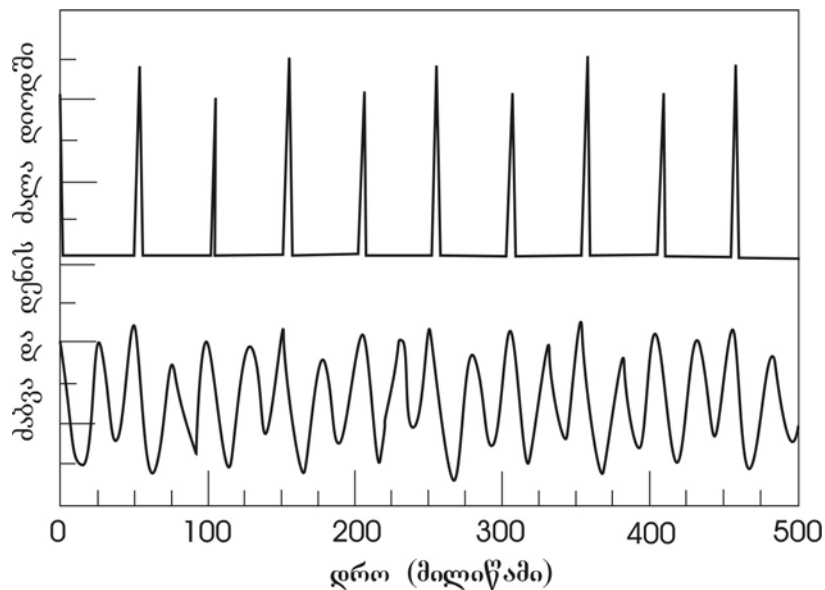
ნახ. 1.4. დიოდზე მოღებულ მოდულური დაბვა, როგორც დროის ფუნქცია. ზედა მრუდი: პერიოდი-4. ქვედა მრუდი: პერიოდი-8. ყურადღება მიაქციეთ, რომ პერიოდი-4-ის ორი „პიკი“ იმდენად პატარაა, რომ მათი დანახვა ნახაზის მასშტაბში შეუძლებელია. ქმედება პერიოდი-8 უმცირესი პიკების გამოა აღსანიშნავი.

1.4. ნახაზზე მოყვანილი დიოდის მოღებულ დაბვის ზოგიერთი პიკის დანახვა ძნელია. პრობლემა იმაში მდგომარეობს, რომ ყოველთვის როდესაც გვაქვს გამტარობის მიმართულება, დიოდის დაბვა 0,5 ვოლტის მიდამოებშია. აქედან გამომდინარე, მისი „დინამიური დიაპაზონი“ ამ მიმართულებით სრულიად შეზღუდულია. მიუხედავად ამისა, დენს უფრო ფართო დინამიური დიაპაზონი გააჩნია და ნახ. 1.5. გვიჩვენებს, რომ როგორც დიოდზე მოღებულ დაბვას, ასევე მასში გამავალ დენს ერთი და იგივე პერიოდი აქვს.

V_0 -ის შემდგომი ზრდისას ჩვენ პერიოდის გაორმაგების შემდგომი ბიფურკაციების მოწმენი ვხდებით, რომლებიც V_0 -ის უმცირესი ზრდის შემთხვევაშიც კი პერიოდი-8-ის,

პერიოდი-16-ის და ა.შ. გამომწვევ მიზეზად (ნახ. 1.4.-ზე გამოსახული ქვედა მრუდი) გვევლინებიან. საბოლოო ჯამში, ჩვენ მივალწვეთ ძაბვის გარკვეულ V_{∞} მნიშვნელობას, რომლის მიღმა პიკების განლაგება მუდმივად ცვალებადია. სწორედ ესაა ქაოსი! 1.6 ნახაზზე მოყვანილია V_d მრუდების ორი გრძელი მიმდევრობა. მათი ფორმები სრულიად არაპერიოდულია.

როგორ მივხვდეთ, რომ ჩვენს წინაშე ქაოსია და არა სქემაში არსებული „ხმაურის“ ეფექტი? ქაოსის ხმაურისაგან განსხვავებისათვის არაერთი თეორიული და ექსპერიმენტული საშუალება არსებობს. ერთ-ერთ მათგანს, რომელიც ექსპერიმენტული გამოყენებისათვის უმარტივესია, **ახლომდებარე ტრაექტორიების დივერგენცია** ეწოდება. დიოდური წრედისათვის ტრაექტორია რაიმე ცვალებადი პარამეტრის, მაგალითად დიოდის ბოლოებზე არსებულ პოტენციალთა სხვაობის დროზე დამოკიდებულებაა. ამგვარი დივერგენციული ეფექტი დიოდურ წრედში ადვილი დასაკვირვებელია: წრედის ქაოსურ ქმედებასთან შეთავსებისათვის ოსცილოგრაფს იმგვარად მოვმართავთ, რომ იგი მრუდს პიკის უმაღლეს V_d წერტილში იწყებდეს. შემდეგ ოსცილოგრაფს დროში ისე ვმართავთ, რომ გამოჩნდეს 10-15 პიკი.

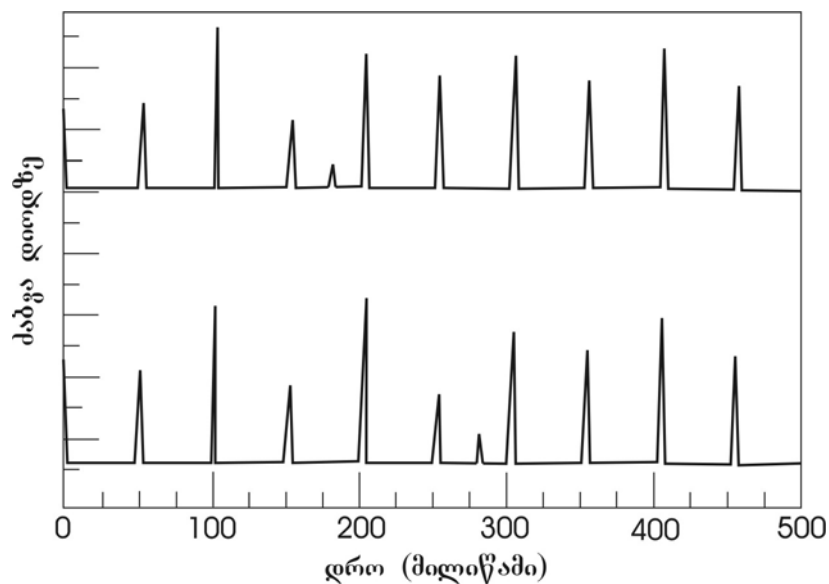


ნახ. 1.5. ზედა მრუდი: დიოდზე მოდებული ძაბვა დროის ისეთი ფუნქციაა, რომელიც უჩვენებს პერიოდი-4-ის შესაბამის ქმედებას. ქვედა მრუდი: სიგნალი პროპორციულია წრედში გამავალი დენისა იგივე პირობებში. სურათზე ოთხი სხვადასხვა ტიპის პიკის ზომებს შორის განსხვავება აშკარაა. ქვედა მრუდზე თითოეული ვერტიკალური დანაყოფი დაახლოებით 0,1 mA დენის ძალას შეესაბამება.

1.6. ნახაზზე ჩანს, რომ თითოეული მრუდი დაახლოებით ერთნაირად იწყება (მარცხენა მხარე), მაგრამ რამდენიმე ციკლის შემდეგ პიკების სიმაღლეები თითქმის მთელ სიგრძეზე განსხვავებულია.

ოსცილოგრაფის ჩამრთველი მექანიზმი მრუდების ჩაწერას იწყებს მაშინ, როდესაც გასაზომი სიგნალი მოხვდება საკონტროლო მნიშვნელობის ირგვლივ არსებულ მცირე დიაპაზონში. ვინაიდან სისტემა დეტერმინისტულია, მაშინ სიგნალის ერთსა და იმავე მნიშვნელობისათვის სხვადასხვა გაზომვისას მიღებული მრუდები ერთნაირი უნდა იყოს. მაგრამ რადგან საკონტროლო სიგნალი მერყეობს ძაბვის გარკვეულ მცირე დიაპაზონში, ჩვენ ერთმანეთისაგან მცირედ განსხვავებული ტრაექტორიების მოწმენი ვხვდებით. ქაოსის დამახასიათებელი ნიშანი ასეთი ტრაექტორიების დივერგენციაა, როგორც ამას ოსცილოგრაფის ეკრანზე პიკების სიმაღლეების შემთხვევაში აქვს ადგილი. ეს გარემოება ნამდვილ ქაოსს განასხვავებს „უბრალო“ ხმაურისაგან, რომლისთვისაც ტრაექტორიები მეტნაკლებად ერთნაირად იქნებოდა გამოსახული ნებისმიერ შემთხვევაში.

როდესაც V_0 ქაოსურ დიაპაზონში გადადის, ჩვენ ვხვდებით ქაოსში ჩართულ სხვადასხვა პერიოდულ ინტერვალებს. 2 და 3 ვოლტს შორის მყოფი V_0 -თვის (ზუსტი მნიშვნელობა დამოკიდებულია დიოდსა და წრედში არსებულ პირობებზე) სახეზეა სტაბილური პერიოდი-5 ტიპის ქმედების დიაპაზონი. პერიოდი-3-ის სტაბილური ქმედების არე კი, ნახ. 1.7-იდან გამომდინარე, 3 და 4 ვოლტს შორის მდებარეობს. თუ V_0 კვლავ აგრძელებს ზრდას, ჩვენ შევნიშნავთ პერიოდი-6-ის, პერიოდი-12-ისა და ა.შ. შესაბამის გაორმაგებული პერიოდის მქონე მწკრივებს, რომლებიც კულმინაციას ქაოსის შესაბამის სხვადასხვა ინტერვალში აღწევენ.



ნახ. 1.6. ზედა მრუდი: დიოდზე მოდებული ძაბვა, როგორც დროის ფუნქცია. ქაოსური მწკრივები, რომლებშიც „პიკების“ ამპლიტუდები არ არის პერიოდული.

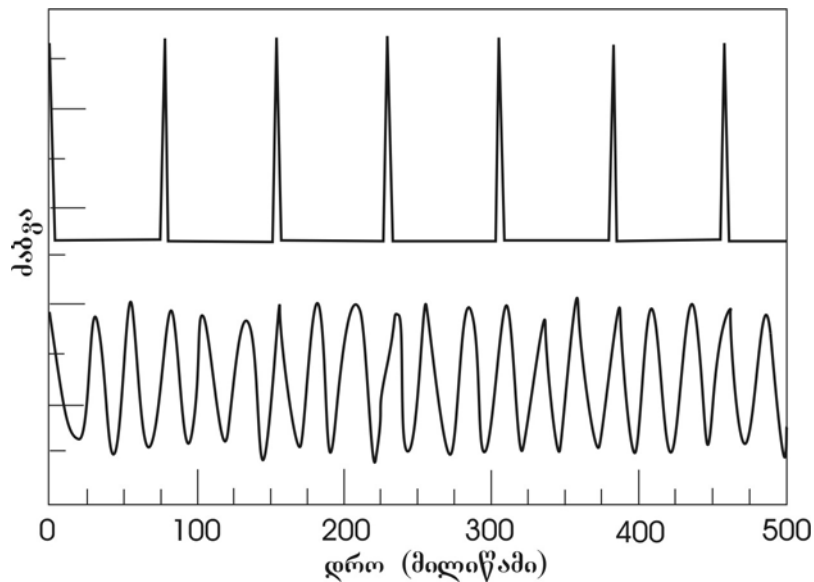
ბიფურკაციული დიაგრამა

ამგვარი სახის კომპლექსურ ქმედებაში აურაცხელი ინფორმაცია იყრის თავს. ამ ინფორმაციის განზოგადების რამდენიმე მეთოდი არსებობს.

ამ მხრივ ყველაზე მნიშვნელოვანია ე.წ. **ბიფურკაციული დიაგრამა**. მის ასაგებად ჩავწერთ, მაგალითად, $V_d(t)$ ან $i(t)$ სიდიდეთა პიკების სიმაღლე, როგორც მაკონტროლებელი ცვლადი პარამეტრის ფუნქცია. კომპიუტერული გამოთვლების დროს ხდება $i(t)$ სიგნალის მნიშვნელობათა შერჩევა დროის ისეთი ინტერვალების მიხედვით, რომელებიც ერთმანეთისაგან გენერატორის რხევათა პერიოდის ტოლი შუალედებით არიან დაშორებული. შერჩეული მნიშვნელობები ავლნიშნოთ I_1 , I_2 და ა.შ. სიმბოლოებით. შემდეგ ავაგებთ ამ მნიშვნელობების მაკონტროლებელი პარამეტრის სიდიდეზე დამოკიდებულების ფუნქციას. **ბიფურკაციული** დიაგრამების ორი ნიმუში ნაჩვენებია 1.8. და 1.9. ნახაზებზე, სადაც $i(t)$ სიდიდის შერჩეული მნიშვნელობები წარნოდგენენ გამტარობის ძაბვის ფუნქციას, ხოლო V_0 ძაბვა და f სიხშირე ფიქსირებული სიდიდეებია. კომპიუტერის მეხსიერებაში ვინახავთ 50 მიმდევრობით შერჩეულ მნიშვნელობას და შემდეგ მათ გრაფიკზე დავიტანთ, როგორც V_{dc} -ს ფუნქციას. (თუ V_0 -ს მაკონტროლებელ პარამეტრად გამოვიყენებდით, ბიფურკაციული დიაგრამები მსგავსი იქნებოდა, მაგრამ არა იდენტური.)

ამ დიაგრამებზე ჩვენ ვხედავთ პერიოდი-1 ტიპის ქმედებას, სადაც მოცემულ V_{dc} -ს $i(t)$ ფუნქციის მხოლოდ ერთი მნიშვნელობა შეესაბამება; ასევე სახეზეა პერიოდი-2, სადაც შესაბამისობაში ორი მნიშვნელობაა და ა.შ. (ვინაიდან კომპიუტერული გრაფიკის გარჩევადობა შეზღუდულია, პერიოდის გაორმაგების ამსახველი ზოგიერთი მაღალი რიგის წვერი კარგად არ ჩანს.) როდესაც სისტემის ქმედება ქაოსურია, შერჩეული მნიშვნელობები შესაძლოა განაწილებული იყოს მთელ დაკვირვებულ დიაპაზონზე.

ქაოსის შესაბამის დიაპაზონში შესაძლებელია რამდენიმე პერიოდული ინტერვალის პოვნა. როგორც წესი, პერიოდი-3 -ის ინტერვალის ყველაზე დიდია. ყურადღება მიაქციეთ, რომ იგი საკმაოდ ციცაბოდ იწყება. ბიფურკაციულ დიაგრამაზე მარჯვნიდან მარცხნივ გადაადგილებისას სახეზეა მკვეთრი გადასვლა პერიოდი-3-ის ტიპის ქმედებიდან ქაოსურ ქმედებაზე. გახსოვდეთ, რომ პერიოდული ქმედებიდან ქაოსში გადასვლა ყოველთვის არ საჭიროებს პერიოდის გაორმაგებას.

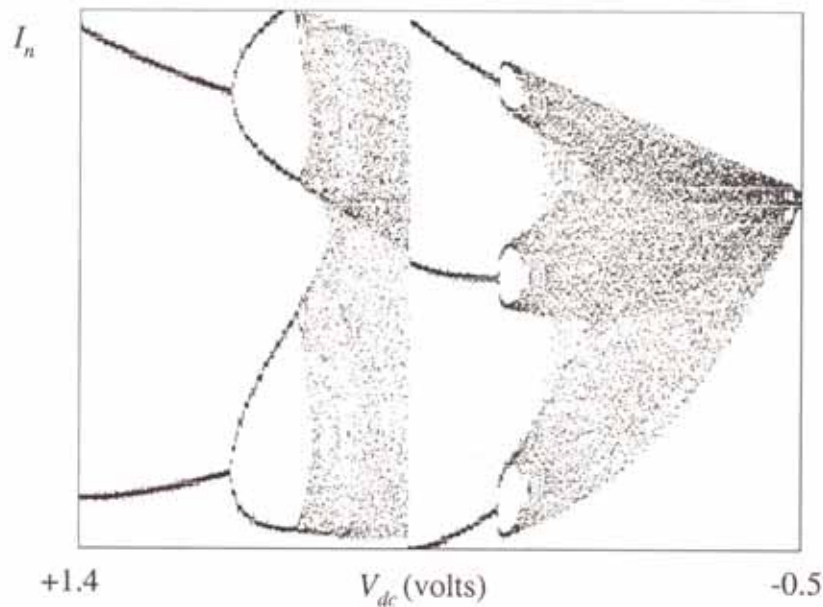


ნახ. 1.7. ქვედა მრუდი: დიოდზე მოღებული ძაბვა, როგორც დროის ფუნქცია. ზედა მრუდი: დიოდის ძაბვა პერიოდი-3 ტიპის ქმედებისათვის.

შევაჯამოთ შედეგები. არაწრფივი ქმედების უმთავრესი მახასიათებლებია:

1. მკვეთრი ცვლილებები სისტემის თვისობრივ ქმედებაში, როდესაც პარამეტრების მცირე ცვლილების შემთხვევაშიც კი. მაგალითად პერიოდი-1 მკვეთრად გადადის პერიოდ-2-ში.
2. კარგად განსაზღვრული და ასახვადი გადასვლა ჩვეულებრივი და პერიოდული ქმედებიდან არაპერიოდულ და ქაოსურ ქმედებაზე. სისტემის ქმედების დროზე დამოკიდებულებას შესაძლოა მცირე რამ ჰქონდეს საერთო სისტემაზე მოქმედი „ძალების“ დროზე დამოკიდებულებასთან.
3. ქაოსი „ხმაურიანი“ ქმედებისგან შეგვიძლია განვასხვავოთ ახლომდებარე ტრაექტორიების დივერგენციაზე დაკვირვებით.

ასეთი ქმედების ზოგიერთ რაოდენობრივ მახასიათებელს მე-2 თავში განვიხილავთ.



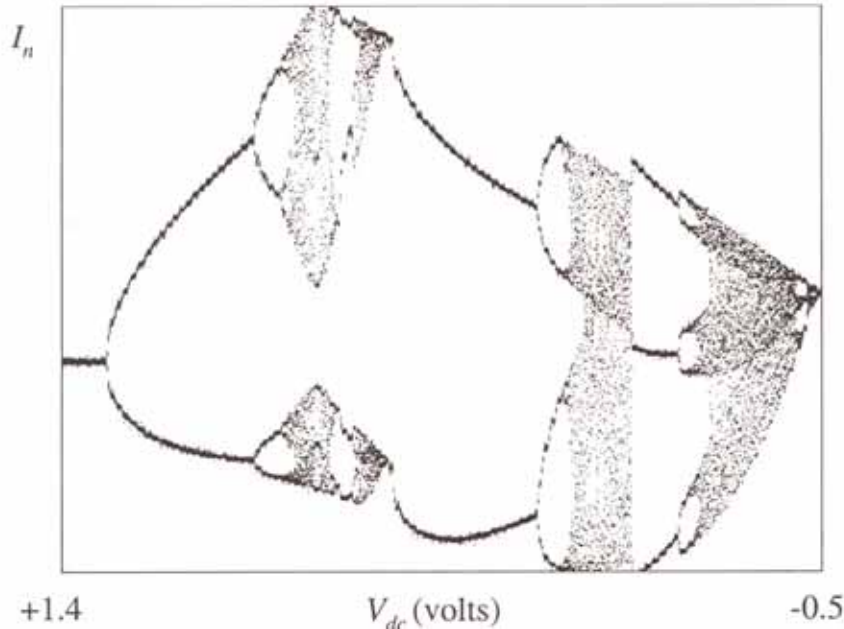
ნახ. 1.8. ბიფურკაციული დიაგრამა დიოდური წრედისთვის. ელექტრული წრედის შერჩეული მნიშვნელობები გრაფიკზე გამოსახულია, როგორც წანაცვლების ძაბვის კონტროლის პარამეტრის ფუნქცია. პერიოდი-2-ის დანახვა შეიძლება მარცხნივ მოშორებით. ფართო, გაღივებული დიაპაზონები ქაოსური ქმედების შესაბამისი არეებია. პერიოდი-3-ის გაორება პერიოდი-6-ში და საბოლოო ჯამში კი – ქაოსში დაიკვირვება დიაგრამის შუაგულის მახლობლად. მარჯვენა კიდეში ქმედება პერიოდი-1-ს უბრუნდება.

1.4. ბიოლოგიური პოპულაციის ზრდის მათემატიკური მოდელი

ქაოსური სისტემის მეორე მაგალითია ძალიან მარტივი მათემატიკური მოდელი, რომელიც ბიოლოგიური პოპულაციების ზრდის დასახასიათებლად ხშირად გამოიყენება. ამ მოდელის მათემატიკას ქაოსის თეორიის განვითარებაში ისტორიული მნიშვნელობა აქვს. 1970-იანი წლების შუახანს ბიოლოგმა რ.მ. მეიმ გამოაქვეყნა ძალიან მნიშვნელოვანი (და ფრიად ცნობილი) სტატია (MAY76), რომელშიც აღწერილია ამ და ზოგიერთი სხვა მარტივი მოდელების კომპლექსური ქმედების გადაუჭრელი საკითხები. მოგვიანებით მიჩელ ფეიგენბაუმმა (FEI78) ამ მოდელზე დაყრდნობით რიცხობრივი გამოთვლების შედეგად ზოგიერთი რაოდენობრივი უნივერსალური თვისება აღმოაჩინა, რომლებიც ქაოსის შესახებ თანამედროვე მოძღვრების სიმბოლოდ იქცა. მათემატიკური სიმარტივის გამო, ეს მოდელი ქაოსთან დაკავშირებული ახალი იდეებისათვის კვლავაც სასარგებლო „ლაბორატორია“.

მოდელის აგება შემდეგი გზით არის შესაძლებელი. მოდით განვიხილოთ თევზის სატყუარა ბუზის სახეობა, რომლის წარმომადგენლები ერთსა და იმავე სეზონში იბადებიან

და კვლებიან. ჩვენ გვინდა ვიცოდეთ 1 წლის შემდეგ სატყუარათა რაოდენობა. მათი რაოდენობა N_1 -ით აღვნიშნოთ, ის სატყუარების N_0 საწყის რაოდენობასთან არის კავშირში. უმარტივეს შემთხვევაში ჩვენ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ



ნახ. 1.9. ბიფურკაციული დიაგრამა სიგნალის გენერატორის მცირე ამპლიტუდის შემთხვევაში.

$$N_1 = AN_0 \quad (1.4-1)$$

სადაც A არის რაღაც რიცხვი, რომელიც დამოკიდებულია გარემო პირობებზე (საკვების მარაგი, წყალი, ზოგადი კლიმატური პირობები და სხვ.). თუ $A > 1$, მაშინ სატყუარების რაოდენობა მატულობს, ხოლო თუ $A < 1$ – შემცირდება. თუ A უცვლელი იქნება მომდევნო თაობებისათვის, მაშინ პირველ შემთხვევაში ადგილი ექნება პოპულაციის მალთუხისეულ აფეთქებას, ხოლო მეორე შემთხვევაში იგი მცირდება და გაქრობისკენ არის მიდრეკილი.

ჩვენ ვიცით, რომ თუ პოპულაციის ზრდის ტემპი ძალიან მაღალია, მაშინ მას არ ექნება საკმარისი საკვები მარაგი და მტაცებლებსაც ნაკლები დრო დასჭირდებათ მწერების დასაჭერად. აქედან გამომდინარე, პოპულაციის ზრდა შეზღუდული იქნება. ჩვენ შევძლებთ ამგვარი შემზღუდავი ფაქტორის გათვალისწინებას, თუ კიდევ ერთ წევრს შემოვიტანთ მოდელში, რომელიც მხედველობაში მისაღები არ იქნება N -ის მცირე სიდიდეების შემთხვევაში, მაგრამ დიდ მნიშვნელობას შეიძენს N -ის ზრდისას. თუ ჩავთვლით, რომ ეს წევრი პროპორციული N^2 -ისა, შედეგად მივიღებთ

$$N_1 = AN_0 - BN_0^2 \quad (1.4-2)$$

თუ $B \ll A$, მაშინ მეორე წევრი (1.4-2) განტოლების უმნიშვნელო იქნება მანამ, ვიდრე N საკმარისად არ გაიზრდება. ნიშანი „მინუსი“ იმის მაუწყებელია, რომ ეს წევრი პოპულაციის შემცირებისაკენ მიისწრაფვის. გამოვიყენოთ ხელახლა (1.4-2), რათა გავარკვიოთ, თუ როგორ შეიცვლება N მომდევნო წლებში.

$$\begin{aligned} N_2 &= AN_1 - BN_1^2 \\ N_3 &= AN_2 - BN_2^2 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{1.4-3}$$

ანალიზისათვის ხელსაყრელია (1.4-2) განტოლების მცირე მოდიფიცირება. თავდაპირველად შევნიშნოთ, რომ (1.4-2)-ის თანახმად, არსებობს პოპულაციის მაქსიმალური ზღვრული რაოდენობა. იმისათვის, რომ ძალაში იყოს პირობა $N_{n+1} > 0$, N არ უნდა აღემატებოდეს შემდეგ მნიშვნელობას

$$N^{\max} = A / B \tag{1.4-4}$$

ამგვარად, შემოგვაქვს ახალი ცვლადი

$$x_n = N_n / N^{\max}$$

რომელიც პოპულაციის რაოდენობას წარმოგვიდგენს როგორც მისი ზღვრული რაოდენობის წილს. (ჩვენი მოდელის მიზნებისათვის x სიდიდე 0-სა და 1-ს შორის უნდა მდებარეობდეს.) ამ გამოსახულების (1.4-2)-ში ჩასმით მივიღებთ:

$$x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n) \equiv f_A(x) \tag{1.4-5}$$

სადაც x_n პოპულაციის რაოდენობა n წელიწადში (ჩვენ წინამდებარე განტოლებას ორმაგ ჩარჩოში ვსვამთ, რადგან იგი ქაოსის თეორიის განვითარებაში უმნიშვნელოვანეს როლს ასრულებს).

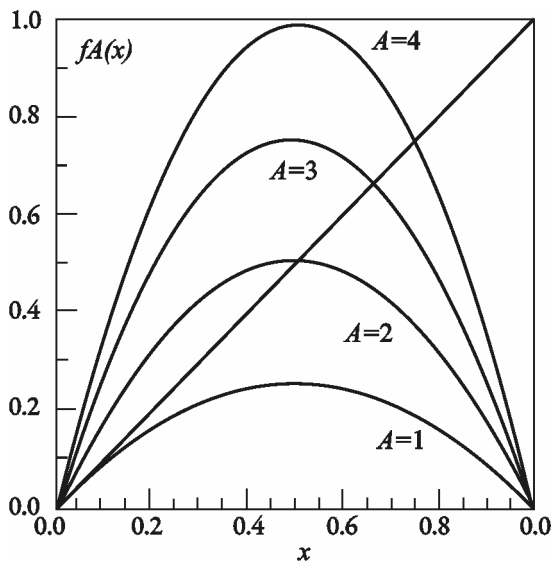
ამოცანა 1.4-1. გამოიყენეთ x -ის განმარტება და შეამოწმეთ, რომ განტოლება (1.4-5) გამომდინარეობს (1.4-2) –დან.

f_A ფუნქციას „იტერაციული ფუნქცია“ ეწოდება, რადგან მომდევნო წლებში პოპულაციის რაოდენობას (1.4-5) მათემატიკური ოპერაციის იტერაციის (განმეორების) შედეგად ვღებულობთ. მისი გრაფიკი მოყვანილია (1.10) ნახაზზე A პარამეტრის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის.

ჩვენ გვინტერესებს, თუ რას გვეუბნება ეს მოდელი პოპულაციის რაოდენობის შესახებ დიდი ხნის (მრავალი სეზონის) შემდეგ და რა დამოკიდებულებაშია ეს მნიშვნელობა A -სთან. „წრფივი“ ინტუიცია გვკარნახობს, რომ x სიდიდემ განსაზღვრული მნიშვნელობა უნდა მიიღოს, რადგან A პარამეტრის მიერ წარმოდგენილ გარემოს მუდმივი სახე ექნება. გარდა ამისა, მოსალოდნელია რომ A -ს თანდათანობით ცვლილების გამოთვლების კი ასეთია: ვიწყებთ რაღაც x_0 მნიშვნელობით, შემდეგ ვითვლით x_1 -ს, x_2 -ს და ა.შ.

$$x_1 = f_A(x_0), \quad x_2 = f_A(x_1), \quad x_3 = f_A(x_2), \dots$$

რომელსაც იტერაციულ მიმდევრობას ვუწოდებთ, ხოლო ფუნქცია $f_A(x)$ –ს –ზოგჯერ **ასახვის იტერაციულ ფუნქციას**, ვინაიდან იგი $0 \leq x \leq 1$ მონაკვეთიდან აღებულ x -ის ერთ მნიშვნელობას (ვთქვათ, x_0 -ს) ასახავს მის სხვა, მაგალითად, $x_1 \in [0;1]$ მნიშვნელობაში, თუ სრულდება პირობა $0 \leq f_A(x) \leq 1$. ისტორიული მიზეზების გამო, (1.4-5)-ით განსაზღვრულ ფუნქციას **ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქცია** ეწოდება.



ნახ. 1.10. $f_A(x)$ ფუნქციის გრაფიკი A პარამეტრის სხვადასხვა მნიშვნელობის შემთხვევაში. დიაგონალური წრფე $y=x$ გრაფიკია.

ამგვარი იტერაციული პროცესების შედეგად მიღებული x მნიშვნელობების მიმდევრობას **ტრაექტორია** ან **ორბიტა** ეწოდება და პლანეტისა ან თანამგზავრის მდებარეობებს წააგავს, რომლებიც დროის მიმდევრობითი ინტერვალებით არიან აღებული. ცხადია, რომ ტრაექტორიის პირველი რამდენიმე წერტილი x –ის საწყის მნიშვნელობაზეა დამოკიდებული. ნაკლებად ნათელია საკითხი იმის შესახებ, არის თუ არა A -ს მოცემული მნიშვნელობის შესაბამისი ტრაექტორიის სავარაუდო „ქმედება“ ერთნაირი ყოველი საწყისი წერტილისათვის 0 -სა და 1 -ს შორის.

უნდა აღინიშნოს, რომ ზოგიერთი საწყისი წერტილი სხვებისაგან განსხვავდება. მაგალითად, თუ ჩვენ ავიღებთ $x_0=0$ -ს, მაშინ აღმოჩნდება, რომ $f_A(x_0)=0$ და ტრაექტორია

ყოველი მომდევნო იტერაციისათვის ნულის ტოლი დარჩება. x -ის ისეთ მნიშვნელობას, ვუწოდოთ მას x^* , რომლისთვისაც

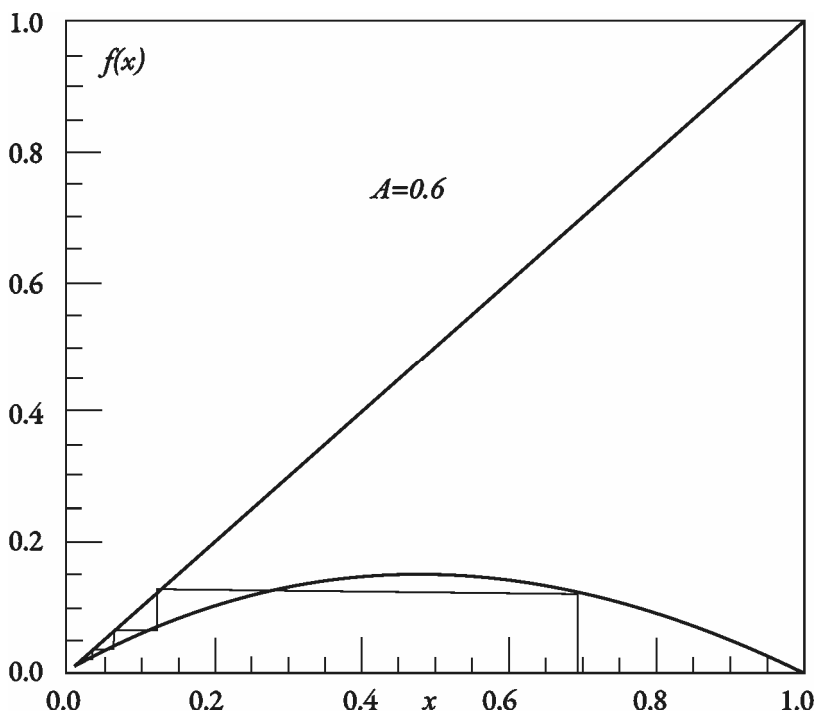
$$x_A^* = f_A(x_A^*) \quad (1.4-6)$$

გასაგები მიზეზის გამო უწოდებენ იტერაციული ასახვის **უძრავ წერტილს**. ინდექსი A ნიშნავს, რომ x^* დამოკიდებულია A -ს მნიშვნელობაზე. (1.4-5) ასახვას, საზოგადოდ, ორი ფიქსირებული წერტილი გააჩნია

$$x_A^* = 0 \quad (1.4-7)$$

$$x_A^* = 1 - \frac{1}{A} \quad (1.4-8)$$

$A < 1$ -სთვის $x_A^* = 0$ ერთადერთი უძრავი წერტილია x -ის მნიშვნელობათა ისეთ არეში, რომელიც საინტერესოა ჩვენი ბიოლოგიური მოდელისათვის. $A > 1$ -სთვის ორივე უძრავი წერტილი სწორედ ზემოთხსენებულ მონაკვეთში ხვდება.



ნახ. 1.11. (1.4-5) იტერაციის გრაფიკული ინტერპრეტაცია $x_0=0,7$ -სა და $A=0$ -თვის.

ფიქსირებული წერტილების მნიშვნელობა

მარტივი გეომეტრიული კონსტრუქცია საშუალებას გვაძლევს დავრწმუნდეთ თუ რატომაა ფიქსირებული წერტილები მნიშვნელოვანი. (1.10) ნახაზზე მოყვანილია $y=f_A(x)$ მრუდი A –ს სხვადასხვა მნიშვნელობებისთვის, ასევე ნაჩვენებია დიაგონალური წრფე $y=x$. ყველგან, სადაც დიაგონალური წრფე $f_A(x)$ მრუდს გადაკვეთს, მას შემდეგ, ასახვის ფუნქციას ფიქსირებული წერტილი ექნება, ვინაიდან $x=f_A(x)$, იქ. (1.10). ნახაზიდან ნათლად ჩანს, რომ $A<1$ -თვის 0 -სა და 1 -ს შორის მხოლოდ ერთი ფიქსირებული წერტილია $x=0$. $A>1$ -თვის 0 -სა და 1 -ს შორის გვაქვს ორი ფიქსირებული წერტილი.

1.11 ნახაზის მიხედვით, ჩვენ შეგვიძლია დავინახოთ, თუ როგორ მიისწრაფვის 0 -სგან განსხვავებულ რაღაც მნიშვნელობაზე დაწყებული x -ის ტრაექტორია, თუ $A<1$. პროცედურა ასეთია: x_0 -ის საწყისი მნიშვნელობიდან f_A მრუდის მიმართულებით ვერტიკალური წრფე გავავლოთ. გადაკვეთის წერტილი განსაზღვრავს x_1 მნიშვნელობას – აქედან ვავლებთ x ღერძის პარალელურ მონაკვეთს $y=x$ დიაგონალის გადაკვეთამდე. გადაკვეთის წერტილი x კოორდინატი გვაძლევს სწორედ x_1 მნიშვნელობას. გადაკვეთის წერტილიდან გავავლოთ მეორე ვერტიკალური წრფე, რომლის კვეთა f_A მრუდთან განსაზღვრავს x_2 მნიშვნელობას ზემოთაღწერილი პროცედურის გამოყენებით. თუ ჩვენ გავაგრძელებთ ამ პროცესს, გრაფიკულად შევასრულებთ ფორმულა (1.4-5)-ით განსაზღვრულ იტერაციულ პროცესს. ნახ. 1.11 გვიჩვენებს იტერაციულ მიმდევრობას, რომელიც იწყება $x=0,7$ –დან $A=0,6$ -თვის.

ვინაიდან ყველა ტრაექტორია ($A<1$ პირობითა და 0 -სა და 1 -ს შორის საწყისი მნიშვნელობებით განსაზღვრული) მიისწრაფვის საბოლოო $x=0$ მნიშვნელობისაკენ, რომელსაც ორბიტების *მიზიდულობის წერტილს* უწოდებენ. ინტერვალს $0<x<1$ *მიზიდულობის არე* ეწოდება, ვინაიდან, როდესაც ამ ინტერვალში დაწყებული ტრაექტორიები მიისწრაფვიან $x=0$ -კენ, იტერაციათა რიცხვი იზრდება. ჩვენი ბიოლოგიური მოდელიდან გამომდინარე, ვასკვნით, რომ თუ $A<1$, n სეზონების რიცხვის ზრდასთან ერთად, პოპულაცია ნადგურდება ($x \rightarrow 0$).

სავარჯიშო 1.4.-2. ააგეთ რამდენიმე ასეთი კონსტრუქცია x -ის 0 -სა და 1 -ს შორის მყოფი საწყისი მნიშვნელობებისათვის. აჩვენეთ, რომ ყველა ასეთი ტრაექტორია მიისწრაფვის $x=0$ –კენ, თუ $A<1$. რა მოხდება, როდესაც $x_0=0$ ან $x_0=1$?

ზოგადად, მიზიდულობის წერტილი წარმოადგენს წერტილებთან ისეთ გეომეტრიულ ადგილს, რომელშიც თავს იყრიან ტრაექტორიები, როდესაც იტერაციის რიგი უსასრულობისკენ მიისწრაფვის. შედარებით რთული სისტემების შემთხვევაში, სისტემას პარამეტრის მოცემულ მნიშვნელობისათვის ერთზე მეტი **მიზიდულობის წერტილი** შეიძლება გააჩნდეს. მოცემული მიზიდულობის წერტილისათვის მიზიდულობის არე მოიცავს ისეთი $\{x_0\}$ საწყისი წერტილების სიმრავლეს, რომელთაგან გამოსული ტრაექტორიები მიისწრაფვიან მიზიდულობის წერტილისაკენ, როდესაც იტერაციის რიგი $n \rightarrow \infty$.

უფრო რთული სახის ქმედება

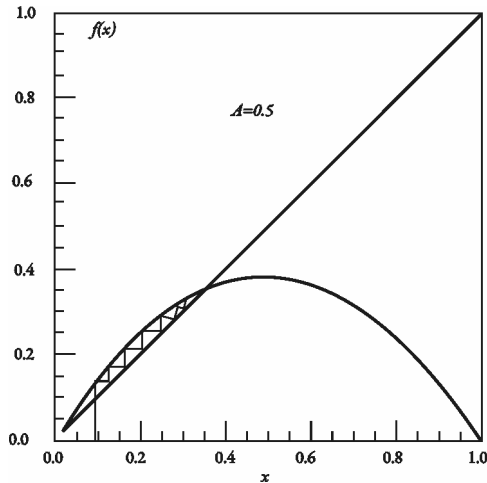
რა ხდება, როდესაც A პარამეტრი 1-ზე მეტია? (1.12) ნახაზზე ნაჩვენებია $f_A(x)$ გრაფიკი, როდესაც $A = 1,5$ და დიაგონალური წრფეა $y=x$. თუ გეომეტრიული ტრაექტორიის აგების მეთოდს გამოვიყენებთ, დავინახავთ, რომ $x = 0,10$ **wertil iT** დაწყებული ტრაექტორია ამჯერად აღწევს $x_A^* = 1-1/A$ ფიქსირებულ წერტილს, თუ $A=1,5$. ფაქტობრივად, $0 < x < 1$ ინტერვალში დაწყებული ნებისმიერი ტრაექტორია ერთსა და იმავე მიზიდულობის წერტილისაკენ მიისწრაფვის.

ამჯერად უკვე გასაგები ხდება ჩვენი მოდელის არსი: 0-სა და 1-ს შორის მდებარე x_0 -ის ნებისმიერი უსასრულო რაოდენობისას, პოპულაციის ნაწილი უახლოვდება მიზიდულობის ფიქსირებულ წერტილს $x_A^* = 1-1/A$. >1 -თვის $x^* = 0$ „განზიდვის ფიქსირებული წერტილის“ მნიშვნელობაა, ვინაიდან $x = 0$ წერტილის სიახლოვეს დაწყებული ტრაექტორიები შორდებიან ამ მნიშვნელობას.

ამოცანა 1.4.-3. (a) რა ხდება $x_0=0$ და $x_0=1$ შემთხვევაში? (b) გამოთვალეთ რიცხობრივად $x=0,25$ -დან და $x=0,75$ -დან დაწყებული ტრაექტორიების მიმდევრობა $A=1,5$ -თვის. (c) რამდენი რიგის იტერაციაა საჭირო, რათა ტრაექტორიები 0,001 სიზუსტით მიუახლოვდნენ $x=0,3333$ საბოლოო მნიშვნელობას? (d) ახსენით როგორც გრაფიკული, ასევე რიცხობრივი თვალსაზრისით, რატომ ემთხვევა ერთმანეთს ორი ტრაექტორია პირველი იტერაციის შემდეგ?

ამ მარტივ მოდელში სიურპრიზებსაც ვხვდებით. პირველი მათგანი სახეზეა როდესაც A ოდნავ აღემატება 3-ს. (1.1) ცხრილში მოყვანილია ტრაექტორიათა მნიშვნელობები

$x=0,25$ -ით დაწყებული ორბიტისთვის, $A = 3,1$ -ის შემთხვევაში. ჩვენ ვხედავთ, რომ ტრაექტორია არ სტაბილიზირდება მიზიდულობის კონკრეტული მნიშვნელობის მიმართ. ამ შემთხვევაში ტრაექტორიის მნიშვნელობები $x=0,558$ და $x=0,764$ სიდიდეს შორის მერყეობს.



ნახ.1.12 იტერაციული სქემის გრაფიკული წარმოდგენა, როდესაც $x_0=0,10$, $A= 1,5$. ყურადღება მიაქცეით, რომ ტრაექტორია ფიქსირებულ წერტილს შორდება $x=0$ -ზე და ფიქსირებული წერტილისკენ $x=1/3$ – თვის მიიზიდება.

ბიოლოგიური თვალსაზრისით, პოპულაციის წილი მაღალია ერთი წლის განმავლობაში, მომდევნო წელს კლებულობს, შემდეგ კვლავ იმატებს და ა.შ. როდესაც პოპულაციის წილი იგივე მნიშვნელობას უბრუნდება ყოველ ორ წელიწადში, ამ მოვლენას ვუწოდოთ პერიოდი-2 ტიპის ქმედება დიოდური წრედის ანალოგიურად და ვამბობთ, რომ $A= 3$ –ზე პერიოდის გაორმაგების ბიფურკაციას აქვს ადგილი. $A<3$ -სთვის გვაქვს მხოლოდ ერთი მიზიდულობის წერტილი $x = 1-1/A$. როდესაც $A> 3$, სახეზეა მიზიდულობის ორი წერტილი, და მათი მნიშვნელობებიც A -სთან ერთად იცვლება. (მე-5 თავში ჩვენ უფრო დეტალურად განვიხილავთ ამგვარი ასახვების მათემატიკურ თეორიას და ვნახავთ, თუ როგორ ხდება A –ს იმ მნიშვნელობების გამოთვლა, რომლისთვისაც ბიფურკაციას აქვს ადგილი). ნახ. (1.13) გვიჩვენებს, თუ როგორ ხდება მიზიდულობის ორი წერტილის მქონე ტრაექტორიის გრაფიკულად აგება.

ცხრილი 1.1.

ტრაექტორიათა მნიშვნელობები* $A=3,1$ და $x_0=0,250$ -თვის.

n	x_n	n	x_n
0	0.250	11	0.561
1	0.581	12	0.764
2	0.755	13	0.559
3	0.574	14	0.764
4	0.758	15	0.559
5	0.569	16	0.764
6	0.760	17	0.559
7	0.565	18	0.764
8	0.762	19	0.558
9	0.562	20	0.764
10	0.763	21	0.558

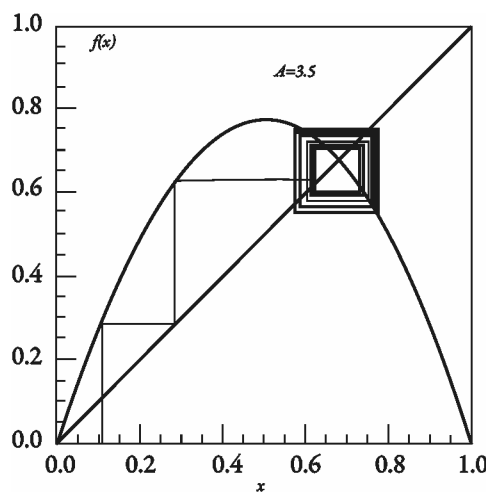
* x -ის მნიშვნელობები დამრგვალებულია მეათასედების სიზუსტით.

ამოცანა 1.4-4. რიცხვითი და გრაფიკული თვალსაზრისით შეამოწმეთ, რომ მიზიდულობის ორი წერტილის შემთხვევაში მიზიდულობის არეალი წარმოადგენს 0-სა 1-ს შორის მყოფი საწყისი x_0 წერტილების სიმრავლეს. არსებობს თუ არა გამონაკლისი წერტილები 0-სა 1-ს შორის, რომლებიდანაც გამომავალი ტრაექტორიები არ იკრიბებიან მიზიდულობის წერტილებში?

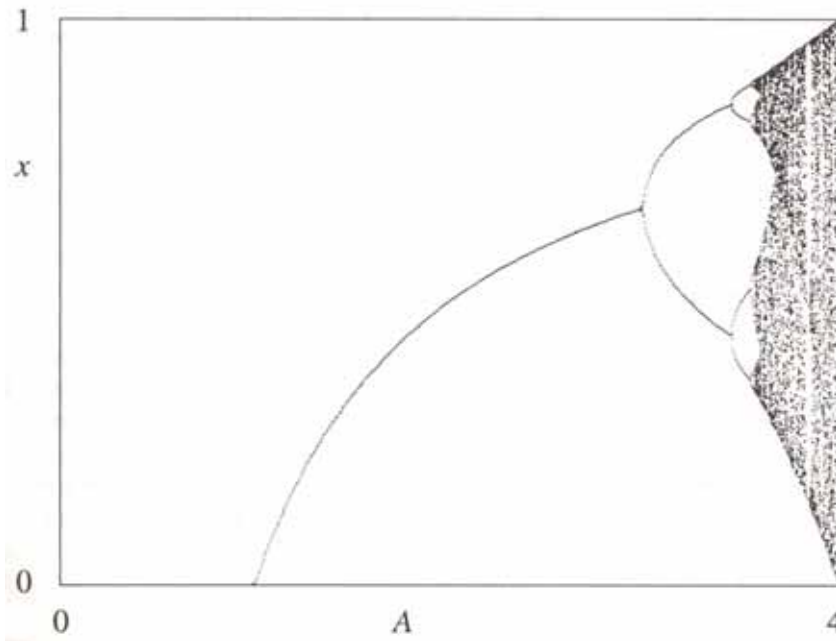
დიოდეს წრედისთვის მიღებულ შედეგებზე დაყრდნობით შეგვიძლია ვიწინასწარმეტყველოთ პროცესის შემდგომი განვითარება. $A=3,44948$ -თვის ორმაგი პერიოდის კიდევ ერთ ბიფურკაციას ექნება ადგილი. როდესაც $A>3,44948$, გვექნება მიზიდულობის ოთხი წერტილი, რომელთა რიცხვითი მნიშვნელობებია 0,852, 0,433, 0,847 და 0,447 $A=3,4$ -თვის. ჩვენ გვინდა ყურადღება გავამახვილოთ ამ მნიშვნელობების საყურადღებო თვისებაზე. ისინი შემდეგი წესით მიიღებიან: უდიდესი, უმცირესი, უდიდესის მომდევნო, უმცირესის მომდევნო, შემდეგ ვუბრუნდებით უდიდესს და ა.შ.

თუ 1.5 ნახაზზე მოყვანილი დიოდის წრედის პერიოდი-4 ქმედების მიხედვით ვიმსჯელებთ, შენიშნავთ, რომ ზუსტად იგივე წესთან გვაქვს საქმე. ორივე სისტემისათვის არა მხოლოდ ორმაგი პერიოდების მიმდევრობაა ერთი და იგივე, არამედ თვით მათი სტრუქტურაც. ლოჯისტიკური ასახვის შემთხვევაში A-ს შემდგომი ზრდით გადავდივართ პერიოდი-8-ში, პერიოდი-16-ში და ა.შ., რასაც ადგილი ექნება A-ს უმცირესი ნაზრდის შემთხვევაშიც კი. როდესაც A მეტია 3,5699...-ზე, ტრაექტორიათა მნიშვნელობები აღარ გამეორდება და მივიღებთ ქაოსურ ქმედებას.

ამიერიდან შეგვიძლია განვაზოგადოთ ჩვენი მოდელის შესაბამისი ქმედება ბიფურკაციული დიაგრამის აგების მეშვეობით; A-ს მოცემული მნიშვნელობისთვის გამოვითვლით რაიმე საწყისი წერტილიდან გამომავალ ტრაექტორიას და შემდეგ ავაგებთ მის შესაბამის მიზიდულობის წერტილებს, როგორც A პარამეტრის ფუნქციას. პრაქტიკაში 20-50 იტერაციის შემდეგ ტრაექტორია „საკმარისად ახლოსაა“ მიზიდულობის საბოლოო წერტილთან. ნახაზი (1.14) მიღებულია A-ს მნიშვნელობებისა და 0-სა და 1-ს შორის მყოფი საწყისი წერტილის შერჩევის მეშვეობით. ტრაექტორიის მიზიდულობის წერტილთან დასახლოვებლად ასახვის ფუნქციის ასჯერ იტერაცია ხორციელდება და შემდეგ x-ის შემდეგი 100 მნიშვნელობისთვის გრაფიკი იგება.



ნახ. 1.13. გრაფიკულად გვიჩვენებს იტერაციულ სქემას პერიოდი-2 ტიპის ქმედებისათვის. $A=3,1$ და $x_0=0,1$. მიზიდულობის ორი წერტილი მდებარეობს მუქი მართკუთედის მარცხენა ზედა და მარჯვნივ ქვედა წვეროებში.



ნახ. 1.14. ბიფურკაციული დიაგრამა ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციისთვის. $A < 1$ -სთვის $x=0$ არის მიზიდულობის წერტილი, ხოლო $1 < A < 3$ -სთვის იგი არის ფიქსირებული წერტილი $x=1-1/A$. $A=3$ წერტილზე იწყება პერიოდი-2. 8-ზე მაღალი რიგის პერიოდები გადაფარულია მრუდის შეზღუდული გარჩევადობის გამო. ქაოსს ადგილი აქვს იმ დიაპაზონებში, სადაც წერტილები მოუწესრიგებლად არის განლაგებული. აქ A –ს პერიოდული ინტერვალები ვერტიკალური ნათელი ზოლებითაა გამოსახული.

მკითხველმა შეიძლება შენიშნოს თვისობრივი მსგავსება ზემოთმოყვანილ და დიოდური წრედის შესაბამის (1.8) და (1.9) ბიფურკაციულ დიაგრამებს შორის. ორივე შემთხვევაში სახეზეა ქაოსში გარდამავალი ორმაგი პერიოდები და პერიოდული ზოლებით დასერილი ფართო ქაოსური არეები. მიუხედავად ამისა, არსებობს განსხვავებები. მაგალითად ბიფურკაციული დიაგრამა დიოდის წრედისთვის „უბრუნდება“ პერიოდი-1 ტიპის ქმედებას V_{dc} პარამეტრის დიდი მნიშვნელობებისათვის. ბიფურკაციული დიაგრამა „იყინება“ $A=4$ -თვის. განსხვავებათა მიზეზებს მე-5 თავში შევისწავლით.

კითხვა: რა მოსდის ლოჯისტიკური ასახვის ტრაექტორიებს, როდესაც $A > 4$?

„ქაოსური“ ქმედება ლოჯისტიკური ასახვისთვის ჭეშმარიტად ქაოსია, თუ იგი იტერაციის პროცედურით გამოწვეული ილუზიაა? ქაოსის ექსპერიმენტული კვლევისათვის ჩვენ შეგვიძლია დავაკვირდეთ ერთიმეორესთან ახლო საწყისის მქონე ტრაექტორიებს და დავაკვირდეთ მათ დივერგენციას. მაგალითად, 1.2 ცხრილში მოყვანილია ორბიტები სამი ტრაექტორიისთვის. თითოეული მათგანისთვის $A=3,99$. ერთი ტრაექტორია იწყება $x=0,400$ წერტილიდან, მეორე $x=0,401$ წერტილიდან და მესამე $x=0,4005$ წერტილიდან. შეგვიძლია დავინახოთ, რომ სულ რაღაც ათი იტერაციის შემდეგ, პირველი ორი ტრაექტორია ერთმანეთს 0,6-ით სცილდება, რაც x_n -ის საშუალო მიახლოებითი მნიშვნელობაა. აქედან გამომდინარე, $A=3,99$ -სთვის ლოჯისტიკური ასახვა ახლომდებარე ტრაექტორიების დივერგენციის მაჩვენებელია. შევამციროთ საწყისი სხვაობა 0.001-დან 0.0005-მდე. დასჭირდებათ ტრაექტორიებს ორჯერ „მანძილის გავლა“ იგივე დივერგენციის მისაღწევად? ცხრ.1.2 გვაუწყებს, რომ შეკითხვის პასუხია – არა. ფაქტობრივად, ჩვენ „კატასტროფას“ მხოლოდ ერთით მეტი იტერაციითაც კი თავიდან ვიცილებთ.

მიუხედავად იმისა, რომ პოპულაციის დინამიკის ამგვარი მარტივი მოდელი ნათლად არ ასახავს თუ რა ემართება რეალურ ბიოლოგიურ პოპულაციებს, მაგრამ არსებითია ის ფაქტი, რომ ძალიან მარტივი მათემატიკური სქემა, რომელიც წარმოებულა, ინტეგრალსა, თუ წარმოსახვით ფუნქციებს მოცავს, გვიჩვენებს უაღრესად კომპლექსურ ქმედებას როდესაც A პარამეტრი იცვლება. ამ უკანასკნელის ფიქსირებული მნიშვნელობის შემთხვევაშიც კი, პოპულაციის წილი წლიდან წლამდე შეიძლება სტიქიურად შეიცვალოს. ბიოლოგებისათვის ეს ნიშნავს, რომ ცვლილებები პოპულაციაში არ საჭიროებს გარემოს ცვლილებებს. ზოგიერთი შეხედულების მიხედვით, ცვლილებები პოპულაციის დინამიკაში გარდაუვალია. ლოჯისტიკური ასახვის მოდელის შედეგებმა შეიძლება გავლენა მოახდინოს ბიოლოგის მიერ გამოტანილ დასკვნებზე, რომლებიც ბიოლოგიურ პოპულაციებში მომხდარ ცვლილებებს ეხება. ქაოსის თეორიისთვის გაცილებით მნიშვნელოვანი ქაოსური ქმედების გამომწვევი ისეთი უნივერსალური მახასიათებლებია, როგორცაა მაგალითად პერიოდის გაორმაგება. ამგვარი ქმედება ერთი და იგივეა როგორც დიოდურ წრედში, ისე ლოჯისტიკური ასახვის მოდელში (და როგორც ვნახავთ, ასევე მრავალ არაწრფივ სისტემაში).

ცხრილი 1.2.

ტრაექტორიები ლოჯისტიკური ასახვისათვის, როდესაც $A=3,99$.

n	x_n	x_n	x_n
0	0.4000	0.4010	0.4005
1	0.9576	0.9584	0.9580
2	0.1620	0.1591	0.1605
3	0.5417	0.5338	0.5377
4	0.9906	0.9929	0.9918
5	0.0373	0.0280	0.0324
6	0.1432	0.1085	0.1250
7	0.4894	0.3860	0.4365
8	0.9971	0.9456	0.9814
9	0.0117	0.2052	0.0727
10	0.0462	0.6507	0.2691
11	0.1758	0.9069	0.7847
12	0.5781	0.3368	0.6740
13	0.9731	0.8912	0.8767
14	0.1043	0.3870	0.4314
15	0.3727	0.9465	0.9787

სიდიდეები ცხრილში დამრგვალებულია მეათათასედი სიზუსტით.

გამოთვლები ჩატარებულია რვა ციფრის სიზუსტით.

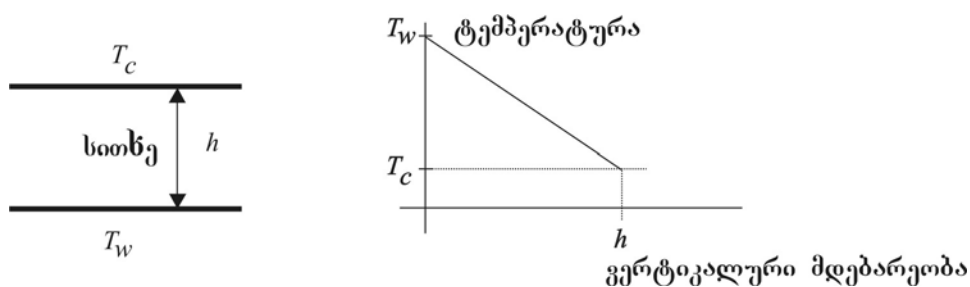
1.5 კონვექციური სითხეების ლორენცის მოდელი

არაწრფივი სისტემის მესამე მაგალითი კონვექციური ხსნარის ძლიერ გამარტივებული მოდელია. ეს მოდელი 1963 წელს MIT მეტეოროლოგმა ედვარდ ლორენცმა დანერგა. იგი დაინტერესებული იყო ატმოსფეროში კონვექციის მოდელირებით. ლორენცი იმის დემონსტრირებას ცდილობდა, რომ განტოლებათა უმარტივეს სისტემასაც კი შეიძლება გააჩნდეს ისეთი ამონახსნები, როდესაც ქმედება არსებითად არაპროგნოზირებადია. ლორენცმა კვლევის შედეგები რესპექტაბელურ, მაგრამ არც მაინცდამაინც განხილულ ატმოსფერული მეცნიერებების ჟურნალში გამოაქვეყნა, სადაც ისინი მათემატიკოსებისა თუ სხვა მეცნიერებისათვის 70-იანი წლების დასაწყისამდე შეუმჩნეველი დარჩა. ამჟამად, როდესაც

ქაოსს გაცილებით დიდი ყურადღება ეთმობა, ლორენცის მოდელის განტოლებების შემსწავლელი მცირე ქვედარგი განვითარდა (მაგალითად [Sparrow, 1982]).

ლორენცის მოდელის განტოლებების დეტალური ამოხსნა მოცემულია C დანართში. მარტივი ფიზიკური ტერმინებით რომ ვიმსჯელოთ, ლორენცის მოდელი შეისწავლის სითხისაგან შემდგარ სისტემას (ვთქვათ ატმოსფეროს), რომელიც შრეებად არის დაყოფილი და ქვემოდან თბება (მაგალითად, როგორც მზე ათბობს დედამიწის ზედაპირს) და ზემოდან ცივდება. საილუსტრაციოდ მოყვანილია (1.15) ნახაზი. ხსნარის ქვედა ნაწილში შენარჩუნებულია T_w ტემპერატურა (ე. წ. „თბილი“ ტემპერატურა), რომელიც ზემო ნაწილის T_c ტემპერატურას აღემატება („ცივი“ ტემპერატურა). დაუშვათ, $T_w - T_c$ ტემპერატურათა სხვაობა ფიქსირებული სიდიდეა. (ამგვარი სისტემა 1900 წელს ექსპერიმენტულად ბენარდმა შეისწავლა. ლორდ რეილიმ 1916 წელს ზოგიერთი ძირეული თვისების თეორიული არსი გადმოსცა. აქედან გამომდინარე, მოცემულ კონფიგურაციას ამჟამად რეილი-ბენარდის უჯრედს უწოდებენ.)

თუ $\delta T = T_w - T_c$ ტემპერატურათა სხვაობა არ არის ძალიან დიდი, სითხე სტაციონარულია. სითბო გადაეცემა ქვემოდან ზემოთ თბოგამტარობის მეშვეობით. ნაკლებად ბლანტი თბილი ხსნარის გაფართოებისადმი ტენდენცია გაწონასწორებულია თბოდანაკარგების მეშვეობით. სითხის სიბლანტით გამოწვეული მიღევა ხელს უშლის მას გაფართოვდეს იმაზე მცირე დროში, რაც საჭიროა გარემოსთან სითბური წონასწორობის დასამყარებლად. ასეთ პირობებში ტემპერატურა იკლებს წრფივად T_w –დან T_c –ში, როგორც ამას (1.15) ნახაზი გვიჩვენებს. თუ ტემპერატურათა სხვაობა საკმარისად გაიზრდება, ამომგდები ძალები თანდათანობით გაძლიერდება რათა დაძლიოს სიბლანტე და წარმოიშობა მდგრადი ცირკულირებადი დენები.



ნახ. 1.15. მარცხნივ: რეილი-ბენარდის უჯრედის სქემატური დიაგრამა. უჯრედი შეუზღუდავად ფართოვდება როგორც მარჯვენა, ასევე მარცხენა მიმართულებით და წიგნის გვერდისადმი შიგნით და გარეთ. მარჯვნივ: ტემპერატურა როგორც სიმაღლის ფუნქცია ე.წ. გამტარ (არაკონვექციურ) მდგომარეობაში.

ასეთ მდგომარეობაში სითბოს ქვემოდან ზემოთ გადატანა ხდება კონვექციის მეშვეობით როდესაც ადგილი აქვს სითხის რეალურ მოძრაობას. მარტივად რომ ვთქვათ, როდესაც ხსნარის თბილი მასა მიაღწევს შრის ზედა ნაწილს, იგი კარგავს სითბოს და შემდეგ ეშვება ქვემოთ, სადაც მისი ტემპერატურა კვლავ მატულობს. საბოლოო შედეგია დროში სტაბილური ცირკულაცია, რომელიც სქემატურად ნაჩვენებია (1.16) ნახაზზე.

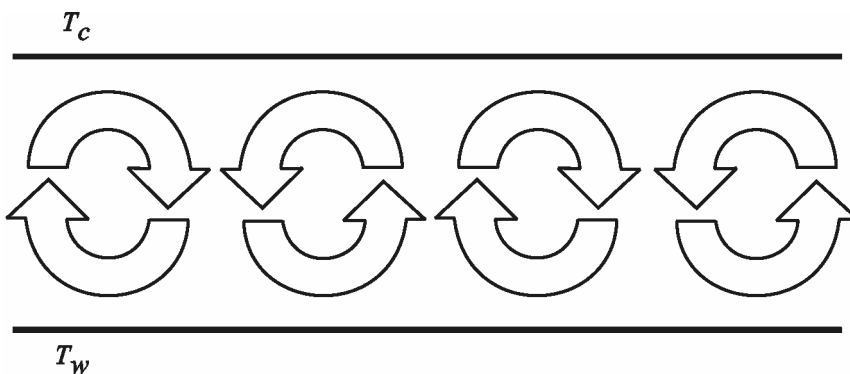
ტემპერატურის შემდგომი ზრდისას δT სხვაობა, ცირკულაციური დენები და შედეგად მიღებული ტემპერატურათა სხვაობები იწყებს დროში ცვლას. კიდევ ერთი ტიპური არაწრფივი თვისება მდგომარეობს შემდეგში: მიუხედავად ხსნარის დროში სტაბილურობისა (დაშვება ტემპერატურათა ფიქსირებული სხვაობის შესახებ), სისტემაში „სპონტანურად“ ვითარდება დროზე დამოკიდებული ქმედება. ეს არასოდეს ხდება წრფივი სისტემის შემთხვევაში. თუ წრფივი სისტემა განიცდის მუდმივი „ძალების“ ზემოქმედებას, მისი რეაქციაც დროში მუდმივი იქნება (საწყისი გადახრის მიღების შემდეგ). (მკაცრად რომ ვთქვათ, ბოლო მტკიცება ჭეშმარიტია მხოლოდ მაშინ, როდესაც სისტემაში ადგილი აქვს დისიპაციას ანუ „ხახუნს“. სხვაგვარად საწყისი გადახრა წონასწორობიდან არასოდეს ქრება.) თუ ძალები დროში გარკვეული სახით იცვლება, მაშინ წრფივი სისტემის რეაქცია იგივე დროში ცვლილებაზე იქნება დაფუძნებული.

ახსტრაქტული ტერმინებით რომ ვიმსჯელოთ, არაწრფივ სისტემას შეუძლია დაარღვიოს გარემოსა და განტოლებების **დროის მიმართ ინვარიანტულობა**. დროის მიმართ ინვარიანტულობა ნიშნავს, რომ განტოლებები და გარემო t -სა და $t+\tau$ –თვის ერთი და იგივეა. თუმცა, როდესაც სისტემის ქმედება დროზე დამოკიდებული ხდება, დროის მიმართ სიმეტრია იშლება. წრფივი სისტემისთვის ინვარიანტულობა მხოლოდ იმ შემთხვევაში ირღვევა, როდესაც სისტემაზე გარე ძალები არღვევენ მასში არსებულ ინვარიანტულობას. არაწრფივ სისტემას ინვარიანტულობის მოსპობა სპონტანურად შეუძლია. მე-11 თავში ჩვენ შევხვდებით ინვარიანტულობის მსგავს რღვევას რომელსაც თან ახლავს სივრცული სტრუქტურების წარმოქმნა. ფაქტობრივად, რელი-ბენარდის უჯრედში ცირკულაციის ნაკადები სივრცითი ინვარიანტულობის რღვევის მარტივი მაგალითია.

ლორენცის განტოლებები

ლორენცის მოდელი ხსნარებისთვის ნავიერ-სტოქსის ფუნდამენტალური განტოლებების გამარტივებას ეფუძნება. როგორც ეს **C danar TSi** ჩანს, ხსნარის გადაადგილება და საბოლოო ტემპერატურული სხვაობები შეიძლება პირობითად სამი ცვლადით $X(t)$, $Y(t)$ და

$Z(t)$ აღიწეროს. ჩვენ სწრაფადვე შეგვიძლია შევნიშნოთ, რომ ისინი სივრცითი ცვლადები არ არიან. მათი სრული აღწერა მოცემულია C დანართში. ჩვენ შემთხვევაში კი საკმარისია ვიცოდეთ, რომ X დაკავშირებულია ე.წ. სითხის ნაკადის ფუნქციასთან. კერძოდ, თუ გამოვთვლით ნაკადის ფუნქციის წარმოებულებს სივრცითი კოორდინატების მიმართ, მივიღებთ ნაკადის სიჩქარის კომპონენტებს. ლორენცის მოდელში ნაკადის ფუნქციის სივრცითი დამოკიდებულება შერჩეულია ემპირიულად, რათა შესაბამისობაში იქნეს მოყვანილი კონვექციური ელემენტის მარტივი მახასიათებლები. აქედან გამომდინარე, ლორენცის მოდელი არ შეიძლება გამოყენებული იქნეს უფრო რთული სტრუქტურის მქონე სითხეების მიმართ.



ნახ. 1.16. ცირკულირებადი კონვექციური ელემენტის განივკვეთი რეილი-ბენარდის უჯრედში.

Y და Z ცვლადები ტემპერატურის გადახრის დროზე დამოკიდებულებასთან არის კავშირში, რაც შორსაა ტემპერატურის წრფივ კლებასთან ქვემოდან ზემოთ, რასაც ადგილი აქვს მდგრადი მდგომარეობების დისკრეტული მიმდევრობის შემთხვევაში. მოცემულ სიმაღლეზე Y პროპორციულია სითხის აღმავალ და დაღმავალ ნაწილებს შორის არსებულ ტემპერატურათა სხვაობასთან მოცემულ სიმაღლეზე, მაშინ როდესაც Z პროპორციულ დამოკიდებულებაშია ტემპერატურის წრფივი მდგომარეობიდან გადახრასთან.

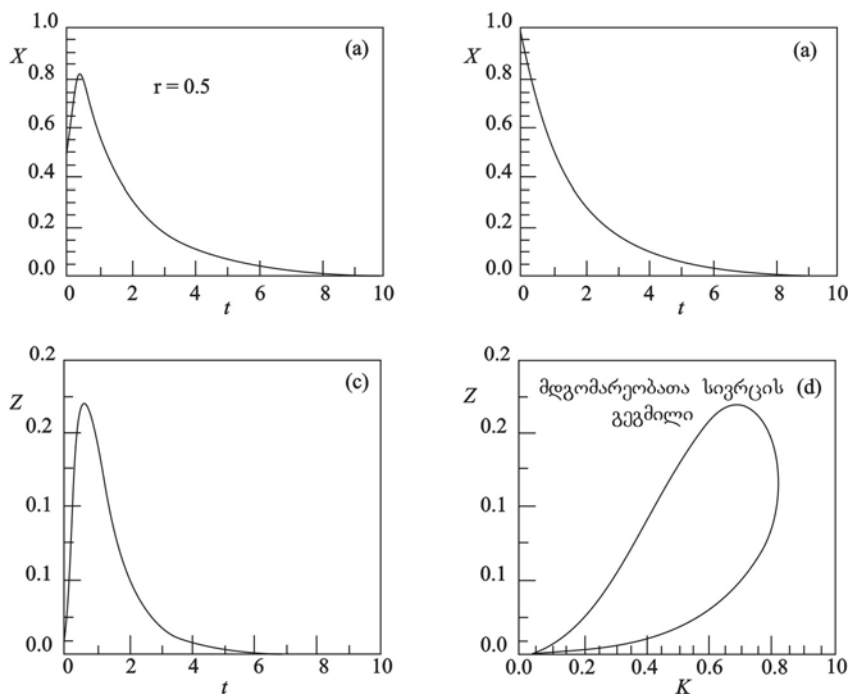
ამ ცვლადების გამოყენებით ჩვენ შევძლებთ ლორენცის მოდელის განტოლებების გამოყვანას სამი წყვილი დიფერენციალური განტოლების სახით:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= p(Y - X) \\ \dot{Y} &= -XZ + rX - Y \\ \dot{Z} &= XY - bZ \end{aligned} \tag{1.5-1}$$

აქ \dot{X} აღნიშნავს დროის მიმართ წარმოებულს

$$\dot{X} \equiv \frac{dX}{dt} \tag{1.5-2}$$

p , r და b რეგულირებადი პარამეტრებია. p ე.წ. პრანდტლის რიცხვია, რომელიც განისაზღვრება როგორც სითხის კინეტიკური სიბლანტის ფარდობა სითბური დიფუზიის კოეფიციენტთან. უხეშად რომ ვთქვათ, პრანდტლის რიცხვი ადარებს მოცემული სიბლანტის მქონე სსნარის მცირე „ელემენტის“ მიერ სიბლანტით (ხახუნით) გამოწვეულ ენერგიის კარგვის სიჩქარეს თბოგამტარობით გამოწვეულ ენერგიის კარგვის სიჩქარესთან. r კოეფიციენტი პროპორციულია რეილის რიცხვისა, რომელიც შრის ქვედა და ზედა ნაწილებს შორის არსებულ ტემპერატურათა სხვაობის უგანზომილებო სიდიდეა. ტემპერატურული სხვაობის ზრდის შემთხვევაში რეილის რიცხვიც იზრდება. b პარამეტრი დაკავშირებულია სითხის შრის h ვერტიკალური სიმაღლის კონვექციური ელემენტის ჰორიზონტალურ ზომასთან. აღსანიშნავია, რომ $b=8/3$ დროს იწყება კონვექცია რეილის რიცხვის უმცირესი მნიშვნელობისათვის, ანუ ტემპერატურათა სხვაობის უმცირესი δT სხვაობის შემთხვევაში.



ნახ. 1.17. (a), (b)-სა და (c)-ში X , Y და Z გრაფიკულად წარმოდგენილია, როგორც დროის ფუნქციები ლორენცის ისეთი მოდელისათვის, როდესაც $r=0,5$, $p=10$ და $b=8/3$. (d) შემთხვევაში მრუდი პროექციაა მდგომარეობების სივრცის ZX სიბრტყეზე. თითოეულ შემთხვევაში მრუდი სათავეს იღებს $X=0$, $Y=1$ და $Z=0$ საწყის წერტილში.

ამ მნიშვნელობას ჩვეულებრივ ირჩევენ ლორენცის მოდელის შესწავლისთვის, ხოლო p აღებულია კონკრეტული სითხის მიხედვით. ლორენცი (LOR63) იყენებდა სიდიდეს $p=10$

(რაც დაახლოებით ცივ წყალს შეესაბამება), რომელსაც ზალცმანი (SAL62) იყენებდა მანამდე არსებული რეილი-ბენარდის კონვექციური თეორიისათვის. ჩვენ ვუშვებთ, რომ რეილის რიცხვს მაკონტროლებელი ცვლადი პარამეტრის ფუნქცია აქვს.

მიუხედავად იმისა, რომ ლორენცის მოდელი აგებულია დიფერენციალური განტოლებების უმარტივეს სისტემაზე, იგი ძალზედ რთულ ქმედებას აღწერს. განტოლებები თითქოს იმდენად მარტივია, რომ მკითხველს შეიძლება მოეჩვენოს, რომ თუ X , Y და Z დროის ფუნქციაა, განტოლებები იოლად ამოიხსნება. ფაქტობრივად, როგორც შემდეგში ვნახავთ, ამონახსნების ანალიზური სახით მიღება, რომელიც მოგვცემდა X , Y და Z –ს დროის ნებისმიერ მომენტში, შეუძლებელია. ამგვარად, საჭიროა განტოლებების რიცხობრივად ამოხსნა კომპიუტერის მეშვეობით. ამგვარი ინტეგრების რამდენიმე მაგალითს კიდევ მოვიყვანთ, ხოლო შედეგების ანალიტიკური საფუძვლების შესახებ მომავალში ვისაუბრებთ.

ლორენცის განტოლებების ამონახსნების თვისებები

მოდელის მიხედვით, r -ის მცირე სიდიდეების ანუ ტემპერატურათა მცირედი δT სხვაობისას, გვაქვს მდგრადი მდგომარეობა უძრავი, არაკონვექციური მდგომარეობის სახით. X , Y და Z ცვალებადებისათვის ასეთ მდგომარეობას შეესაბამება $X=0$, $Y=0$ და $Z=0$. $r \geq 1$ -თვის მყარდება მდგრადი კონვექცია. არსებობს ორი სახის შესაძლო კონვექციური მდგომარეობა: პირველი მათგანი შეესაბამება საათის ისრის მიმართულებით მოძრაობას, მეორე კი – საათის ისრის საპირისპირო მიმართულებით. როგორც შემდგომში ვინილავთ, ზოგიერთი საწყისი პირობა პირველ მდგომარეობას იწვევს, სხვები კი მეორეს განაპირობებენ. ლორდ რეილიმ შენიშნა, რომ თუ $p > b+1$, მაშინ ამგვარი მდგრადი კონვექცია r -ის საკმარისად მაღალი მნიშვნელობების პირობებში არასტაბილურ ხასიათს იძენს და იწვევს სისტემის უფრო ქმედებას. r -ის ზრდისას ქმედებას გააჩნია ქაოსური ქმედების რეგიონები, რომლებიც შერეულია პერიოდულობისა და „გარდამავლობის“ ინტერვალბთან, რომელთა მონაცვლეობა ქაოსურ და პერიოდულ ქმედებებს შორის ხდება ციკლურად და ერთი შეხედვით ატარებს მოუწესრიგებელ ხასიათს.

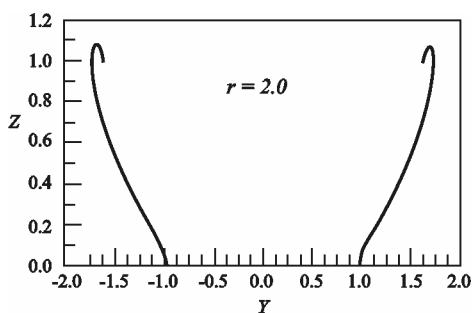
ზოგიერთი ამგვარი ქმედების აღსაწერად გამოვიყენოთ ლორენცის მოდელი ისე, რომ დავაკვირდეთ სისტემის ქმედებას $r < 1$ მნიშვნელობებისათვის. რეილის ანალიზის მიხედვით, სისტემა შეიძლება მდგრად არაკონვექციურ მდგომარეობაში აღმოჩნდეს, როდესაც $X=0$, $Y=0$ და $Z=0$. ნახ. 1.17. გვიჩვენებს ლორენცის განტოლებების რიცხობრივი ინტეგრების შედეგებს $X=0$, $Y=0$ და $Z=0$ საწყისი პირობებით. თავდაპირველად ვიღებთ სისტემას მცირედი

ცირკულაციითა და ტემპერატურული გადახრებით. დროთა განმავლობაში ხდება სისტემის რელაქსაციამდგრად $X=0$, $Y=0$ და $Z=0$ პირობის შესაბამის დისკრეტულ მდგომარეობაში.

თვალსაჩინოებისათვის გამოვიყენოთ ორი დამატებითი გრაფიკული წარმოდგენა ასეთი სახის ქმედებაზე დასაკვირვებლად. პირველი გრაფიკი X , Y და Z ცვლადებს დროის ფუნქციის სახით წარმოგვიდგენს, სხვა დიაგრამები კი ასახავენ სისტემის ევოლუციას XYZ სივრცეში. მას შემდეგ, რაც X , Y და Z ცვლადები განსაზღვრავენ სისტემის მდგომარეობას ლორენცის მოდელისთვის, ვუწოდოთ ამ სივრცეს **მდგომარეობათა სივრცე**. ლორენცის მოდელისთვის შემთხვევაში ეს სივრცე სამგანზომილებიანია. მას შემდგომში ორგანზომილებიანი გეგმილების სახით განვიხილავთ, მაგალითად, XY ან ZX სიბრტყეებზე. გარკვეული დროის შემდეგ მდგომარეობების სივრცეში მდებარე წერტილი რაღაც მარშრუტით გადაადგილებას დაიწყებს, რასაც ჩვენ ტრაექტორიას ვუწოდებთ. ნახაზი 1.17 (d) გვიჩვენებს ტრაექტორიის ZX სიბრტყეზე პროექციას მდგომარეობების სივრცეში. 1.17 ნახაზიდან ვხვდებით, რომ ტრაექტორია „რელაქსაციას განიცდის“ $X=0$, $Y=0$ და $Z=0$ პირობებში, რაც 1.15 ნახაზზე წარმოდგენილი არაკონვექციური მდგომარეობაა.

ამოცანა 1.5-1. ისარგებლეთ X , Y და Z დროზე დამოკიდებულების გრაფიკებით, რათა განსაზღვროთ, თუ როგორ ცირკულირებს ტრაექტორიის წერტილი 1.17 ნახაზზე გამოსახული მარყუჟის ირგვლივ.

ამოცანა 1.5-2. შეამოწმეთ, რომ ლორენცის მოდელის განტოლებებს მთლიანობაში სამი ფიქსირებული წერტილი აქვს: ერთი $X=0$, $Y=0$ და $Z=0$ -ში, დანარჩენები კი $X= Y=\pm\sqrt{b(r-1)}$ -ში, როდესაც $Z= r-1$ (ცხადია, უკანასკნელ ორ ფიქსირებულ წერტილს მხოლოდ მაშინ აქვს აზრი, როდესაც $r>1$).



ნახ. 1.18. მდგომარეობების სივრცის გეგმილები YZ სიბრტყეზე ტრაექტორიებისთვის ლორენცის მოდელის პირობებში, როდესაც $r=2$. ერთ-ერთი მიზიდულობის წერტილი საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით გადაადგილებას შეესაბამება, ხოლო მეორე ხსნარის საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით

გადაადგილებას გარკვეული სივრცითი მდებარეობისას.

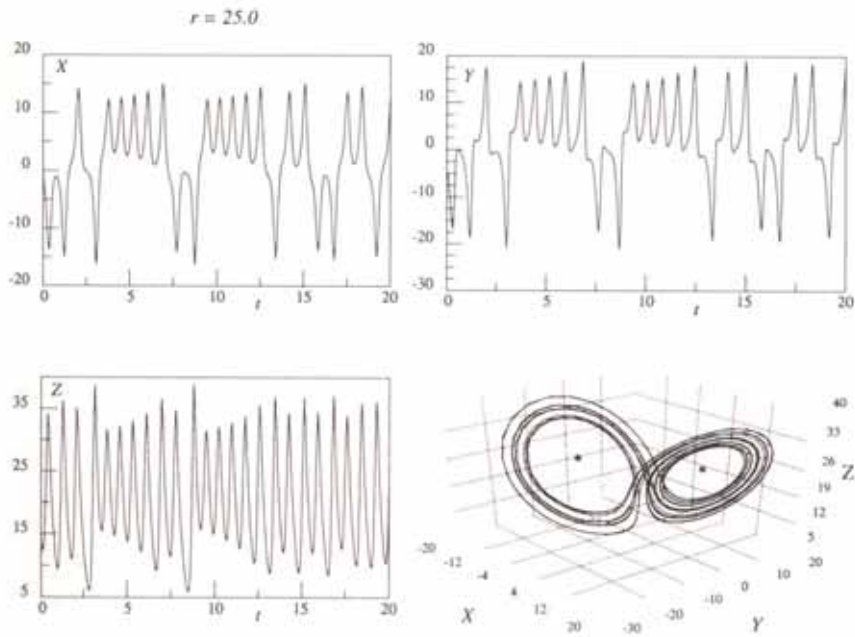
მიაქციეთ ყურადღება, რომ $X=0$, $Y=0$ და $Z=0$ წერტილში ყოველი დროით წარმოებული ლორენცის განტოლებაში 0-ის ტოლია. ჩვენ ამ წერტილს მდგომარეობების სივრცის **ფიქსირებულ წერტილს** ვუწოდებთ. მომავალში დავრწმუნდებით, რომ ასეთი წერტილები არაწრფივი სისტემების დინამიკაში გადამწყვეტ როლს ასრულებენ.

პირველი რიგის (1.5-1) განტოლებით განსაზღვრული სისტემისათვის წერტილს, რომელშიც სივრცითი ცვლადების დროის მიმართ წარმოებულები 0-ის ტოლია, მოცემული სისტემის ფიქსირებული წერტილი ეწოდება (რასაც ჩვენ დიფერენციალური განტოლებების სისტემებისთვის ფიქსირებულ წერტილებს ვუწოდებთ, სხვადასხვა ავტორები მათ ასევე *წონასწორულ*, *კრიტიკულ* ან *სინგულარულ* წერტილებს უწოდებენ.) თუ სისტემის სათავე ერთ-ერთ ფიქსირებულ წერტილშია, იგი საბუდამოდ ამ წერტილში დარჩება. ვინაიდან სივრცითი ცვლადების დროით წარმოებულები ფიქსირებულ წერტილში 0-ის ტოლია, ასეთი ცვლადები დროის განმავლობაში კვლავ შეიცვლება.

1-ზე ნაკლები r -ის ყველა მნიშვნელობისათვის, ნებისმიერი ტრაექტორია საბოლოოდ ფიქსირებული წერტილის მახლობლად, XYZ მდგომარეობების სივრცის კოორდინატა სათავესთან სრულდება, საწყისი პირობების მიუხედავად. ლოჯისტიკური ასახვის ენით შეგვიძლია ვთქვათ, რომ როდესაც $r < 1$, კოორდინატა სათავესთან მთელი XYZ სივრცე *მიზიდულობის არეა*.

როდესაც $r > 1$, სამი ფიქსირებული წერტილი გვაქვს. პირველი მათგანი, რომელიც კოორდინატა სათავეს სიახლოვეს იმყოფება, წარმოადგენს განზიდვის წერტილს, ვინაიდან ახლომდებარე ტრაექტორიები მას შორდებიან. დანარჩენი ორი ფიქსირებული წერტილი კი მიზიდულობის წერტილებია, თუკი r არ არის ძალიან დიდი. ზოგიერთი საწყისი პირობისათვის გვაქვს ისეთი ტრაექტორიები, რომლებიც მიისწრაფვიან ერთი ფიქსირებულ წერტილისაკენ; სხვა საწყისი პირობების შემთხვევაში კი – მეორისაკენ. (მე-4 თავში ჩვენ რიცხობრივად გაცილებით დაწვრილებით განვიხილავთ, თუ რა განსხვავებაა ამ ფიქსირებულ წერტილებს შორის.) $r \geq 1$ -თვის, მდგომარეობების სივრცეში დანარჩენი ორი ფიქსირებული წერტილი იქცევა მიზიდულობის წერტილებად. ამგვარად, ჩვენ ვამბობთ, რომ $r=1$ არის ბიფურკაციის წერტილი ლორენცის მოდელისთვის. 1.18. ნახაზზე გამოსახულია განსხვავებული საწყისი წერტილებიდან დაწყებული ტრაექტორიების ქმედება.

ასეთი სახის ქმედება განვიხილოთ უფრო ღრმად ფიზიკური თვალსაზრისით. თუ $r \geq 1$, (გაიხსენეთ, რომ ეს ნიშნავს ტემპერატურათა სხვაობის ზრდას ხსნარის შრის ქვედა და ზედა ნაწილებს შორის), კოორდინატა სათავეში მყოფი ფიქსირებული წერტილი გადაიქცევა განზიდვის ფიქსირებულ წერტილად. ეს ნიშნავს, რომ ე.წ. გამტარობის მდგომარეობა (როდესაც სითხეში არ არსებობს კონვექცია) არამდგრადი გახდა.

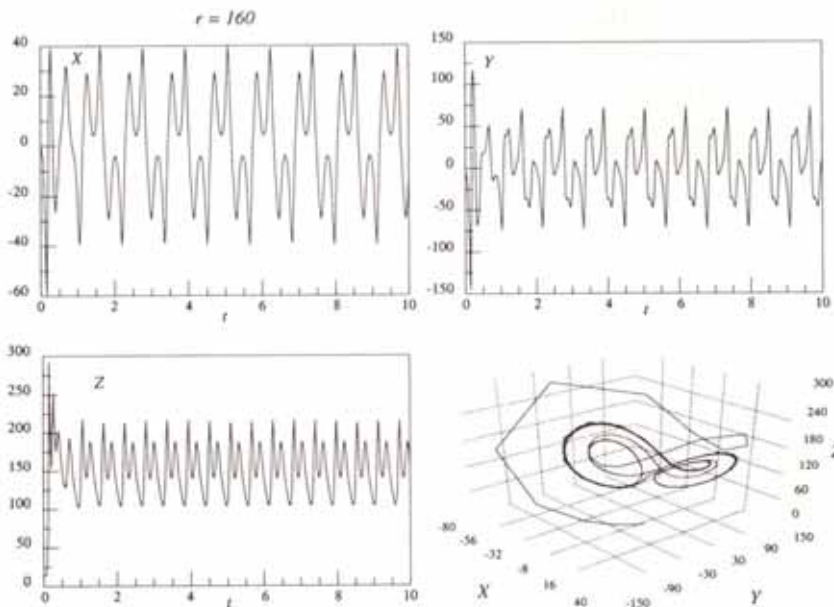


ნახ. 1.19. ლორენცის განტოლების ამოხსნები $r=25$ -თვის. აქ საწყისი წერტილია $X=0$, $Y=-5$, $Z=15$. მდგომარეობების სივრცის დიაგრამაზე (მარჯვენა ქვედა პანელი) კოორდინატა სათავიდან მოშორებით მყოფი ორი ფიქსირებული წერტილი $Z=24$, $X=8$ და $Y=8$ -თვის აღნიშნულია ვარსკვლავებით.

$X=0$, $Y=0$, $Z=0$ პირობებიდან უმცირესი გადახრა მდგომარეობათა სივრცის ტრაექტორიას კოორდინატა სათავიდან წაანაცვლებს. თუ $r \geq 1$, დანარჩენი ორი ფიქსირებული წერტილის ტრაექტორიები მიიზიდებიან $X=Y=\pm \sqrt{b(r-1)}$ -კენ. ეს ორი ფიქსირებული წერტილი მდგრად (დროისგან დამოუკიდებელ) კონვექციას შეესაბამება ერთ შემთხვევაში საათის ისრის, მეორე კი – საპირისპირო მიმართულებით. ზოგიერთი საწყისი წარმოშობს ტრაექტორიებს, რომლებიც ერთი ფიქსირებული წერტილისკენ მიისწრაფვიან; სხვა საწყისი პირობები ტრაექტორიებს სხვა ფიქსირებული წერტილისკენ მიმართავს. 1.18. ნახაზის მარცხენა მხარეზე ნაჩვენებია მდგომარეობების სივრცის პროექცია YZ სიბრტყეში იმ ტრაექტორიისათვის, რომლის სათავეა $X=0$, $Y=-1$ და $Z=0$. 1.18. ნახაზის მარჯვენა მხარე

გვიჩვენებს სხვა საწყისი მნიშვნელობების: $X=0$, $Y=+1$, $Z=0$ შესაბამის ტრაექტორიას. განსაკუთრებით აღსანიშნავია, რომ სისტემა რელაქსაციას განიცდის Y -ისა და Z -ის არანულოვანი მნიშვნელობების შესაბამის მდგომარეობაში ანუ როდესაც ადგილი აქვს სითხის ცირკულაციას.

ნებისმიერი დინამიკური სისტემის მიმართ საინტერესოა შემდეგი კითხვის დასმა: XYZ სივრციდან აღებული საწყისი პირობების რომელი არიდან იწყებიან ისეთი ტრაექტორიები, რომლებიც გადიან მოცემულ ფიქსირებულ წერტილზე? სხვანაირად რომ ვთქვათ, მიზიდვის ფიქსირებული წერტილებისთვის რომელია მიზიდვის არეები? როგორ იცვლება ეს არეები სისტემის მახასიათებელი პარამეტრების ცვლილების შედეგად? მომავალში ჩვენ ვნახავთ, რომ ეს რეგიონები გეომეტრიული თვალსაზრისით საკმაოდ რთულია. ფაქტობრივად, მათი დახასიათებისათვის ჩვენ დაგვჭირდება *ფრაქტალების* შედარებით ახალი გეომეტრიული ცნება.



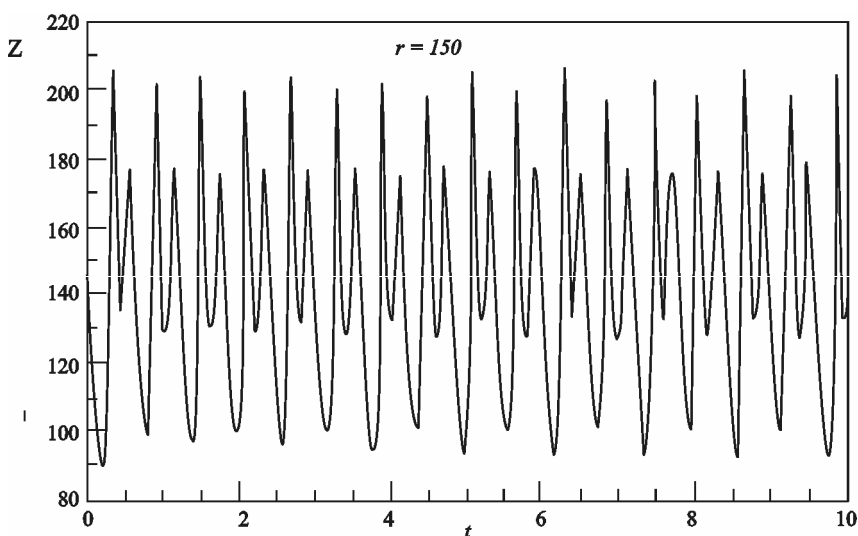
ნახ. 1.20. ლორენცის განტოლების ამონახსნები, როდესაც $r=160$. საწყისი გარდამავალი მდგომარეობების შემდეგ, რაც დაახლოებით $t=3$ დროის განმავლობაში გრძელდება, ამონახსნები პერიოდულია (მაგრამ არა სინუსოიდური). XYZ მდგომარეობათა სივრცის (ქვემოთ მარჯვნივ) გადაადგილების გარდამავალი ტრაექტორიის დაკბილული ფორმა უბრალოდ გრაფიკული დამახინჯების შედეგია. გამოთვლები სინამდვილეში ბევრად უფრო მცირე დროითი ნაბიჯითაა ჩატარებული.

გავაგრძელოთ ხსნარის შრეებს შორის არსებული ტემპერატურათა სხვაობის ზრდა. განსაკუთრებული არაფერი ხდება, სანამ r არ მიაღწევს 13,93-ს. აქ ჩვენ ვხედავთ, რომ

განზიდვის არეები კოორდინატთა სათავისგან დაშორებული ფიქსირებული წერტილების ირგვლივ ყალიბდება. მიზიდვის არეები კვლავაც მცირეა და მათში დაწყებული ტრაექტორიები მიიზიდებიან ზემოთსენებული ორი წერტილისაკენ. ამ არეების გარეთ დაწყებული ტრაექტორიები ფიქსირებული წერტილების მიდამოებიდან განიზიდებიან. თუ 1.19. ნახაზზე ნაჩვენებ $X(t)$, $Y(t)$ და $Z(t)$ გრაფიკებს გამოვიკვლევთ, ვნახავთ, რომ ახალი პირობები შესაბამისობაშია სითხის ნაკადში დროზე დამოკიდებულ ცვლილებებთან და ტემპერატურათა სხვაობასთან. შესაბამისი მდგომარეობათა სივრცის დიაგრამა 1.19. ნახაზზეა ნაჩვენები.

ეს დაკვირვებითი ფაქტი გარკვეულ ასახვასაც ჰპოვებს. განვიხილოთ სისტემა, რომლისთვისაც გარედან კონტროლირებადი „ძალა“ (ვთქვათ, ტემპერატურული სხვაობა) დროზე არ არის დამოკიდებული. სისტემაში ვითარდება დროის მიმართ არატრიალური დამოკიდებულება. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, არაწრფივ სისტემას შეუძლია დაარღვიოს მისი აღმწერი ფუნდამენტალური განტოლებების დროის მიმართ ინვარიანტულობა და მის ირგვლივ მყოფი გარემო. (პერიოდი-2, პერიოდი-4, და ა.შ. ლოჯისტიკური ასახვის მოდელში პოპულაციის ვარიაციები დროის მიმართ ინვარიანტულობის სპონტანური დარღვევის მაგალითებია).

ამ არეში r -ის მნიშვნელობები დროში საკმაოდ რთული სახით იცვლება. გადავინაცვლოთ სხვა არეში $r=160$ მნიშვნელობის სიახლოვეს. ქმედება არ არის უბრალოდ ჰარმონიული (ანუ არ არის სინუსოიდური), მაგრამ იგი პერიოდულია.



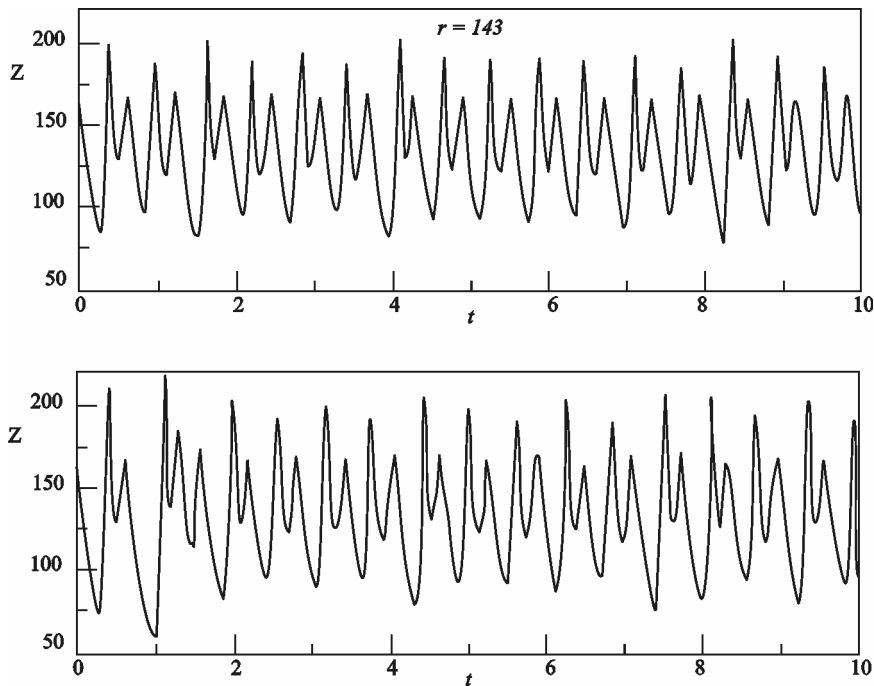
ნახ. 1.21. $Z(t)$ მრუდი ლორენცის განტოლებებისათვის, როდესაც $r=150$. საწყისი გარდამავალი სტადიის შემდეგ ქმედების, პერიოდი ორჯერ 1.20. ნახაზზე მოყვანილთან შედარებით ორჯერ მეტია. დააკვირდით უმაღლესი პიკების მონაცვლეობით სიმაღლეებს ამ ნახაზზე.

ჩვენ შევძლებთ სისტემის ქმედების ფიზიკური ბუნების გაგებას X და Y გრაფიკების მეშვეობით, თუ ამ სიდიდეებს განვიხილავთ როგორც დროის ფუნქციებს. ჩვენ ვხედავთ, რომ X სიმეტრიულად მერყეობს $X = 0$ მნიშვნელობის გარშემო. ეს ნიშნავს, რომ სითხის კონვექცია ჯერ საათის ისრის, ხოლო შემდეგ კი საწინააღმდეგო მიმართულებით მიმდინარეობს. ეს მდგომარეობა მეორდება და არ იცვლება. Y ცვლადით წარმოდგენილი ტემპერატურული სხვაობა ზედა და ქვედა ნაკადს შორის აგრეთვე სიმეტრიულად მერყეობს 0-ის გარშემო. Z ცვლადი არანულოვანი მნიშვნელობის გარშემო მერყეობს (დაახლოებით 160 ნახ. 1.20. – ზე მოყვანილი მაგალითის მიხედვით).

ამოცანა 1.5-3. დეტალურად აჩვენეთ, რომ ლორენცის განტოლებები არ იცვლება დროის წანაცვლებასთან ერთად, ანუ თუ t -ს შევცვლით $t+\tau$ -ით, განტოლებები იგივე სახეს ინარჩუნებენ. ამგვარად, ჩვენ ვამბობთ, რომ ლორენცის განტოლებებს ახასიათებს სიმეტრია დროში წანაცვლების მიმართ.

როდესაც რეილის რიცხვი დაახლოებით $r=150$ –მდე მცირდება, ვხედავთ, რომ Z –ის პერიოდული ქმედება მკვეთრად იცვლება. ნახ. 1.21. გვიჩვენებს, რომ ამჯერად პერიოდი-2-ის ტიპის ქმედებასთან გვაქვს საქმე. (თუ შეიძლება გაითვალისწინეთ სირთულე: 1.20-გან განსხვავებით ფუნდამენტური პერიოდი ასევე უმნიშვნელოდ იცვლება. ფუნდამენტური პერიოდის განსაზღვრისათვის ლორენცის მოდელს არ გააჩნია რაიმე გარეშე პერიოდული ძალა, როგორც ეს დიოდის წრედის შემთხვევაში იყო.) პერიოდი-2-ის ტიპის ქმედებას ყველაზე ადვილად ჩავწვდებით, თუ 1.21. ნახაზზე მოყვანილ უდიდეს აღმაველ „პიკებს“ ან დაღმაველ „ღრმულებს“ დავაკვირდებით. ჩვენ ვხედავთ, რომ ადგილი აქვს პერიოდის გაორმაგების ბიფურკაციას.

$r \sim 146$ -თვის $Z(t)$ ისევ ბიფურკაციას განიცდის, ოღონდ ამჯერად გაოთხმაგებული პერიოდით საწყისთან შედარებით. [მსგავს, მაგრამ არა ასეთ დრამატულ ცვლილებებს ადგილი აქვს $Y(t)$ და $X(t)$ შემთხვევაში.]



ნახ. 1.22. ლორენცის მოდელის შესაბამისი ორი ტრაექტორია გვიჩვენებს ახლომდებარე ტრაექტორიების დივერგენციას, როდესაც $r=143$. ზედა ნახაზზე ტრაექტორია იწყება საწყის პირობებში $X=20$, $Y=0$ და $Z=193$. ქვედა ნახაზზე კი ახლომდებარე ტრაექტორია იწყება $X=20$, $Y=0$, $Z=166$ წერტილში. მხოლოდ რამდენიმე რხევას საჭირო იმისათვის, რომ ტრაექტორიები ერთმანეთისაგან სრულიად განსხვავებული აღმოჩნდეს.

როდესაც r 144-ზე ქვემოთ ჩამოდის, ყველა ცვლადის ქმედება სრულიად აპერიოდულია. ჩვენ აქამდე ქაოსისაკენ მიმავალი კიდევ ერთი პერიოდის გაორმაგების შემთხვევასთან გვქონდა საქმე (ჩვენ არ ავვიგია r -ის მნიშვნელობების ამ დიაპაზონისათვის ბიფურკაციის სრული დიაგრამა, რადგან გამოთვლები დიდ დროს მოითხოვს.)

ლორენცის მოდელის შემთხვევაში პარამეტრ r -ის შემცირებასთან ერთად პერიოდის გაორმაგება პროგრესირებს. აქამდე განხილულ ორივე მაგალითში გაორმაგება პარამეტრის ზრდასთან ერთად იჩენდა თავს. ეს განსხვავება სინამდვილეში უმნიშვნელოა, როგორც ამას მე-2 თავში ვნახავთ. აქვე უნდა ითქვას, რომ ჩვენ ხაზი უნდა გავუსვათ იმ გარემოებას, რომ ლორენცის მოდელი გვიჩვენებს კომპლექსური ქმედების ფართო დიაპაზონს. ჩვენ ამგვარი ქმედებების მხოლოდ ძალიან შეზღუდული ნაწილი განვიხილეთ, რომელიც გულდასმით შეირჩა რათა შეგვედარებინა ჩვენს მიერ წარმოდგენილი ორი მაგალითის თვისობრივი მხარე.

ტრაექტორიების დივერგენცია ლორენცის მოდელში

ამჯერად მივუბრუნდეთ არსებით საკითხს – ასახავს თუ არა ლორენცის მოდელის შესაბამისი განტოლებები ქაოსურ ქმედებას r -ის მნიშვნელობათა ზოგიერთ დიაპაზონში და დავსვათ შეკითხვა: განიცდიან თუ არა ახლომდებარე ტრაექტორიები r სიდიდეების ასეთ ზღვრებში დივერგენციას? ნახ. 1.22. გვიჩვენებს მცირედ განსხვავებული საწყისი პირობების მქონე ორ ტრაექტორიას, როდესაც $r=143$. ჩვენ ვხედავთ, რომ სულ რამდენიმე რხევის შემდეგ ტრაექტორიები სრულიად განსხვავებულია. მიუხედავად იმისა, რომ ეს შედეგი ახლომდებარე ტრაექტორიების საერთო შეუთავსებლობაზე წარმოდგენას ვერ ქმნის, იგი გვეუბნება, რომ ლორენცის მოდელი აღწერს ქაოსურ ქმედებას, როდესაც $r=143$.

1.6 ტრაექტორიების დეტერმინიზმი, არაპროგნოზირებადობა და დივერგენცია

რა არის მნიშვნელოვანი ახლომდებარე ტრაექტორიების დივერგენციაში? ჩვენ განვაცხადებთ, რომ ამგვარი თვისება არის დამახასიათებელი ნიშანი ქმედების ისეთი ტიპისა, რომელსაც ქაოსურს ვუწოდებთ და ეს თვისება საშუალებას გვაძლევს განვასხვავოთ ქაოსისათვის დამახასიათებელი აპერიოდული ქმედება გარეშე ხმაურისგან. თეორიულ დეტალებს მომდევნო თავებში განვიხილავთ, ამჯერად კი ამგვარ ქმედებას თვისობრივად გამოვიკვლევთ.

ახლომდებარე ტრაექტორიების დივერგენციის მნიშვნელობა ასეთია: თუ ლორენცის შესაბამისი მსგავსი სისტემა ახლომდებარე ტრაექტორიების დივერგენციას პარამეტრთა გარკვეულ დიაპაზონში აღწერს, მაშინ ამ სისტემის ქმედება არსებითად *არაპროგნოზირებადი* ხდება. სისტემა კვლავ დეტერმინისტულია იმ თვალსაზრისით, რომ თუ ჩვენ ზუსტად ვიცით ტრაექტორიის საწყისი პირობები, მაშინ სისტემისთვის ამ ტრაექტორიის მომავალი ქმედების პროგნოზირება დინამიკური განტოლებების ინტეგრირებით შესაძლებელია. თუ ჩვენ საწყის პირობებში უმცირეს ცვლილებებს შევიტანთ, ტრაექტორია მყისვე მკვეთრად განსხვავებულ იერსახეს მიიღებს. თუ გავითვალისწინებთ, რომ საწყისი პირობების შერჩევისას გარკვეული უზუსტობები ყოველთვის იჩენს თავს ნებისმიერ რეალურ ექსპერიმენტში, ქაოსური სისტემისთვის რეალური მომავალი ქმედება არაპროგნოზირებადია. ამ შენიშვნის უკეთესად გააზრებისათვის ვიტყვით, რომ ქაოტური სისტემის მომავალი *განუსაზღვრელია* მაშინაც კი, როდესაც სისტემა *დეტერმინისტულია*.

ამგვარი არაპროგნოზირებადობის მიზეზი ის არის, რომ ჩვენ არ შეგვიძლია მოცემული ფიზიკური სისტემის ამსახველი არაწრფივი განტოლებათა ჩაკეტილი სისტემის ამონახსნების პოვნა. ასეთი ამონახსნი კი მაგალითად არის „ფორმულა“ $X(t)=X_0 \tanh \pi (at^2)$ ან

მიმდევრობის სახით ჩაწერილი ამონახსნი, წევრების შესაძლო უსაზღვრო რაოდენობით, $X(t)=a_1(t)+a_2(t)+a_3(t)....$ თუ განტოლებათა ჩაკეტილი სისტემის ამონახსნის პოვნა შესაძლებელია, ჩვენ მარტივად შევძლებთ სისტემის მომავალი ქმედების პროგნოზირებას ამ ამონახსნში დროის მომავალი t მნიშვნელობის ჩასმით. მცირედ განსხვავებული საწყისი პირობების შემთხვევაში ჩვენ ვიპოვით ახალ ამონახსნს. იმის გათვალისწინებით, რომ ამონახსნი უწყვეტი სახითაა დამოკიდებული პარამეტრებსა და საწყის პირობებზე, მათმა მცირეოდენმა ცვლილებამ $X(t)$ -ს ასევე მცირე ცვლილება შეიძლება გამოიწვიოს. ამგვარად, $X(t)$ -ს დიდი ცვლილება, რასაც ადგილი აქვს ქაოსურ სისტემაში საწყის პირობების მცირედ შეცვლისას, შეუძლებელია წარმოდგენილი იქნას განტოლებათა ჩაკეტილი სისტემის ამონახსნის სახით. ქაოსური სისტემის მომავალი ქმედების გასაგებად, ფორმულების ინტეგრირება საფეხურებრივად უნდა ვაწარმოოთ. (ზოგადად, ჩვენი „ექსპერიმენტი“ თვითდინებით უნდა მივუშვათ მომავლის დასანახად). ახლომდებარე ტრაექტორიების დივერგენცია ნიშნავს, რომ საწყისი პირობების განსაზღვრისას დაშვებული ნებისმიერი მცირე ცდომილება განტოლებათა ინტეგრირების გაიზრდება. ამგვარად, საწყისი პირობების მცირე ცვლილება სისტემის ხანგრძლივ, აშკარად განსხვავებულ ქმედებას იწვევს და ჩვენ პრაქტიკულად ვერ შევძლებთ ხანგრძლივი ქმედების დეტალურ პროგნოზირებას.

არაპროგნოზირებადობის პრობლემა არაწრფივ სისტემებში უფრო რთული შეიძლება აღმოჩნდეს, ვიდრე წარმოგვიდგენია. მაგალითად, მაშინაც კი, როდესაც ტრაექტორიის დეტალური ქმედების პროგნოზირება არ შეგვიძლია, შეიძლება ვიფიქროთ, რომ ტრაექტორია მდგომარეობების სივრცეში მიზიდვის რომელიმე არის ფარგლებში დარჩება. სამწუხაროდ, ბევრ არაწრფივ სისტემას პარამეტრების მოცემული მნიშვნელობებისათვისაც კი მიზიდულობის მრავალი წერტილი გააჩნია. მდგომარეობათა სივრცის სხვადასხვა წერტილებში დაწყებული ტრაექტორიები მიზიდულობის სხვადასხვა წერტილში სრულდება. თითოეულ მათგანს საკუთარი მიზიდულობის არე გააჩნია. ზოგჯერ ამ არეებს შედარებით მარტივი გეომეტრიული სტრუქტურა აქვთ და ჩვენ ადვილად შევძლებთ იმის განსაზღვრას, თუ რომელი საწყისი პირობა მიზიდულობის რომელი წერტილისაკენ მოძრაობას გამოიწვევს. სხვა შემთხვევებში კი არეები იმდენად ჩახვეულია (ე.წ. ჩახლართული არეალი), რომ საწყისი პირობების უმცირეს ცვლილებასაც კი შეუძლია გამოიწვიოს ტრაექტორიის განსხვავებულ მიზიდულობის წერტილებზე დაბოლოება. ამ შემთხვევაში ჩვენ ვკარგავთ მცირე შესაძლებლობასაც კი იმის პროგნოზირებისა, თუ რომელ წერტილზე დასრულდება ტრაექტორია (SOO93a) (LAW94)(LAI99).

ახლომდებარე ტრაექტორიების დივერგენციის ეფექტი არაწრფივი სისტემების ქმედებაზე *ჰებლის ეფექტის* ელევანტური მეტაფორით გამოიხატება. იგი თავდაპირველად

1972 წლის დეკემბერში ვაშინგტონში გამართულ ამერიკის მეცნიერების განვითარების ასოციაციის შეხვედრაზე, ლორენცის¹ მოხსენების სათაურში გვხვდება: „პროგნოზის იმისა, გამოიწვევს თუ არა პეპლის ფრთების მოძრაობა ბრაზილიაში ტორნადოს ტენსაში.“ ლორენცის აზრით, თუ ატმოსფერო ქაოსურ ქმედებას ახლომდებარე ტრაექტორიების დივერგენციისას ან საწყის პირობებზე დამოკიდებულებისას ავლენს, მაშინ უმცირესი ეფექტიც კი, როგორცაა პეპლის (ან სხვა ფრინველის) ფრთების მოძრაობა, ხანგრძლივ ატმოსფერულ პროგნოზს სრულიად უსარგებლოს გახდის.

კონფლიქტი დეტერმინიზმსა და მის (არსობრივ) მოწინააღმდეგეს, ნებისმიერობას, შორის დიდი ხნის ფილოსოფიური პრობლემაა. ნიუტონის მექანიკა დეტერმინისტული, საათის მექანიზმის ანალოგიურად აწყობილი სამყაროს სურათს წარმოგვიდგენს, სადაც მომავალი სრულად განსაზღვრულია სამყაროს შემადგენელი სხეულებისათვის მოძრაობის კანონებისა და საწყისი პირობების შერჩევით. ასეთი შეხედულების მიხედვით, ყოველი ჩვენი ქმედება მთლიანად განსაზღვრულია და თავისუფალი არჩევანი არ არსებობს. ნიუტონის დეტერმინიზმი დიდმა ფრანგმა მათემატიკოსმა – პიერ სიმონ ლაპლასმა (1749-1827) საფუძვლიანად განიხილა და წიგნის „*ალბათობის თეორია*“ შესავალში [Laplace 1812] დაწერა:

წარმოვიდგინოთ ტვინი, რომელმაც დროის მოცემულ მომენტში ბუნების ყველა მოქმედი ძალა და სამყაროს შემადგენელი ყოველი სხეულის მდებარეობა იცის; დაეუშვათ, რომ მომავალში ამ ტვინს მთელი ინფორმაციის მათემატიკური ანალიზის უნარი ექნება. მაშინ შეიძლება ისეთი შედეგის მიღება, რომ სამყაროს უდიდესი სხეულებისა თუ უმსუბუქესი ატომების მოძრაობა ერთი და იგივე ფორმულით გამოიხატებოდა. ამ ტვინისთვის გაურკვეველი არაფერი იქნება. წარსული და მომავალი მის თვალში აწმყო გახდება.

ლაპლასის შეხედულების თანახმად, იზოლირებული სისტემის საწყისი მდგომარეობა „მიზეზია“, რომლიდანაც სისტემის მომდევნო ქმედება გამომდინარეობს. მაგალითად, დიფერენციალური განტოლებებით გამოსახული ფიზიკური კანონები შემთხვევასა და ამ შემთხვევით გამოწვეულ ეფექტებს შორის ამყარებს კავშირს. ფიზიკური კანონებით წარსულსა და მომავალს შორის დეტერმინისტული კავშირია. არ არსებობს ალტერნატივა ან

¹ მაღლობას ვუხდით პროფ. ლორენცს ამ მეტაფორის ისტორიული წარმომავლობის შესახებ მოწოდებული ინფორმაციისთვის.

თავისუფალი არჩევანი². არსებობს ისტორიული შეხედულებაც, რომ თავად ნიუტონის მექანიკის შემქმნელმა ნიუტონმა უკან დაიხია დეტერმინისტულ სურათისაგან, რაც თითქოსდა გამომდინარეობდა მისი აღმოჩენებიდან. ნიუტონს სურდა სამყაროს ევოლუციაში ღმერთის აქტიური მონაწილეობისთვის „ადგილის დატოვება“.

არაწრფივი და ქაოსური სისტემები ლაპლასის ტვინის შექმნას შეუძლებელს ხდის. ამ ტვინისთვის დამახასიათებელი საწყისი პირობების უმცირესმა უზუსტობამაც კი (რაც სამყაროში უამრავია) შეიძლება ქაოსური სისტემის მომავალი ქმედების პროგნოზირება შეუძლებელი გახადოს. ამგვარად, ღმერთმაც კი უნდა დაუმვას ამ ქაოსური სისტემების არსებობა, რათა დავინახოთ, თუ მომავალში რა მოხდება. ქაოსური სისტემებისათვის პროგნოზირების „მოკლე გზა“ არ არსებობს.

ჩვენ აგრეთვე უნდა შევნიშნოთ, რომ 21-ე საუკუნეში კვანტური მექანიკის განვითარებამ, მისთვის დამახასიათებელი ალბათობებითა და განუსაზღვრელობის დამოკიდებულებებით, ლაპლასის სქემას ყოველმხრივ გამოუთხარა ძირი. ქაოსსა და კვანტურ მექანიკას შორის კავშირს მე-12 თავში განვიხილავთ.

1.7 დასკვნები

ამ თავში ქაოსური ქმედების გამომხატველი სამი მარტივი სისტემის ქმედება განვიხილეთ. ესენია რეალური ექსპერიმენტული სისტემა, მარტივი ალგებრულ-იტერაციული მოდელი და დიფერენციალური განტოლებების (შედარებით) მარტივი სისტემა. ვიმედოვნებთ, რომ ამ მარტივი სისტემების ქმედების კომპლექსურობამ მკითხველზე სათანადო შთაბეჭდილება მოახდინა. მიუხედავად იმისა, რომ თითოეული სისტემა საკმაოდ განსხვავებულია, მათ ქმედებებში მნიშვნელოვანი მსგავსებებიც შეინიშნება როდესაც სისტემების მახასიათებელი პარამეტრები იცვლება. ეს არაწრფივი სისტემები უჩვენებენ უეცარ და დრამატულ ცვლილებებს (ბიფურკაციებს) პარამეტრების უმცირესი ცვლილებების პირობებშიც კი. განსაზღვრულ პირობებში მათი ქმედება მოუწესრიგებელი ხდება. ამგვარი ქაოსური ქმედება ხმაურიანი ქმედებისაგან ახლომდებარე ტრაექტორიების დივერგენციის დახმარებით შეგვიძლია განვასხვავოთ. არსებითია, რომ ჩვენ არ გვჭირდება გარეშე ხმაური ან კომპლექსურობა რთული და მოუწესრიგებლობასთან ახლოს მყოფი ქმედების მისაღებად. ჩვენ ვნახეთ, რომ პერიოდის გაორმაგების მოვლენა, რომელსაც ქაოსისაკენ მივყავართ, თავს

² მიზეზ-შედეგობრიობისა და დეტერმინიზმის ფილოსოფიური პრობლემების განხილვისთვის იხილეთ Philip Frank, *Philosophy of Science* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1957).

იქნეს სულ მცირე სამი განსხვავებული ტიპის სისტემაში (ქაოსში გადასვლის სხვა მეთოდებიც არსებობს). ამ ფაქტის წყალობით ვაკეთებთ დასკვნას, რომ შეიძლება არსებობდეს ქაოსთან მიახლოებული მდგომარეობის ან თვით ქაოსისათვის დამახასიათებელი უნივერსალური ნიშან-თვისებები. შემდეგ თავში ჩვენ განვიხილავთ ქაოსის ზოგიერთ უნივერსალურ რაოდენობრივ მახასიათებელს.

1.8 დამატებითი ლიტერატურა

სამეცნიერო-პოპულარული

James Gleick, *Chaos, Making a New Science* (Viking, New York, 1987)-ამჟამად თითქმის „კულტად“ ქცეული წიგნი. მიუხედავად წერის ჟურნალისტური და გადამეტებული მანერისა, წიგნში არის ქაოსის მეცნიერული არსის გადმოცემის მცდელობა. მოიცავს სასარგებლო ბიოგრაფიულ ცნობებს ქაოსის მეცნიერულ დონეზე შესწავლაში წვლილის მქონე მრავალი მნიშვნელოვანი პიროვნების შესახებ.

John Briggs and F. David Peat, *Turbulent Mirror* (Harper & Row, New York, 1989). არაპროფესიონალთათვის გამიზნულ ამ წიგნში უხვად შეხვდებით განმარტების გარეშე მოცემულ ტექნიკურ ტერმინოლოგიას. ზოჯგერ იხილავთ ძალზე საინტერესო თავისებურებებსაც. მაგალითად, თავების უკუნუემერაციას წიგნის შუა ნაწილიდან ბოლომდე.

Ian Stewart, *Does God Play Dice? The Mathematics of Chaos* (Blackwell, New York, 1989). განკუთვნილია სამეცნიერო დონის მქონე მკითხველისათვის. მასში გამოკვეთილია ქაოსისადმი მათემატიკური მიდგომა, თუმცა გარკვეული ყურადღება ეთმობა ექსპერიმენტსაც.

Peter Smith, *Explaining Chaos* (Cambridge University Press, Cambridge, 1998). ქაოსის თეორიისა და ფრაქტალთა არაჩვეულებრივი ფილოსოფიური ხედვა. დეტალურად განიხილავს ქაოსის არსსა და იმას, თუ რისი ახსნა შეიძლება ქაოსით.

სტატიათა კრებულები

Hao Bai-Lin, *Chaos* (World Scientific, Singapore, Vol I. 1984, Vol II, 1989). მნიშვნელოვანი თეორიული და ექსპერიმენტული სტატიების ფართო კრებული. მოიცავს რედაქტორისეულ მოკლე შესავალს ქაოსის შესახებ.

Pedrag Cvitanovic, *Universality in Chaos*, 2nd ed. (Adam Hilger, Bristol, 1989). რედაქტორი გვთავაზობს საკუთარ შეხედულებას ქაოსის უნივერსალურობის შესახებ.

E. Ott, T. Sauer, and J. A. Yorke, *Coping with Chaos* (Wiley, New York, 1994). სტატიათა ნაკრები გვთავაზობს ქაოსური სისტემების ექსპერიმენტული ანალიზს.

Robert C. Hilborn and Nicholas B. Tufillaro, *Chaos and Nonlinear Dynamics* (American Association of Physics Teachers, College Park, MD, 1999). მოიცავს ამომწურავ ბიბლიოგრაფიას და 22 სტატიას, რომელიც სპეციალურად შერჩეულია შესავალი კურსისათვის.

შესავალი კურსები მეცნიერებისა და ინჟინრებისათვის

ქემოთმოყვანილი ლიტერატურა განკუთვნილია მათემატიკური უნარების მეტნაკლებად მქონე მკითხველთათვის.

Larry S. Liebovitch, *Fractals and Chaos Simplified for the Life Sciences* (Oxford University Press, New York, 1998). მოკლე შესავალი კურსი, რომელშიც მოყვანილია ბიოლოგიასა და მედიცინაში ქაოსის გამოყენების შემთხვევები.

David Peak and Michael Frame, *Chaos Under Control: The Art and Science of Complexity* (W. H. Freeman, New York, 1994). კოლეჯის პირველკურსელთათვის განკუთვნილი საინტერესო წიგნი.

Daniel Kaplan and Leon Glass, *Understanding Nonlinear Dynamics*, (Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1995) - ბიოლოგიური და სამედიცინო ორიენტაციის მქონე კურსი.

Garnett P. Williams, *Chaos Theory Tamed* (National Academy Press, Washington, DC, 1997). საინტერესო შესავალი კურსი, რომელიც გარკვეული საწყისი დონის ქონას მოითხოვს. მოცემულია ფურიეს ანალიზის, დრითი მწკრივების ანალიზისა და სხვათა მათემატიკური აპარატის დეტალური ახსნა.

Gregory Baker and Jerry Gollub, *Chaotic Dynamics, An Introduction*, 2nd ed. (Cambridge University Press, New York, 1996). ქაოსის საკმაოდ მოკლე (255გვ.) შესავალი კურსი. აქცენტი გადატანილია გარეშე ძალის მიერ მართულ მიღვევად ზამბარასა და პერსონალური კომპიუტერის გამოყენება. ავტორთა აზრით, წიგნი გამიზნულია ფიზიკისა და მათემატიკის, როგორც ძირითადი საგნის, შემსწავლელი მეორე და მესამე კურსელი ბაკალავრებისათვის. წიგნი მოიცავს მხოლოდ რამდენიმე თემას და არ გვთავაზობს ამომწურავ შესავალს არაწრფივი სისტემების დინამიკაში. მიუხედავად ამისა, კურსი იოლად გასაგებ ენაზე არის დაწერილი და წარმოდგენას გვიქმნის ძირითად კონცეფციებზე.

Francis C. Moon, *Chaotic and Fractal Dynamics, An Introduction for Applied Scientists and Engineers* (Wiley, New York, 1992). მოითხოვს გამოყენებითი სამეცნიერო ტერმინოლოგიის გარკვეულ დონეზე ცოდნას. გვიხსნის, როგორ გვეხმარება ქაოსის იდეები მნიშვნელოვანი საინჟინრო ცნებების გაგებაში. კურსი მოიცავს საშუალებებს, რომელიც გვეხმარება ქაოსური სისტემების დინამიკის დემონსტრირებაში.

P. Berge, Y. Pomeau, and C. Vidal, *Order within Chaos* (Wiley, New York, 1986). გარკვეულწილად მოძველებული შესავალი კურსი ფიზიკაში (ფრანგული ორიგინალი 1984 წელს გამოიცა), რომელიც განკუთვნილია პირველკურსელებისათვის. განსაკუთრებით საინტერესო მსჯელობაა კვაზიპერიოდულობისა და წყვეტის შესახებ.

J. M. T. Thompson and H. B. Stewart, *Nonlinear Dynamics and Chaos* (Wiley, New York, 1986). ორი წიგნი ერთში! როგორ ჩანს, თითოეულმა ავტორმა წიგნის ნახევარი დაწერა, რადგან წიგნის მეორე ნახევარში ვხვდებით გარკვეულ გამეორებებსა და წერის სტილის მოულოდნელ ცვლილებას. ტექსტში ტერმინების გამოყენების მიმართ ერთგვარი უყურადღებობაა. მოიცავს არაწრფივი სისტემების დინამიკის „კლასიკურ“ პრობლემებს; ბევრი არაფერია ნათქვამი ისეთ თანამედროვე მეთოდებზე, როგორიცაა დრითი მწკრივების ანალიზი, განზოგადებული განზომილებები და სხვ.

Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications in Physics, Biology, Chemistry and Engineering* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1994). არაჩვეულებრივი შესავალი კურსი ბაკალავრებისათვის გამოყენებით მათემატიკაში.

H. G. Schuster, *Deterministic Chaos, An Introduction*, 3rd revised ed. (Wiley, New York, 1995). საკმაოდ კომპაქტური (319 გვ.) ფიზიკის შესავალი კურსი ბაკალავრებისათვის. მრავლისმომცველი მიმოხილვა და მრავალი მნიშვნელოვანი შედეგის დამტკიცების მოკლე მონახაზის მცდელობა.

E. Atlee Jackson, *Perspectives of Nonlinear Dynamics*, Vol. 1 and Vol. 2 (Cambridge University Press, New York, 1989, 1991). ძალზე საინტერესო წიგნი. მათემატიკური დაშვებების საინტერესო ხედვა. თანდათან რთულდება შედეგები, საზგასმულია ანალიტიკური მეთოდები (შეშფოთებათა მეთოდები, გასაშუალების მეთოდები და ა. შ.).

N. Tuffillaro, T. Abbott, and J. Reilly, *An Experimental Approach to Nonlinear Dynamics and Chaos* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1992). წიგნი განკუთვნილია ბაკალავრებისა და მაგისტრებისათვის, განხილულია არაწრფივი სისტემების დინამიკა რამდენიმე ექსპერიმენტულ სისტემაზე დაყრდნობითა და კომპიუტერული მოდელების გამოყენებით. განსაკუთრებით აღსანიშნავია ექსპერიმენტული მონაცემების ღრმა ანალიზი.

E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 1993). ქაოსის საინტერესო შესავალი ბაკალავრიატისათვის.

T. Kapitaniak and S. R. Bishop, *The Illustrated Dictionary of Nonlinear Dynamics and Chaos* (Wiley, Chicester and New York, 1999). წიგნი მოიცავს არაწრფივი სისტემების დინამიკის ტერმინების განმარტებათა ვრცელ კრებულს, რომელიც ხშირად ილუსტრირებულია. განკუთვნილია ბაკალავრიატის ბოლო კურსისა და მაგისტრანტებისათვის.

მათემატიკური საფუძვლის მქონე მკითხველისათვის

R. L. Devaney, *Chaos, Fractals, and Dynamics, Computer Experiments in Mathematics* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1990). საინტერესო შესავალი კურსი მათემატიკაში საშუალო სკოლისა და კოლეჯის წარჩინებული მოსწავლეებისათვის.

R. L. Devaney, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1992). საინტერესო შესავალი კურსი იმ მკითხველებისათვის, რომელთაც მათემატიკის ერთწლიანი კურსი მაინც აქვთ გავლილი.

Brian Davies, *Exploring Chaos: Theory and Experiment* (Perseus Books, Reading, MA, 1999). შესავალი კურსი დინამიკური სისტემების შესახებ. გამოკვლეულია იტერაციულ ასახვათა ფუნქციები და ზოგიერთ მარტივი დიფერენციალური განტოლებები. მოიცავს სავარჯიშოებს *Chaos for Java* პროგრამის გამოყენებით. (იხ. პროგრამების ჩამონათვალი მე-2 თავის ბოლოს.)

R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* (Benjamin-Cummings, Menlo Park, CA, 1986). მოცემულია სახალისო სავარჯიშოები იტერაციული ასახვების გამოყენებით. იგი ცალსახად მათემატიკური წიგნია, თუმცა დეტალებისადმი ნაკლები ყურადღებით და საკმაოდ საინტერესო არამათემატიკოსებისთვისაც.

Kathleen Alligood, Timothy Sauer and James A. Yorke, *Chaos, An Introduction to Dynamic Systems* (Springer-Verlag, New York, 1997). მოიცავს კომპიუტერულ ექსპერიმენტებს ბაკალავრებისათვის, რომელთაც შესწავლილი აქვთ გამოთვლითი მათემატიკა და დიფერენცირებული განტოლებები.

D. Gulick, *Encounters with Chaos* (McGraw-Hill, New York, 1992). გადმოცემულია მათემატიკის საინტერესო შესავალი, ერთ და ორგანზომილებიანი იტერაციული ფუნქციების შესახებ არსებული თეორემებითა და ამოცანებით. მოიცავს ფრაქტალებსა და დიფერენცირებულ განტოლებათა სისტემებს.

R. H. Abraham and C. D. Shaw, *Dynamics: The Geometry of Behavior* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1992). F. D. Abraham, R. H. Abraham, and C. D. Shaw, *Dynamical Systems: A Visual Introduction* (Science Frontier Express, 1996). ილუსტრირებული კურსი ქაოსის შესახებ. ეს წიგნები განსაკუთრებით სასარგებლოა, თუ გავლილი გაქვთ ქაოსის შესავალი კურსი. ავტორები თავს არიდებენ ზუსტ განსაზღვრებებს (მათი მიზანია დინამიკური სისტემების ვიზუალური გაცნობა.)

J. Hale and H. Kocak, *Dynamics and Bifurcations* (Springer-Verlag, New York, 1991). წიგნში მოცემულია დინამიკური სისტემებისა და ბიფურკაციების შესავალი კურსი მრავალრიცხოვანი მაგალითებით. ადვილად გასაგებია ბაკალავრიატის ბოლოს საფეხურის სტუდენტებისათვის.

J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, 3rd ed. (Springer-Verlag, New York, 1990). კლასიკაა დარგში. თუ სერიოზულად გსურთ ქაოსის შესწავლა, საბოლოოდ ამ წიგნამდე მიხვალთ.

სხვა კურსები, სტატიათა კრებულები და სხვ.

A. V. Holden (ed.), *Chaos* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1986). სფეროს აქტიური მკვლევარების მიერ დაწერილი 15 ესეს კრებული. მრავალი სასარგებლო იდეითა და პერსპექტივით, თუმცა წიგნის გაცნობამდე ძირითად საკითხებს უნდა იცნობდეთ.

L. Glass and M. C. Mackey, *From Clocks to Chaos, The Rhythms of Life* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1988). კარგად დაწერილი წიგნი, რომელიც გვიჩვენებს, როგორ შეიძლება გამოვიყენოთ არაწრფივი სისტემების დინამიკისა და ქაოსის იდეები

ფიზიოლოგიაში რიტმული ეფექტების ანალიზისათვის. ფიზიოლოგიურ მსჯელობათა დიდი ნაწილი გასაგებია არასპეციალისტებისთვისაც. მათემატიკური თვალსაზრისით ქაოსის შესახებ დაწერილ სხვა წიგნებთან შედარებით ნაკლებად რთულია.

Harvey Gould and Jan Tobochnik, *An Introduction to Computer Simulation Methods, Applications to Physical Systems, Part I* (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1987). არაჩველებრივი წიგნი კომპიუტერულ მეთოდების შესახებ. მე-7 თავი მკითხველს ლოჯისტიკური ასახვის რიცხვითი კვლევის მეთოდებს აცნობს.

D. Ruelle, *Chaotic Evolution and Strange Attractors* (Cambridge University Press, New York, 1989). ავტორი არაწრფივი სისტემების დინამიკის ერთ-ერთი სპეციალისტია. ამ მცირე მოცულობის წიგნში (96 გვ.) ის ვრცელ ესეს (მათემატიკასთან ერთად) წარმოგვიდგენს იმ საკითხებზე, რომელსაც თავად მიიჩნევს მნიშვნელოვნად ქაოსური სისტემების სტატისტიკურ ანალიზში.

ზოგიერთი შესავალი სტატია

R. May, "Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics," *Nature* **261**, 459-467 (1976).

J. P. Crutchfield, J. D. Farmer, N. H. Packard, and R. S. Shaw, "Chaos," *Scientific American* **255** (6), 46-57 (December, 1986). ქაოსისა და მეცნიერებაზე მისი გავლენის კარგი მიმოხილვა. R. V. Jensen, "Classical Chaos," *American Scientist* **75**, 168-81 (1987). ქაოსის თანამდეროვე აქტუალური საკითხების კარგად დაწერილი, დეტალური განხილვა, სადაც აქცენტი მათემატიკასა და თეორიაზე კეთდება.

D. R. Hofstadter, "Metamagical Themas," *Scientific American* **245**, (5) 22-43 (1981). იტერაციული ასახვების -ის მათემატიკის სამეცნიერო-პოპულარული მიმოხილვა.

N. B. Abraham, J. P. Gollub, and H. L. Swinney, "Testing Nonlinear Dynamics," *Physica D* **11**, 252-64 (1984). 1983 წლის კონფერენციის მასალები, რომელიც ქაოსის თეორიისა და პრაქტიკის შესახებ მოსაზრებებს გვიზიარებს. სამწუხაროდ, გარკვეულწილად მოძველებულია.

R. Van Buskirk and C. Jeffries, "Observation of Chaotic Dynamics of Coupled Nonlinear Oscillators," *Phys. Rev. A* **31**, 3332-57 (1985). დეტალური აღწერა იმისა, როგორ შეიძლება შევისწავლოთ ქაოსი მარტივი ნახევარგამტარი დიოდების გამოყენებით. მოცემულია მრავალი ნახაზი და დიაგრამა.

J.-P. Eckmann, "Roads to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems," *Rev. Mod. Phys.* **53**, 643-54 (1981). მოძველებული, თუმცა სასარგებლო ესე.

E. Ott, "Strange Attractors and Chaotic Motions of Dynamical Systems," *Rev. Mod. Phys.* **53**, 655-72 (1981). ეს კვლევა იმავე ნაშრომში გვხვდება, სადაცაა ეკერმანის ციტირებული სტატია. მოძველებული, თუმცა სასარგებლო ნაშრომი.

M. F. Doherty and J. M. Ottino, "Chaos in Deterministic Systems: Strange Attractors, Turbulence, and Applications in Chemical Engineering," *Chemical Engineering Science* **43**, 139-83 (1988). ქაოსის შესახებ ფართო სპექტრის კვლევა დისიპაციურ და კონსერვაციულ სისტემებში, მიმართული საინჟინრო გამოყენებისათვის. სავარაუდოდ, დაწერილია მაგისტრატურის პირველი კურსისათვის.

Max Dresden, "Chaos: A New Scientific Paradigm—or Science by Public Relations," *The Physics Teacher* **30**, 10-14 and 74-80 (1992). [Reprinted in Hilborn and Tufillaro, 1999]. ქაოსის ფუნდამენტური საკითხების საინტერესო შესავალი.

ნიუტონისეულ მექანიკაში predictability -ის საკითხი განხილულია J. Lighthill, "The Recently Recognized Failure of Predictability in Newtonian Dynamics," *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **407**, 35-50 (1986).

P. Holmes, "Poincare, Celestial Mechanics, Dynamical-Systems Theory and 'Chaos'," *Physics Reports* **193**, 137-63 (1990). ეს ფართოსპექტრიანი ესე გვაცნობს არაწრფივი სისტემების დინამიკის ისტორიულ განვითარებას ზომიერი სირთულის მათემატიკურ დონეზე.

D. Ruelle, "Where can one hope to profitably apply the ideas of chaos," *Physics Today* 47 (7), 24-30 (1994).

Robert C. Hilborn and Nicholas B. Tufillaro, "Resource letter: ND-1: Nonlinear Dynamics," *Am. J. Phys.* 82 (9), 822-834 (1997). ვრცელი ბიბლიოგრაფია კომენტარებით.

ლორენცის მოდელი

E. N. Lorenz, "Deterministic Nonperiodic Flow," *J. Atmos. Sci.* 20, 130-41 (1963). (Reprinted in [Cvitanovic, 1984]).

B. Saltzman, "Finite Amplitude Free Convection as an Initial Value Problem-I," *J. Atmos. Sci.* 19, 329-41 (1962).

C. T. Sparrow, *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors* (Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982).

პროგნოზირება და მიზიდულობის არეები

J. C. Sommerer and E. Ott, "A physical system with qualitatively uncertain dynamics," *Nature* 365, 136-140 (1993).

Y.-C. Lai and R. L. Winslow, "Riddled Parameter Space in Spatiotemporal Chaotic Dynamical Systems," *Phys. Rev. Lett.* 72, 1640-43 (1994).

Y.-C. Lai and C. Grebogi, "Riddling of Chaotic Sets in Periodic Windows," *Phys. Rev. Lett.* 83, 2926-29 (1999).

მოთხრობები და პიესები

ქაოსმა და არაწრფივი სისტემების დინამიკამ გადამწყვეტი როლი ითამაშა შემდეგი ნაწარმოებების შექმნაში:

Michael Crichton, *Jurassic Park* (Ballantine Books, New York, 1990).

Kate Wilhelm, *Death Qualified, A Mystery of Chaos* (Fawcett Crest, New York, 1991).

Tom Stoppard, *Arcadia* (Faber and Faber, London and Boston, 1993).

ვებ-გვერდები

არაწრფივი სისტემების მეცნიერული კვლევის ყველა ძირითად ცენტრს გააჩნია ვებ-გვერდები. მათ შორისაა:

Chaos at the University of Maryland (<http://www-chaos.umd.edu>). კერძოდ, კი იხ. "Chaos Database," რომელსაც აქვს მონაცემთა ვრცელი ბიბლიოგრაფიული ბაზა.

The Institute of Nonlinear Science at the University of California at San Diego (<http://inls.ucsd.edu>).

The Center for Nonlinear Dynamics at University of Texas at Austin (<http://chaos.ph.utexas.edu>).

The Center for Nonlinear Science at Los Alamos National Lab (<http://cnls.lanl.gov>).
კერძოდ, იხ. CNLS Nonlinear Science e-print archive (<http://cnls.lanl.gov/pbb.announce.html>),
and the Nonlinear Dynamics Archive (<http://cnls.lanl.gov/nbt/intro.html>).

G. Chen, "Control and synchronization of chaotic systems (a bibliography)" is available by anonymous ftp from (uhoop.egr.uh.edu/pub/TeX/chaos.tex).

"Nonlinear Dynamics Bibliography" maintained by the University of Mainz (<http://www.uni-mainz.de/FB/Physik/Chaos/chaosbib.html>).

The Applied Chaos Laboratory at the Georgia Institute of Technology (<http://www.physics.gatech.edu/chaos/>).

ქაოსის უნივერსალურობა

ისევ დაისადგურა ქაოსმა, *ოტელო*, III, iii

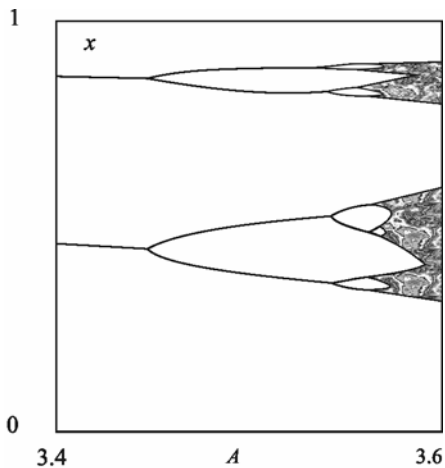
2.1 შესავალი

წინასიტყვაობასა და წინა თავში უკვე აღვნიშნეთ, რომ არაწრფივი სისტემები ბევრ უნივერსალურ რაოდენობრივ მახასიათებელს ავლენენ, როდესაც ისინი ქაოსს უახლოვდებიან ან ქაოსურად მოქმედებენ. პირველ თავში ვისაუბრეთ ბევრი არაწრფივი სისტემისათვის ზოგად თვისობრივ ნიშნებზე. ამ თავში კი ზოგიერთი რაოდენობრივი უნივერსალური თვისებების შესახებ მოკლე შესავალს გავაკეთებთ. ფაქტობრივად, წიგნის დარჩენილი ნაწილი მათ არსში ჩაწვდომას ეძღვნება.

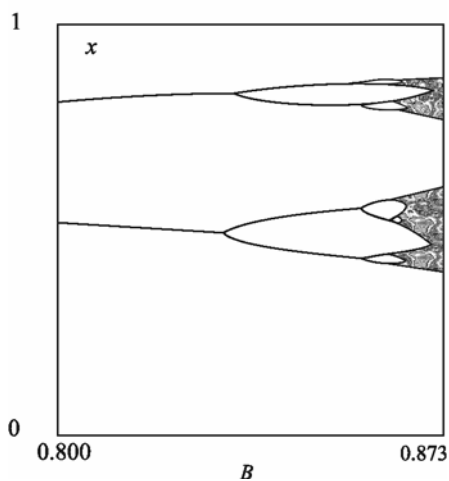
უნივერსალური მახასიათებლების როლის გადაჭარბებულად წარმოდგენა ძნელია. თუ ყოველი არაწრფივი სისტემა „თავისი გზით მიდის“, მაშინ დინამიკური სისტემების შემსწავლელი დარგი გამოყენებითი მეცნიერების ერთ მცირე განშტოებამდე დაიყვანება. იგი პრაქტიკული თვალსაზრისით მნიშვნელოვანი იქნება, მაგრამ ახალ ფუნდამენტურ პრინციპებს ვერ შეამზადებს. ყველაზე საკვირველი ის არის, რომ არაწრფივი სისტემების ქმედებაში ზოგადი თვისებების ურიცხვი რაოდენობაა აღმოჩენილი. ისინი მოიცავენ ბიფურკაციათა მიმდევრობებს, რომლებიც რეგულარულ, პერიოდულ ქმედებას ქაოსურთან აკავშირებენ. ამ თავში ჩვენ ასეთი ბიფურკაციების ზოგიერთ აბსოლუტურად მოულოდნელ რაოდენობრივ მხარეს გამოვიკვლევთ. ეს ნიშანთვისებები ერთი შეხედვით ღიად არის დამოკიდებული საკვლევი სისტემის ფიზიკურ, ქიმიურ და ბიოლოგიურ დეტალებზე. ამგვარი უნივერსალობა არაწრფივ დინამიკას დისციპლინათშორის დარგად აქცევს. მოცემულ თავში მივმართავთ უფრო აღმწერლობით მიდგომას, ვიდრე დედუქციურს, რათა წარმოდგენა შეგვექმნას ამა თუ იმ საკითხზე და დეტალური მათემატიკური მტკიცებების სიმძიმე თავიდან ავიცილოთ. მათემატიკურ დეტალებს, რომლებიც დაგვეხმარებიან უნივერსალური მახასიათებლების გააზრებაში, მომდევნო თავებში გამოვიყენებთ.

2.2 ფეიგენბაუმის რიცხვები

პირველ თავში ვნახეთ, რომ სამმა სრულიად განსხვავებულმა სისტემამ პერიოდის გაორმაგების გზით მიაღწია ქაოსს, სულ მცირე მათი მაკონტროლებელი პარამეტრების გარკვეული დიაპაზონებისთვის მინც. რა თქმა უნდა, პერიოდის გაორმაგების გარდა სისტემის პერიოდულიდან ქაოტურ ქმედებაში გადასვლის სხვა გზებიც არსებობს. სწავლობდა რა პერიოდის გაორმაგებას ლოჯისტიკური ასახვისათვის, თეორეტიკოსმა ფიზიკოსმა მიტჩელ ფეიგენბაუმმა (FEI78) პირველმა მიაკვლია უნივერსალურ რაოდენობრივ მახასიათებლებს, რომელთა შემსწავლელი თეორია პერიოდის გაორმაგების ტიპის ქმედებისათვის გაცილებით უფრო განვითარდა, ვიდრე ქაოსში გადასვლის სხვა საშუალებებისათვის (რომელთა შესახებ ბოლო თავებში გვექნება საუბარი).



ნახ. 2.1. ბიფურკაციული დიაგრამის (2.2-1) განტოლებით მოცემული ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციისთვის. უბანი, რომელიც შეესაბამება ქაოსში გადასვლას პერიოდის გაორმაგების გზით, მოყვანილია დიაგრამის მარჯვენა გადღაბნილი ზოლების სახით.



ნახ. 2.2. გაორების დიაგრამის ნაწილი სინუსური ასახვისთვის (განტოლება (2.2-2)).

ფეიგენბაუმის პირველი აღმოჩენა, რომელიც ქაოსის საფუძვლად დადებული ერთგვარი უნივერსალობაა, მიღებული იქნა დაკვირვებული ფაქტიდან, რომ იტერაციული ასახვებისათვის გამოყენებულ რამდენიმე განსხვავებულ ფუნქციას ჰქონდა ერთიდაიგივე კრებალობა ბიფურკაციულ დიაგრამაზე როგორც კი მარტივი, პერიოდული ქმედებიდან ხდებოდა ქაოსურში გადასვლა პერიოდთა გაორმაგების მიმდევრობების გზით. ფეიგენბაუმის

აღმოჩენის საილუსტრაციოდ 2.1. ნახაზზე გამოსახულია ბიფურკაციული დიაგრამის ნაწილი ლოჯისტიკური ასახვისთვის.

$$x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n) \quad (2.2-1)$$

2.2. ნახაზზე გამოყენებულია ტრიგონომეტრიული სინუსის ფუნქციაზე დამყარებული ასახვა.

$$x_{n+1} = B \sin(\pi x_n) \quad (2.2-2)$$

ორივე შემთხვევაში სახეზეა ქაოსში გადასვლა პერიოდის გაორმაგების გზით. ფეიგენბაუმი გახლდათ პირველი, ვინც დაასკვნა, რომ ორი მიმდევრობის „კრებალობის სიჩქარე“ ორივე ასახვაში ერთი და იგივე იყო.

მათემატიკურ ფიზიკაში გარკვეული ნებისმიერი ადამიანი, წააწყდება რა 2.1 და 2.2 ნახაზებზე მოყვანილი კრებალობის მსგავს შემთხვევას, ეძებს კრებალობის გეომეტრიულ კოეფიციენტს. თუ კრებალობა გეომეტრიულია, მაშინ პარამეტრის იმ მნიშვნელობების ნაზრდებისათვის, რომლისთვისაც პერიოდთა მიმდევრობით გაორმაგებას აქვს ადგილი, ეს კოეფიციენტი ერთი და იგივე უნდა იყოს.

გამოთვლები ტარდება შემდეგნაირად: თუ, A_1 პარამეტრის მნიშვნელობაა, როდესაც პერიოდი-1 წარმოშობს პერიოდი-2-ს (იხ. ნახ. 2.3), ხოლო A_2 მნიშვნელობაა, როდესაც პერიოდი-2 პერიოდ-4-ში გადაიზრდება და ა.შ. მაშინ A_n პარამეტრის მნიშვნელობაა, როდესაც პერიოდი- 2^n „იბადება“. შემდეგ ვპოულობთ კოეფიციენტს

$$\delta_n = \frac{A_n - A_{n-1}}{A_{n+1} - A_n} \quad (2.2-3)$$

ფეიგენბაუმა დაადგინა, რომ ეს სიდიდე თითქმის ერთი და იგივეა n -ის ყოველი მნიშვნელობისთვის და რაც უფრო მნიშვნელოვანი და გასაკვირია, n -ის დიდი მნიშვნელობებისთვის ხარისხი უახლოვდება რიცხვს, რომელიც ერთი და იგივეა ასახვის ორივე ფუნქციისთვის! δ –ს ამ მნიშვნელობას „ფეიგენბაუმის დელტა“ ეწოდება.

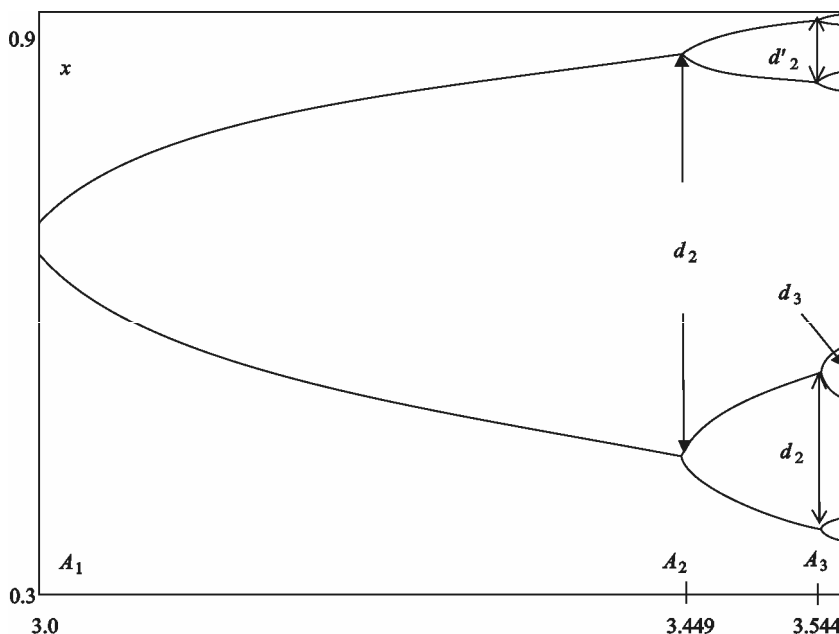
$\delta \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 4.66920161... \quad (2.2-4)$
--

რიცხვი 4.669... შეგვიძლია დავაყენოთ ფიზიკის ისეთი უნივერსალური რიცხვების გვერდით, როგორიცაა 1/137 (ელექტრომაგნიტური ძალების ფარდობა ატომბირთვულ ძალებთან).

გადაუჭრელი პრობლემა: დაუკავშირეთ ფეიგენბაუმის δ რიცხვი 4.669..., რაიმე სხვა ფუნდამენტალურ რიცხვებს, მაგალითად π, e (2.718...)-ს, ოქროს კვეთის კოეფიციენტი $(\sqrt{5} - 1)/2$ და ა.შ.

რა თქმა უნდა, ორი (დაახლოებით) იდენტური კოეფიციენტი ამ რიცხვების უნივერსალობის მტკიცებულება არ არის. მოგვიანებით ფეიგენბაუმმა დაადგინა, რომ ნებისმიერ იტერაციული ასახვის ფუნქციას, რომელსაც პარაბოლური სახე აქვს მისი მაქსიმუმის სიახლოვეს, გააჩნია ერთიდაიგივე კრებადობის კოეფიციენტი, როდესაც ბიფურკაციის n ხარისხი უსასრულობისკენ მიისწრაფვის.

ფაქტობრივად, δ -ს უნივერსალობის ასახსნელად ფეიგენბაუმის თეორია კოეფიციენტთა გამოსათვლელად პარამეტრების მნიშვნელობების ოდნავ განსხვავებულ ფორმულირებას იყენებს. პარამეტრის იმ მნიშვნელობაზე მეტად, რომელზედაც ბიფურკაციას აქვს ადგილი, გამოიყენება ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც ასახვის ფუნქციის მაქსიმუმის შესაბამისი x_{\max} აბსცისა გარკვეული პერიოდულობის შემთხვევაში „ორბიტის“ ნაწილია. (2.2-1 ლოჯისტიკური ასახვისთვის $x_{\max}=0.5$.) ამ ორბიტებს **სუპერციკლები** ეწოდება და დასახელების მიზეზს მე-5 თავში განვიხილავთ. A_n^s , A -ს ისეთი მნიშვნელობაა, რომლისთვისაც x_{\max} პერიოდი- 2^n შესაბამისი ორბიტის ნაწილს წარმოადგენს.



ნახ. 2.3. გაორების დიაგრამის ნაწილი ლოჯისტიკური ასახვისთვის. A_n აღნიშნავს პარამეტრის იმ მნიშვნელობებს, როდესაც ორმაგი პერიოდის გაორებები მიმდინარეობს. d_n აღნიშნავს ბიფურკაციული სტრუქტურების ფარდობით ზომებს განშტოების წერტილებში.

გეომეტრიული თვალსაზრისით მიზანშეწონილია, რომ ორთავე განმარტება ერთიდაიგივე კოეფიციენტს იძლეოდეს ზღვარში მაღალი რიგის ბიფურკაციებისათვის. რიცხვითი გამოთვლების თვალსაზრისით სუპერციკლური ფორმულირება უფრო ადვილად განხორციელებადია ექსპერიმენტულად კი (იხ. შემდეგი თავი), შეიძლება განისაზღვროს მხოლოდ ბიფურკაციის წერტილთა მნიშვნელობები, ვინაიდან საზოგადოდ (ეკვივალენტური) ასახვის ფუნქცია და მისი მაქსიმალური მნიშვნელობა ცნობილი არ არიან.

სავარჯიშო 2.2-1. 2.1 ცხრილში მოყვანილია A_n მნიშვნელობები 2.2 ლოჯისტიკური ასახვისათვის. ასევე ჩამოთვლილია სუპერციკლის A_n^s მნიშვნელობები და პარამეტრის ის მნიშვნელობები, რომლისთვისაც X_{max} ტრაექტორიის ნაწილია პერიოდი- 2^n -თვის (გარკვეული მიზეზების გამო, რომლებზეც ვისაუბრებთ მე-5 თავში სუპერციკლის სიდიდეები მაღალი სიზუსტით უფრო ადვილად დასადგენია). B_n^s სუპერციკლის პარამეტრის მნიშვნელობებია სინუსოიდური ასახვისთვის (განტ. 2.2-2). გამოთვალეთ d_n პარამეტრის მოცემული მნიშვნელობებისთვის და შეადარეთ მიღებული შედეგები განტ. (2.2-4)-ით მიღებულ მნიშვნელობას. (ამ თავის ბოლოს მოყვანილ კომპიუტერულ სავარჯიშოში, აღვწერთ, თუ როგორ ხდება მაღალი სიზუსტით ამ რიცხვების გამოთვლა. აშკარაა, რომ მათი გამოთვლის გარეშე ბიფურკაციული დიაგრამა მაღალი სიზუსტით ვერ აიგება.)

ცხრილი 2.1.

ბიფურკაციისა და სუპერციკლის მნიშვნელობები
ლოჯისტიკური და სინუსოიდური ასახვებისთვის

n	A_n	A_n^s	B_n^s
1	3.00000	3.23607	0.77734
2	3.4931	3.49856	0.84638
3	3.54402	3.55463	0.86145
4	3.56437	3.56667	0.86469
5	3.56875	3.56924	0.86539
∞	3.569946...	—	—

შენიშვნა: δ განისაზღვრება იმგვარად, რომ იგი არ არის დამოკიდებული იმ პარამეტრის საზომ ერთეულზე (ანუ ჩვენ შეგვიძლია პარამეტრის ყოველი მნიშვნელობა გაგამრავლოთ ერთსა და იმავე მამრავლზე და შევინარჩუნოთ δ -ს იგივე მნიშვნელობა). ის აგრეთვე დამოუკიდებელია პარამეტრის საზომი სკალის ნულ-პუნქტის წანაცვლებისაგან (ანუ ჩვენ შეგვიძლია პარამეტრის მნიშვნელობები გავზარდოთ ან შევამციროთ ერთი და იმავე რიცხვით და შევინარჩუნოთ δ -ს იგივე მნიშვნელობა).

2.3. კრებადობის კოეფიციენტი რეალური სისტემებისთვის

პირველ თავში მოყვანილმა რეალურმა ექსპერიმენტმა (დიოდის წრედი) გვიჩვენა ქაოსში გადაცვლა პერიოდის გაორმაგების გზით. მოვლენები იგივე სცენარით ვითარდება კონვექციურ სითხეში, მოდულირებულ ლაზერებში, აკუსტიკურ ტალღებში, ქიმიურ რეაქციებში, მექანიკურ ვიბრატორებსა და უამრავ სხვა სისტემაში. ჩნდება შეკითხვა: შეუძლია ფეიგენბაუმის δ -ს აღწეროს, თუ რა ხდება ექსპერიმენტულად? ერთი სირთულე თავიდანვე ნათელია – ფეიგენბაუმის მტკიცებას თანახმად, მნიშვნელობათა მიმდევრობა $\delta_n \rightarrow 4.669\dots$ n -ის მხოლოდ დიდი მნიშვნელობებისათვის. როდესაც n იზრდება, მიმდევრობითი ბიფურკაციები ერთმანეთს უახლოვდება და რეალურ ექსპერიმენტში ძალიან ძნელია მათი ადგილმდებარეობების მაღალი სიზუსტით განსაზღვრა. მხოლოდ ზოგიერთ ექსპერიმენტში, როგორცაა დიოდის წრედი, განირჩევა ცალსახად პერიოდი-16 და პერიოდი-32. ამგვარად, მკვლევარს ბიფურკაციის პარამეტრის მნიშვნელობების მაღალი სიზუსტით გაზომვა მხოლოდ დაბალი რიგის ბიფურკაციებისათვის შეუძლია, ხოლო თეორია ზუსტ პროგნოზს მხოლოდ მაღალი რიგის ბიფურკაციებისათვის გვაძლევს. (უნდა აღინიშნოს, რომ ქაოსის თეორიის ისტორიულ განვითარებაში უფრო შემთხვევითობაა ის ფაქტი, რომ ლოჯისტიკური და სინუსოიდური ფუნქციების ასახვებს გააჩნიათ კოეფიციენტები, რომლებიც ძალიან სწრაფად იკრიბებიან 4.669-კენ. ფეიგენბაუმს უნივერსალური რიცხვისკენ კრებადობა სულ რამდენიმე δ_n მნიშვნელობის გამოთვლის შედეგად შეეძლო „დაენახა“. ასახვის სხვა ფუნქციები, რომელთაგან ზოგიერთს მე-5 თავში განვიხილავთ, მაინცდამაინც „კარგად არ იქცევიან“ კრებადობის თვალსაზრისით.)

ცხრილი 2.2.

ძაბვის მნიშვნელობები დიოდის წრედში არსებული ბიფურკაციებისათვის.

n	V_n (30 kHz)	V_n (85 kHz)
1	-3.470(8)	-0.946(1)
2	-2.505(8)	-0.438(1)
3	-2.234(7)	-0.330(1)

ზემოთაღნიშნულიდან გამომდინარე, ექსპერიმენტულად მიღებულ მნიშვნელობებს (დაბალი რიგის გაორებებისთვის) ფეიგენბაუმის δ მნიშვნელობას ვადარებთ. 2.2 ცხრილში მოყვანილია მუდმივი დენის ძაბვის ის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც დიოდის წრედში მიმდევრობით ბიფურკაციებს აქვთ ადგილი (ამ ექსპერიმენტის მაკონტროლებელ პარამეტრად, სიგნალის ძაბვის ამპლიტუდასთან შედარებით მუდმივი წანაცვლების ძაბვის გამოყენება უფრო ხელსაყრელია. ბევრი სხვა არაწრფივი სისტემის მსგავსად, დიოდის წრედს ქმედების ფართო დიაპაზონი გააჩნია. 2.2 ცხრილში მოყვანილი მონაცემების მისაღებად წრედში ისეთი პირობები შევარჩიეთ, რომლებსაც მივყავართ ბიფურკაციული დიაგრამისკენ, მსგავსია ლოჯისტიკური ასახვის).

2.2 ცხრილში მოცემული მნიშვნელობების გამოყენებით ვპოულობთ, რომ 30 კჰც მნიშვნელობისათვის $\delta=3,57(10)$, ხოლო 85კჰც-ზე $\delta=4,7(1)$. ფრჩხილებში ჩასმული ციფრები გამოხატავს წინა ნიშნადი ციფრის ცდომილებას. მაგალითად, 4.66(2) აღნიშნავს 4.66 ± 0.02 .

შენიშვნები:

1. კოეფიციენტების გამოთვლისას მნიშვნელოვანია (და ფაქტობრივად გადამწყვეტია) ექსპერიმენტის ცდომილებების გათვალისწინება. ადვილი სანახავია, რომ უფრო მაღალი რიგის ბიფურკაციებისათვის პარამეტრის ცვლილების მატებასთან ერთად, ცდომილებები კიდევ უფრო მატულობს და საბოლოო ცდომილება საკმაოდ მაღალი იქნება.
2. δ_n -ის ექსპერიმენტულად განსაზღვრული მნიშვნელობები ერთიმეორესთან ახლოსაა, მაგრამ ხშირად ისინი სიზუსტის ფარგლებშიც კი არ ემთხვევიან ფეიგენბაუმის რიცხვს 4.669.

ცხრილი 2.3

ექსპერიმენტი დადგენილი ფეიგენბაუმ δ სიდიდეები

ექსპერიმენტი	Ref.	max $n+1$ observed	δ -ის სიდიდე	განსხვავება 4.669-დან
სითხეების კონვექცია	GMP81	4	4.3(8)	-0.3(8)
დიოდების წრედი	TPJ82	5	4.3(1)	-0.3(1)
ობტიკური ბიფურკაცია	HKG82	3	4.3(3)	-0.3(3)
აკუსტიკური ტალღები	STF82	3	4.8(6)	+0.2(6)
ჰელიუმში ჯოზეფსონის შეერთების ანალოგი	YEK82	3	4.4(3)	-0.2(3)

ბოლო მტკიცება ბადავს გარკვეულ იმედგაცრუებას. ყველაფერთან ერთად, მეცნიერული თეორიის ჭეშმარიტების ერთ-ერთი კრიტერიუმი მის მიერ ამა თუ იმ მოვლენის რაოდენობრივი პროგნოზირების უნარია. თუმცა ჩვენ უნდა გვახსოვდეს, რომ პერიოდის გაორმაგების ექსპერიმენტები და ფეიგენბაუმის თეორია პერიოდის გაორმაგების მიმდევრობის ორი უკიდურესი შემთხვევაა. ამ ფაქტის მოშველიებით შეგვიძლია დაუშვათ, რომ ციფრები მეტნაკლებად შესაბამისობაშია რეალობასთან. 2.3. ცხრილში ნაჩვენებია ექსპერიმენტულად განსაზღვრული δ -ს ზოგიერთი მნიშვნელობა სხვადასხვა ფიზიკური სისტემისთვის. თითოეულ შემთხვევაში გაზომილ მნიშვნელობებს შორის განსხვავება არ აღემატება ფეიგენბაუმის რიცხვის 20%-ს.

უნივერსალობის ახსნის ზოგიერთი ზედაპირული გააზრება

ჩვენ პირველ რიგში უნდა ვიფიქროთ თეორიისა და ექსპერიმენტის „შეთანხმებაზე“. ერთი შეხედვით სულაც არაა ცხადი, თუ რა აქვს საერთო ნახევარგამტარულ დიოდს, კონვექციურ სითხესა და მოდულირებულ ლაზერს ლოჯისტიკურ ასახვასთან. რაოდენ საოცარიც არ უნდა იყოს, ექსპერიმენტულ შედეგებსა და მარტივ მათემატიკურ იტერაციულ ასახვას შორის არსებობს გარკვეული რაოდენობრივი კავშირი.

ტრადიციულ ფიზიკის მიხედვით, როდესაც სხვადასხვა სისტემის ქმედებაში დაიკვირვება ზოგიერთი საერთო რაოდენობრივი და თვისობრივი ნიშან-თვისებები (როგორცაა ყველასთვის კარგად ცნობილი თავისუფალი ვარდნის აჩქარება), მოსალოდნელია შესაბამისი ზოგადი ფიზიკური საფუძვლის არსებობა. თუმცა ამგვარი ახსნა ზემოთხსენებული უნივერსალობის გასააზრებლად არ გამოგვადგება. მომდევნო თავებში ვნახავთ, რომ უნივერსალობა აიხსნება როგორც შედეგი ამ სისტემათა დინამიკის აღმწერ მდგომარეობათა აბსტრაქტული სივრცეების საერთო გეომეტრიისა.

2.4. δ -ს გამოყენება პროგნოზირებისათვის

Δ -ს ექსპერიმენტულ მნიშვნელობებსა და მათემატიკური მოდელის დახმარებით ფეიგენბაუმის მიერ მათემატიკური მოდელის მეშვეობით ნაპოვნ მნიშვნელობას შორის რიცხობრივ თანხვედრას საფუძვლად გარკვეული მიზეზი უდევს, რომელსაც მე-5 თავში განვიხილავთ. ისეთი უნივერსალური რიცხვის არსებობა, როგორც არის δ , არაწრფივი სისტემის მომავალი ქმედების რაოდენობრივი პროგნოზირების საშუალებას გვაძლევს, მაშინაც კი, როდესაც ჩვენ ვერ ვახერხებთ ამ სისტემის აღმწერი განტოლებების ამოხსნას. გაცილებით მნიშვნელოვანი კი ის არის, რომ ზემოთქმული ჭეშმარიტებაა მაშინაც კი, როდესაც სისტემის აღმწერი ფუნდამენტალური განტოლებები არაა ცნობილი (რაც ხშირი შემთხვევაა). მაგალითად, თუ ვამჩნევთ, რომ გარკვეული სისტემა A_1 პარამეტრის მნიშვნელობისათვის პერიოდი-1-დან პერიოდი-2-ში, ხოლო A_2 -ზე პერიოდი-2-დან პერიოდი-4-ში გადასვლისას განიცდის პერიოდის გაორმაგების ბიფურკაციას, მაშინ δ -ს მეშვეობით შეგვიძლია ვიწინასწარმეტყველოთ, რომ მოხდება სისტემის პერიოდი-4-დან პერიოდი-8-ში გადასვლა გარკვეული A_3 -თვის, რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$A_3 = \frac{A_2 - A_1}{\delta} + A_2 \quad (2.4-1)$$

როგორც მოგვიანებით ვნახავთ, პერიოდის გაორმაგების პირველი ორი დაკვირვებული შემთხვევა არ გვაძლევს მესამის მოხდენის გარანტიას, მაგრამ თუ მას მაინც ექნება ადგილი, განტოლება (2.4-1)-დან შევიტყობთ პარამეტრის იმ მნიშვნელობას, რომლის მახლობლადაც ამ გადასვლას უნდა ველოდეთ.

δ -ს გამოყენება შეგვიძლია აგრეთვე პარამეტრის იმ მნიშვნელობის განსაზღვრისთვის, რომლის შემთხვევაშიც გაორმაგებული პერიოდის მქონე მიმდევრობა ერთიანდება და წერტილი, სადაც ქაოსი იწყება. ამისათვის შევადგენთ 2.4-1-ის ანალოგიური განტოლება A_4 -თვის A_3 -ისა და A_2 -ის მეშვეობით

$$A_4 = \frac{A_3 - A_2}{\delta} + A_3 \quad (2.4-2)$$

ახლა ჩავსვათ (განტ. 2.4-1) (განტ. 2.4-2)-ში და A_4 -თვის გვექნება:

$$A_4 = (A_2 - A_1) \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta^2} \right) + A_2 \quad (2.4-3)$$

თუ ამ პროცედურას გავაგრძელებთ A_5 -ის, A_6 -ისათვის და ა.შ. მაშინ მიმდევრობაში მივიღებთ $(1/\delta)$ -ის უფრო და უფრო მაღალი რიგის წევრებს გეომეტრიული პროგრესიის სახით. ეს მიმდევრობა ზღვარში მოგვცემს:

$$A_\infty = (A_2 - A_1) \left(\frac{1}{\delta - 1} \right) + A_2 \quad (2.4-4)$$

მას შემდეგ, რაც შევისწავლეთ პერიოდის გაორმაგების პირველი ორი შემთხვევა, უკვე შეგვიძლია პარამეტრის იმ მნიშვნელობის პროგნოზირება, რომლისთვისაც თავს იჩენს ქაოსი. ჩვენ არ ველოთ, რომ პროგნოზი ზუსტი იქნება, რადგან იგი A_2 -ისა და A_1 -ის ექსპერიმენტულად განსაზღვრული მნიშვნელობების მიხედვითაა მიღებული და, რაც უფრო მნიშვნელოვანია, ყველა ბიფურკაცია δ -ს ერთი და იმავე მნიშვნელობის მეშვეობით აღიწერება. მიუხედავად ამისა, პროგნოზს მივყავართ იმ არესთან, სადაც ქაოსი იწყება.

ამგვარი ექსტრაპოლაციის მეშვეობით შეგვიძლია გავაკეთოთ პროგნოზი, თუ პარამეტრის რომელი მნიშვნელობისათვის იწყება ქაოსი ლოჯისტიკური ასახვისა და დიოდის წრედისათვის. 2.1 ცხრილში მოყვანილ შედეგებზე დაყრდნობით ვპოულობთ, რომ ლოჯისტიკური ასახვისთვის ქაოსის დაწყება შესაძლებელია $A=3.572$ მნიშვნელობისათვის, თუ ვიყენებთ A -ს ბიფურკაციულ მნიშვნელობებს, ხოლო $A=3.563$, თუ A -ს სუპერციკლურ მნიშვნელობებთან გვაქვს საქმე. რეალური მნიშვნელობა კი არის $A = 3.569...$

დიოდური წრედისთვის 2.2 ცხრილში მოყვანილი ძაბვის მნიშვნელობების გამოყენება 2.4.4 განტოლებაში ქაოსს 2.24(1) ვოლტზე წინასწარმეტყველებს, ხოლო ექსპერიმენტი ქაოსის დაწყებას 30კვტ-ის პირობებში -2.26(1) ვოლტზე გვაუწყებს. 85კვტ-ის პირობებში ნავარაუდები სიდიდე 0.299(9) ვოლტია, ხოლო ექსპერიმენტით მიღებული სიდიდე კი 0.286(8) ვოლტი. ჩვენ ვხედავთ, რომ შედეგები ერთმანეთს არ ემთხვევა, მაგრამ, იმის გათვალისწინებით, რომ ამ სისტემების დინამიკისათვის დეტალური გამოთვლები არ ჩავგიტარებია, მაინც საოცრად კარგი თანხმობაა.

ამოცანა 2.4-1. (a) დაამტკიცეთ, რომ (2.4-4) გამომდინარეობს (2.4-3)-დან. (b) დაამტკიცეთ, რომ:

$$(A_\infty - A_n)\delta^n = (A_2 - A_1)\frac{\delta^2}{\delta - 1}$$

შენიშნეთ, რომ განტოლების მარჯვენა მხარე არ არის დამოკიდებული n -ზე. ამ შედეგს არა ერთხელ გამოვიყენებთ მომდევნო თავებში.

2.5 ფეიგენბაუმის მასშტაბის სკალა

მარტივი ასახვის ისეთი ფუნქციების რიცხობრივი კვლევის შედეგად, როგორცაა ლოჯისტიკური ასახვა, ეიგენბაუმმა დაადგინა, რომ ყოველი მომდევნო პერიოდის გაორების ბიფურკაცია წინა ბიფურკაციის ოდნავ მცირე ასლია, ოღონდ მეტი განშტოებებით. აქედან გამომდინარე, ორმაგი პერიოდის მქონე მიმდევრობაში უნდა არსებობდეს კლასიფიკაციის უნივერსალური სკალა. ნახ. 2.3 ილუსტრაცია „ზომის“ ფაქტორისა, რასაც ფეიგენბაუმის α (ალფა) მნიშვნელობა ეწოდება.

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = 2.5029... \quad (2.5-1)$$

სადაც d_n პერიოდი- 2^n -ის ბიფურკაციული სტრუქტურის „ზომა“ ზუსტად პერიოდ- 2^{n+1} -ზე გადასვლის წინ. ზემოთმოყვანილ ფარდობაში ასევე შედიან ბიფურკაციულ სტრუქტურათა შესაბამისი ნაწილების ds სიდიდეები იმ პირობით, რომ პერიოდი-4-ის სეგმენტებიდან ყველაზე დიდი ზომა შედარებულია პერიოდი-8-ში შემავალი უდიდესი სეგმენტის ზომასთან. ფეიგენბაუმი ასევე ვარაუდობდა, რომ 2.3 ნახაზზე გამოსახული პერიოდი-4-ის დიდი „კამერტონის“ d_2 ზომა α –ჯერ მეტი უნდა ყოფილიყო მცირე კამერტონის d'_2 ზომაზე.

ფეიგენბაუმი α –ს პრაქტიკული განსაზღვრისთვის d_n –ის ოდნავ განსხვავებულ ფორმულირებას იყენებს. ისევე როგორც δ –ს განსაზღვრებისას, ds სიდიდე წარმოადგენს მანძილს ბიფურკაციულ დიაგრამაზე, როდესაც x_{\max} წერტილი არის ტრაექტორიის ნაწილი. მანძილის ასეთ შერჩევას მე-5 თავსა და F დანართში გამოვიყენებთ. ინტუიცია გვკარნახობს, რომ მაღალი რიგის ბიფურკაციების შემთხვევაში ორივე ფორმულირება ერთსა და იმავე რიცხობრივ შედეგს მოგვცემს.

ექსპერიმენტული მონაცემების აღწერისთვის α სიდიდის გამოყენებისას უნდა გავითვალისწინოთ იგივე გარემოება, რაც გვქონდა კრებადობის δ კოეფიციენტის შემთხვევაში: თეორია, რომელსაც რიცხვ 2.5029...-მდე მივყავართ, ემყარება მხოლოდ მაღალი რიგის ბიფურკაციათა ზღვარს, მაშინ როცა ექსპერიმენტში ხელი მიგვიწვდება მხოლოდ დაბალი რიგის ბიფურკაციებზე. მიუხედავად ამისა, იმ მცირეოდენ შემთხვევებში, როდესაც α ექსპერიმენტულად არის განსაზღვრული, გაზომილ და (2.5-1) განტოლებით მიღებულ მნიშვნელობებს შორის დამაკმაყოფილებელი (მაგრამ არა აბსოლუტური) თანხმობაა. აპრიორულად მცირე საფუძველი გაგვაჩნია იმის სამტკიცებლად, რომ ლოჯისტიკური ასახვის მასშტაბის სკალა დაკავშირებულია ექსპერიმენტული მასშტაბის სკალასთან.

სავარჯიშო 2.5-1. 2.3 ნახაზისათვის გამოიყენეთ სახაზავი მანძილების გასაზომად და ფეიგენბაუმის α სიდიდის გამოთვლისთვის. შეაფასეთ გაზომვათა ცდომილებები.

სავარჯიშო 2.5-2. ლოჯისტიკური ასახვის შემთხვევაში, α სიდიდის განსაზღვრისათვის გამოიყენეთ რიცხობრივად მიღებული მნიშვნელობები. შესაფასეთ ცდომილები, რომლებიც გამოწვეულია კომპიუტერული გამოთვლების სიზუსტის სასრულობით.

დიდ დაკვირვებას იწვევს ის ფაქტი, რომ ფეიგენბაუმის δ რიცხვი ახლოსაა „ზუსტ“ ზომასთან. ეს ნიშნავს, რომ δ თუ იქნებოდა ერთი რიგით დიდი (ვთქვათ 40 ან 50), მაშინ პერიოდთა გაორმაგება პარამეტრის მნიშვნელობების ფუნქციის სახით ისე სწრაფად იჩენს თავს, რომ მათზე დაკვირვება ექსპერიმენტულად ძალზე გაჭირდებოდა. მაგალითად, თუ δ დაახლოებით 50-ის ტოლია, $A_3 - A_2$ სხვაობა აღმოჩნდება $A_2 - A_1$ სხვაობის დაახლოებით 2% ($1/50$) და ზომიერი სიზუსტის შემთხვევაშიც კი მისი შემჩნევა პრობლემას არ წარმოადგენს. [მარტივია ექსპერიმენტული გაზომვების დაახლოებით 10%-ის სიზუსტით გამოყვანა; 1% არ არის ძალიან რთული; 0.1% მოითხოვს დიდ ყურადღებას და ძალისხმევას.] შემდეგი $A_4 - A_3$ სხვაობა იქნება $A_2 - A_1$ სხვაობის მხოლოდ 0.0004 და მასზე დაკვირვება უკვე ურთულესი საქმეა.

მეორე მხრივ, თუ δ ძალიან მცირე სიდიდე იქნება, მაშინ ორმაგი პერიოდის მქონე მიმდევრობა პარამეტრის ისეთი ფუნქცია იქნება, რომ ძალზე გაჭირდება იმის გარკვევა, თუ პარამეტრის რა დიაპაზონისათვის იქნება შესაძლებელი თვალის გადევნება. (გახსოვდეთ, რომ

დ უნდა იყოს 1-ზე მეტი, რათა მიმდევრობის ზღვარი გააჩნდეს. ამიტომ, „ძალიან მცირე“ 1-თან სიახლოვეს ნიშნავს.) ეს შემთხვევა წინასთან შედარებით ნაკლებ შეზღუდვებს საჭიროებს, რამაც შეიძლება გვაფიქრებინოს, რომ უფრო ადვილი იქნება, თუ ყურადღებას მაღალი რიგის ბიფურკაციებზე გავამახვილებთ. მაგრამ პარამეტრთა იმ ფართო დიაპაზონისათვის, რომლის შემთხვევაშიც პერიოდის გაორმაგება დაიკვირვება, მაღალი რიგის ბიფურკაციებს საერთოდ ვერ შევამჩნევთ ან მიმდევრობის ნაწილად ვერ აღვიქვამთ.

სავარჯიშო 2.5-3. იგივე არგუმენტზე დაყრდნობით დაამტკიცეთ, რომ ფეიგენბაუმის α აგრეთვე „ზუსტი ზომაა“.

შეკითხვა: არსებობს თუ არა კავშირი δ და α სიდიდეებს შორის? პასუხი მოცემულია მე-5 თავსა და F დანართში.

2.6 თვითმსგავსება

ფეიგენბაუმის ორი რიცხვი ორმაგი პერიოდის მქონე მიმდევრობაზე მნიშვნელოვან ინფორმაციას გვაწვდის. ჩვენს მიერ განხილული ბიფურკაციული დიაგრამის ესა თუ ის ნაწილი წარმოადგენს სხვა ნაწილის მცირე ასლს. კერძოდ, აღსანიშნავია, რომ 2.3 დიაგრამის ქვედა ნაწილი A_3 –სა და A_2 –ს შორის მსგავსი იქნება A_2 –სა და A_1 –ს შორის არსებული დიაპაზონისა, თუ A_3 –სა და A_2 –ს შორის მდებარე აბცისთა ღერძს δ -ჯერ, ხოლო იგივე დიაპაზონის ორდინატთა ღერძს α -ჯერ „გაეწელებათ“.

(დიაგრამის ზედა ნაწილი ითხოვს α^2 -ით „გაეწელებას“.) [კვლავ შეგახსენებთ, რომ ამგვარი დუბლირება გვაქვს მხოლოდ მაღალი რიგის ბიფურკაციების შემთხვევაში. თუმცა, შედეგი ძალაში რჩება დაბალი რიგის ბიფურკაციებისთვისაც.]

გეომეტრიულ სტრუქტურას, რომელიც ზემოთმოყვანილ თვისებას ამჟღავნებს, **ავტომოდელური** ეწოდება. როგორც მე-5 თავში ვნახავთ, ავტომოდელურობა გადამწყვეტ როლს ასრულებს უნივერსალობის თეორიაში. მომდევნო თავებში ამ ცნებას არაწრფივი დინამიკის სხვა ასპექტებშიც შევხვდებით. ვტომოდელურ ობიექტებს **ფრაქტალები** ეწოდება, რადგან მათი გეომეტრიული განზომილება ხშირად წილადურია და არა მთელი.

რატომ არის ავტომოდელურობა ასე მნიშვნელოვანი? თუ გეომეტრიული სტრუქტურა ავტომოდელურია, მაშინ მას არ გააჩნია *დამახასიათებელი* მასშტაბური სკალა ანუ თუ ჩვენ ვაკვირდებით ამ სტრუქტურის რაიმე შემადგენელ ნაწილს გარკვეული გადიდებით, იგი

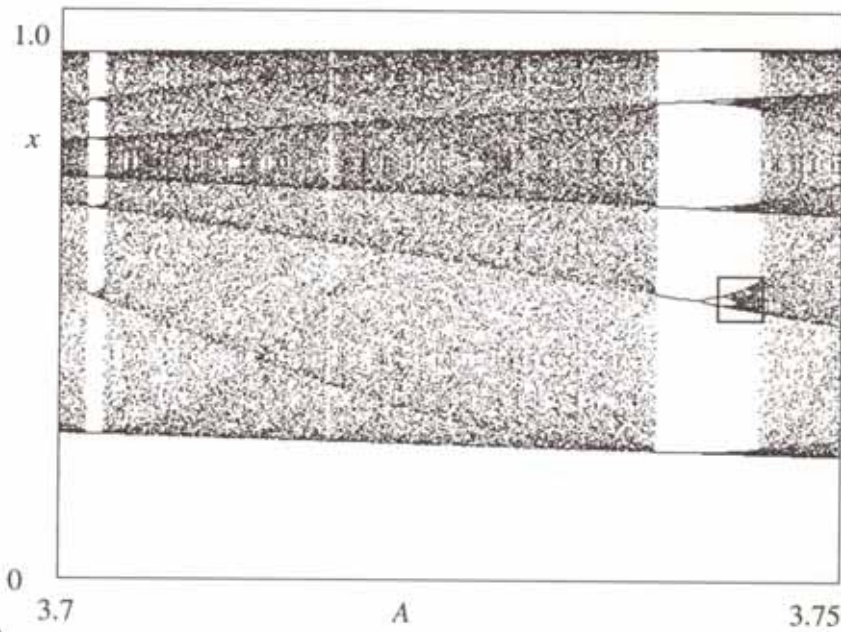
გადიდების რომელიმე სხვა კოეფიციენტის შესაბამისი ნაწილის მსგავსი იქნება. შემადგენელ ნაწილებზე დაკვირვებით ჩვენ ვერ ვახერხებთ იმის განსაზღვრას, თუ რა მასშტაბის მქონე სკალასთან გვაქვს საქმე. ეს არსებითი თვისება მიანიშნებს, რომ გეომეტრიული სტრუქტურის ბევრი თვისება არ უნდა იყოს დამოკიდებული მისი აღმწერი მოდელის დეტალებზე (ეს ფაქტი ამ წიგნში კიდევ არაერთხელ შეგვხვდება).

ვტომოდელურობის შთამბეჭდავი სურათი ნაჩვენებია 2.4 და 2.5. ნახაზებზე. 2.4 ნახაზი გვიჩვენებს ლოჯისტიკური ასახვის შესაბამისი გაორების დიაგრამის გადიდებულ ნაწილს პერიოდი-5 უბანზე. ახ. 2.5 კი ნახ. 2.4-ის ჩარჩოში მდებარე უბნის ფართო ხედით წარმოდგენილი ვერსიაა. იგი გვიჩვენებს ორმაგი პერიოდის მქონე მიმდევრობის გადასვლას ქაოსში და ამ ქაოსური დიაპაზონის ფარგლებში კიდევ ერთ პერიოდი-5-ის უბანს ვხედავთ. A-ს ოდნავ მეტი მნიშვნელობისას პერიოდი-3-ის უბანი დაიკვირვება, რომლისთვისაც პერიოდის გაორმაგებას უფრო დიდი ქაოსი მოჰყვება. ბიფურკაციულ დიაგრამაზე გამოსახული ბევრი თვისება თვალნათლივ მეორდება გაცილებით მცირე სკალაზე. როგორც მე-5 თავში ვნახავთ, ამგვარი ავტომოდელურობა უაღრესად საფუძვლიანი რაოდენობრივი მტკიცებების მიღების საშუალებას გვაძლევს იმ სისტემის ქმედების თაობაზე, რომლებიც ამგვარ ბიფურკაციულ დიაგრამებს იძლევიან.

2.7 სხვა უნივერსალური მახასიათებლები

ფეიგენბაუმის რიცხვებს არ შეუძლიათ ამოწურონ არაწრფივ სისტემებში დაკვირვებულ უნივერსალურობათა სრული დიაპაზონი. მომდევნო თავებში ჩვენ განვიხილავთ უნივერსალურობის სხვა სახეებს, რომლებიც უკავშირდებიან ქაოსური სისტემების ენერგეტიკულ სპექტრებს, ხმაურის გავლენას ამ სისტემებზე და „ქაოსურობის“ გაზომვის სხვადასხვა მეთოდებს. რთული არაა იმის ვარაუდი, რომ რაც უფრო სიღრმისეულად შევისწავლით არაწრფივ სისტემებს, მით მეტ უნივერსალურ თვისებებს აღმოვაჩინოთ.

წინდახედულმა მკითხველმა შეიძლება იკითხოს: ძალაშია ამგვარი რაოდენობრივი მახასიათებლები ნებისმიერი არაწრფივი სისტემისათვის? ამ შეკითხვის პასუხია – არა. მიუხედავად ამისა, უნდა არსებობდნენ არაწრფივი სისტემათა გარკვეული კლასები, რომელთათვისაც ფეიგენბაუმის რიცხვები (და მათი სხვადასხვა სახის განზოგადებები) საკმაოდ კარგ რაოდენობრივ სურათს იძლევიან.



ნახ. 2.4. ლოჯისტიკური ასახვის შესაბამისი ბიფურკაციული დიაგრამის გადიდებული ხელი პერიოდი-5-ის სიახლოვეს. ჩარჩოში მდებარე არის გადიდებული ხელი კი ნაჩვენებია 2.5. ნახაზზე.

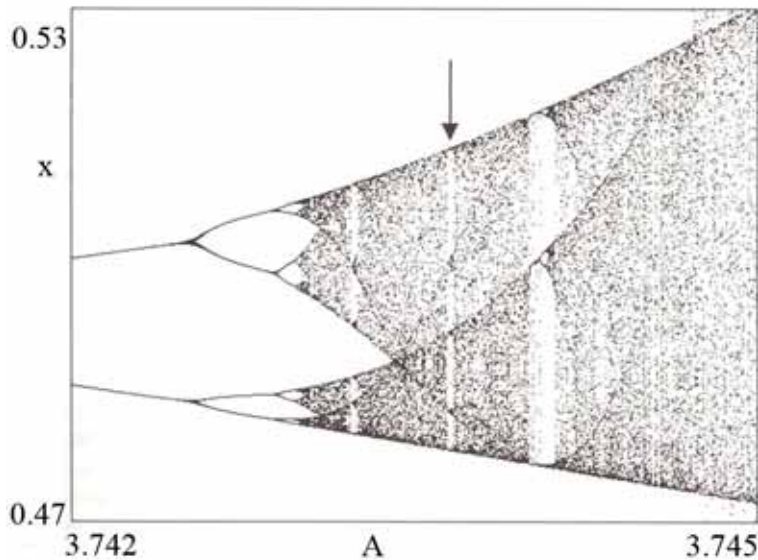
სრული მეთოდოლოგია იმის განსასაზღვრად, თუ რომელ „უნივერსალობის კლასს“ შეესაბამება ესა თუ ის არაწრფივი სისტემა (როგორც თეორიული მოდელები, ასევე ექსპერიმენტული სისტემები), შორსაა სრულყოფილებისგან. მიუხედავად ამისა, რომ ასეთი ტიპის კლასები არსებობს (ჯერ-ჯერობით დადგენილია მცირე რაოდენობით). მაგალითად, არაწრფივი სისტემები, რომელთა დინამიკა ე.წ. „ერთგანზომილებიან დინამიკაზე“ დაიყვანება, ხშირად გადადიან ქაოსში პერიოდის გაორმაგების გზით და ფეიგენბაუმის რიცხვებიც სწორედ ამგვარ სისტემებს მიესადაგება.

2.8 ქაოსის მოდელები და უნივერსალობა

ამჟამად, როდესაც ქაოსის ბუნების შესახებ გარკვეული წარმოდგენა მაინც გვაქვს, შეგვიძლია წამოვჭრათ ზოგიერთი ფუნდამენტური კითხვა სამეცნიერო მეთოდოლოგიაში მისი ადგილის შესახებ. ანუ ვსვამთ კითხვას: რას გვაძლევს ქაოსი?

პასუხის მისაღებად არსებითია ვიცოდეთ მეცნიერებაში მოდელების გამოყენების პრობლემა. ამ მხრივ გამოცდილება პირველ თავში უკვე მივიღეთ, სადაც ბიოლოგიური პოპულაციის ზრდისა და კონვექტორული ხსნარის მოდელის (ლორენცის მოდელი) შესახებ ვსაუბრობდით. რას ნიშნავს ტერმინი *მოდელი*? უპირველეს ყოვლისა, უნდა აღინიშნოს, რომ

„რეალური“ სისტემების უმრავლესობის აღწერა უშუალოდ ფუნდამენტური კანონებით მეტად რთულია. აქედან გამომდინარე, მსჯელობისთვის ვიყენებთ ფიზიკის მიკროსკოპულ კანონებს, როგორცაა შრედინგერის განტოლება კვანტურ მექანიკაში, მაქსველის განტოლებები ელექტრომაგნიტურ თეორიაში და ა.შ.



ნახ. 2.5. 2.4 ნახაზის ჩარჩოში არის გადიდებული ხედი. ბიფურკაციული დიაგრამის ავტომოდელურობა ვლინდება პერიოდი-5-ის სახით, რომელიც ქაოსურ ზოლში მითითებულია ისრით.

მაგალითად, პირველ თავში აღწერილი დიოდური და კონვექციური სითხეების სისტემები ტრილიონობით ატომისაგან შედგება და ფუნდამენტალური მიკროსკოპული კანონების გამოყენება პრაქტიკული თვალსაზრისით არამიზანშეწონილია. სამაგიეროდ, ჩვენი თვალსაზრისის მიხედვით უმნიშვნელოვანეს თვისებებს ვეძებთ (მაგალითად, დენი და ძაბვა დიოდის წრედში; ტემპერატურა და ხსნარის ნაკადის სიჩქარე ხსნარის ექსპერიმენტში) და შემდეგ შერჩეული მახასიათებლების ქმედების მიხედვით თეორიულ მოდელებს ვაგებთ (მათემატიკური აღწერა). მუშაობის პროცესში ვიმედოვნებთ, რომ მოდელის მიერ იგნორირებული თვისებები არსებითი კვლევის შედეგებზე არსებით გავლენას არ ახდენს. მაგალითად, ლორენცის მოდელში ხსნარის შეფერილობას განსაკუთრებულ ყურადღებას არ ვაქცევთ. ჩვენი ვარაუდით, ხსნარის ბუნება შეიძლება განისაზღვროს ამ ხსნარის სიმკვრივით, თბოგამტარობითა და სიბლანტით, ფერი კი მნიშვნელოვანი არ არის. თუ მოდელი იძლევა პროგნოზის საშუალებას (ჩვეულებრივ რაოდენობრივი თვალსაზრისით), მაშინ გვეუფლება შეგრძნება, რომ ჩვენი მოდელი იძლევა მოვლენის ზუსტ აღწერას. სავარაუდოდ, ალტერნატიული მოდელები, რომლებიც ყურადღებას სხვა თვისებებზე ამახვილებენ ან

შერჩეული თვისებების ქმედების აღწერას განსხვავებული ხერხებით ცდილობენ, არ დაექვემდებარებიან ერთსა და იმავე პროგნოზს. ამიტომ ჩვენ ვიყენებთ წარმატებული (რაოდენობრივი) პროგნოზის კრიტერიუმს, რათა შევარჩიოთ მიზანშეწონილი მოდელი.

გარდა ამისა, მოდელი ამყარებს კავშირს სისტემის საწყის პირობებსა („მიზეზი“ ან „მიზეზები“) და მომავალ ქმედებას („ეფექტები“) შორის და „ხსნის,“ რატომ იქცევა ესა თუ ის სისტემა ამგვარად.

ასეთმა ზოგადმა პროცედურამ თითქოს კარგად უნდა იმუშავოს ფიზიკაში და ხშირად ქიმიაშიც, სადაც შესაძლებელია სისტემების საკმაოდ მარტივი სახით წარმოდგენა. მაგრამ ბიოლოგიაში საკმაოდ ძნელია იმის თქმა, შეუძლია თუ არა მოდელირების მარტივ პროცედურას ჩვენი სურვილისამებრ მოქმედება. სირთულე იმაში მდგომარეობს, რომ გარკვეული ბიოლოგიური სახეობების წარმომადგენელთა ბუნებრივი მრავალფეროვნება და სახეობებს შორის განსხვავება სრული პროგრამის გამოყენებას პრობლემატურს ხდის. (სირთულეების მიუხედავად ბიოლოგები და სოციალური მკვლევრები მათემატიკურ მოდელირებას აქტიურად იყენებენ.) აქედან გამომდინარე, ჩვენ შემოვიფარგლებით ფიზიკურ მოვლენებზე მსჯელობით, სადაც მოდელირება წარმოდგენილია, როგორც ვარგისი მეცნიერული პროცედურა.

მარტივ ფიზიკურ მოვლენებშიც კი ქაოსის უნივერსალობა დილემას ქმნის. მაგალითად, განსხვავებული მოდელები წესით ქაოსისკენ მიმავალ ერთსა და იმავე პერიოდის გაორმაგების გზას უნდა პროგნოზირებდეს (მომდევნო თავებში მოყვანილი მაგალითები ამ დილემის არაერთ შემთხვევას აღწერს.) თითოეულ მოდელს ორმაგი პერიოდების მქონე ერთი და იგივე მიმდევრობა გააჩნია და ამასთან ყოველი მათგანისთვის ფეიგენბაუმის δ და α ერთი და იგივე სიდიდისაა. ამრიგად, თუ ჩვენ ქაოსის გამომწვევ ბიფურკაციებზე დაკვირვებით შემოვიფარგლებით, ვნახავთ, რომ ქაოსზე დაკვირვებითა და ასევე δ და α -ს რაოდენობრივ მნიშვნელობების მეშვეობით ვერ დავადგენთ, თუ რომელი მოდელია სწორი. რა თქმა უნდა, თუ ვაკვირდებით პერიოდების გაორმაგებებს და მოცემული მოდელი ამას არ წინასწარმეტყველებს, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია მისი უარყოფა. ზოგადად, მოცემული სისტემისთვის არაერთი განსხვავებული მოდელი შეიძლება არსებობდეს და ყოველი მათგანი ქაოსში გადასვლის ერთსა და იმავე გზას პროგნოზირებდეს.

არსებობს ორი საორიენტაციო მეთოდი. საუეთესო მოდელის ასარჩევად საჭიროა ყურადღება გავამახვილოთ მის მიერ პროგნოზირების ფაქიზ დეტალებზე. მაგალითად, ბიფურკაციებისათვის საუკეთესოდ მისადაგებულ ძაბვის ზუსტ მნიშვნელობებს და $i(t)$ მრუდების ზუსტ ფორმებს პირველ თავში დიოდური წრედის განხილვისას შევხვდით. თუ ამ მეთოდს მივმართავთ, მაშინ მოდელი იმდენად სპეციფიური გახდება, რომ იგი გამოუსადეგარი

ხდება სხვა დიოდებისთვის განსხვავებულ წრედებში, ამიტომ ეს კრიტერიუმი მეტისმეტად მკაცრია¹.

მეორე მეთოდი კი დიოდებისათვის „წარმატებული“ მოდელების საერთო თვისებების შერჩევასა და მათზე დაყრდნობით დიოდის ქმედების ახსნაში მდგომარეობს. თუ ასე მოვიქცევით, ბევრ მეცნიერს „შევაშფოთებთ“. აქ ჩვენ აღმოვაჩინეთ, რომ ზემოთხსენებული ზოგადი თვისებები არ წარმოადგენენ ფიზიკურ თვისებებს. ამის დასადასტურებლად მოგვყავს მაგალითი, როდესაც სახეზეა ჩვეულებრივი ფიზიკური თვისების არსებობა. მარტივი ჰარმონიული (სინუსოიდური) რხევა ბევრ ფიზიკურ სისტემაში შეინიშნება. როდესაც ვცდილობთ ამგვარი რხევების საყოველთაო ხასიათის გააზრებას, ვხვდებით, რომ „წონასწორობიდან“ მცირე გადახრების შემთხვევაში სახეზეა საერთო სურათი: სისტემაზე მოქმედი ძალა წონასწორული მდებარეობიდან წანაცვლების პროპორციულია და მიმართულია იმგვარად, რომ სისტემა კვლავ წონასწორულ მდგომარეობაში დააბრუნოს.

ძალის ამგვარი კანონი ყოველთვის იწვევს მარტივ ჰარმონიულ რხევას. ამ შემთხვევაში ჩვენ ჩვეულებრივი პარამეტრებისთვის მარტივ ჰარმონიულ მოძრაობას ფიზიკურად განვმარტავთ. ქაოსის შემთხვევაში საერთო ფიზიკური ახსნა არ არსებობს. იმის შესახებ, თუ რა საერთო თვისებები აქვთ აბსტრაქტული მდგომარეობების სივრცეში სისტემათა აღმწერ მოდელებს, დეტალურად მე-3 და მე-4 თავში ვიმსჯელებთ. ამიტომ, დიოდის ქმედების ახსნისათვის ანუ მისი ქაოსში გადასვლის შესწავლისთვის უნდა გავიგოთ თუ რა ხდება მდგომარეობების სივრცეში მაკონტროლებელი პარამეტრების ცვლილებისას.

ასეთ სიტუაციაში ხშირად ისმება შეკითხვები: თუ „რას გვასწავლის ქაოსი?“ და „რატომ ვიტკივებთ თავს ქაოსით?“. ამ კითხვების მიღმა არსებობს ცრურწმენა, რომ ჩვენ სისტემების ქმედებას მხოლოდ მათი ფუნდამენტური, მიკროსკოპული სტრუქტურის ცოდნის გარდაკლების მიზნით შევისწავლით. როგორც ადრე ვთქვით, ქაოსური ან ქაოსში გარდამავალი ქმედებების შესასწავლად ამგვარი მიდგომა არ გამოგვადგება. მაშინ რატომ შევისწავლით ქაოსს? ამ შეკითხვაზე პასუხის გასაცემად უნდა უგულვებელვყოთ ის ღირებულებები, რომელთაც მე-20 საუკუნის ფიზიკოსთა უმრავლესობა იზიარებდა. ამ აღამიანებმა მიკროსკოპული სამყაროს გულდასმით შესწავლისკენ გვიბიძგეს, რომელიც საფუძვლად უდევს დაკვირვებულ მოვლენებს. ჩვენ არ უარყოფთ, რომ ეს იყო საოცრად წარმატებული ნაბიჯი როგორც მატერიის ფუნდამენტური სტრუქტურის ცოდნის

¹. აღმოაჩინეს, რომ დეტალურ პროგნოზირებასა და ზოგად ახსნას შორის გარკვეული ბალანსი არსებობდა. ნენსი კარტრაითის ნაშრომი სახელწოდებით *How the Laws of Physics lie* (Oxford University Press, Oxford and New York, 1983).

გაღრმავების, ასევე ფუნდამენტური იდეების საზოგადოებრივ პრაქტიკაში დანერგვის თვალსაზრისით. მიკროსკოპულ სამყაროში „გადავარდნილ“ მეცნიერებს არ უნდა დაავიწყდეთ, რომ მოვლენის სირთულე ლაბორატორიული ექსპერიმენტების ჩარჩოებს სცილდება. ზოგჯერ ვფიქრობთ, რომ ეს კომპლექსურობა ფუნდამენტური მიკროსკოპული კანონებიდან გამომდინარეობს და გამოხატულია ამ კანონებით. მაგრამ ფუნდამენტური კანონები კომპლექსურობაზე საუბრისა და მისი გააზრების საშუალებას არ იძლევა. მაგალითად, თუ ჩვენ გავიაზრებთ და ავხსნით ქაოსის უნივერსალობას, დაგვჭირდება კონკრეტული სისტემებისთვის გაკეთებული სპეციფიკური ფუნდამენტური კანონების მეშვეობით გაკეთებულ პროგნოზებზე მალა დადგომა. ჩვენ უნდა მივუახლოვდეთ ამ კომპლექსურობას „ახსნის სხვადასხვა დონეზე“.

ნაცვლად იმისა, რომ ქაოტური ქმედება მიკროსკოპული სამყაროს შეცნობის საშუალებად გამოვიყენოთ, ამგვარი სირთულე ჩვენი გარემომცველი სამყაროს უმთავრეს ნაწილად უნდა გავიაზროთ, ხოლო მეცნიერებამ ძალისხმევა არ დაიშუროს მისი შეცნობისთვის. არაწრფივი დინამიკა და ქაოსის თეორია პირველი ნაბიჯებია დინამიკური სირთულის შეცნობისაკენ მიმავალ გზაზე.

2.9 კომპიუტერი და ქაოსი

გვებადება კითხვა, თუ რატომ არ აღმოაჩინეს ქაოსი ბევრად ადრე? როგორც მომდევნო თავებში ვნახავთ, ქაოსისა და არაწრფივი დინამიკის თითქმის მთელი თეორიის გაგება მათემატიკის ზომიერი ცოდნის პირობებშიც კი შეუძლებელია. ქაოსურ მოვლენათა უმრავლესობა თავს იჩენს იმ ფიზიკურ სისტემებში, რომელთა ძირეული მექანიზმის გააზრება სულ ცოტა ერთი საუკუნის „ასაკის“ ფიზიკის მეშვეობით არის შესაძლებელი. მაშინ რატომ იფეთქა ქაოსის მოძღვრებამ ასე უეცრად მე-20 ს-ის 70-80-იან წლებში?

ქაოსის ისტორიის ეპიზოდური გაცნობის შედეგადაც კი ცხადია, რომ პუანკარემ ზედაპირულად მაინც იცოდა არაწრფივი დინამიკისა და ქაოსის უმნიშვნელოვანესი იდეების შესახებ. პუანკარემ და დანარჩენმა მეცნიერულმა სამყარომ ვერ შეძლეს იმ გზის პოვნა, რომელიც მათ ქაოსის შეცნობად და მისი შედეგების გამოკვლევამდე მიიყვანდა. სწრაფად მოქმედი კომპიუტერი და განსაკუთრებით კომპიუტერული გრაფიკა უმნიშვნელოვანესი იარაღია, რომელსაც უდიდესი პროგრესი შეაქვს ქაოსისა და არაწრფივი დინამიკის კვლევაში. პირველი თავის მიხედვით თუ ვიმსჯელებთ, არაწრფივი განტოლებების რიცხვითი ინტეგრების ჩასატარებლად კომპიუტერი გვესაჭიროება. კომპიუტერული გრაფიკა არაწრფივი

სისტემების ქმედების ვიზუალიზაციის საშუალებას იძლევა და ჩვენს ინტუიციას ამონახსნების პოვნისა და სისტემის მაკონტროლებელი პარამეტრების ცვლილებებზე ამონახსნების რეაქციის დადგენისაკენ მიმართავს. რა თქმა უნდა, ჩვენ სხვა თეორიული კონცეფციებიც გვესაჭიროება, რათა განზოგადება გაუუკეთოთ ჩვენს მიერ დანახულს და არაწრფივი სისტემების რთული ქმედების ლაბირინთში გზა გავიკვლიოთ. შეიძლება ისიც ვივარაუდოთ, რომ პუანკარეს მაკინტოშის ან IBM-ის პერსონალური კომპიუტერი რომ ჰქონოდა, მაშინ არაწრფივი დინამიკის სფერო ბევრად წინ იქნებოდა წასული, ვიდრე დღესდღეობით არის.

კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი საკითხი რიცხვითი გამოთვლებაა. თუ გამოთვლებში დამრგვალების შედეგად მიღებული ცლომილებებისა და ქაოსური ქმედებისთვის ახლომდებარე ტრაექტორიების შეუთავსებლობის კომბინირებულ გავლენას გავითვალისწინებთ, მაშინ როგორ ვენდოთ ტრაექტორიების რიცხვითი გამოთვლების სიზუსტეს? (აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ იგივე სირთულე იჩენს თავს ექსპერიმენტულ გაზომვებშიც, სადაც „ხმაური“ დამრგვალების შედეგად მიღებული ცლომილებების როლს ასრულებს.) თუ სისტემის ქმედება ქაოსურია, მაშინ მცირე რიცხვითი ცლომილებებიც კი დროში ექსპონენციალურად იზრდება. სავარაუდოდ, ჩვენს მიერ ქაოსური სისტემებისთვის მიღებული ყოველი შედეგი რიცხვითი გამოთვლების პროცედურის არტეფაქტს წარმოადგენს. ცლომილებების არარსებობის შემთხვევაშიც კი სისტემის მახასიათებლების რიცხვითი მნიშვნელობები არსებითადაა დამოკიდებული გამოთვლებისათვის საჭირო პროცედურებზე. თუ ეს სიმართლეა, მაშინ რამდენად საფუძვლიანია ჩვენს მიერ მიღებული შედეგები?

ამ შეკითხვებზე პასუხის ამომწურავად გაცემა რთულია, როდესაც არსებობს ტრაექტორიების დეტალების დამოკიდებულება გამოთვლების დროს დამრგვალებით მიღებულ შეცდომებზე. მაგრამ გამოთვლილი ტრაექტორია სისტემის რომელიმე სხვა ტრაექტორიასთან ძალიან ახლოს იქნება ანუ ჩვენს მიერ მიღებული ტრაექტორია შესაძლოა არ იყოს ის, რომლის გამოთვლასაც ვაპირებდით, მაგრამ იგი სისტემის სხვა შესაძლო ტრაექტორიებიდან ერთ-ერთთან ძალიან ახლოს იქნება. ტექნიკური ენით რომ ვთქვათ, გამოთვლილი ტრაექტორია სისტემის რომელიმე შესაძლო ტრაექტორიას გადაფარავს (გადაფარვის თვისება ქაოტური სისტემებისთვის შემოწმებულია GHY90-სა და SGY97 –ში).

როგორც მომდევნო თავებში ვნახავთ, ჩვენ ყველაზე მეტად ტრაექტორიის საშუალო მახასიათებლები დაგვჭირდება. ხშირად საშუალო მნიშვნელობები არ არის დამოკიდებული გამოსაკვლევე ტრაექტორიაზე. აქედან გამომდინარე, რაც უფრო დიდხანს გავადევნებთ თვალს სისტემის რომელიმე შესაძლო ტრაექტორიას, მით უფრო დავრწმუნდებით, რომ ჩვენს მიერ მიღებული შედეგები სისტემის ქმედებას შესანიშნავად გამოხატავს. აქვე უნდა აღინიშნოს,

რომ რიგ შემთხვევებში დაწყვილებული ქაოსური სისტემებიც გვხვდება (მე-11 თავი), რომელთა მიმართ გადაფარვის თეორიამ შესაძლოა ვერ იმუშავოს (LAG99).

ისეთი შემთხვევებიც არსებობს, როდესაც გადაფარვაც კი პრობლემატური ხდება. ეს საკითხი DGS94-შია განხილული. ამასთან, ბევრ რთულ სისტემაში (თავისუფლების მრავალი ხარისხის მქონე სისტემები) იქმნება მდგომარეობა, როდესაც კომპიუტერების დეტერმინისტული მოდელირების მეშვეობითაც კი არ მოხერხდება რაციონალური შედეგების მიღება (LAG99).

2.10 დამატებითი ლიტერატურა

ფეიგენბაუმის რიცხვები

M. J. Feigenbaum, "Universal Behavior in Nonlinear Systems," *Los Alamos Science* 1, 4-27 (1980). Reprinted in [Cvitanovic, 1984].

R. M. May, "Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics," *Nature* **261**, 459-67 (1976). Reprinted in [Cvitanovic, 1984] and in [Hao, 1984]. ძალზე მნიშვნელოვანი და საინტერესო ნაშრომი, რომელიც ფეიგენბაუმის უნივერსალურობის „აღმოჩენამდე“ შეიქმნა.

G. B. Lubkin, "Period-Doubling Route to Chaos Shows Universality," *Physics Today* 34, 17-19 (1981). ფეიგენბაუმის აღმოჩენამდე ისტორიის მიმოხილვა და მისი ადრეული გავლენა ფიზიკაზე.

P. J. Myrberg, "Sur l'Iteration des Polynomes Reels Quadratiques," */. Math. Pure Appl.* 41, 339-51 (1962).

ფეიგენბაუმის რიცხვების ექსპერიმენტული გაზომვები

M. Giglio, S. Musazzi, V. Perini, "Transition to Chaotic Behavior via a Reproducible Sequence of Period-Doubling Bifurcations," *Phys. Rev. Lett.* 47, 243^6(1981).

J. Testa, J. Perez, and C. Jeffries, "Evidence for Universal Chaotic Behavior of a Driven Nonlinear Oscillator," *Phys. Rev. Lett.* 48, 714-17 (1982).

F. A. Hopf, D. L. Kaplan, H. M. Gibbs, and R. L. Shoemaker, "Bifurcations to Chaos in Optical Bistability," *Phys. Rev. A* 25, 2172-82 (1982).

C. W. Smith, M. J. Tejwani, and D. A. Farris, "Bifurcation Universality for First-Sound Subharmonic Generation in Superfluid Helium-4," *Phys. Rev. Lett.* 48, 492-94 (1982).

W. J. Yeh and Y. H. Kao, "Universal Scaling and Chaotic Behavior of a Josephson-junction Analog," *Phys. Rev. Lett.* 49, 1888-91 (1982).

მოდელირება და კორექცია

P. J. Denning, "Modeling Reality," *American Scientist* 78, 495-98 (1990). მსჯელობა მოდელირებაზე და მეცნიერებაზე მის გავლენაზე.

C. Grebogi, S. M. Hammel, J. A. Yorke, and T. Sauer, "Shadowing of Physical Trajectories in Chaotic Dynamics: Containment and Refinement," *Phys. Rev. Lett.* 65, 1527-30 (1990). დეტალურად არის განხილული მაკორექტირებელი კითხვა ქაოტური ტრაექტორიების შესახებ.

T. Sauer, C. Grebogi, J. A. Yorke, "How Long Do Numerical Chaotic Solutions Remain Valid?" *Phys. Rev. Lett.* 79, 59-62 (1997).

Y.-C. Lai and C. Grebogi, "Modeling of Coupled Oscillators," *Phys. Rev. Lett.* 82, 4803-06 (1999).

2.11 კომპიუტერული სავარჯიშოები

როგორც 2.9 პარაგრაფში მოკლედ აღვნიშნეთ, რომ კომპიუტერი და კომპიუტერული გრაფიკა გადამწყვეტ როლს ასრულებს ქაოსის თეორიისა და არაწრფივი დინამიკის განვითარებაში. თუ გსურთ ამ იდეების პრაქტიკაში დანერგვა ან ფუნდამენტური კონცეფციების სათავეებთან მისვლა, თქვენ გჭირდებათ კომპიუტერი, რათა დინამიკაში მიმდინარე ცვლილებები გამოიკვლიოთ, ფეიგენბაუმის რიცხვები დაადგინოთ და პარამეტრები განსაზღვროთ, რაც ქაოსური ქმედების შესახებ რაოდენობრივი პროგნოზების გაკეთების საშუალებას მოგვცემს.

მკითხველთა უმეტესობას არ სურს დროის დაკარგვა დეტალურ კომპიუტერულ პროგრამირებაზე. საბედნიეროდ ამჟამად სხვადასხვა კომპიუტერული პროგრამების გამოყენების შესაძლებლობა არსებობს, რომლებიც არაწრფივ დინამიკაში საკმაოდ რთული გამოთვლების საშუალებას პროგრამირების აუცილებლობის გარეშე გვაძლევს.

თქვენში კომპიუტერის გამოყენების სურვილის აღძვრისთვის, რაც არაწრფივ სისტემებში ინტუიციის განვითარებაში დაგეხმარებათ, კომპიუტერული ამოცანების სამ ვარიანტს გთავაზობთ. პირველი მათგანი ძალიან მარტივ კომპიუტერულ პროგრამებს საჭიროებს ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციისთვის. მათი ჩამონათვალი E დანართშია მოყვანილი. ეს პროგრამები საკმაოდ მარტივია, მათი ათვისება ადვილად ხდება, ხოლო გამოყენება კი ნებისმიერ პერსონალურ კომპიუტერში შეიძლება. ამ პროგრამების ჩამონათვალი იტერაციული ალგორითმების შესანიშნავი ნიმუშია, რომლებიც ხშირად გვხვდებიან არაწრფივი დინამიკის კვლევისას. სავარჯიშოების მეორე კატეგორია კომერციული თვალსაზრისით მიღებულ პროგრამათა პაკეტებს იყენებს. მოცემული სავარჯიშოები ზემოთხსენებული ორი პაკეტის საფუძველზე შევარჩიეთ, რადგან მათი შექმნა შედარებით იაფად არის შესაძლებელი. ჩვენ სხვა პაკეტებსაც აღვწერთ, რადგან მათი გამოყენება ძალიან სასარგებლოა. სავარჯიშოთა მესამე ტიპი კი გამოცდილი პროგრამისტისთვისაა განკუთვნილი. ეს სავარჯიშოები თქვენგან ინდივიდუალური პროგრამების შექმნას ითხოვს, რის შესახებაც საჭირო ინფორმაცია და რჩევები მოცემულია [Devaney, 1990]–ში, [Baker & Gollub, 1996]–სა და [Gould & Tobochnik, 1996] –ში.

ჩვენ არაწრფივი დინამიკისათვის ზოგიერთი კომპიუტერული პროგრამების პაკეტების ჩამონათვალი მოგაწოდეთ (ფასები ამ სახელმძღვანელოს შექმნის პერიოდისაა და შეიძლება დროთა განმავლობაში შეიცვალოს). თითოეული პროგრამა თქვენი კომპიუტერისგან გარკვეულ გრაფიკულ შესაძლებლობებს ითხოვს (მაგალითად VGA ან SVGA).

1. *Chaos Demonstrations 3*, J. C. Sprott and G. Rowlands (Physics Academic Software, Box 8202, North Carolina State University, Raleigh, NC 27695-8202), \$90. IBM და სხვა პერსონალური კომპიუტერებისათვის. პროგრამათა ნაკრები, რომელიც მოიცავს მრავალფეროვან იტერაციულ ასახვებს, დიფერენციალური განტოლებებით აღწერილ სისტემებს, მანდელბროს სიმრავლეს და ფრაქტალებს. შესაძლებელია მისი გამოყენება სადემონსტრაციო რეჟიმში. ასევე შეგიძლიათ მთარგმნოთ ზოგიერთი პარამეტრი. აქვს რამდენიმე სამგანზომილებიანი ანიმაცია. ჩართულია "3-განზომილებიანი სათვალეები". ინფორმაცია Physics Academic Software-ის შესახებ შეგიძლიათ იხილოთ ვებ-გვერდზე <http://www.aip.org/pas/catalog.html>.

2. *Chaotic Dynamics Workbench*, R. W. Rollins (Physics Academic Software, Box 8202, North Carolina State University, Raleigh, NC 27695-8202, 1990), \$90. IBM-ისა და სხვა პერსონალური კომპიუტერებისათვის. ფოკუსირებულია იმ სისტემებზე, რომლებიც აღიწერებიან ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებით. შეგიძლიათ მდგომარეობათა სივრცის დიაგრამებისა და ფუნქციონალური კვთების აგება, ლიაპუნოვის ექსპონენტების გამოთვლა, პარამეტრებისა და საწყისი პირობების შეცვლა შესაძლებელია სურვილისამებრ. თქვენ საშუალება გაქვთ მოქნილად შესარჩიოთ ინტერგრაციის მეთოდი, ინტეგრაციის საფეხურის ზომები და ის, რაც გრაფიკზე უნდა გამოისახოს.

3. *Chaotic Mapper*, J. B. Harold. (Physics Academic Software, Box 8202, North Carolina State University, Raleigh, NC 27695-8202, 1993), \$60. IBM-ისა და სხვა შესაბამისი კომპიუტერებისათვის. მოიცავს ერთ და ორგანზომილებიან იტერაციულ ასახვებს, დიფერენციალური განტოლებებით აღწერილ სისტემებს, მანდელბროს სიმრავლეს და ქაოსური თამაშის ასახვას. ხდება მდგომარეობათა სივრცის ტრაექტორიების, პუნქტებისა და ლიაპუნოვის ექსპონენტების გამოთვლა.

4. *Phaser*, H. Kocak. პროგრამათა ნაკრები რომელიც ერთვის ავტორის წიგნს *Differential and Difference Equations through Computer Experiments*, 2nd ed. (Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1989). დისკეტების ღირებულებაა 39 აშშ დოლარი. IBM-ისა და შესაბამისი პერსონალური კომპიუტერებისათვის. მოიცავს დიდი რაოდენობით იტერაციულ ასახვებს და დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემებს. უფრო რთული პროგრამა გაცილებით მოქნილი გრაფიკით.

5. Helena Nusse and James A. Yorke, *Dynamics: Numerical Explorations*, 2nd ed. (Springer, New York, 1998). თანმხლები პროგრამა საშუალებას მოგცემთ ააგოთ ბიფურკაციული დიაგრამები, მიზიდულობის არეები, და ა. შ.

6. *Strange Attractors, Creating Patterns in Chaos*, Julien C. Sprott (M&T Books, New York, 1993). წიგნი, რომელსაც ახლავს კომპიუტერული პროგრამა სხვადასხვაგვარი უცნაური მიმზიდველის კომპიუტერული გამოსახულების შესაქმნელად.

7. *Chaos, a Program Collection for the PC*, H. J. Korsch and H.-J. Jodl (Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1994). მოიცავს კომპიუტერულ პროგრამებსაც.

8. *Chaos for Java*, Brian Davies. პროგრამის უფასოდ ჩამოტვირთვა შესაძლებელია Australian National University (<http://sunsite.anu.edu.au/education/chaos>). შესაძლებელია ბიფურკაციული დიაგრამების შექმნა, გრაფიკული იტერაციების პროცედურების ჩატარება.

მათემატიკური პროგრამების ენები, როგორცაა MAPLE და MATHEMATICA შესაძლო სასარგებლო იყოს არაწრფივი სისტემების შესასწავლად. მაგალითად, იხ.

R. H. Enns and G. C. McGuire, *Nonlinear Physics with Maple for Scientists and Engineers* (Birkhauser, Boston, 1997) and *Nonlinear Physics with Maple for Scientists and Engineers: A Laboratory Manual* (Birkhauser, Boston, 1997).

სხვადასხვა კომპიუტერულ კომერციულ პაკეტებთან დაკავშირებით ვვარაუდობთ, რომ მკითხველი იყენებს ყოველი პაკეტის შესავალ მასალას და ეცნობა პაკეტის მოხმარებას. მხედველობაში გვაქვს კონკრეტულად *Chaos Demonstrations*-ი და *Chaotic Dynamics*

Workbench–ი, რადგან მათი გამოყენება სხვა პროგრამულ ნაკრებებზე სასარგებლოდ და შედარებით მარტივად მივიჩნით.

ამოცანები

CE2-1. გრაფიკული იტერაციის მეთოდი. ისარგებლეთ სექციით *Chaos demonstrtions' Logistic Map* $x(n+1)$ vs $x(n)$ [V (view) ღილაკი] ან E დანართში მოყვანილი Graphit პროგრამით და გრაფიკულად განახორციელეთ იტერაციის მეთოდი ლოჯისტიკური ასახვისთვის. პროგრამათა პაკეტი *Chaos for Java* ასევე მეტად სასარგებლოა. (a) დაიწყეთ პარამეტრის $A=2.9$ მნიშვნელობით. (A იგივეა, რაც L *Chaos demonstrtions*-ში.) ყურადღება მიაქციეთ, რომ x -ის ყოველი საწყისი მნიშვნელობა 0-სა და 1-ს შორის გვადლევს მიმდევრობებს რომლებიც იკრიბებიან $x=1-1/A$ ფიქსირებულ წერტილში (b). ყურადღება მიაქციეთ, რომ $A=3.0$ შემთხვევაში ფიქსირებულ წერტილებსაკენ კრებადობა ძალიან ნელა მიმდინარეობს. (c) ყურადღება მიაქციეთ, რომ $A=3.2$ -ის შემთხვევაში თავს იჩენს პერიოდი-2-ის ტიპის ქმედება. (d) გაარკვიეთ პერიოდი-4-სა და პერიოდი-8-ის ბიფურკაციის მნიშვნელობები. (e) შეარჩიეთ პარამეტრის სხვა მნიშვნელობები ქაოსურ ტრაექტორიებზე დაკვირვებისათვის.

CE2-2. ბიფურკაციული დიაგრამები. ისარგებლეთ E დანართში მოყვანილი Bifur პროგრამის *Chaos demonstrtions' Logistic Map* სექციით, ან *Chaos for Java*-თი და ააგეთ ბიფურკაციული დიაგრამები ლოჯისტიკური ასახვისათვის, როდესაც A პარამეტრი იცვლება 2.9-დან 4.0-მდე. (a) მოახდინეთ ორმაგი პერიოდების ბიფურკაციების, ქაოსური არეებისა და პერიოდული დიაპაზონების იდენტიფიკაცია. შეამცირეთ A პარამეტრის ცვალებადობის დიაპაზონი, რათა გაზრდილი ხედი იხილოთ ბუფურკაციული დიაგრამის სხვადასხვა ნაწილები. (Bifur – ში შეგიძლიათ x მნიშვნელობების ზღვრების შემცირება ვერტიკალური მიმართულებით გადიდებისათვის).

CE2-3. ახლომდებარე ტრაექტორიების დივერგენცია. *Chaos demonstrtions' Views (V)* პროგრამებიდან ერთერთი აგებს ლოჯისტიკური ასახვისთვის გამოთვლის ორი მცირედ განსხვავებული საწყისი პირობის მქონე ტრაექტორიის მნიშვნელობებს შორის სხვაობას. ისარგებლეთ ამ პროგრამით, რათა დარწმუნდეთ, რომ სხვაობები 0-კენ მიისწრაფვის, როდესაც ტრაექტორიები პერიოდულია, მაგრამ იზრდება, როდესაც ტრაექტორიები ქაოსურია (პარამეტრი $A > 3.5699\dots$).

CE2-4. ლორენცის მოდელი. ლორენცის მოდელის გამოსაკვლევად ისარგებლეთ *Chaos demonstrations' Lorentz Attractor* სექციით. პროგრამა ააგებს X-Y მდგომარეობათა სივრცის გეგმილს განტ. (1.5-1)-ში მოყვანილი p , r და b პარამეტრების გარკვეული მნიშვნელობების შესაბამისი ტრაექტორიებისათვის. (*Chaos demonstrations'* ისინი აღნიშნულია a , d და b სიმბოლოებით). (a) დააკვირდით, რომ $a = 10$, $b = 8/3$ და $d = 20$ მნიშვნელობებზე ტრაექტორიები იკრიბებიან რომელიმე არაღერძულ ფიქსირებულ წერტილში. (b) შეამოწმეთ, რომ არაღერძული ფიქსირებული წერტილები თანხმობაშია 1.5-2 ამოცანაში მოყვანილ კოორდინატთა მნიშვნელობებთან. (c) გამოიკვლიეთ ტრაექტორიები, როგორც d პარამეტრის ფუნქცია. (d) დააკვირდით ტრაექტორიების ქცევას X-Y სიბრტყის სათავის მახლობლად. ახსენით მათი ქმედება $X=Y=Z=0$ ფიქსირებულ (არასტაბილურ) წერტილის მიმართ. (e) გამოიკვლიეთ პარამეტრების მნიშვნელობათა სხვა კომბინაციები. შეეცადეთ პერიოდული ორბიტების აღმოჩენას.

CE2-5. ლორენცის მოდელი და პერიოდის გაორმაგება. (a) გამოიყენეთ *Chaotic Dynamics Werkbench*, რათა გამოიკვლიოთ ლორენცის მოდელის შესაბამისი ტრაექტორიები, როგორც დროისა და მდგომარეობათა სივრცის ფუნქციები. X-Z პროექციას, როცა $r > 24$, ცნობილ „პუპლის მიზიდულობის წერტილთან“ მიყვავართ. (b) როდესაც $r < 24$, დააკვირდით ქაოსში გარდამავალ ქმედებებს, რომლებიც თავს იჩენენ ტრაექტორიების მიერ კოორდინატთა სიბრტყის მიღმა რომელიმე წერტილში თავმოყრამდე. (c) იპოვეთ ორმაგი პერიოდის მქონე მიმდევრობა, რომელიც თავს იჩენს $r = 160$ მნიშვნელობის სიახლოვეს (იხ. პირველი თავი).

CE2-6. შენიშვნა: გამოიყენეთ *Chaotic Dynamics Werkbench*, რათა ცვალოთ ინტეგრაციის ბიჯის სიდიდე ლორენცის მოდელის შესაბამისი განტოლებების ინტეგრირებისას. უჩვენეთ, რომ თუ ბიჯის ზომა ძალიან იზრდება, მაშინ პარამეტრთა გარკვეული მნიშვნელობებისათვის ტრაექტორიების პერიოდული ან ქაოსური ხასიათი აუცილებლად შეიცვლება. აქ აზრი იმაში მდგომარეობს, რომ რიცხვითი ინტეგრაციისას სასურველია ბიჯის მცირე ვარიაცია, რათა მიღებული შედეგები ინტეგრაციის ბიჯის არტეფაქტი არ გახდეს.

CE2-7. ფეიგენბაუმის რიცხვები. შეადგინეთ კომპიუტერული პროგრამა, რომელიც პარამეტრის სუპერციკლური მნიშვნელობების პოვნის საშუალებას მოგცემთ. (ანუ ისეთი მნიშვნელობებისა, რომელთათვისაც ასახვის ფუნქციის იტერაციის ასიმპტოტური ტრაექტორია შეიცავს $x = 0.5$ მნიშვნელობას). იპოვეთ ეს სიდიდეები პერიოდი-2, პერიოდი-4,

პერიოდი-8 და პერიოდი-16-თვის. გამოიყენეთ თქვენი პროგრამა ფეიგენბაუმის δ და α სიდიდეების გამოთვლისათვის. (მინიშნებები: შექმენით პროგრამა, რომელიც იპოვოს A-ს ისეთ მნიშვნელობებს, რომელთათვისაც $f^{(n)}(0.5)=0.5$. გამოიყენეთ δ -ს ცნობილი მნიშვნელობა იმის დასადგენად, თუ როგორია ეს მნიშვნელობები დიდი n-ებისათვის. კითხვა: თქვენს მიერ გამოყენებული პროგრამული სიზუსტის პირობებში – n-ის რა მნიშვნელობით შემოიფარგლება თქვენი პროგრამირების უნარი?

II

არაწრფივი დინამიკისა და ქაოსის თეორიის საწყისები

3

დინამიკა მდგომარეობათა სივრცეში: ერთი და ორი განზომილებების შემთხვევები

დიდ გაბრწყინებას წინ უძღვის ქაოსი. *აი ჩინგი*, მოქმედება მე-3

3.1 შესავალი

ამ თავში კომპლექსური ქმედების უფრო დეტალური აღწერისათვის საჭირო თეორიული საფუძვლების შექმნას შევუდგებით, რომელთა შესახებ პირველ ორ თავში ვისაუბრეთ. ფორმალისმს ჩვენ მარტივად და მშვიდად, განსაკუთრებული თვისებების გამორჩევის ფონზე განვავითარებთ და მაქსიმალურად ვეცდებით, რომ თავი არ შეგაწყინოთ ზედმეტი მათემატიკური ტერმინებით, ვიდრე საფუძვლების გააზრების მყარ, კონცეპტუალურ ნიადაგს არ შევქმნით.

რეალური სურათის შექმნის მთავარი თეორიული იარაღი სისტემის ქმედების **მდგომარეობათა სივრცის** ანუ **ფაზური სივრცის** დახასიათებაა. დახასიათების ამგვარი ტიპი ჯერ კიდევ მე-19 საუკუნეში ფრანგმა მათემატიკოსმა ჰენრი პუანკარემ გამოიყენა, ხოლო ამერიკელი ფიზიკოსის ჯ. უილარდ გიბსის მოღვაწეობის პერიოდიდან ფართოდ დაინერგა სტატისტიკურ მექანიკაში წრფივ და არაქაოსურ სისტემებთან დაკავშირებით [Gibbs, 1902]. რა თქმა უნდა, განსაკუთრებულ ინტერესს არაწრფივი სისტემების მიმართ მდგომარეობათა სივრცის გამოყენება იწვევს; წრფივი სისტემების ქმედება შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც კერძო შემთხვევა.

მდგომარეობების სივრცეში ფიქსირებული წერტილების საკითხი (რომელთაც ასევე **წონასწორობის**, **სტაციონარული**, **კრიტიკული** ან **სინგულარული წერტილები**) არაწრფივი სისტემების დინამიკის შესწავლისთვის არსებით როლს ასრულებს. ამ თავის დიდი ნაწილი ფიქსირებული წერტილების კატალოგიზაციას დაეთმობა. ამასთან ერთად ჩვენ **ზღვრულ ციკლსაც** გავეცნობით. იგი აღწერს პერიოდულ ქმედებას, რომელიც ორი ან მეტი განზომილების მქონე მდგომარეობათა სივრცეებში შეიძლება მოხდეს. ფიქსირებული წერტილებისა და ზღვრული ციკლების შემთხვევაში არსებით როლს ასრულებენ

სტაბილურობისა და არასტაბილურობის ცნებები, რომელთა მეშვეობით გვექმნება წარმოდგენა, თუ როგორ იქცევიან ტრაექტორიები ფიქსირებული წერტილების მიდამოებში ან ზღვრული ციკლის შემთხვევაში. ჩვენ ვნახავთ, თუ როგორ ხდება სტაბილურობისა და არასტაბილურობის განსაზღვრა მათემატიკური თვალსაზრისით; ასევე გავეცნობით ბიფურკაციათა თორიის საწყისებს იმის აღსაწერად, თუ როგორ იცვლება ფიქსირებული წერტილების და ზღვრული ციკლების სტაბილურობა და როგორ წარმოიშობიან ან ქრებიან ისინი სისტემის მაკონტროლებელი პარამეტრების ცვლილებასთან ერთად.

ეს თავი დიდ დროს წაგვართმევს, მაგრამ ჩვენი კურსის დარჩენილი ნაწილის ფუნდამენტი სწორედ აქ ყალიბდება. განსაკუთრებულ ყურადღებას გავამახვილებთ იმაზე, თუ როგორ ზღუდავს მდგომარეობების სივრცის განზომილება დეტერმინისტული სისტემებისთვის დამახასიათებელ ქმედებას. თეორიული თვალსაზრისით გაძლიერებულნი, ქაოტური ქმედების შესწავლისთვის მზად უკვე მე-4 თავში ვიქნებით.

G, I და J დანატებებში სამ მნიშვნელოვან საკითხს განვიხილავთ: მილევადი ოსცილატორი, ვან დერ პოლის ოსცილატორი და ლაზერული რელაქსაციის რხევების მოდელი. ეს მაგალითები ამ თავის ძირითად იდეებს შესანიშნავად გამოხატავენ, მაგრამ პირველი წაკითხვისას ისინი შეგვიძლია გამოვტოვოთ.

3.2 მდგომარეობათა სივრცე

პირველ თავში გაკვრით შევეხეთ დინამიკური სისტემის ქმედების მდგომარეობათა სივრცის ცნებას. ახლა კი გვსურს ამ საკითხის განხილვა უფრო დეტალურად. დავიწყოთ უმარტივესი მაგალითით: განვიხილოთ იდეალურ ზამბარაში x ღერძის გასწვრივ წერტილოვანი მასის რხევითი გადაადგილება (ჰუკის კანონი). სისტემისთვის ნიუტონის მეორე კანონის ძალით ($\vec{F} = m \vec{a}$):

$$F_x = m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (3.2-1)$$

სადაც k სიხისტის მუდმივაა, m კი მატერიალური წერტილის მასა. ამ სისტემის გადაადგილება განისაზღვრება დროის ნებისმიერ მომენტში x ღერძზე მისი მდებარეობის დაფიქსირებითა და სიჩქარის მეშვეობით.

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad (3.2-2)$$

როგორც წესი, მოცემული მომენტისათვის ავიღებთ, რომ $t=0$, ხოლო $x(t=0)$ და $dx/dt(t=0) \equiv \dot{x}_0$ ამ სისტემის „საწყისი პირობებია“. ამრიგად, სისტემის მოძრაობა მოიცემა შემდეგი სახით

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t \quad (3.2-3)$$

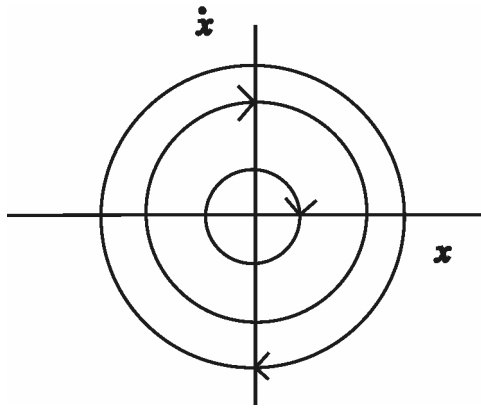
სადაც $\omega = \sqrt{klm}$ არის რხევის (კუთხური) სიხშირე. განტ. (3.2-3)-ის დროით გაწარმოების შედეგად ვლელობთ განტოლებას სიჩქარისთვის

$$\dot{x}(t) = -\omega x_0 \sin \omega t + \dot{x}_0 \cos \omega t \quad (\text{განტ. } 3.2-4)$$

ამოცანა 3.2-1. გააწარმოეთ განტ. (3.2-4) დროის მიმართ, რათა იპოვოთ აჩქარება და აჩვენეთ, რომ იგი თანხმობაშია განტ. (3.2-1)-თან.

როცა $x(t)$ -სა და $\dot{x}(t)$ -ს ცოდნა ამ სისტემის ქმედებას სრულად ახასიათებს, ვამბობთ, რომ სისტემას „თავისუფლების ორი ხარისხი“ გააჩნია. დროის ნებისმიერ მომენტში სისტემის მდგომარეობის განსაზღვრა, თუკი სიჩქარეს დავიტანთ ორდინატთა ღერძზე, მდებარეობას კი – აბცისთა ღერძზე. შედეგად მიღებული მრუდი იქნება მოცემული სისტემის შესაბამისი *მდგომარეობათა სივრცე*. ამ შემთხვევაში, როგორც 3.1 ნახაზიდან ვხედავთ, მდგომარეობათა სივრცე ორგანზომილებიანია.

გვახსოვდეს, რომ მდგომარეობების სივრცის განზომილება და სისტემის სივრცული განზომილება სხვადასხვა ცნებებია. მდგომარეობათა სივრცის განზომილება განისაზღვრება იმ ცვლადი სიდიდეების რაოდენობით, რომლებიც ამ სისტემის დინამიკურ მდგომარეობას აღწერენ. ჩვენი ოსცილატორი მოძრაობს ერთ განზომილებაში, მაგრამ მდგომარეობების სივრცე ორგანზომილებიანია.



ნახ. 3.1 ზამბარაზე მოდებული მასის ფაზური სქემა. ელიფსები სისტემის მდგომარეობათა სივრცის ტრაექტორიებია. ელიფსი და სრული მექანიკური ენერგია ტრაექტორიასთანაა კავშირში.

მომავალში ჩვენ სამი სივრცული განზომილების მქონე სისტემებს განვიხილავთ, მაგრამ მათ შესაბამის მდგომარეობათა სივრცეებს განზომილებათა უსასრულო რაოდენობა გააჩნია.

ორი შენიშვნა ტერმინოლოგიის თაობაზე:

1. დინამიკური სისტემებისა და ქაოსის ლიტერატურაში ტერმინები *ფაზური სივრცე* და *მდგომარეობების სივრცე* ხშირად ერთიმეორის შემცვლელად გვევლინება. ტერმინი *ფაზური სივრცე* აღებულია ჟოზე უილარდ გიბსის სტატისტიკური მექანიკიდან. ეს ცნება დინამიკურ სისტემებსა და ქაოსში უფრო ფართოდ გამოიყენება, ვიდრე ამას პუანკარე და გიბსი აკეთებდნენ. ასე რომ, უმჯობესია (და ასეც ვიქცევით) ტერმინი *მდგომარეობების სივრცე* გამოვიყენოთ.
2. აგრეთვე გაურკვევლობაა შექმნილი ტერმინ *თავისუფლების ხარისხის* გარშემო. კლასიკურ მექანიკაში წერტილოვანი მასის თავისუფლების ხარისხი ემყარება ცვლადთა ისეთ წყვილს, როგორცაა x კოორდინატი და იმპულსის შესაბამისი p_x კომპონენტი. ამ შემთხვევაში ზამბარაზე მოდებულ ელემენტარულ მასას თავისუფლების მხოლოდ ერთი ხარისხი გააჩნია. დინამიკური სისტემების თეორიაში თავისუფლების ხარისხების რაოდენობა სისტემის დინამიკური მდგომარეობის აღწერისათვის საჭირო დამოუკიდებელი ცვლადი სიდიდეების (ან დამოუკიდებელი საწყისი პირობების) რაოდენობით განისაზღვრება. ჩვენ გამოვიყენებთ თავისუფლების ხარისხის ბოლოდროინდელ განსაზღვრებას (გამონაკლისია მხოლოდ მე-8 თავი). „თავისუფლების ხარისხის“ თავდაპირველი არსის მიხედვით, ფაზურ სივრცეს ყოველთვის უნდა გააჩნდეს განზომილებების ლუწი (2, 4, 6,...) რაოდენობა, მაგრამ დინამიკური სისტემებისა და ქაოსის თეორიაში სასურველია კენტგანზომილებიანი მდგომარეობების სივრცეების გამოყენება. პირველ თავში მოყვანილი ლორენცის მოდელი ამის თვალსაჩინო მაგალითია.

დროთა განმავლობაში მდგომარეობათა სივრცის საწყისი წერტილი მიჰყვება ტრაექტორიას, რომელიც ზამბარაზე მოდებული მასის შემთხვევაში ელიფსს წარმოადგენს. (ელიფსი შეიძლება წრეწირად გარდაიქმნას მდგომარეობათა სივრცის ორდინატაზე x_0/l_0 სიდიდის დატანით, მაგრამ ეს უბრალოდ გეომეტრიული გამარტივებაა.) ვინაიდან მოძრაობა პერიოდულია, ამიტომ ტრაექტორია ჩაკეტილია. ამგვარ პერიოდულ ტრაექტორიას **ციკლი** ეწოდება. განსხვავებული საწყისი წერტილი (რომელიც ამ ელიფსზე არ მდებარეობს) იქნება სხვა ტრაექტორიის ნაწილი. სხვადასხვა წერტილებში სათავეების მქონე ამგვარი ტრაექტორიების ერთობლიობა სისტემის შესაბამის **ფაზურ გამოსახულებას** ქმნის. 3.1 ნახაზზე ნაჩვენებია ზამბარაზე მოდებული მასისაგან შემდგარი სისტემის ფაზური გამოსახულება.

სავარჯიშო 3.2-2. გამოსახეთ მდგომარეობათა სივრცის ტრაექტორიები (3.2-3) და (3.2-4) განტოლებების გამოყენებით. დააკვირდით, რომ $x = 0$, როდესაც x აღწევს რაიმე ექსტრემალურ მნიშვნელობას. ტრაექტორიებზე ისრებით მიანიშნეთ, თუ მდგომარეობათა რომელ სივრცეში კვეთს წერტილი ელიფსს. აჩვენეთ, რომ მოცემული ტრაექტორიისთვის თითოეული ელიფსი მექანიკური ენერჯის (კინეტიკური+პოტენციური) $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ მეშვეობით შეიძლება გამოისახოს.

მდგომარეობათა სივრცე და კანონები, რომლებიც განსაზღვრავენ სხვადასხვა სათავეების მქონე ტრაექტორიების სახეს, წარმოადგენენ **დინამიკური სისტემის საფუძვლებს**. ამგვარი სისტემების აღმწერ მათემატიკურ თეორიას **დინამიკურ სისტემათა თეორია** ეწოდება. ამ თეორიას ხანგრძლივი ისტორია აქვს. ის არაა დამოკიდებული ქაოსის შედარებით თანამედროვე თეორიაზე, ხოლო განსაკუთრებული წვლილი მის განვითარებაში რუს მათემატიკოსებს მიუძღვით (მაგალითად იხ. [Arnold, 1983]). დინამიკური სისტემების შემსწავლელი მათემატიკოსების მიერ ჩატარებული უაღრესად საფუძვლიან და ყოვლისმომცველ შრომებზე დაყრდნობით, ქაოსის მკვლევარმა მეცნიერებმა და მათემატიკოსებმა უკანასკნელ წლებში შედარებით სწრაფ პროგრესს მიაღწიეს.

3.3 პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებებით აღწერილი სისტემები

უპირველეს ყოვლისა ჩვენი თეორიული კვლევა სისტემების სპეციალური (მაგრამ საკმაოდ ფართო) კლასით შემოიფარგლება, რომლებისთვისაც მდგომარეობათა სივრცის აღმწერი ცვლადების დროზე დამოკიდებულება შესაძლებელია გამოისახოს პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებების სისტემის მეშვეობით. კერძოდ, განვიხილოთ თავისუფლების სამი ხარისხის მქონე სისტემა. სისტემის მდგომარეობის აღწერისთვის გვესაჭიროება სამი სივრცითი ცვლადი, მაგალითად, u , v და w . სისტემის დინამიკა სამი პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებების სისტემის სახით შეიძლება გამოვსახოთ ანუ განტოლებები შეიცავენ u , v და w ცვლადების მხოლოდ პირველი რიგის წარმოებულებს დროის მიმართ.

$$\begin{aligned}\dot{u} &= f(u, v, w) \\ \dot{v} &= g(u, v, w) \\ \dot{w} &= h(u, v, w)\end{aligned}\tag{3.3-1}$$

f , g და h ფუნქციები დამოკიდებულია u , v და w ცვლადებზე (მაგრამ არა მათ დროის მიმართ წარმოებულებზე) და ასევე ერთ ან მეტ მაკონტროლებელ პარამეტრზე, რომლებიც ცხადი სახით არ არიან მოცემული. ზოგადად u , v და w გვხვდებიან სამივე f , g და h ფუნქციის შემთხვევაში და ჩვენ ვაცხადებთ, რომ „დაწვევილებულ დიფერენციალურ განტოლებათა“ სისტემასთან გვაქვს საქმე. დრო f , g და h ფუნქციებში არ ჩანს. ასეთ შემთხვევაში სისტემას *ავტონომიური* ეწოდება. პირველ თავში მოყვანილი ლორენცის მოდელის განტოლებები სწორედ ასეთია.

სისტემის დროში ქმდება მდგომარეობების სამგანზომილებიან uvw სივრცეში $u(t)$, $v(t)$ და $w(t)$ კოორდინატების მქონე წერტილის მოძრაობის მიხედვით შეიძლება გამოისახოს.

უნდა აღინიშნოს, რომ ზამბარაზე მოქმედი მასის ზემოთგანხილული მოდელი არ იყო ამგვარი მაგალითი. (3.2-1) განტოლებაში ფიგურირებს მეორე რიგის წარმოებული დროის მიმართ და არა პირველი რიგისა. თუმცა, შესაძლებელია (3.2-1) განტოლების სტანდარტულ სახემდე მიყვანა ახალი x ცვლადის შემდეგნაირი შემოტანის გზით:

$$\dot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}\tag{3.3-2}$$

(3.3-2) და (3.2-1) განტოლებების გამოყენებით შევძლებთ ზამბარისაგან შემდგარი სისტემისთვის დინამიკური განტოლებების მიღებას შემდეგნაირად:

$$\dot{v} = \frac{k}{m} x \quad (3.3-3)$$

$$\dot{x} = v \quad (3.3-4)$$

ამოცანა 3.3-1. (3.3-2) განტოლების ანალოგიურად, შემოიყვანეთ ახალი ცვლადები და შემდეგი დიფერენციალური განტოლებები (3.3-1) სისტემის მეშვეობით მოცემულ სტანდარტულ ფორმამდე მიიყვანეთ:

$$(a) \frac{d^2x}{dt^2} = -kx + \gamma \dot{x}$$

$$(b) \frac{d^3x}{dt^3} = bx^2$$

$$(c) \frac{d^2x}{dt^2} = kx + b \sin \omega t$$

მინიშნება (c) – განტოლებისათვის: იხილეთ მომდევნო პარაგრაფი.

ჩვენ შეგვიძლია საგრძნობლად გავაფართოვოთ იმ სისტემათა კლასი, რომლისთვისაც (3.3-1) განტოლებები შემდეგი გზით გამოიყენება. დაუშვათ, რომ დაყვანის ჩვეულებრივი პროცედურის შემდეგ (3.3-1) განტოლების მარჯვენა ნაწილში ფუნქციები დროით ცვლადს კვლავ შეიცავს. (ამ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ სისტემა *არაავტონომიურია*). ასეთ შემთხვევას უმეტესწილად მაშინ აქვს ადგილი, როდესაც სისტემა დროზე დამოკიდებული გარეშე „ძალის“ ზემოქმედებას განიცდის. თავისუფლების ორი ხარისხის მქონე სისტემისათვის სტანდარტული განტოლებები შემდეგი სახისაა

$$\dot{u} = f(u, v, t) \quad (3.3-5)$$

$$\dot{v} = g(u, v, t) \quad (3.3-6)$$

ჩვენ შეგვიძლია ეს განტოლებები გარდავქმნათ განტოლებათა ავტონომიურ სისტემად ახალი w ცვლადის შემოყვანით, რომლის წარმოებული მოიცემა შემდეგი სახით

$$\dot{w} \equiv \frac{dw}{dt} = 1 \quad (3.3-7)$$

მაშინ დინამიკური განტოლებები სისტემისთვის მიიღებენ შემდეგ სახეს

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(u, v, w) \\ \dot{v} &= g(u, v, w) \\ \dot{w} &= 1 \end{aligned} \quad (3.3-8)$$

ჩვენ მდგომარეობების სივრცის განზომილებების რაოდენობა 1-ით გავზარდეთ, რათა დრო მდგომარეობათა სივრცის აღმწერ ერთ-ერთი ცვლადად გვექცია. ამ მეთოდის უპირატესობა იმაში მდგომარეობს, რომ ის არაავტონომიური სისტემების (რომლებიც დროზე დამოკიდებულებას ავლენენ) ავტონომიური სისტემების მსგავსი ხერხებით კვლევის საშუალებას გვაძლევს. მდგომარეობების სივრცის კვლევა თუნდაც ერთით მეტი განზომილების შემთხვევაში საკმაოდ რთულია.

რატომ ვიყენებთ ამგვარ სტანდარტულ ფორმას (პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებებს) დინამიკური განტოლებების მიმართ? მთავარი მიზეზი ის არის, რომ ამგვარი ფორმა სისტემის ფიქსირებული წერტილების ადვილად გაგების საშუალებას გვაძლევს, ხოლო (როგორც უკვე აღვნიშნეთ) ფიქსირებული წერტილები სისტემათა დინამიკაში გადამწყვეტ როლს ასრულებენ. გავიხსენოთ, რომ *ფიქსირებული წერტილები* მდგომარეობათა სივრცის ის წერტილებია, რომელთათვისაც მდგომარეობის აღმწერი ყოველი ცვლადის დროის მიმართ წარმოებული 0-ის ტოლია. ამგვარად, განტოლებათა სტანდარტული ფორმის მეშვეობით ფიქსირებული წერტილების განსაზღვრა მოითხოვს, რომ:

$$\begin{aligned} f(u, v, w) &= 0 \\ g(u, v, w) &= 0 \\ h(u, v, w) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{განტ. 3.3-9})$$

ამგვარად, ჩვენ ვპოულობთ ფიქსირებულ წერტილებს სამი წყვილი ალგებრული განტოლების ამოხსნის გზით.

კითხვა: რა ხდება არაავტონომიური სისტემის შემთხვევაში? თუ დინამიკური განტოლებების შედგენის ზემოთ მოყვანილ მეთოდს მივმართავთ, ცხადია, ვერასოდეს მივაკვლევთ ფიქსირებულ წერტილებს, რადგან დროითი ცვლადის წარმოებული არასოდეს არ არის 0-ის ტოლი (დროის ცვლადი მუდმივად ცვალებადია!). აქედან გამომდინარე, ასეთი სისტემებისთვის განსაკუთრებულ ხერხებს უნდა მივმართოთ (იხილეთ პარაგრაფი 3.16).

მნიშვნელოვანი კითხვა: შესაძლებელია თუ არა, რომ ნებისმიერი სისტემისთვის დინამიკური განტოლებები (3.3-1) ფორმაზე დავიყვანოთ? ამ შეკითხვის პასუხია დიახ, თუ საქმე გვექნება თავისუფლების უსასრულო რაოდენობის ხარისხთან. მაგალითად სისტემები, რომლებიც კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებებით, ინტეგრალურ-დიფერენციალური ან დროში წანაცვლებული განტოლებებით (სადაც სისტემის მდგომარეობა მოცემულ t დროში დამოკიდებულია არამართო იმაზე, თუ რა ხდება ამ მომენტში, არამედ იმაზეც, თუ რა ხდებოდა წარსულში) აღიწერება, შეგვიძლია დავიყვანოთ პირველი რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემად, სადაც გვექნება დაწყვილებულ განტოლებათა უსასრულო რაოდენობა. ამ შემთხვევაში მდგომარეობათა სივრცის განზომილებების უსასრულო რაოდენობა გააჩნია, რაც რთული წარმოსადგენია და მეტიც, დაუჯერებელია. მომდევნო თავებში ჩვენ ამ ტიპის სისტემებს დაწვრილებით განვიხილავთ. საბედნიეროდ, ექსპერიმენტი გვიჩვენებს, რომ თავისუფლების უსასრულო რაოდენობის ხარისხებიდან მხოლოდ რამდენიმეა „აქტიური“ და სისტემის მოდელის შექმნა განტოლებების სასრული რაოდენობითაც შეიძლება. (ფაქტობრივად ასე შეიქმნა ლორენცის მოდელის განტოლებები.) ამჯერად დაწყვილებული განტოლებების განსაზღვრული რაოდენობით შემოვიფარგლებით.

3.4 არათანაკვეთადობის თეორემა

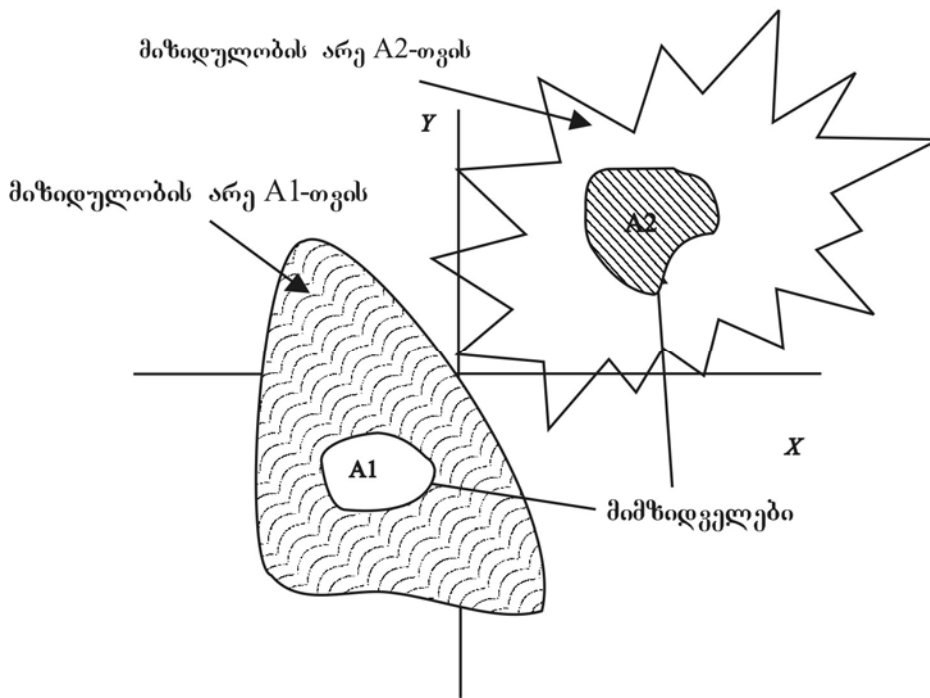
ტრაექტორიების ტიპებისა და ფიქსირებული წერტილების გამოკვლევამდე, რომლებიც მდგომარეობების სივრცეში შეიძლება მდებარეობდნენ, ვაყალიბებთ ფუნდამენტურ და მნიშვნელოვან თეორემას:

არათანაკვეთადობის თეორემა: მდგომარეობათა ორი განსხვავებული სივრცის შესაბამისი ტრაექტორიები ერთმანეთს არ კვეთენ (დროის სასრულ მონაკვეთში). ასევე შეუძლებელია, რომ ცალკეულმა ტრაექტორიამ საკუთარი თავი მომავალში გადაკვეთოს.

განსხვავებულ ტრაექტორიებში ვგულისხმობთ, რომ ნებისმიერი ტრაექტორია არ შეიძლება სათავეს იღებდეს სხვა ტრაექტორიის რომელიმე წერტილში. შესავალი შენიშვნა დროის განსაზღვრული პერიოდის შესახებ გამორიცხავს იმ შემთხვევებს, როდესაც განსხვავებული ტრაექტორიები უახლოვდება ერთსა და იმავე წერტილს, თუ $t \rightarrow \infty$ (გამონაკლის შემთხვევაში ვამბობთ, რომ წერტილს ტრაექტორიები ასიმპტოტურად უახლოვდება.)

ამ თეორემის მთავარი ფიზიკური არსი დეტერმინიზმის მტკიცებაში მდგომარეობს. აქამდე უკვე აღვნიშნეთ, რომ დინამიკური სისტემის მდგომარეობა განისაზღვრება მისი მდებარეობით მდგომარეობათა სივრცეში. ამასთან ერთად, თუ სისტემა 3.3-1 ტიპის განტოლებებითაა გამოსახული, მაშინ მდგომარეობის აღმწერი ცვლადების დროის მიმართ წარმოებულები აგრეთვე მდგომარეობათა სივრცეში მდებარეობით განისაზღვრება. აქედან გამომდინარე, სისტემის მომავალი მდგომარეობა დამოკიდებულია იმაზე, თუ სად მდებარეობს იგი ამჟამად მდგომარეობათა სივრცეში. ამგვარად, მდგომარეობათა სივრცეში ორი თანამკვეთი ტრაექტორია ვერ იარსებებს. ორ ტრაექტორიას რომ ერთმანეთი რაიმე წერტილში გადაეკვეთა, მაშინ მათ მდგომარეობის აღმწერი ცვლადებისა და დროის მიმართ წარმოებულების ერთი და იგივე მნიშვნელობები აღმოაჩნდებოდათ, მაგრამ ისინი სხვადასხვანაირად განვითარდებოდნენ. ეს კი შეუძლებელია, თუ მათი ქმედება დროის მიხედვით გამოისახება 3.3-1-ის ტიპის განტოლებებით. როგორც ვხედავთ, არათანაკვეთადობის თეორემა მდგომარეობების სივრცეში ტრაექტორიების ქმედებას ზღუდავს.

მათემატიკური თვალსაზრისით, არათანაკვეთადობის თეორემა დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნის თეორემების ცალსახობაზეა დამყარებული. მაგალითად, თუ (3.3-1) განტოლების მარჯვენა ნაწილში f , g და h ფუნქციები მათი არგუმენტების უწყვეტი ფუნქციებია, მაშინ მდგომარეობათა სივრცეში მოცემულ წერტილში გაივლის განტოლებათა მხოლოდ ერთადერთი ამონახსნი [უფრო სპეციფიკური მათემატიკური მოთხოვნაა, რომ ეს ფუნქციები იყოს უწყვეტი და ერთხელ მაინც დიფერენცირებადი. ეს არის ე.წ. ლიფშიცის პირობა (მაგალითად იხილეთ [Hassani, 1991], გვ. 570-571)].



ნახ. 3.2. A_1 და A_2 მიზიდულობის წერტილებისა და მიზიდვის არელების ესკიზი მდგომარეობათა სივრცეში. დაშტრიხული არეალის შიგნით დაწყებული ტრაექტორიები საბოლოოდ მთავრდება დაშტრიხული მიმზიდველის რეგიონში. სხვა არეში საწყისის მქონე ტრაექტორიები იკრიბებიან მიზიდულობის სხვა წერტილში. ამ ორი არეალის მიღმა მდებარე საწყისი წერტილებისთვის ტრაექტორიები შესაძლოა მიზიდულობის მესამე წერტილისაკენ (არ არის ნაჩვენები) მიემართებოდნენ. მიზიდვის საზღვარი ქმნის ე.წ. სეპარატრისას.

ჩვენ გავეცნობით ორ შემთხვევას, როდესაც ერთი შეხედვით თეორემა ირღვევა. პირველი თავს იჩენს ზემოთხსენებულ ასიმპტოტურ „გადაკვეთებთან“ დაკავშირებით. მეორე კი ტრაექტორიების ორგანზომილებიან სიბრტყეზე დაგეგმილებისას ვლინდება. მაგალითად 1.19 ნახაზზე ნაჩვენებია ლორენცის მოდელის შესაბამისი ტრაექტორიის გეგმილი YZ სიბრტყეზე. აქ ვხედავთ, რომ ტრაექტორია არაერთხელ კვეთს საკუთარ თავს. თუმცა, ამგვარი გადაკვეთა თავს იჩენს მხოლოდ ორგანზომილებიან სივრცეში პროექციისას. მდგომარეობათა სრულ, სამგანზომილებიან სივრცეში ტრაექტორიები არ იკვეთება.

3.5 დისიპაციური სისტემები და მიმზიდველები

მდგომარეობათა სივრცისა და მისი ტრაექტორიების განხილვისას, ამჯერად დისიპაციური სისტემების შესწავლით შემოვიფარგლებით. (სისტემებს, რომლებისთვის დისიპაცია არ არის მნიშვნელოვანი, მე-8 თავში განვიხილავთ.) როგორც პირველ თავში აღვნიშნეთ, დისიპაციური სისტემის დამახასიათებელი თვისება მდგომარეობს იმაში, რომ მისი

ქმედება ხანგრძლივი პერიოდის განმავლობაში არ არის დამოკიდებული ამ სისტემის „საწყის“ მდგომარეობაზე. ამ შენიშვნას დეტალურად 3.9 პარაგრაფში განვიხილავთ (მაგრამ გაიხსენეთ, რომ სისტემისათვის ერთზე მეტი „საბოლოო მდგომარეობა“ შეიძლება არსებობდეს). ამგვარად, ჩვენ საზოგადოდ უგულვებელყოფთ სხვადასხვა საწყისი პირობებით გამოწვეულ გარდამავალ მდგომარეობებს დისიპაციური სისტემებისთვის და მთელ ყურადღებას დავუთმობთ ასეთი სისტემის ქმედებას ხანგრძლივი პერიოდის განმავლობაში.

დისიპაციური სისტემის დროში ცვლილებასთან ერთად მდგომარეობათა სივრცის ტრაექტორია მიემართება გარკვეული საბოლოო წერტილისაკენ, მრუდისაკენ, არისაკენ და ა.შ. ამ საბოლოო წერტილს, მრუდს (ან სხვა გეომეტრიულ ფიგურას) სისტემის მიმზიდველს ვუწოდებთ. დისიპაციური სისტემებისთვის მიმზიდველის მახასიათებლები სისტემის დინამიკურ მახასიათებლებს განსაზღვრავს ხანგრძლივი პერიოდის განმავლობაში, მაგრამ ჩვენ ისიც გვანტერესებს, თუ როგორ უახლოვდებიან ტრაექტორიები მას.

განმსაზღვრელი საწყისი პირობების სიმრავლეს, რომელთა მიერ განსაზღვრული ტრაექტორიები მოცემულ მიმზიდველს უახლოვდება, *მიზიდულობის არე* ეწოდება. თუ პარამეტრის მნიშვნელობების მოცემული სიმრავლის მქონე სისტემისთვის არსებობს ერთზე მეტი მიმზიდველი, მაშინ იარსებებს რაიმე საწყისი პირობები, რომლებიც განლაგებულნი არიან მიზიდვის ორ (ან მეტ) არეალს შორის საზღვარზე (იხილეთ ნახ. 3.2). მიზიდულობის განსხვავებული არეების განცალკევების შემდეგ ასეთი საწყისი პირობები ე.წ. *სეპარატრისას* ქმნის.

მიზიდულობის არეების გეომეტრიული მახასიათებლები ხშირად საკმაოდ რთულია. ზოგიერთ შემთხვევაში საზღვრები ძალიან ირეგულარულია (ე.წ. *არის ფრაქტალური საზღვრები* (GMO83, MGO85)). სხვა შემთხვევებში მიზიდვის არეები საკმაოდ ჩახლართულია - ე.წ. *მიზიდულობის ვისოსისებური* არე (SOO93a): ერთი არის შესაბამისი წერტილი ახლოსაა მიზიდულობის სხვა არის რომელიმე წერტილთან. როგორც პირველ თავში აღვნიშნეთ, ასეთი რთული სტრუქტურების არსებობა ნიშნავს, რომ პროგნოზირების შესაძლებლობა საკმაოდ სარისკოა.

მომდევნო პარაგრაფებში აღვწერთ ტრაექტორიებისა და მიმზიდველების ისეთ ტიპებს, რომლებიც სხვადასხვა განზომილებების მქონე მდგომარეობათა სივრცეში აღიძვრიან. მდგომარეობათა სივრცის განზომილება მნიშვნელოვანია, რადგან განზომილება და არათანაკვეთადობის თეორემა ერთობლიობაში საგრძნობლად ზღუდავს წარმოქმნილ ტრაექტორიათა სახეობებს. ფაქტობრივად ვხედავთ, რომ ქაოსური ტრაექტორიის არსებობისთვის მდგომარეობების სივრცის სამი განზომილება მაინც გვესაჭიროება, თუმცა

სათანადო მათემატიკური და კონცეპტუალური საფუძვლების შექმნისათვის ჯერჯერობით მხოლოდ ერთი და ორი განზომილებებით დავიწყებთ.

3.6 მდგომარეობათა ერთგანზომილებიანი სივრცე

ერთგანზომილებიან სისტემას მხოლოდ ერთი სივრცითი ცვლადი გააჩნია, რომელსაც X -ით აღვნიშნავთ. დინამიკური თვალსაზრისით, ასეთი სისტემა საკმაოდ უინტერესოა; თუმცა, ტრაექტორიებისა და მდგომარეობათა სივრცის გაცნობის თვალსაზრისით იგი საკმაოდ სასარგებლოა. მდგომარეობათა ერთგანზომილებიანი სივრცისთვის დინამიკური განტოლება შემდეგი სახისაა

$$\dot{X} = f(x) \quad (3.6-1)$$

მდგომარეობების სივრცე აქ წრფეა, კერძოდ, კოორდინატთა X ღერძი.

თავდაპირველად განვიხილოთ ფიქსირებული წერტილები ანუ X სიდიდეები, რომლებისთვისაც $\dot{X} = 0$. რატომ არის ეს წერტილები მნიშვნელოვანი? თუ ტრაექტორია მიემართება ფიქსირებული წერტილისკენ, მაშინ ის იქვე სრულდება. ამგვარად, ფიქსირებული წერტილები აბსცისთა X ღერძს რამდენიმე „იზოლირებულ“ არედ ჰყოფენ - ორ ფიქსირებულ წერტილს შორის მდებარე ინტერვალში, გარკვეულ X საწყისი მნიშვნელობის მქონე ტრაექტორია ვერასოდეს გასცდება ამ ინტერვალს.

ამოცანა 3.6-1. გამოიყენეთ ბოლო განმარტების მტკიცებულების დეტალები წინა პარაგრაფისათვის.

გამოვიკვლიოთ თუ რა ემართებათ ტრაექტორიებს ფიქსირებული წერტილის სიახლოვეს. მდგომარეობათა ერთგანზომილებიანი სივრცისთვის არსებობს ფიქსირებული წერტილების სამი ტიპი.

1. **კვანძები (ღრმულები):** ფიქსირებული წერტილები, რომლებიც ახლომდებარე ტრაექტორიებს მიიზიდავენ.
2. **განშვიდეკლები (წყაროები):** ფიქსირებული წერტილები, რომლებიც ახლომდებარე ტრაექტორიებს განიზიდავენ.

3. „უნაგირის“ წერტილები: ფიქსირებული წერტილები, რომლებიც ახლომდებარე ტრაექტორიებს ერთ მხარეს მიიზიდავენ, მეორე მხარეს კი განიზიდავენ. (ტერმინ „უნაგირის“ წერტილის წარმოშობის მიზეზს მაშინ ვიგებთ, როდესაც ორგანზომილებიან შემთხვევას განვიხილავთ).

კვანძი *სტაბილური ფიქსირებული წერტილია*, რადგან მის სიახლოვეს საწყისის მქონე ტრაექტორიები მისკენვეა მიმართული და ეს შემთხვევა მიზიდულობის ძალის ზემოქმედების ქვეშ მყოფი მყარი წონასწორობის წერტილის მიმართულებით მგორავ ბურთს წააგავს. განმზიდველი *არასტაბილური ფიქსირებული წერტილის* მაგალითია. ანალოგიაა გორაკის წვერიდან დაგორებულ ბურთი. გორაკის წვერი წონასწორობის წერტილია, მაგრამ მდგომარეობა არასტაბილურია – ოდნავი ზემოქმედებაც კი ბურთს გორაკის წვერიდან აგორებს. „უნაგირის“ წერტილი კი ტრაექტორიებს ერთი მიმართულებით მიიზიდავს, მეორე მხარეს კი განიზიდავს.

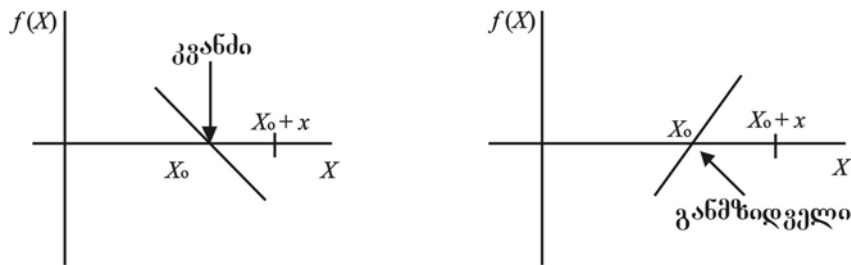
როგორ განვსაზღვროთ თუ რომელი ტიპის ფიქსირებულ წერტილთან გვაქვს საქმე? ამისთვის X_0 არის საკვლევი ფიქსირებული წერტილი. განმარტების თანახმად გვექნება

$$\dot{X}\Big|_{x=x_0} = f(X_0) = 0 \quad (3.6-2)$$

ახლა განვიხილოთ ტრაექტორია, რომელმაც X_0 -ის მარჯვნივ მყოფ $X = X_0 + x$ წერტილს მოაღწია (იხ. ნახ. 3.3) და დავუშვათ, რომ x მცირეა და დადებითი. თუ $f(X_0+x)$ დადებითია, მაშინ \dot{X} -იც დადებითი იქნება და ამგვარად ტრაექტორიის წერტილი X_0 -ს დაცილდება (დადებითი X მნიშვნელობების მიმართულებით). მეორეს მხრივ, თუ დადებითი x -სთვის $f(X_0+x)$ უარყოფითია, მაშინ \dot{X} უარყოფითია და ტრაექტორია მარცხნისკენ, X_0 ფიქსირებული წერტილის მიმართულებით გადაადგილდება. თუ ტრაექტორიას X ღერძის გასწვრივ, X_0 -იდან მარცხნივ დავიწყებთ, მაშინ საჭიროა რომ $f(X_0-x)$ სიდიდე X_0 -ის მიმართულებით გადაადგილების შემთხვევაში დადებითი, ხოლო მისგან დაცილებისათვის უარყოფითი იყოს. ორივე შემთხვევა 3.3 ნახაზზეა ნაჩვენები. როდესაც ტრაექტორიები X_0 -ის ორივე მხარეს X_0 -ს სცილდებიან, ფიქსირებული წერტილი განმზიდველია. როდესაც ტრაექტორიები X_0 -ის ორივე მხარეზე X_0 -ის მიმართულებით გადაადგილდება, ფიქსირებული წერტილი კვანძია.

ჩვენ შეგვიძლია ორივე შემთხვევა დავაჯამოთ და აღვნიშნოთ, რომ $f(X)$ -ის წარმოებული X -ით უარყოფითია X_0 -ში კვანძისათვის, ხოლო დადებითია განმზიდველი

ფიქსირებული წერტილისთვის. ფიქსირებულ წერტილში წარმოებულის მნიშვნელობას ამ წერტილის **მახასიათებელი მნიშვნელობა** ეწოდება, რომელსაც λ -თი აღვნიშნავთ.



ნახ. 3.3. მარცხნივ მოყვანილია $f(X)$ მრუდი X_0 კვანძის მიდამოში, მარჯვნივ კი X_0 განმზიდველის მიდამოში.

$$\lambda = \left. \frac{df(X)}{dX} \right|_{X=X_0} \quad (3.6-3)$$

საბოლოო შედეგები მოყვანილია 3.1. ცხრილში. აქ უმნიშვნელოვანესი საკითხია, რომ ჩვენ ფიქსირებული წერტილის ხასიათს და შესაბამისად მის მიდამოში მყოფ ტრაექტორიების ქმედებას ფიქსირებულ წერტილზე $f(X)$ ფუნქციის წარმოებულის გამოთვლის გზით ვსაზღვრავთ.

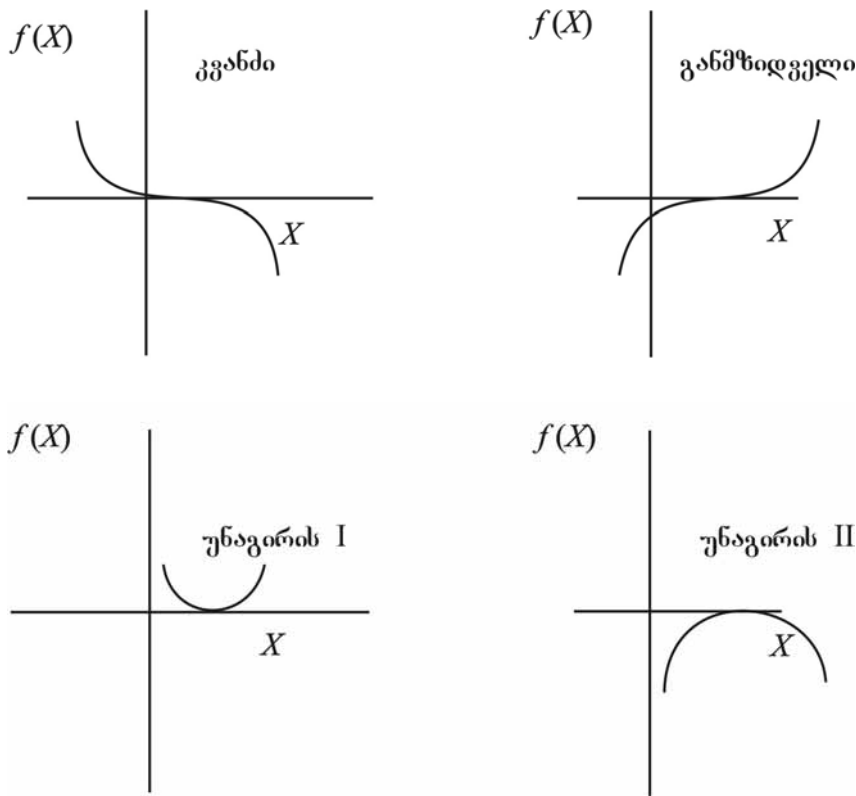
რა ხდება, როდესაც მახასიათებელი მნიშვნელობა 0-ის ტოლია? ფიქსირებული წერტილი შეიძლება იყოს როგორც კვანძი, ასევე განმზიდველი და „უნაგირის“ წერტილი. ჩვენ გვაინტერესებს f -ის როგორც მეორე რიგის, ასევე პირველი რიგის წარმოებული X -ის მიმართ. „უნაგირის“ წერტილის შემთხვევაში მეორე რიგის წარმოებულს X_0 -ის ორივე მხარეზე ერთი და იგივე ნიშანი აქვს (იხ. ნახ. 3.4). და ერთ მხარეს ტრაექტორია მიიზიდება ფიქსირებული წერტილის მიმართულებით, ხოლო მეორე მხარეს კი დასცილდება მას.

ნულის ტოლი მახასიათებელი მნიშვნელობის მქონე კვანძის და განმზიდველი ფიქსირებული წერტილებისთვის ცვლილებები მეორე რიგის წარმოებულში ვლინდება მაშინ, როდესაც X გადაკვეთს X_0 -ს. ამგვარი „ბრტყელი“ კვანძები და განმზიდველები ტრაექტორიებს მიიზიდავს და განიზიდავს უფრო ნელა, ვიდრე არანულოვანი მახასიათებელი მნიშვნელობების შემთხვევაში. პირველი ტიპის „უნაგირის“ წერტილისთვის ტრაექტორიები მიიზიდება მარცხენა მხრიდან, ხოლო განიზიდება მარჯვენა მხარეს. ხოლო მეორე ტიპის „უნაგირის“ წერტილებისთვის მიიზიდვა და განიზიდვა შებრუნებითაა.

მომავალში ჩვენ არ განვიხილავთ „ბრტყელი“ ფიქსირებული წერტილების ამ ტიპს, რადგან ისინი შედარებით იშვიათად გვხვდებიან. იშვიათობის მიზეზი ის არის, რომ მათი პირობა როგორც $f(X)$ ფუნქციის, ასევე პირველი რიგის წარმოებულის 0-ის ტოლობაა. თუ მხოლოდ ერთი მაკონტროლებელი პარამეტრის რეგულირება გვიწევს, მაშინ „ნაკლებად სავარაუდოა“, რომ პარამეტრის მნიშვნელობების გარკვეულ დიაპაზონში ერთდროულად ორივე პირობა დავაკმაყოფილოთ. უფრო მარტივად რომ ვთქვათ, ჩვენ საქმე გვაქვს ფიქსირებული წერტილის **სტრუქტურულ სტაბილურობასთან**.

ცხრილი 3.1
მანასიათებელი მნიშვნელობები

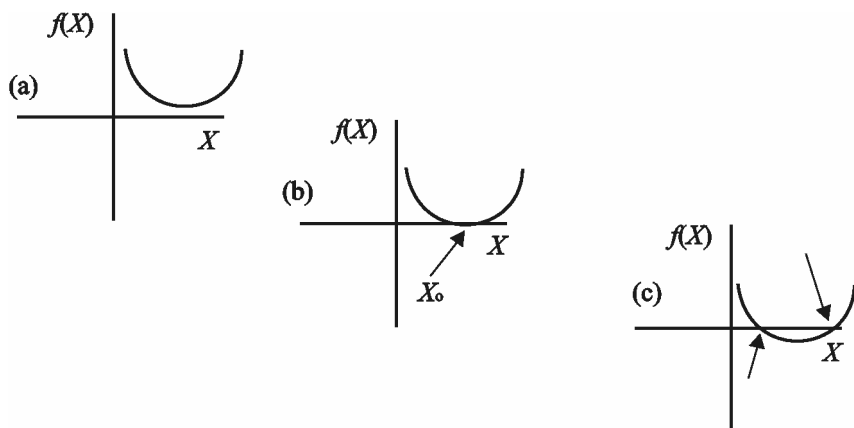
$\delta < 0$	ფიქსირებული წერტილი კვანძია
$\delta > 0$	ფიქსირებული წერტილი განმზიდველია



ნახ. 3.4. ფიქსირებული წერტილების ოთხი შესაძლო ტიპი ერთი განზომილების შემთხვევაში, როდესაც $\lambda=0$. ეს ფიქსირებული წერტილები სტრუქტურულად არასტაბილურია.

თუ ფიქსირებული წერტილი ფუნქციის სახის მცირედი ცვლილებისას ტიპს ინარჩუნებს, (მაგალითად, როდესაც მაკონტროლებელი პარამეტრის დაზუსტება ხდება) მაშინ ვამბობთ, რომ ფიქსირებული წერტილი სტრუქტურულად სტაბილურია. თუ ამგვარი ცვლილებების შედეგად ფიქსირებული წერტილის მახასიათებელი იცვლება ან საერთოდ ქრება, მაშინ ვამბობთ, რომ წერტილი სტრუქტურულად არასტაბილურია. მაგალითად, 3.3. ნახაზზე ნაჩვენებია კვანძები და განმზიდველი წერტილები სტრუქტურულად სტაბილურია, რადგან $f(X)$ მრუდის ზემოთ ან ქვემოთ მცირედი წანაცვლებით ფიქსირებული წერტილის ტიპი არ იცვლება. ხოლო 3.4 ნახაზზე ნაჩვენებია ფიქსირებული წერტილები სტრუქტურულად არასტაბილურია - ფუნქციის მცირე ცვლილება საყრდენი წერტილის სრულად გაქრობას ან კვანძი - განმზიდველი წყვილად გარდაქმნას იწვევს (იხ. ნახ. 3.5).

იმის დეტალურად გარკვევა, თუ რა იგულისხმება $f(X)$ ფუნქციის მცირე ცვლილებაში და რომელი სტრუქტურაა სტაბილური ან არასტაბილური, ძალიან შორს წაგვიყვანს (იხ. [Guckenheimer & Holmes, 1990]). არაწრფივ დინამიკაში ჩატარებული კვლევების უმრავლესობა მიმართულია სტრუქტურულად სტაბილური მდგომარეობების სივრცული ნიმუშებისკენ, რადგან ნებისმიერ ექსპერიმენტში მხოლოდ იმ მახასიათებლებზე დაკვირვება შეგვიძლია, რომლებიც პარამეტრის მნიშვნელობების რაღაც გარკვეულ დიაპაზონისათვის არსებობენ.



ნახ. 3.5. მდგომარეობათა ერთგანზომილებიან სივრცეში მდებარე “უნაგირის” წერტილი. (b) X_0 წერტილი სტრუქტურულად არასტაბილურია. $f(X)$ მრუდის მცირე ცვლილება, მაგალითად მისი აწევა ან დაწევა ვერტიკალური ღერძის გასწვრივ, წანაცვლებს როგორც (a) „უნაგირის“ წერტილს, ასევე გარდაქმნის მას (c) კვანძად და განმზიდველად.

ექსპერიმენტის დროს ჩვენ ვერასოდეს ვსაზღვრავთ მაკონტროლებელ პარამეტრებს აბსოლუტურად ზუსტად და „ხმაური“ ყოველთვის შედის მათ მნიშვნელობაში. მიუხედავად

ამისა, სტრუქტურულად არასტაბილური შემთხვევები მაინც მნიშვნელოვანია და ისინი ხშირად სისტემის ორ განსხვავებულ ტიპს შორის ზღვარს ავლენენ (როგორც ამას ქვემოთ ვნახავთ). ამ საკითხს კვლავ დავუბრუნდებით თავის ბოლოს ბიფურკაციების განხილვისას.

3.7 გაწრფილება ტეილორის მწკრივის სახით ფიქსირებული წერტილის მიდამოში

ფიქსირებული წერტილების ბუნება ძალზედ მოკლედ შეგვიძლია შევაჯამოთ, თუკი X_0 ფიქსირებული წერტილის მიდამოში $f(X)$ ფუნქციას წარმოვადგენთ *ტეილორის მწკრივის მეშვეობით*:

$$\begin{aligned}
 f(X) &= f(X_0) + (X - X_0) \frac{df}{dX} \\
 &+ \frac{1}{2} (X - X_0)^2 \frac{d^2 f}{dX^2} \\
 &+ \frac{1}{6} (X - X_0)^3 \frac{d^3 f}{dX^3} + \dots
 \end{aligned}
 \tag{3.7-1}$$

სადაც ყოველი წარმოებულის მნიშვნელობა მოცემულია $X=X_0$ წერტილისათვის. დინამიკური სისტემის შესაბამისი ფიქსირებული წერტილისათვის (3.7-1) განტოლების მარჯვენა ნაწილში მდებარე პირველი შესაკრები ნულის ტოლია. ტეილორის მწკრივი (3.6-1) განტოლებასთან ერთად ფიქსირებული წერტილის მიდამოში სისტემის ქმედების პროგნოზისთვის საკმარისია.

ფაქტობრივად ჩვენ შემოვიყვანეთ ახალი ცვლადი $x \equiv X - X_0$, რომელიც განსაზღვრავს ტრაექტორიის დაშორებას ფიქსირებული წერტილიდან. თუ უგულვებელყოფთ პირველზე მაღალი რიგის ყველა წარმოებულს, მაშინ x დააკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებას:

$$\dot{x} = \left. \frac{df}{dX} \right|_{x_0} x
 \tag{3.7-2}$$

რომლის ამონახსნიც იქნება

$$x(t) = x(0) e^{\lambda t}
 \tag{3.7-3}$$

სადაც

$$\lambda \equiv \frac{df(X)}{dX} \Big|_{x_0} \quad (3.7-4)$$

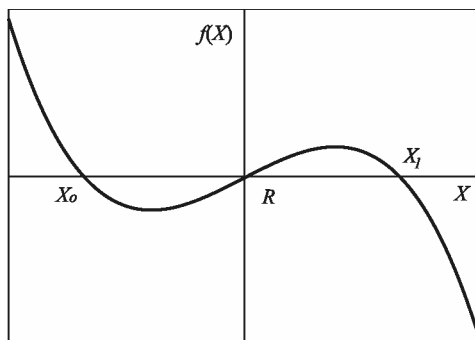
ანუ λ წარმოადგენს ფიქსირებული წერტილის შესაბამის მახასიათებელ მნიშვნელობას. ყურადღება მიაქციეთ, რომ ტრაექტორია ფიქსირებულ წერტილს (კვანძი) ექსპონენციალურად უახლოვდება, როდესაც $\lambda < 0$ და სცილდება მას (განმზიდველი) ექსპონენციალურად, როდესაც $\lambda > 0$. λ -ს ფიქსირებული წერტილის მიდამოს **ლიაპუნოვის ექსპონენტას** უწოდებენ. აუცილებლად უნდა აღინიშნოს, რომ ეს შედეგები სამართლიანია მხოლოდ ფიქსირებული წერტილის მიდამოში, სადაც ტეილორის მწკრივის მხოლოდ პირველი რიგის წარმოებული შესაკრები $f(X)$ ფუნქციის საკმაოდ კარგ მიახლოებას იძლევა.

განსაზღვრება: ფიქსირებული წერტილის მიდამოში მდებარე ერთგანზომილებიანი მდგომარეობათა სივრცის შესაბამისი ლიაპუნოვის ექსპონენტა ამ წერტილის λ მახასიათებელი მნიშვნელობაა.

$$\lambda \equiv \frac{df(X)}{dX} \Big|_{x_0}$$

3.8 ტრაექტორიები ერთგანზომილებიან მდგომარეობათა სივრცეში

რა სახის ტრაექტორიები შეიძლება არსებობდეს ერთგანზომილებიან მდგომარეობათა სივრცეში?



ნახ. 3.6. ერთგანზომილებიან მდგომარეობათა სივრცეში ორ კვანძს (X_0 და X_1) შორის უნდა მდებარეობდეს განმზიდველი R წერტილი.

თავდაპირველად უნდა აღვნიშნოთ, რომ ჩვენი ამგვარი ანალიზის მეშვეობით საკმაოდ იოლად ვიგებთ, თუ რა ხდება ფიქსირებული წერტილების სიახლოვეს ან რას უნდა

ვუწოდოთ სისტემის *ადგილობრივი* ქმედება. როგორც აღვნიშნეთ, ამგვარი ქმედება განისაზღვრება ფიქსირებულ წერტილში დროზე დამოკიდებული ფუნქციის წარმოებულების მიხედვით. ტრაექტორიების უფრო ფართომასშტაბიანი სურათის მისაღებად (ე.წ. *გლობალური ან ფაზის გლობალური სურათი*) უნდა გავითვალისწინოთ ფიქსირებული წერტილების სხვადასხვა ტიპებს შორის კავშირი. ერთგანზომილებიანი სივრცის შემთხვევაში ფიქსირებულ წერტილებს შორის შესაძლებელი კავშირი დიდადაა შეზღუდული f ფუნქციის უწყვეტობის გამო. თუ დაუშვებთ, რომ იგი, როგორც X ცვლადის ფუნქცია, მკვეთრი ნახტომების გარეშე, გლუვი სახით იცვლება, (მაშასადამე, ანუ „სიჩქარე“ გლუვი სახით უნდა იცვლებოდეს), მაშინ ერთმანეთის მიყოლებით განლაგებული ფიქსირებული წერტილები ვერ იქნებიან ერთდროულად როგორც კვანძები, ისე განმზიდველები. ასევე ვერ იქნება ერთი პირველი ტიპის, ხოლო მეორე კი მეორე ტიპის „უნაგირის“ წერტილი. f ფუნქციის უწყვეტობის დაშვების საფუძველზე, ფიქსირებული წერტილებს მხოლოდ განსაზღვრული თვისებები ექნებათ. ამ შედეგს ადვილად შევამოწმებთ, თუ $f(X)$ -ს გრაფიკულად გამოვსახავთ, ხოლო შემდეგ ფიქსირებულ წერტილებს სხვადასხვა სახით დავაკავშირებთ უწყვეტ მრუდთან.

მაგალითად განვიხილოთ ნახ. 3.6, სადაც კვანძები X_0 -ზე და X_1 -შია განლაგებული. იმისათვის, რომ $f(X)$ -მა გაიაროს კვანძებში წერტილებზე და მათ შორის ინტერვალში იმავდროულად იყოს უწყვეტი, მან უნდა გადაკვეთოს R განმზიდველი წერტილი.

ამოცანა 3.8-1. შეამოწმეთ შემდეგი მტკიცებულებები მდგომარეობების ერთგანზომილებიანი სივრცისთვის: (a) ორ განმზიდველს შორის უნდა მდებარეობდეს კვანძი. (b) პირველი და მეორე ტიპის „უნაგირის“ წერტილებს შორის უნდა მდებარეობდეს როგორც განმზიდველი, ისე კვანძი. (c) პირველი ტიპის „უნაგირის“ წერტილის სიანხლოვეს შეიძლება მდებარეობდეს ამავე ტიპის სხვა წერტილი. (d) მეორე ტიპის „უნაგირის“ წერტილის სიანხლოვეს შეიძლება იმყოფებოდეს ამავე ტიპის სხვა წერტილი.

ჩვენ შეგვიძლია სამომავლოდ ერთი შეზღუდვა შემოვიღოთ: თუ მოცემული სისტემისთვის ტრაექტორიები *შემოსაზღვრულია*, (ანუ ტრაექტორიები მუდამ მდგომარეობათა სივრცის რაიმე განსაზღვრულ არეში მდებარეობს), მაშინ X ღერძის გასწვრივ „ყველაზე კიდურა“ ფიქსირებული წერტილები მარცხენა მხარეს იქნებიან კვანძები ან პირველი ტიპის „უნაგირის“ წერტილები, ხოლო მარჯვენა – მეორე ტიპის „უნაგირის“ წერტილები. თუ

სისტემას გააჩნია „უნაგირის“ წერტილი, მაშინ ტრაექტორიები შემოსაზღვრულობის შემთხვევაში, მდებარე “უნაგირის” წერტილს X ღერძის გასწვრივ განმზიდველ მხარეს უნდა მოსდევდეს კვანძი.

მოცემული პარაგრაფის არსი მდგომარეობს იმაში, რომ თუ მოცემულია კონკრეტული სისტემის შესაბამისი ფიქსირებული წერტილების მახასიათებლები, მაშინ გლობალური ფაზური გამოსახულება და მდგომარეობათა სივრცეში ტრაექტორიების ხასიათი შეგვიძლია ერთმანეთს დავუკავშიროთ. ერთგანზომილებიანი სისტემის შემთხვევა საკმაოდ მარტივია, როდესაც ფიქსირებული წერტილების მახასიათებლები მოცემული გვაქვს. ჩვენ ტრაექტორიებს მივცემთ ვექტორულ სახეს, სადაც ისრები „შედიან“ კვანძებში და „უნაგირის“ წერტილებში მიზიდულობის მხრიდან, ხოლო „გამოდიან“ განმზიდველებიდან და „უნაგირის“ წერტილის განმზიდველი მხრიდან. ამ სურათზე დაყრდნობით, უკვე შეგვიძლია თვისობრივად აღვწეროთ, თუ როგორ მოძრაობენ ტრაექტორიები მდგომარეობების სივრცეში.

ამოცანა 3.8-2. შესაძლებელია თუ არა მდგომარეობათა ერთგანზომილებიანი სივრცის მქონე სისტემისთვის ისეთი ტრაექტორიების არსებობა, რომელთაც ახასიათებთ რხევითი (განმეორებადი) მოძრაობა?

ამოცანა 3.8-3. ლოჯისტიკური დიფერენციალური განტოლება. შემდეგ განტოლებას გააჩნია „ძალისმიერი“ წევრი, რომელიც პირველ თავში წარმოდგენილი ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციის იდენტურია

$$\dot{X} = AX(1 - X)$$

(a) იპოვეთ ფიქსირებული წერტილები მოცემული დიფერენციალური განტოლებებისთვის.

(b) განსაზღვრეთ თითოეული ფიქსირებული წერტილის მახასიათებელი მნიშვნელობა.

ამოცანა 3.8-4. (a) დაამტკიცეთ, რომ 3.8-3 ამოცანაში მოყვანილი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნია

$$X(t) = \frac{X_0}{X_0 - (X_0 - 1)e^{-At}}$$

სადაც X_0 არის X -ის საწყისი ($t=0$) მნიშვნელობა. (b) აღწერეთ $X(t)$ ამონახსნი, როგორც დროის ფუნქცია X_0 -ის სხვადასხვა მნიშვნელობისთვის და ამონახსნების თვისებები ფიქსირებული წერტილების თვისებებს დაუკავშირეთ. რატომ არის ლოჯისტიკური დიფერენციალური განტოლების ამონახსნა შედარებით ადვილი, როდესაც პირველ თავში მოყვანილი ლოჯისტიკური ასახვის შესაბამისი განტოლებისთვის ტრაექტორიების სახე ძალიან რთულია?

3.9 განსხვავებული თვალსაზრისით განხილული დისიპაცია

აქამდე ვამბობდით, რომ პირველ რიგში დისიპაციური სისტემებით ვართ დაინტერესებული. როგორ გავიგოთ გარკვეული $f(X)$ ფუნქციის სახით წარმოდგენილი სისტემა დისიპაციური თუ არა? თუ ჩვენ რეალური ფიზიკური სისტემის მოდელირებას ვახდენთ, დისიპაცია დაკავშირებულია ხახუნთან (ზოგადად), სიბლანტესთან და ა.შ. აქედან გამომდინარე, ფიზიკური თვალსაზრისით შეგვიძლია დავადგინოთ, თუ რა შემთხვევაშია დისიპაცია მნიშვნელოვანი. მიუხედავად ამისა, კარგი იქნება, თუ გვექნება დისიპაციური სისტემების შეცნობის მათემატიკური საშუალებები დინამიკური განტოლებების სახით. ამ იარაღით ჩვენ შევძლებთ დავადგინოთ, ასახავს თუ არა ჩვენი მათემატიკური მოდელი დისიპაციას.

დისიპაცია შეფასების მნიშვნელოვანი კონცეპტუალური საშუალებაა საწყისი პირობების „ერთობლიობა“. ერთგანზომილებიან შემთხვევაში, საწყისი პირობების რაოდენობა მოიცავს X ღერძის (შედარებით) მცირე მონაკვეთს (ჩვენ არ განვიხილავთ ფიქსირებული წერტილების მონაკვეთებს, რომელთა გამორიცხვის აშკარა საფუძველი გაგვაჩნია) დაუშვათ, მოცემული მონაკვეთი X_A -დან X_B -მდეა (თან $X_B > X_A$). იხ. ნახ. 3.7. $X_B - X_A$ მონაკვეთის სიგრძეა. ჩვენ გვინდა გავიგოთ, თუ რა მოსდის დროთა განმავლობაში მოცემული მონაკვეთის სიგრძეს და მდგომარეობათა სივრცის გავლით ამ მონაკვეთში მოხვედრილი ტრაექტორიის წერტილებს. თუ $f(X_B) < f(X_A)$, დროთა განმავლობაში მონაკვეთის სიგრძე შემცირდება.



ნახ. 3.7. „საწყისი პირობების ერთობლობა“ X ღერძზე მუქი ხაზითაა აღნიშნული.

$$\frac{d}{dt}(X_B - X_A) = \dot{X}_B - \dot{X}_A = f(X_B) - f(X_A) \quad (3.9-1)$$

თუ მონაკვეთი საკმარისად მოკლეა, მაშინ $f(X_B)$ -ს $f(X_A)$ -სთან დაკავშირებისთვის ვიყენებთ ტეილორის მწკრივად გაშლის მეთოდს:

$$f(X_B) = f(X_A) + \left. \frac{df}{dX} \right|_{X_A} (X_B - X_A) + \dots \quad (3.9-2)$$

თუ ავიღებთ, რომ $L = X_B - X_A$ და (3.9-2) ში მხოლოდ პირველი რიგის წარმოებულს შევინარჩუნებთ, მაშინ (3.9-1) განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს

$$\frac{1}{L} \frac{dL}{dt} = \frac{1}{L} [f(X_B) - f(X_A)] = \frac{df(X)}{dX} \quad (3.9-3)$$

(3.9-3) განტოლებიდან ვასკენით, რომ საწყისი პირობების შესაბამისი მონაკვეთის სიგრძე კლებულობს, თუ $f(X_B) < f(X_A)$ ან df/dX უარყოფითი სიდიდეა. ეს პირობა დაკმაყოფილდება, თუ ტრაექტორიები კვანძს უახლოვდება, ვინაიდან ამ წერტილში ან, უწყვეტობის შემთხვევაში, მის მიდამოში f -ის წარმოებული უარყოფითი სიდიდეა (ჩვენ გამოვრიცხავთ სტრუქტურულად არასტაბილურ ფიქსირებულ წერტილებს.)

წინამდებარე ანალიზი ეხებოდა ცალკეული ფიქსირებული წერტილის მიდამოში მიმდინარე მოვლენებს. მეტი თვალსაჩინოებისთვის შეგვიძლია რომელიმე ტრაექტორიის წარსული ქმედების შესახებ დავინტერესდეთ. მოვლენები შეიძლება ისე განვითარდეს, რომ განმზიდველის მიდამოდან გასვლისას საწყისი პირობების შესაბამისი მონაკვეთი თავდაპირველად გაფართოვდეს, ხოლო კვანძთან მიახლოებისას კვლავ შემცირდეს. ტრაექტორიის წერტილების საშუალო სიმრავლე შემოსაზღვრული დისიპაციური სისტემის შემთხვევაში უნდა შემცირდეს.

საფუძვლიანი მათემატიკური აპარატის მქონე მკითხველები მიხვდებიან, რომ ბოლო განტოლება „დივერგენციის თეორემის“ ნაკლებად საინტერესო ვერსიაა. 3.13 პარაგრაფში ამ თეორემას უფრო დაწვრილებით ორგანზომილებიანის შემთხვევისთვის განვავრცობთ.

3.10 მდგომარეობათა ორგანზომილებიანი სივრცე

ამჯერად ჩვენ მდგომარეობათა ორგანზომილებიანი სივრცის და ორგანზომილებიანი სისტემების კვლევაზე გადავიდვართ და ვნახავთ, რომ მეტი განზომილება მეტი თავისუფლების ხარისხს ნიშნავს და როგორც ქმედების მრავალფეროვნება, ისე გეომეტრიული შეზღუდვები ფიქსირებული წერტილებისათვის მატულობს. გარდა ამისა, ქმედების ამ ახალი ტიპების აღწერისთვის, ატრაქტორის ახალ სახეობას – **ზღვრულ ციკლს** წარმოგიდგინო.

ჩვენი მსჯელობა მდგომარეობათა ორგანზომილებიანი სივრცის შესახებ ერთგანზომილებიანი სისტემების ანალოგიურია. დაუშვათ, სისტემის დინამიკის ამსახველი განტოლებები შეიძლება პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებების სისტემებით გამოვსახოთ მდგომარეობის აღმწერი X_1 -ითა და X_2 -ით ცვლადებისთვის (ზოგჯერ დამოუკიდებელი ცვლადების სახით x -სა და y -ს გამოვიყენებთ, მაგრამ განსაკუთრებით გვინდა აღვნიშნოთ, რომ მდგომარეობათა სივრცის ცვლადები საზოგადოდ არ წარმოადგენენ სივრცითი კოორდინატების გამომსახველ ცვლადებს). დინამიკურ განტოლებებს ექნება შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= f_1(X_1, X_2) \\ \dot{X}_2 &= f_2(X_1, X_2) \end{aligned} \tag{3.10-1}$$

სისტემის ქმედება შეგვიძლია განვსაზღვროთ მდგომარეობათა $X_1 - X_2$ სივრცეში ტრაექტორიებზე დაკვირვების მეშვეობით. ისევე როგორც ერთგანზომილებიანი სისტემის შემთხვევაში, (3.10-1) განტოლების ფიქსირებული წერტილები სისტემის დინამიკაში აქაც უმთავრეს როლს ასრულებს. ფიქსირებული წერტილები, რა თქმა უნდა, ის (X_{10} , X_{20}) წერტილებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$\begin{aligned} f_1(X_{10}, X_{20}) &= 0 \\ f_2(X_{10}, X_{20}) &= 0 \end{aligned} \tag{3.10-2}$$

ფიქსირებული წერტილისა და მის მიდამოში მდებარე ტრაექტორიების ქმედება ამ ფიქსირებულ წერტილში f_1 და f_2 ფუნქციების წარმოებულების მეშვეობით. თუმცა, იმის გამო რომ f_1 და f_2 ფუნქციები საზოგადოდ დამოკიდებულია X_1 -სა და X_2 -ზე, საჭიროა განვიხილოთ ოთხი კერძო წარმოებული:

$$\frac{\partial f_1}{\partial X_1}, \frac{\partial f_1}{\partial X_2}, \frac{\partial f_2}{\partial X_1}, \frac{\partial f_2}{\partial X_2} \quad (3.10-3)$$

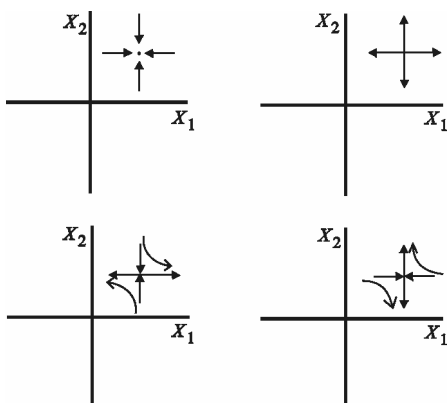
ამ დროს იბადება კითხვა, თუ რა დამოკიდებულებაა ფიქსირებული წერტილის მახასიათებლები ამ ოთხ კერძო წარმოებულთან.

კერძო შემთხვევა

ორ განზომილებაში ფიქსირებული წერტილის მახასიათებლების ზოგადი პრობლემის გამოკვლევამდე, განვიხილოთ მარტივი შემთხვევა, როდესაც ოთხი წარმოებულიდან მხოლოდ ორი არ უდრის 0-ს. დავუშვათ, (X_{10}, X_{20}) ფიქსირებულ წერტილზე წარმოებულებს შემდეგი მნიშვნელობები გააჩნიათ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} = \lambda_1 & \quad \frac{\partial f_1}{\partial X_2} = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} = 0 & \quad \frac{\partial f_2}{\partial X_2} = \lambda_2 \end{aligned} \quad (3.10-4)$$

ამ კერძო შემთხვევაში, ის რაც ხდება X_1 -ის მიმართულებით ფიქსირებული წერტილის მიდამოში, დამოკიდებულია მხოლოდ λ_1 -ზე (ანალოგიურად, X_2 -ის შემთხვევაში - λ_2 -ზე). X_1 და X_2 ღერძები λ_1 და λ_2 მახასიათებელი მნიშვნელობების შესაბამისი **მახასიათებელი მიმართულებებია** (გახსოვდეთ, რომ X_1 და X_2 -ის გასწვრივ მოძრაობის ამგვარი დამოუკიდებლობა ძალაშია მხოლოდ ამ განსაკუთრებულ შემთხვევაში და მხოლოდ მოცემული ფიქსირებული წერტილის მიდამოში)



ნახ. 3.8. ორგანზომილებიანი სისტემის ოთხივე ტიპის ფიქსირებული წერტილის მიდამოში მდებარე

ტრაექტორიების ნიშუშები მახასიათებელთა ნამდვილი მნიშვნელობების შემთხვევაში.

ცხრილი 3.2
შესაძლებელი ფიქსირებული წერტილების რეალური მახასიათებელი მნიშვნელობები

λ_1	λ_2	ფიქსირებული წერტილების სახეობები
< 0	< 0	მიმზიდველი კვანძი
> 0	> 0	განმზიდველი
> 0	< 0	უნაგირის წერტილი
< 0	> 0	უნაგირის წერტილი

ფიქსირებული წერტილების ტიპები ორგანზომილებიან სისტემაში

ერთგანზომილებიანი ქმედების შესაძლო ნიშუშების განზოგადების შედეგად შეგვიძლია ორგანზომილებიან სივრცეში მდებარე ფიქსირებული წერტილების ტიპებთან გაცნობა. მალე დავრწმუნდებით, რომ ორ განზომილებაში ქმედების სხვა შესაძლო სახეებიც არსებობს. უმარტივეს შემთხვევაში, როდესაც λ_1 და λ_2 ნამდვილი რიცხვებია და არც ერთი არ არის ნულის ტოლი (როდესაც მახასიათებელი მნიშვნელობა 0-ის ტოლია, მაშინ გაცილებით რთული ანალიზის ჩატარება გვინდება.), (3.6-3) განტოლებათა გამოყენებით ვადგენთ, რომ არსებობს ოთხი ტიპის ფიქსირებული წერტილი. მათი ნუსხა 3.2 ცხრილშია მოყვანილი. 3.8 ნახაზზე გამოსახულია ტრაექტორიების ქცევა ფიქსირებული წერტილების სიახლოვეს.

ახლა უნდა გავარკვიოთ, თუ რატომ ჰქვია „უნაგირის“ წერტილს ასეთი სახელი. მის სიახლოვეს ტრაექტორიების ქმედება მიზიდულობის ძალის მოქმედების შედეგად ზედაპირზე ბურთის დაგორების იდენტურია (3.9 ნახაზი). ამ სურათზე x ღერძის გასწვრივ მგორავი ბურთი „უნაგირის“ წერტილის მიერ „მიიზიდება“ (0,0)-სკენ. y ღერძის გასწვრივ მგორავი ბურთი შორდება მოცემულ წერტილს („განიზიდება“).

შემოვიყვანოთ $g(x,y)$ ფუნქცია შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= -\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} \\ f_2(x,y) &= -\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{aligned} \tag{3.10-5}$$

f_1 და f_2 „ძალის ფუნქციები“ წარმოადგენენ $g(x,y)$ „პოტენციალური ფუნქციის“ მინუს ნიშნით აღებულ გრადიენტებს. მაშინ სისტემის შესაბამის ფიქსირებულ წერტილებში g ფუნქციას ექსტრემუმი (ლოკალური მაქსიმუმი ან მინიმუმი) გააჩნია. როგორც 3.9 ნახაზზე ნაჩვენებია, g ფუნქციას „უნაგირის“ წერტილზე x ღერძის გასწვრივ მოძრაობისას მინიმუმი, ხოლო y ღერძის გასწვრივ მოძრაობისას კი მაქსიმუმი აქვს. მექანიკური სისტემისთვის $g(x,y)$ წარმოადგენს ამ სისტემის პოტენციალური ენერჯიის გამოძახველ ფუნქციას.

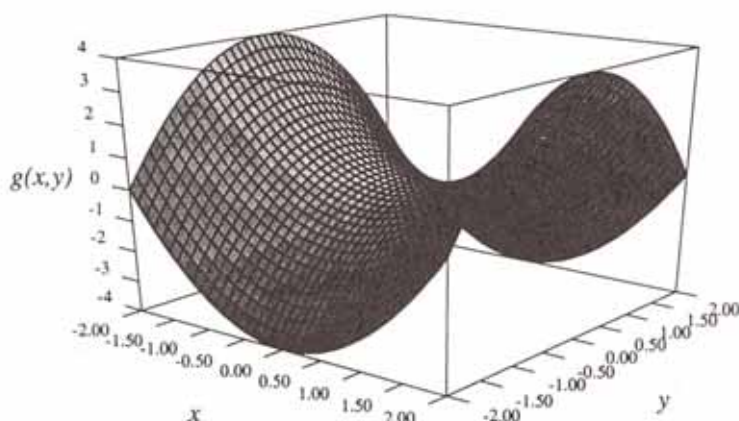
ცხრილი 3.2
შესაძლებელი ფიქსირებული წერტილების რეალური მახასიათებელი მნიშვნელობები

λ_1	λ_2
< 0	< 0
> 0	> 0
> 0	< 0
< 0	> 0

ტერმინოლოგიის შესახებ

„უნაგირის“ წერტილები და ტრაექტორიები, რომლებიც პირდაპირ საყრდენი წერტილისკენ მიემართებიან ან მისგან გამოდიან, მნიშვნელოვან როლს ასრულებენ მდგომარეობათა სივრცეში არსებული ყოველი შესაძლო ტრაექტორიის ქმედების განზოგადებაში. ასეთი როლის გამო ამ ტრაექტორიების მიმართ შემოიღეს სპეციალური ტერმინოლოგია.

წერტილების ერთობლიობას, რომლებიც ადგენენ როდესაც $t \rightarrow \infty$ „უნაგირის“ წერტილისკენ მისწრაფებულ ან მისგან გამომავალ ტრაექტორიებს, ზოგჯერ „უნაგირის“ წერტილთან დაკავშირებულ *ინვარიანტულ მრავალსახეობას* უწოდებენ. უფრო კონკრეტულად რომ ვთქვათ, „უნაგირის“ წერტილისკენ მიმართული ტრაექტორიები ქმნიან ე.წ. *მდგრად მრავალსახეობას* (რადგან ამ ტრაექტორიების გასწვრივ მახასიათებელი სიდიდე $\lambda < 0$), ხოლო საყრდენი წერტილიდან გამომავალი ტრაექტორიები ე.წ. *არამდგრად მრავალსახეობას* ქმნიან. სხვა ავტორები (მაგალითად [Abraham and Shaw, 1984] და [Thomson and Stewart, 1986]) იმავე მრავალსახეობებს *შიდა* და *გარე სიმრავლეებს* უწოდებენ.



ნახ. 3.9. „უნაგირისებრი“ ზედაპირი ორგანზომილებიან მდგომარეობათა სივრცის შემთხვევაში „უნაგირის“ წერტილი მდებარეობს $(x,y)=(0,0)$ -ზე.

„უნაგირის“ წერტილების მნიშვნელობა

ფიქსირებული წერტილებისა და მათი შესაბამისი შიდა და გარე სიმრავლეების მნიშვნელობის გასაგებად განვიხილოთ მხოლოდ ერთი ფიქსირებული წერტილის მქონე სისტემა. თუ ფიქსირებული წერტილი „უნაგირისა“ და მისი მახასიათებელი მნიშვნელობები არ არის 0-ის ტოლი, მაშინ ამ წერტილის შიდა და გარე სიმრავლეები მდგომარეობების სივრცეს ოთხ „კვადრანტად“ ჰყოფენ. ტრაექტორია, რომელიც არ არის შიდა ან გარე სიმრავლე, 3.8 ნახაზის მიხედვით შემოსაზღვრულია იმ კვადრანტით, სადაც იგი სათავეს იღებს. ამ თვალსაზრისით შიდა და გარე სიმრავლეები ახდენენ მდგომარეობათა სივრცის ორგანიზებას – ისინი ამ სივრცის შესაბამისი სეპარატრისების ნაწილებია.

„უნაგირის“ წერტილის ასეთი ტიპის (რომლისთვისაც არც ერთი მახასიათებელი მნიშვნელობა 0-ის ტოლი არ არის) მიდამოში, გარდა შიდა და გარე სიმრავლეებისა, მყოფი ტრაექტორიები ჰიპერბოლის ნაწილების მსგავსია. ამიტომ, „უნაგირის“ წერტილის ამ ტიპს **ჰიპერბოლური წერტილი** ეწოდება. ფაქტობრივად, ტერმინი **ჰიპერბოლური** ყოველი ფიქსირებული წერტილის მიმართ გამოიყენება, რომლის მახასიათებელი მნიშვნელობები 0-ის ტოლი არ არის. (ზოგადად, მახასიათებელი მნიშვნელობების ნამდვილი ნაწილები 0-ს არასოდეს უტოლდება.) ამ თვალსაზრისით, წინა პარაგრაფში განხილული ერთგანზომილებიანი საყრდენი წერტილები, რომელთაც სტრუქტურულად არასტაბილურს ვუწოდებდით, **არაჰიპერბოლურია**, რადგან შესაბამისი მახასიათებლის მნიშვნელობა 0-ის ტოლია.

3.11 მდგომარეობების ორგანზომილებიანი სივრცე: ზოგადი შემთხვევა

ყველაზე ზოგად შემთხვევაში (3.10-3) განტოლების ოთხი წარმოებულიდან 0-ის ტოლი არც ერთი არ არის. როგორ დავახასიათოთ ფიქსირებული წერტილი ამ დროს? ამ შემთხვევაში არსებობს ფიქსირებულ წერტილთან დაკავშირებული ორი მახასიათებელი მნიშვნელობა, მაგრამ მათთან დაკავშირებული მახასიათებელი მიმართულებები საზოგადოდ აღარ წარმოადგენენ მიმართულებებს X_1 -ისა და X_2 -ისაკენ.

ამ შემთხვევის საილუსტრაციოდ აღვწეროთ ქიმიური რეაქციების გარკვეული ჯგუფის მოდელირებისთვის გამოყენებული განტოლებები [Nicolis and Prigogine, 1989]. მას ბრიუსელატორის მოდელი ეწოდება, რადგან მისი შემქმნელები ბრიუსელში მოღვაწეობდნენ. ეს განტოლებებია

$$\begin{aligned}\dot{X} &= A - (B+1)X + X^2Y \\ \dot{Y} &= BX - X^2Y\end{aligned}\tag{3.11-1}$$

აქ A და B დადებითი რიცხვები წარმოადგენენ მაკონტროლებელ პარამეტრებს ხოლო, X და Y ქიმიურ რეაქციაში შემავალი ზოგიერთი შუალედური პროდუქტის კონცენტრაციების პროპორციული ცვლადებია. შეიძლება ამ კონცენტრაციების მონიტორინგი დროზე დამოკიდებული ფუნქციების მეშვეობით ხდებოდა (შესაბამისი ელექტროდებით ან ოპტიკური შთანთქმის რაიმე საზომით, რომლებიც მოცემული ქიმიური კონცენტრაციების მიმართ მგრძობიარობას იჩენენ).

თავდაპირველად განტოლებათა მოცემული სისტემისთვის მოვძებნოთ ფიქსირებული წერტილები. დროის მიმართ წარმოებულების ნულთან გატოლებით ვპოულობთ, რომ ფიქსირებული წერტილები შეესაბამება X-ისა და Y-ის ისეთ მნიშვნელობებს, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს;

$$A - (B+1)X + X^2Y = 0\tag{3.11-2}$$

$$BX - X^2Y = 0\tag{3.11-3}$$

არსებობს ერთი წერტილი (X, Y) წერტილი, რომელიც ამ განტოლებებს აკმაყოფილებს. ამ ფიქსირებული წერტილის კოორდინატებია $X_0=A$, $Y_0=B/A$.

რას უდრის ამ ფიქსირებული წერტილის მახასიათებელი? მახასიათებელი სიდიდეების განსაზღვრის მეთოდის მოსაძენად დავუბრუნდეთ მდგომარეობათა ზოგად ორგანზომილებიან სივრცეს და ფიქსირებული (X_{10}, X_{20}) წერტილის მიდამოში (3.10-1) წარმოვადგინოთ ტეილორის მწკრივებად:

$$\dot{X}_1 = f_1(X_1, X_2) = (X_1 - X_{10}) \frac{\partial f_1}{\partial X_1} + (X_2 - X_{20}) \frac{\partial f_1}{\partial X_2} + \dots\tag{3.11-4a}$$

$$\dot{X}_2 = f_2(X_1, X_2) = (X_1 - X_{10}) \frac{\partial f_2}{\partial X_1} + (X_2 - X_{20}) \frac{\partial f_2}{\partial X_2} + \dots\tag{3.11-4b}$$

(3.11-4) განტოლებებში ვაფასებთ წარმოებულებს ფიქსირებულ (X_{10} , X_{20}) წერტილში. მრავალწერტილი ჩვენს მიერ უგულებელყოფილი ერთზე მაღალი რიგის წარმოებულების აღმნიშვნელია (დაიმახსოვრეთ, რომ ტეილორის მწკრივებად წარმოდგენისას ვიყენებთ კერძო წარმოებულებს, რადგან ფუნქციები დამოკიდებულია როგორც X_1 -ზე, ასევე X_2 -ზე.) ფიქსირებული წერტილიდან მოშორებით სასურველია ამ წერტილიდან გადახრის აღმნიშვნელი ახალი $x_1 \equiv X_1 - X_{10}$ და $x_2 \equiv X_2 - X_{20}$ ცვლადების შემოყვანა.

$$\dot{x}_1 = \dot{X}_1 \quad \text{და} \quad \dot{x}_2 = \dot{X}_2 \quad (3.11-5)$$

მაღალი რიგის წარმოებულების შესაბამის წევრთა უგულებელყოფის შედეგად (3.11-4) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} x_2 \end{aligned} \quad (3.11-6)$$

შენიშნეთ, რომ (3.11-6) მუდმივი კოეფიციენტების მქონე პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებაა ახალი მდგომარეობის x_1 და x_2 ცვლადებისთვის (მათი კოეფიციენტები დროზე არ არის დამოკიდებული). არსებობს ამ განტოლებების ამოხსნის არაერთი სტანდარტული მეთოდი. გამოვიყენოთ ის მეთოდი, რომელიც სასურველ შედეგებამდე მაქსიმალურად სწრაფად მიგვიყვანს.

სიმარტივის მიზნით შემოვიტანოთ შემდეგი აღნიშვნა

$$f_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (3.11-7)$$

სადაც i და j 1-ის ან 2-ის ტოლია. თავდაპირველად, (3.11-6) განტოლებებიდან პირველი განტოლების დროის მიმართ დიფერენცირების მეშვეობით მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას მხოლოდ x_1 -თვის, შემდეგ კი მეორე განტოლების გამოყენებით \dot{x}_2 -ს გამოვრიცხავთ:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= f_{11}\dot{x}_1 + f_{12}\dot{x}_2 \\ &= f_{11}\dot{x}_1 + f_{12}(f_{21}x_1 + f_{22}x_2)\end{aligned}\quad (3.11-8)$$

ახლა x_2 -ის გამორიცხვისთვის კვლავ გამოვიყენებთ (3.11-6)-ის პირველ განტოლებას

$$\ddot{x}_1 = (f_{11} + f_{22})\dot{x}_1 + (f_{12}f_{21} - f_{11}f_{22})x_1 \quad (3.11-9)$$

დავუშვათ, რომ (3.11-9) განტოლების ამონახსენი შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$x_1(t) = Ce^{\lambda t} \quad (3.11-10)$$

სადაც λ საძიებელი მუდმივაა, C კი ისეთი დროისგან დამოუკიდებელი მუდმივაა, რომელიც საწყისი პირობების მიხედვით განისაზღვრება. თუ λ დადებითი (და მოქმედი) სიდიდეა, მაშინ ტრაექტორიას ფიქსირებული წერტილი განიზიდავს ანუ, ფიქსირებული წერტილი არასტაბილურია. თუ λ უარყოფითი (და ნამდვილი) სიდიდეა, მაშინ ტრაექტორია ფიქსირებულ წერტილს უახლოვდება, ანუ, ფიქსირებული წერტილი სტაბილურია. მომავალში ვნახავთ, რომ λ კომპლექსური რიცხვიც შეიძლება იყოს.

დავუბრუნდეთ ამოხსნის პროცესს. თუ (3.11-10) განტოლებას (3.11-9)-ში ჩავსვამთ, მაშინ მივიღებთ

$$\lambda^2 - (f_{11} + f_{22})\lambda + (f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}) = 0 \quad (3.11-11)$$

რომელსაც λ -ს *მანსიათებელი განტოლება* ეწოდება. მისი მნიშვნელობა დამოკიდებულია მხოლოდ გაანგარიშებული ფუნქციების დროის მიმართ წარმომებულებზე ფიქსირებულ წერტილში. (3.11-11) განტოლება λ -ს მიმართ კვადრატული განტოლებაა და მას ორი ამონახსნი გააჩნია:

$$\lambda_{\pm} = \frac{f_{11} + f_{22} \pm \sqrt{(f_{11} + f_{22})^2 - 4(f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21})}}{2} \quad (3.11-12)$$

ცხადია, რომ მანსიათებელი მნიშვნელობები ნამდვილი რიცხვები იქნება, თუ (3.11-12) განტოლების ფესვის ქვეშ მყოფი გამოსახულება დადებითია. უარყოფითი დამოუკიდებელი ცვლადის შემთხვევაში კი, მანსიათებელი მნიშვნელობები კომპლექსური რიცხვები იქნება.

(3.11-9) განტოლების ამონახსნი ყველაზე ზოგადი სახით ასე შეიძლება ჩაიწეროს

$$x_1(t) = Ce^{(\lambda_+ t)} + De^{(\lambda_- t)} \quad (3.11-13)$$

სადაც C და D მუდმივებია, რომელთა გამოთვლა საწყის პირობებზე ($x_1(t=0)$ და $x_2(t=0)$) დაყრდნობით არის შესაძლებელი.

ზოგადი გადაწყვეტილებების მიღებამდე აღვნიშნოთ, რომ მდგომარეობების სივრცისთვის კოორდინატების შერჩევას, დიდი თავისუფლება გვაქვს მინიჭებული. ვინაიდან თავდაპირველად კოორდინატებად ვიყენებდით x_1 -სა და x_2 -ს, თუმცა ასევე შეგვეძლო x_1 -ისა და \dot{x}_1 -ის გამოყენება, ვინაიდან (3.11-6) განტოლებიდან ჩანს, რომ ჩვენ ვიცით x_1 -ისა და \dot{x}_1 -ის მნიშვნელობა და შემდეგ ვგებულობთ x_2 -ის მნიშვნელობას.. ასევე შეგვეძლო x_2 და \dot{x}_1 ან ცვლადების სხვა წყვილების გამოყენებაც. ტრაექტორიების ზოგად გეომეტრიულ სახეზე მდგომარეობათა სივრცის კოორდინატების შერჩევა გავლენას არ ახდენს.

ამოცანა 3.11-1. აჩვენეთ, რომ $f_{12}=0$ და $f_{21}=0$ შემთხვევაში (3.11-12) განტოლება დაიყვანება (3.10-4) -ზე.

ამოცანა 3.11-2. გამოიყენეთ (3.11-13) განტოლება და $x_1=0$, $x_2=0$ საწყისი პირობების საფუძველზე გამოთვალეთ C და D მუდმივები. მინიშნება: მოახდინეთ (3.11-13) განტოლების დიფერენცირება და C -სა და D -თვის მეორე პირობის მისაღებად გამოიყენეთ (3.11-9) განტოლება. ეს ამოცანა თანამედროვე აღგებრის ღრმა ცოდნას მოითხოვს და საბოლოო შედეგები არ გამოირჩევა განსაკუთრებით მარტივი ფორმით.

ამოცანა 3.11-3. აჩვენეთ, რომ x_2 აკმაყოფილებს (3.11-9)-ის სახის დიფერენციალურ განტოლებებს. შეაჯამეთ მიღებული შედეგები (3.11-6) განტოლებით წარმოდგენილი სისტემის დინამიკის სრულყოფილად განსაზღვრისთვის.

3.12 დინამიკა და კომპლექსური მახასიათებელი მნიშვნელობები

როგორია სისტემის დინამიკა, როდესაც მახასიათებელი მნიშვნელობები არა ნამდვილი, არამედ კომპლექსური რიცხვებია? ეს მდგომარეობა მაშინ იქმნება, როდესაც (3.11-12) განტოლების ფესქვემა გამოსახულება უარყოფითია. ეს შემთხვევა აღწერს ისეთ ქმედებას, როდესაც ტრაექტორიები სპირალის ფორმას ღებულობს, როგორც 3.10 ნახაზზე ჩანს, ან ფიქსირებული წერტილისაკენ მიემართება, ან შორდება მას.

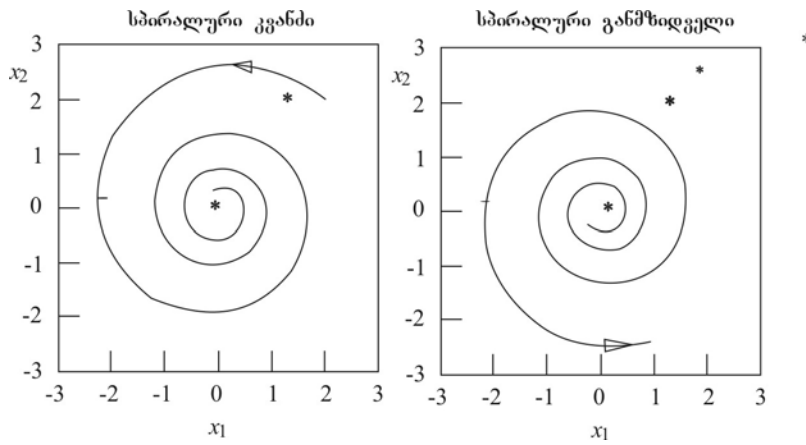
თუ (3.11-12) განტოლების ფესქვემა გამოსახულება უარყოფითი სიდიდეა, მაშინ მახასიათებელი მნიშვნელობები შემდეგნაირად შეგვიძლია გამოვსახოთ:

$$\lambda_{\pm} = R \pm i\Omega \quad (3.12-1)$$

სადაც

$$\begin{aligned} i &= \sqrt{-1} \\ R &= \frac{1}{2}(f_{11} + f_{22}) \\ \Omega &= \frac{1}{2}\sqrt{|(f_{11} + f_{22})^2 - 4(f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21})|} \end{aligned} \quad (3.12-2)$$

კომპლექსური რიცხვების სტანდარტული მათემატიკური ენის გამოყენებით შეგვიძლია განვაცხადოთ, რომ R ამ კომპლექსური რიცხვების „რეალური ნაწილია“, ხოლო Ω კი „წარმოსახვითი“. ორი რიცხვი λ და λ_+ მახასიათებელთა კომპლექსურად შეუღლებულ წყვილს ქმნის. ტრაექტორიის ფორმის გარკვევის მიზნით, ეს მახასიათებელი მნიშვნელობები $x_1(t)$ -სთვის ჩაწერილ განტოლებაში უნდა ჩავსვათ:



ნახ. 3.10. სპირალური კვანძი (მარცხნივ) და სპირალური განმზიდველი (მარჯვნივ) მაშინ გვაქვს, როდესაც ფიქსირებული წერტილისთვის მახასიათებელი მნიშვნელობები კომპლექსური რიცხვებია.

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= Ce^{(\lambda_+)t} + De^{(\lambda_-)t} \\
 &= e^{Rt} [Ce^{i\Omega t} + De^{-i\Omega t}]
 \end{aligned}
 \tag{3.12-3}$$

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როდესაც $x_1(0)=0$ და $C=-D$. ვიყენებთ ეილერის ცნობილ ფორმულას

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta
 \tag{3.12-4}$$

მივიღებთ:

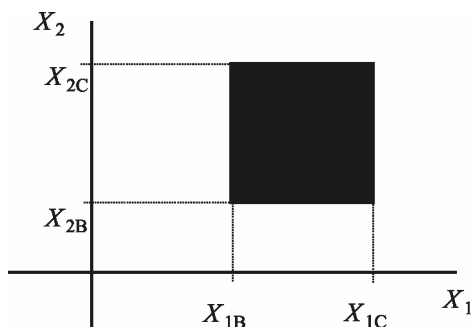
$$x_1(t) = Fe^{Rt} \sin(\Omega t)
 \tag{3.12-5}$$

სადაც F $x_2(0)$ -ზე დამოკიდებული მუდმივაა. ამის შედეგად ვპოულობთ, რომ x_1 დროის მიხედვით განიცდის რხევებს Ω კუთხური სიხშირით, როდესაც რხევის ამპლიტუდა ექსპონენციალურად მატულობს ან კლებულობს ($R>0$ ან $R<0$). x_2 -იც ანალოგიურად იცვლება. მდგომარეობათა სივრცის შესაბამისი ქმედება (განსხვავებულ საწყის პირობებზე დაყრდნობით) 3.10 ნახაზზეა ნაჩვენები. უფრო ზოგადი საწყისი პირობების შემთხვევაში მდგომარეობათა სივრცის ქმედება არ იცვლება – გვაქვს რხევები ექსპონენციალურად მზარდი ან კლებადი ამპლიტუდით.

ამოცანა 3.12-1. აჩვენეთ, რომ (3.12-5) განტოლებაში F მუდმივა მოიცემა შემდეგი სახით:

$$F = f_{12}x_2(0) / \Omega$$

ამოცანა 3.12-2. ალგებრაში საკმარისი გამოცდილების მქონე მკითხველისთვის: $x_1(0)$ -ისა და $x_2(0)$ -ის მეშვეობით მიიღეთ (3.12-3) განტოლების მთავარი ამონახსნი და აჩვენეთ, რომ ქმედება წინა პარაგრაფის ბოლოში აღწერილის მსგავსია.



ნახ. 3.11. მდგომარეობათა სივრცეში X_1 და X_2 ცვლადების საწყისი პირობების მართკუთხედი

3.10 ნახაზის მარცხენა მხარეს მდებარე ფიქსირებული წერტილისთვის ვამბობთ, რომ ტრაექტორიები სპირალურად ჩაეხვევა ფიქსირებული წერტილის მიმართულებით და სახეზეა **სპირალური კვანძი** (ზოგჯერ **ფოკუსად** წოდებული). 3.10 ნახაზის მარჯვენა მხარეს კი **სპირალური განშლიდელია** (ზოგჯერ **არასტაბილურ ფოკუსად** წოდებული) გამოსახული. კერძო შემთხვევაში, როდესაც $R=0$, ტრაექტორია ფიქსირებული წერტილის გარშემო ჩაკეტილ კონტურს ქმნის, რომელსაც **ციკლი** ეწოდება. თუ ამ ციკლის მიდამოში მდებარე ტრაექტორიები დროთა განმავლობაში მისკენ მიისწრაფვიან, მაშინ ამ ციკლს **ზღვრული ციკლი** ეწოდება. ციკლის სტაბილურობის თუ არასტაბილურობის გასარკვევად დეტალური ანალიზია საჭირო, რომელიც 3.16 პარაგრაფშია მოყვანილი.

მნიშვნელოვანია იმის გააზრება, რომ 3.10 ნახაზზე ნაჩვენებ სპირალურ და ციკლურ ქმედებებს შესაძლებელია ადგილი ჰქონდეთ მდგომარეობათა მხოლოდ ორ (ან მეტ) განზომილებიან სივრცეში. არათანაკვეთადობის თეორემის ძალით, ისინი ერთგანზომილებიან სივრცეში თავს არ იჩენენ (გაიხსენეთ 3.8-2 ამოცანა).

3. 13 დისიპაცია და დივერგენციის თეორემა

ჩვენ უკვე ვიცით, თუ როგორ უნდა გამოვიკვლიოთ დისიპაცია მდგომარეობათა ორგანზომილებიან სივრცეში. მრავალ განზომილებაზე გადასვლა ამ მხრივ სირთულეს არ ქმნის. ორგანზომილებიან შემთხვევაში ვიწყებთ X_1 და X_2 ცვლადების საწყისი პირობების

კრებულით, რომელიც მოცემულია (X_{1C}, X_{2C}) და (X_{1B}, X_{2B}) კოორდინატების მიერ შემოსაზღვრულ გარკვეულ (მცირე) არეში (3.11 ნახაზი).

შემდეგ გამოვთვლით ამ არის ცვლილების სიჩქარეს:

$$A = (X_{1C} - X_{1B})(X_{2C} - X_{2B}) \quad (3.13-1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} = & (X_{1C} - X_{1B})\{f_2(X_{1B}, X_{2C}) - f_2(X_{1B}, X_{2B})\} \\ & + \{f_1(X_{1C}, X_{2B}) - f_1(X_{1B}, X_{2B})\}(X_{2C} - X_{2B}) \end{aligned} \quad (3.13-2)$$

სადაც გამოყენებული გვაქვს დინამიკური განტოლებები.

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= f_1(X_1, X_2) \\ \dot{X}_2 &= f_2(X_1, X_2) \end{aligned} \quad (3.13-3)$$

ვიყენებთ ტეილორის მწკრივად წარმოდგენის მეთოდს:

$$\begin{aligned} f_1(X_{1C}, X_{2B}) &= f_1(X_{1B}, X_{2B}) \\ &+ (X_{1C} - X_{1B}) \left. \frac{\partial f_1}{\partial X_1} \right|_{X_{1B}, X_{2B}} + \dots \end{aligned} \quad (3.13-4)$$

მსგავსი გამოსახულება გვექნება f_2 -სთვისაც. როდესაც ტეილორის მწკრივებს ჩავსვამთ (3.13-2) განტოლებაში, A-ზე გაყოფის შედეგად ვიღებთ

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial X_1} + \frac{\partial f_2}{\partial X_2} \quad (3.13-5)$$

შედეგად, კიდევ ერთხელ ვრწმუნდებით, რომ საწყისი პირობების შემცველი არის ფარდობითი ზრდა ან შემცირება დინამიკური ფუნქციების კერძო წარმოებულებით განისაზღვრება. თუ (3.13-5) განტოლების მარჯვენა მხარე უარყოფითი ნიშნისაა, მაშინ საწყისი ფაზური სივრცის არე ნულამდე მცირდება. ამ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ სისტემა დისიპაციურია. ყოველი ტრაექტორია ქრება იმ მიმზიდველის მიმართულებით, რომლის გეომეტრიული განზომილება მდგომარეობათა საწყის სივრცისაზე ნაკლებია. მდგომარეობათა ორგანზომილებიანი სივრცისთვის მიმზიდველი შეიძლება იყოს წერტილი (კვანძი) ან მრუდი (ზღვრული ციკლი). ცხადია, რომ მდგომარეობათა N -განზომილებიან სივრცეში აღებული V მოცულობისათვის საწყისი პირობები მდგომარეობათა სივრცეში მოიცემა შემდეგი სახით:

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \equiv \text{div}(f) \quad (3.13-6)$$

რომლის მარჯვენა მხარეში მოცემული იგივეობა განსაზღვრავს f_i ფუნქციათა სიმრავლის შესაბამის **დივერგენციას**. თუ $\text{div}(f) < 0$, მაშინ მდგომარეობათა სივრცისთვის საწყისი პირობების შემცველი მოცულობის თავდაპირველი ზომები იმ გეომეტრიულ არეში ქრება, რომლის განზომილებაც მდგომარეობათა საწყის სივრცისაზე ნაკლებია და ამ სივრცეს ერთი მიმზიდველი მაინც გააჩნია.

ამოცანა 3.13-1. განსაზღვრეთ პირველ თავში წარმოდგენილი ლორენცის მოდელის განტოლებებისთვის $\text{div}(f)$, როდესაც პარამეტრის მნიშვნელობებია $r=0.5$, $p=10$ და $b=8/3$. არის თუ არა ლორენცის სისტემა დისიპაციური მდგომარეობათა სივრცეში?

3.14 მახასიათებელი მნიშვნელობების იაკობიანი

ამჯერად ფიქსირებული წერტილისათვის მახასიათებელი განტოლების მიღების უფრო მოხერხებულ და ზოგად მეთოდს წარმოვიდგინოთ, რომელიც დროზე დამოკიდებული ფუნქციების **იაკობიანის** გამოყენებას ემყარება. თუ დავაკვირდებით პროცესის მიმდინარეობას, უფრო გაგვიადვილდება ამ მეთოდის შეთვისება და ნებისმიერი განზომილების მქონე მდგომარეობათა სივრცეში ფიქსირებული წერტილების მახასიათებელ მნიშვნელობებს გამოვთვლით. სისტემის შესაბამისი იაკობიანი წარმოადგენს წარმოებულების შემდეგ კვადრატულ მატრიცას:

$$J = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \quad (3.14-1)$$

სადაც წარმოებულები მოცემულია ფიქსირებული წერტილისათვის. გამოვრიცხოთ λ თითოეული დიაგონალური ელემენტიდან და გავუტოლოთ მატრიცის შესაბამისი დეტერმინანტი ნულს:

$$\begin{vmatrix} f_{11} - \lambda & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.14-2)$$

დეტერმინანტის გაშლილი სახით წარმოდგენის შედეგად მივიღებთ (3.11-11) მახასიათებელ განტოლებას. იაკობიანის მეთოდი ძალზედ ადვილად ვრცელდება d - განზომილებაზე, თუ f_n დინამიკური ფუნქციების წარმოებულებს $d \times d$ რიგის მატრიცას შევადგენთ. შესაბამისი დეტერმინანტიდან გამოგვყავს d -რიგის განტოლება მახასიათებელი მნიშვნელობებისათვის.

ვიდრე მოცემული ფიქსირებული წერტილის მახასიათებელი მნიშვნელობების შესახებ უმნიშვნელოვანეს მტკიცებულებებს წარმოვადგენთ, შევვხებით წრფივი ალგებრის ზოგიერთ ცნებას. (3.14-1) იაკობიანის მატრიცის **კვადრი** წარმოადგენს მთავარი დიაგონალის ელემენტთა ჯამს. (3.14-1) განტოლებისთვის გვექნება

$$TrJ = f_{11} + f_{22} \quad (3.14-3)$$

თუ (3.11-12) განტოლებაში მოცემულ მახასიათებელ მნიშვნელობებს დავაკვირდებით, შევამჩნევთ, რომ დიაგონალური ელემენტების ჯამი ტოლია მახასიათებელ მნიშვნელობათა ჯამისა.

$$\lambda_+ + \lambda_- = f_{11} + f_{22} = TrJ \quad (3.14-4)$$

მაგრამ (3.13-5) განტოლებიდან გამომდინარე, ეს განსაკუთრებით წარმოებულების კომბინაციაა, რომლის საშუალებით ვამოწმებთ, სისტემის შესაბამისი ტრანსფორმაციები მიმზიდველის მიმართულებით ქრება თუ არა. წინა პარაგრაფიდან გამომდინარე, $Trj=2R$. ამგვარად ფიქსირებული წერტილის კვანძია თუ განმზიდველი, ამას TrJ –სიდიდის ნიშანი განსაზღვრავს.

წრფივი ალგებრა ასევე გვასწავლის, თუ როგორ უნდა ვიპივით მახასიათებელი მნიშვნელობათან დაკავშირებული მიმართულებები. “უნაგირის” წერტილისთვის ეს იქნება შიდა და გარე სიმრავლეების მიმართულებები ამ წერტილის მიდამოში. მთავარი ის განსაკუთრებით, რომ კოორდინატთა სისტემის შეცვლით (ახალი კოორდინატები საწყისი კოორდინატების წრფივი კომბინაციაა) იაკობიანს ე.წ. დიაგონალურ სახეზე დავიყვანთ, რომელშიც მხოლოდ მთავარი დიაგონალის ელემენტები იქნება არანულოვანი. ამ შემთხვევაში მატრიცას გააჩნია შემდეგი ფორმა (მდგომარეობათა ორგანზომილებიანი სივრცისათვის):

ცხრილი 3.3

ფიქსირებული წერტილები მდგომარეობათა ორგანზომილებიანი სივრცისათვის

	$TrJ < 0$	$TrJ > 0$
$\Delta > (1/4)(TrJ)^2$	სპირალური კვანძი	სპირალური განმზიდველი
$0 < \Delta < (1/4)(TrJ)^2$	კვანძი	გამზიდველი
$\Delta < 0$	„უნაგირის“ წერტილი	„უნაგირის“ წერტილი

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (3.14-5)$$

წრფივ ალგებრაში ამ პროცედურას „მატრიცის საკუთრივი მახასიათებელი მნიშვნელობებისა და საკუთრივი მახასიათებელი ვექტორების მოძებნა“ ეწოდება. ჩვენი მიზნებიდან გამომდინარე, საკუთრივი მახასიათებელი მნიშვნელობები ფიქსირებული წერტილის მახასიათებელი მნიშვნელობებია, ხოლო საკუთრივი მახასიათებელი ვექტორები კი შესაბამისად მახასიათებელ მიმართულებას გვადლევს. საკუთრივი მახასიათებელი ვექტორები ჩვენი მიზნებისათვის უმეტესწილად არ გვჭირდება.

ამჯერად შემოგვაქვს კიდევ ერთი სიმბოლო:

$$\Delta = f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12} \quad (3.14-6)$$

Δ –ს ეწოდება მატრიცის **დეტერმინანტი**. ფიქსირებული წერტილის ბუნება განისაზღვრება TrJ -ითა და Δ -ით, როგორც 3.3 ცხრილშია მოცემული.

ამოცანა 3.14-1. გამოიყენეთ განტოლება (3.14-3), (3.14-6) და (3.11-12) და შეამოწმეთ 3.3 ცხრილის მონაცემები.

ფიქსირებული წერტილის ანალიზის რეზიუმე მდგომარეობათა ორგანზომილებიანი სივრცისათვის

1. ჩაწერეთ დინამიკური განტოლებები (3.10-1) განტოლების პირველი რიგის დროის მიმართ წარმოებულის მეშვეობით

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= f_1(X_1, X_2) \\ \dot{X}_2 &= f_2(X_1, X_2) \end{aligned} \quad (3.10-1)$$

2. განსაზღვრეთ სისტემის ევოლუციის ფიქსირებული წერტილები იმ წერტილების მეშვეობით, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობას

$$\begin{aligned} f_1(X_1, X_2) &= 0 \\ f_2(X_1, X_2) &= 0 \end{aligned}$$

3. იაკობიანის შესადგენად ფიქსირებულ წერტილებში გამოთვალეთ დროზე დამოკიდებული ფუნქციების კერძო წარმოებულები;

$$J \equiv \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \quad (3.14-1)$$

4. ფიქსირებულ წერტილში განსაზღვრეთ იაკობიანის კვალი და დეტერმინანტი. ისარგებლეთ 3.3 ცხრილით და დაადგინეთ ფიქსირებული წერტილის ტიპი.
5. გამოიყენეთ (3.11-12) განტოლება, იპოვეთ მახასიათებელი მნიშვნელობების რიცხვითი სიდიდეები და დაადგინეთ მდგომარეობათა სივრცის ტრაექტორიების ქცევა ფიქსირებულ წერტილთან.

მაგალითი: ბრიუსელატორის მოდელი

ჩვენი მეთოდის საილუსტრაციოდ (3.11-1) განტოლებაში მოცემულ ბრიუსელატორის მოდელს დაუბრუნდეთ. განტოლებების მოცემული სიმრავლისთვის იაკობიანს ექნება შემდეგი სახე:

$$J = \begin{pmatrix} (B-1) & A^2 \\ -B & -A^2 \end{pmatrix} \quad (3.14-7)$$

ზემოთ აღწერილი იაკობიანის დეტერმინანტის მეშვეობით ვპოულობთ მახასიათებელ მნიშვნელობებს

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}[(B-1) - A^2] \pm \frac{1}{2}\sqrt{(A^2 - (B-1))^2 - 4A^2} \quad (3.14-8)$$

ამ მოდელისათვის $A=1$, ხოლო B კი მაკონტროლებელი პარამეტრია. მოდით, ამ ტრადიციას ნუ დავარღვევთ. როდესაც $B < 2$, ორივე მახასიათებელ მნიშვნელობას უარყოფითი ნიშნის მქონე ნამდვილი ნაწილები გააჩნია და ფიქსირებული წერტილი სპირალური კვანძია. შედეგად ვლევლობთ, რომ ქიმიური კონცენტრაციები დროთა განმავლობაში $X_0=A=1$, $Y_0=B$ ფიქსირებული წერტილისაკენ მიისწრაფვის. ისინი ამ დროს ირხევიან $\Omega=|B(B-4)|^{1/2}$ სიხშირით. როდესაც $2 < B < 4$, ფიქსირებული წერტილი სპირალურ განშიდველად გადაიქცევა. ჩვენი ანალიზი ვერ გვეუბნება, თუ რა ემართება ტრაექტორიებს, როდესაც ისინი ფიქსირებული წერტილის მიმართ განშლადი სპირალის ფორმას იღებენ. მომდევნო პარაგრაფში ვნახავთ, რომ პირველ პარაგრაფში 1.1 ნახაზზე მოყვანილი შემთხვევის ანალოგიურად ისინი ზღვრული ციკლისკენ მიისწრაფვიან.

ამოცანა 3.14-2. დაახასიათეთ ბრიუსელატორის მოდელის შესაბამისი ფიქსირებული წერტილი, როდესაც $B > 4$.

3.15 ზღვრული ციკლები

ორ ან მეტგანზომილებიან მდგომარეობათა სივრცეებში შესაძლებელია ადგილი ჰქონდეს ციკლურ ანუ პერიოდულ ქმედებას. ქმედების ეს უმნიშვნელოვანესი ტიპი მდგომარეობათა სივრცეში წარმოდგენილია ჩაკეტილი მარყუჟისებრი ტრაექტორიების მეშვეობით. ასეთ კონტურზე ქმედების ამსახველი წერტილი გამუდმებით ასრულებს პერიოდულ მოძრაობებს. თუ ციკლი იზოლირებულია ანუ ახლომდებარე ტრაექტორიები მას უახლოვდებიან ან შორდებიან, მაშინ მარყუჟს **ზღვრული ციკლი** ეწოდება. წინა პარაგრაფში მოყვანილი მსჯელობის თანახმად, მდგომარეობათა სივრცეში ზღვრული ციკლის დინამიკა მდგომარეობს სისტემის რხევებში ანუ განმეორებად მოძრაობებში. რხევით ქმედებებს უდიდესი მნიშვნელობა აქვთ ბევრ პრაქტიკულ საკითხში, რადიომაუწყებლობით დაწყებული, ნოვატორული იდეებით დამთავრებული.

ქვემოთ მოყვანილი ანალიზი პასუხობს ორ კითხვას: (1) როდის აქვთ ადგილი ზღვრულ ციკლებს? და (2) როდისაა ზღვრული ციკლები სტაბილური და არასტაბილური?

პირველ კითხვაზე პასუხობს *პუანკარე-ბენდიქსონის თეორემა* მდგომარეობათა ორგანზომილებიანი სივრცისთვის:

1. დაუშვათ, დროის დიდი ინტერვალის განმავლობაში წერტილის მოძრაობა შემოსაზღვრულია სასრული ზომის მქონე რომელიმე არით მდგომარეობათა ორგანზომილებიან სივრცეში ანუ სისტემა არ მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ.
2. დაუშვათ, ეს არე (აღვნიშნოთ R -ით) ისეთია, რომ R -ის შიგნით დაწყებული ნებისმიერი ტრაექტორია საშუალოდ R -ის შიგნით დარჩება. [R -ს ამ სისტემის „მუდმივი სიმრავლე“ ეწოდება.]
3. განვიხილოთ R -ში დაწყებული რომელიმე კონკრეტული ტრაექტორია. პუანკარე-ბენდიქსონის თეორემის თანახმად, არსებობს მხოლოდ ორი შესაძლო ვარიანტი ამ ტრაექტორიისათვის:
 - a. ტრაექტორია მიისწრაფვის სისტემის ფიქსირებულ წერტილისაკენ, როდესაც $t \rightarrow \infty$.
 - b. ტრაექტორია მიისწრაფვის ზღვრული ციკლისაკენ, როდესაც $t \rightarrow \infty$.

პუანკარე-ბენდიქსონის თეორემის დამტკიცება მოცემული კურსის ფარგლებს სცილდება. დაინტერესებულ მკითხველს ვურჩევთ გაეცნოს [Hirsch and Smale, 1974]. მიღებული შედეგები სრულიად სამართლიანი აღმოჩნდება, თუ არათანაკვეთადობის თეორემას და მდგომარეობათა სივრცეში, სადაც ტრაექტორიები მდებარეობს, ზღვრული რეგიონის არსებობის დაშვებას გავითვალისწინებთ. მკითხველს ვურჩევთ, რომ გრაფიკულად აავოს მდგომარეობათა ორგანზომილებიან სივრცეში მდებარე ზოგიერთი ტრაექტორია, რათა დარწმუნდეს, რომ ზემოთმოყვანილი ორი პრინციპის ძალით არსებობს მხოლოდ ორი შესაძლებლობა – ფიქსირებულ წერტილები და ზღვრული ციკლები.

უნდა აღინიშნოს, რომ პუანკარე-ბენდიქსონის თეორემა მხოლოდ ორი განზომილების შემთხვევაშია სამართლიანი, რადგან ჩაკეტილი კონტური სივრცეს მხოლოდ ამ შემთხვევაში ჰყოფს მრუდის „შიდა“ და „გარე“ არეებად. ამგვარად, ზღვრული ციკლის ფარგლებში დაწყებული ტრაექტორია გარეთ ვერასოდეს გავა და გარედან დაწყებული ტრაექტორიაც ზღვრული ციკლის შიგნით ვერასოდეს შეაღწევს. ეს შემთხვევა თვალსაჩინო მაგალითია იმის საჩვენებლად, თუ რამდენად მნიშვნელოვანია ტოპოლოგიური არგუმენტები დინამიკური სისტემების შესწავლისას. პუანკარე-ბენდიქსონის თეორემიდან მნიშვნელოვან შედეგს ვღებულობთ: შემოსაზღვრული სისტემისათვის არ გვექნება ქაოსური ტრაექტორიები მდგომარეობათა ორგანზომილებიან სივრცეში. *დიფერენციალური განტოლებებით აღწერილი სისტემებისთვის მდგომარეობათა სივრცის სულ ცოტა სამი განზომილება მაინც გვესაჭიროება, რათა ადვილი ჰქონდეს ქაოსს.*

ბრუსელატორის მოდელი გვიჩვენებს ტიპიურ შემთხვევას, როდესაც ვითარდება ზღვრული ციკლი. ინვარიანტული R არე მოიცავს განმზიდველ ფიქსირებულ წერტილს. ამ წერტილის მიდამოში დაწყებული ტრაექტორიები განიზიდებიან და (თუ R -ში მიმზიდველი კვანძი არ არსებობს) გეზს ზღვრული ციკლის მიმართულებით იღებენ (მტკიცდება, რომ ეს უკანასკნელი მოიცავს გამზიდველ წერტილს).

უნდა აღინიშნოს, რომ თუ სისტემის აღმწერი დიფერენციალური განტოლება ზემოთმოყვანილ შემთხვევასთან შედარებით რთულია, მაშინ ზღვრულმა ციკლებმა და ქაოსურმა ქმედებამ შესაძლოა ერთგანზომილებიანი სისტემის შემთხვევაშიც კი იჩინოს თავი. მაგალითად, განვიხილოთ ე.წ. **დიფერენციალური განტოლება დროში წანცვლებული არგუმენტით**:

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t) + \lambda g(t-T) \quad (3.15-1)$$

მიაქციეთ ყურადღება, რომ ამ განტოლების მარჯვენა მხარეში მყოფი მეორე შესაკრები დროის წარსული $t-T$ მომენტისათვის განსაზღვრულ g ფუნქციაზეა დამოკიდებული. თუ 3.3 პარაგრაფში მოცემული მეთოდის გამოყენებას და 3.15-1 განტოლების პირველი რიგის ავტონომიური დიფერენციალურ განტოლებების სიმრავლემდე დაყვანას შევეცდებით, ვნახავთ, რომ გვესაჭიროება მათი უსასრულო რაოდენობა! მდგომარეობათა სივრცის თვალსაზრისით, (3.15-1) განტოლების მიერ აღწერილი სისტემა, რა თქმა უნდა, არ არის ერთგანზომილებიანი. ასეთი სისტემისათვის ზღვრული ციკლისა და ქაოსური ქმედების არსებობა სულაც არ ნიშნავს არათანაკვეთადობის ან პუანკარე-ბენდიქსონის თეორემების დარღვევას.

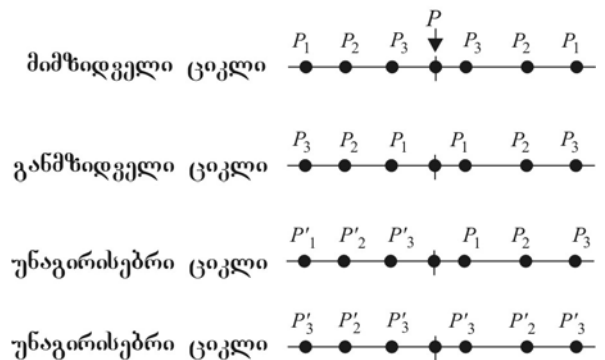
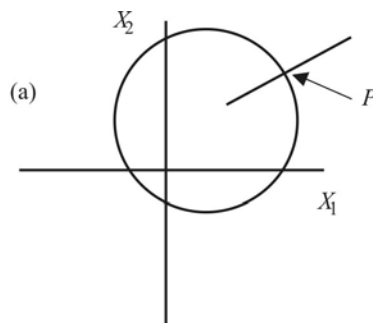
დაბოლოს შევნიშნოთ, რომ ტოპოლოგიაში ზოგიერთი მუნდამენტური თეორემა ერთმანეთთან აკავშირებს კვანძებისა და „უნაგირის“ წერტილთა რაოდენობებს (როგორც მდგომარეობათა სივრცის განზომილების ფუნქციას) და ტოპოლოგიას (მაგალითად, გააჩნია თუ არა მდგომარეობათა სივრცეს „ხვრელები“). მდგომარეობათა ორგანზომილებიანი სივრცეებისთვის მნიშვნელოვანია **პუანკარეს ინდექსის** თეორემა [იხილეთ Kaplan and Glass, 1995]. ზემოთმოყვანილი კვლევის უფრო მეტი განზომილების მქონე სივრცეებზე განვრცობისათვის იხილეთ GLA75.

3.16 პუნკარეს კვითები და ზღვრული ციკლების სტაბილურობა

ორი (ან მეტი) განზომილების მქონე მდგომარეობათა სივრცეში, შესაძლოა გამოვლინდეს ქმედების ახალი ტიპი, კერძოდ მოძრაობა ზღვრული ციკლის გასწვრივ. იბადება კითხვა: არის, თუ არა ასეთი მოძრაობა სტაბილური? ანუ თუ სისტემას ოდნავ ვუბიძგებთ ზღვრული ციკლიდან, დაუბრუნდება იგი ამ ციკლს (ასიმპტოტიკურად მაინც) თუ საერთოდ დაშორდება მას? როგორც ქვემოთ დავრწმუნდებით, რეალურ სისტემებში ორივე შემთხვევა შეიძლება მოხდეს.

ერთი შეხედვით, აბჯერადაც იგივე კვლევა უნდა ჩავატაროთ, როგორც ეს გავაკეთეთ კვანძებისა და განმზიდველი წერტილების შემთხვევაში. მაგრამ პუნკარემ აჩვენა, რომ საკმარისია გამოვიყენოთ ალგებრული და კონცეპტუალური თვალსაზრისით გაცილებით მარტივი მეთოდი. ეს მეთოდი ზღვრული ციკლის ე.წ. **პუნკარეს კვეთს** ეყრდნობა. პუნკარეს კვეთა დაკავშირებულია პირველ თავში დიოდის წრედის ქმედებისათვის გამოყენებულ სტრობოსკოპულ გამოსახულებებთან.

მდგომარეობათა ორგანზომილებიანი სივრცისთვის პუნკარეს მონაკვეთი ასეთია: ამ სივრცეში ვავლებთ მონაკვეთს, რომელიც კვეთს ზღვრულ ციკლს, როგორც ეს 3.12(ა) ნახაზზეა ნაჩვენები. მოცემული მონაკვეთის სახით შეგვიძლია გამოვიყენოთ X_1 და X_2 ღერძებიც. ზღვრული ციკლისა და მონაკვეთის გადაკვეთის წერტილი ავლიწმნით P სიმბოლოთი.



ნახ. 3.12 (a) პუნკარეს მონაკვეთი ზღვრულ ციკლს კვეთს P წერტილში. (b) პუნკარეს კვეთის წერტილების ოთხი შესაძლო შემთხვევა, როდესაც ტრაექტორიები მდებარეობენ ზღვრული ციკლის სიახლოვეს.

თუ მდგომარეობათა სივრცეში ტრაექტორიას ზღვრული ციკლის სიახლოვეს (მაგრამ არა ზღვრულ ციკლზე) მდებარე წერტილიდან დავიწყებთ, მაშინ ტრაექტორია პუნკარეს მონაკვეთს P-საგან განსხვავებულ წერტილში გადაკვეთს. პირველი გადაკვეთის წერტილი P_1 -ით აღვნიშნოთ. მომავალში ტრაექტორია პუნკარეს მონაკვეთს კვლავ P_2 , P_3 და ა.შ. წერტილებში გადაკვეთს. თუ დროთა განმავლობაში ზღვრული ციკლის სიახლოვეს განლაგებული ნებისმიერი საწყისი წერტილისთვის წერტილების მიმდევრობა P-კენ მიისწრაფვის, მაშინ ვიტყვით, რომ ადგილი აქვს **მიმზიდველი ზღვრული ციკლის** ანუ **სტაბილური ზღვრული ციკლის** შემთხვევას, ე.ი. ზღვრული ციკლი სისტემისთვის ატრაქტორია. თუ გადაკვეთის წერტილების მიმდევრობა (ზღვრული ციკლის მიდამოში დაწყებული ნებისმიერი ტრაექტორიისთვის) შორდება P-ს, მაშინ საქმე გვაქვს **განმზიდველი ზღვრული ციკლის** ანუ **არასტაბილური ზღვრული ციკლის** შემთხვევასთან. არსებობს კიდევ ერთი ვარიანტი, როდესაც წერტილები ერთი მხრიდან მიიზიდება, ხოლო მეორედან კი განიზიდება. ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ ადგილი აქვს „**უნაგირისებრ**“ ციკლს („უნაგირის“ წერტილის ანალოგიურად). განხილული შემთხვევები გრაფიკულად ნაჩვენებია 3.12 (b) ნახაზზე.

როგორ აღვწეროთ ეს მახასიათებლები რაოდენობრივად? ამისთვის ჩვენ ვიყენებთ ე.წ. **პუნკარეს ასახვის ფუნქციას** (ან მოკლედ, **პუნკარეს ასახვას**). მოცემული P_1 წერტილის მიხედვით (სადაც ტრაექტორია პუნკარეს მონაკვეთს გადაკვეთს) და სისტემის აღმწერი განტოლებების ინტეგრების მეშვეობით გადაკვეთის შემდგომი P_2 წერტილის განსაზღვრა შეგვიძლია. ამგვარად, უნდა არსებობდეს P_1 -ის P_2 -თან დამაკავშირებელი რაიმე სახის F მათემატიკური ფუნქცია $P_2 = F(P_1)$. (რა თქმა უნდა, F ფუნქციის პოვნა განტოლებების საწყისი სიმრავლის ამოხსნის ექვივალენტურია, რაც პრაქტიკაში შეიძლება რთული, ან სულაც შეუძლებელი იყოს.) საზოგადოდ, შეგვიძლია დავწეროთ

$$P_{n+1} = F(P_n) \tag{3.16-1}$$

F ფუნქცია არამარტო სისტემის აღმწერ საწყის განტოლებებზეა დამოკიდებული, არამედ პუნკარეს მონაკვეთის შერჩევაზეც.

ამოცანა 3.16-1. მარტივი ჰარმონიული რხევის შემთხვევაში, მდგომარეობების სივრცეში მდებარეობის ამსახველი $x(t)$ კოორდინატი და ოსცილატორის $v(t)$ სიჩქარე მოიცემა შემდეგნაირად:

$$x(t) = \omega_0 \cos(\omega t)$$

$$v(t) = -\omega x_0 \sin(\omega t)$$

თუ საწყისი პირობებია $x(t=0)=x_0$ და $v(t=0)=0$. პუნკარეს მონაკვეთისთვის შევარჩიოთ დადებითი x ღერძი და ვიპოვოთ შესაბამისი პუნკარეს ასახვის ფუნქცია. შემდეგ გავიმეოროთ იგივე პროცედურა პუნკარეს მონაკვეთისთვის დადებით x ღერძის მიმართ θ კუთხით.

ზღვრული ციკლის ანალიზისათვის, შევისწავლოთ F ფუნქციისა და მისი წარმოებულების თვისებები. უნდა აღინიშნოს ორი მნიშვნელოვანი საკითხი:

1. პუნკარეს მონაკვეთს საწყისი ორგანზომილებიანი პრობლემა ერთ განზომილებიანობამდე დაჰყავს.
2. პუნკარეს ასახვის ფუნქცია ამყარებს უფრო მეტად იტერაციულ (დროის სასრული ბიჯით), ვიდრე დიფერენციალურ (უსასრულოდ მცირე ბიჯი) კავშირს.

ბოლო შენიშვნა არსებითია, რადგანაც P_n -ის მეშვეობით F ფუნქცია გვაძლევს P_{n+1} -ს. ამ წერტილებს შორის არსებული დროის ინტერვალი მიახლოებით წარმოადგენს ზღვრული ციკლის ერთხელ შემოწერისთვის საჭირო დროს. მეორეს მხრივ, ერთგანზომილებიანი დიფერენციალური განტოლება $\dot{x} = f(x)$ გვიჩვენებს, თუ როგორ იცვლება x დროის უსასრულოდ მცირე შუალედში. F ფუნქციას ზოგჯერ *იტერაციული ასახვის ფუნქციას* უწოდებენ (ან მოკლედ *იტერაციული ასახვა*). (არაწრფივ დინამიკაში იტერაციული ასახვები მნიშვნელოვანია, ამიტომ მე-5 თავს მათი თვისებების შესწავლას დავუთმობთ.)

P წერტილი ზღვრულ ციკლში აკმაყოფილებს პირობას $P=F(P)$. ნებისმიერ P^* წერტილს, რომელიც დააკმაყოფილებს $P^*=F(P^*)$ პირობას, *ასახვის ფუნქციის* ფიქსირებული წერტილი ეწოდება. თუ ტრაექტორია პუნკარეს მონაკვეთს ზუსტად P^* წერტილში კვეთს, იგი P^* -ს ყოველ ციკლის შემდეგ დაუბრუნდება. ისევე როგორც დიფერენციალური განტოლებებისა და ფიქსირებული წერტილების შემთხვევაში, შეგვიძლია დავსვათ კითხვა, თუ რა მოსდის P^* -სთან ახლოს მდებარე P_1 -ს ანუ როგორ იცვლება

მანძილი P_1 -სა და P^* -ს შორის სისტემის ევოლუციასთან ერთად. ფორმალურად ვიხილავთ შემდეგ დამოკიდებულებას:

$$P_2 - P^* = F(P_1) - F(P^*) \quad (3.16-2)$$

და P^* წერტილის მიდამოში ვიყენებთ ტეილორის მწკრივად წარმოდგენის მეთოდს. გვექნება:

$$P_2 - P^* = F(P^*) + \left. \frac{dF}{dP} \right|_{P^*} (P_1 - P^*) + \dots - F(P^*) \quad (3.16-3)$$

თუ ჩვენ გამოვიყენებთ აღნიშვნას $d_i = (P_i - P^*)$, ვნახავთ, რომ

$$d_2 = \left. \frac{dF}{dP} \right|_{P^*} d_1 \quad (3.16-4)$$

ახლა განვსაზღვროთ M მახასიათებელი კოეფიციენტი პუანკარეს ასახვისთვის

$$M = \left. \frac{dF}{dP} \right|_{P^*} \quad (3.16-5)$$

M -ს ფლოგუეს კოეფიციენტი ან ლიაპუნოვის კოეფიციენტი ეწოდება.

$$d_2 = M d_1 \quad (3.16-6)$$

ზოგადი შემთხვევისათვის მივიღებთ:

$$d_{n+1} = M^n d_1 \quad (3.16-7)$$

თუ $M < 1$, მაშინ $d_2 < d_1$, $d_3 < d_2$ და ა.შ.: გადაკვეთის წერტილები P ფიქსირებულ წერტილს უახლოვდება. ამ შემთხვევაში გვაქვს მიმზიდველი ზღვრული ციკლი. თუ $M > 1$, მაშინ იტერაციათა რიგის ზრდასთან ერთად მანძილებიც იზრდება და ზღვრული ციკლი უკვე განმზიდველია. „უნაგირისებრი“ ციკლებისთვის $M = 1$, მაგრამ ასახვის ფუნქციის წარმოებული ციკლის ერთ მხარეს 1-ს აღემატება, ხოლო მეორე მხარეს კი 1-ზე ნაკლებია.

მდგომარეობათა ერთგანზომილებიანი სივრცეების შესაბამისი „უნაგირის“ წერტილების ანალოგიიდან მოსალოდნელია, რომ მდგომარეობათა ორგანზომილებიანი სივრცეების „უნაგირისებრი“ ციკლები იშვიათობაა. 3.4 ცხრილში თავმოყრილია ყველა შესაძლო შემთხვევა.

ამოცანა 3.16-2. მდგომარეობათა ორგანზომილებიანი სივრცეებისთვის M ვერ იქნება უარყოფითი. აჩვენეთ, რომ ეს არის შემთხვევა, როდესაც უნდა ვერიდოთ არათანაკვეთადობის თეორემის დარღვევას. მინიშნება: თუ M უარყოფითია, მაშინ კვეთის წერტილები უნდა გვხვდებოდეს P^* -ს ხან ერთ, ხან მეორე მხარეს იტერაციათა ყოველი მომდევნო რიგისათვის.

განვსაზღვროთ ციკლთან დაკავშირებული მახასიათებელი ექსპონენტა შემდეგი განტოლების მეშვეობით:

$$M = e^\lambda \tag{3.16-8}$$

ანუ

$$\lambda = \ln(M) \tag{3.16-9}$$

ცხრილი 3.4

შესაძლო ზღვრული ციკლები და მათი მახასიათებელი კოეფიციენტები მდგომარეობათა ორგანზომილებიანი სივრცისთვის.

მახასიათებელი კოეფიციენტი	მიმზიდველი ციკლი
$M < 1$	განმზიდველი ციკლი
$M > 1$	„უნაგირისებრი“ ციკლი
$M = 1$	(იშვიათად გვხვდება ორ განზომილებაში)

მახასიათებელი ექსპონენტი ასრულებს ლიაპუნოვის ექსპონენტის როლს, მაგრამ დროის ერთეული ისეა შერჩეული, რომ იგი წარმოადგენს პუანკარეს ერთი კვეთიდან მეორეში გადასვლისათვის საჭირო ინტერვალს.

ამრიგად, პუანკარეს კვეთის მეთოდი ზღვრული ციკლების შესაძლო ნიმუშების დახასიათებისა და ამ ციკლებში მომხდარი ცვლილებების ტიპების გააზრების საშუალებას

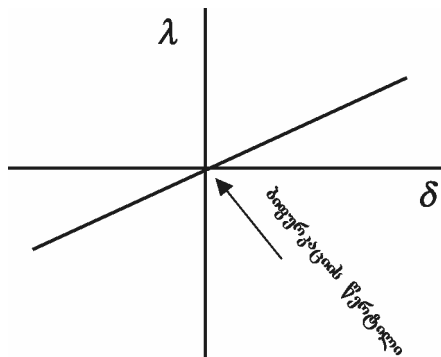
გვადლევს. თუმცა უმეტეს შემთხვევაში ჩვენ ვერ ვახერხებთ ასახვის F ფუნქციის ცალსახად პოვნას. ამიტომ იმის პროგნოზი, თუ რა ტიპისაა მოცემული სისტემის შესაბამისი ზღვრული ციკლი, საკმაოდ რთულია.

დანართ I-ში განხილულია შემოთმოყვანილი ცნებები ე.წ. ვან დერ პოლის ოსცილატორის ტიპის სისტემისათვის. J დანართში მოყვანილია ლაზერული დინამიკის ზოგიერთი მარტივი მოდელია, რომელთათვისაც ამ ცნებების გამოყენება მნიშვნელოვან შედეგებს იძლევა.

3.17 ბიფურკაციათა თეორია

ფიქსირებულ წერტილთან დაკავშირებული მახასიათებელი მნიშვნელობები დამოკიდებულია ამ სისტემის აღწერისათვის გამოყენებულ სხვადასხვა პარამეტრზე. პარამეტრების ცვლილებასთან ერთად, მაგალითად, როდესაც წრედში ძაბვას ან რეაქტორში ქიმიური ნივთიერებების კონცენტრაციებს ვარეგულირებთ, მახასიათებელი მნიშვნელობების ბუნება და აქედან გამომდინარე, ფიქსირებული წერტილის მახასიათებელიც შეიძლება შეიცვალოს. კერძოდ, კვანძი შეიძლება განმზიდველ ან „უნაგირის“ წერტილად იქცეს. პარამეტრების ცვლილებებით გამოწვეული ფიქსირებული წერტილების მახასიათებლების ცვლილებების (და მდგომარეობათა სივრცის მიმზიდველების სხვა ტიპების) შესახებ მოძღვრებას ბიფურკაციათა *თეორია* ეწოდება. (გაიხსენეთ, რომ ცნება *ბიფურკაცია* სისტემის ნებისმიერი მკვეთრი ცვლილების აღწერისთვის გამოიყენება. როდესაც პარამეტრის მნიშვნელობების ცვლილებასთან ერთად ფიქსირებული წერტილის მახასიათებელიც იცვლება, ამ წერტილის მიდამოში მყოფი ტრაექტორიების ქმედებაც შეიცვლება. ამიტომ ცნება “ბიფურკაცია” ამ შემთხვევაში სავსებით მისაღებია). სხვადასხვა შესაძლო ტიპის ბიფურკაციათა გამოვლენა და შესწავლა არაწრფივი დინამიკის მნიშვნელოვანი ასპექტია. მიუხედავად ამისა, ბიფურკაციათა თანამედროვე თეორიას გააჩნია შეზღუდული შესაძლებლობები ბიფურკაციის შესაძლო ტიპის პროგნოზისა და სისტემისთვის პარამეტრის იმ მნიშვნელობების დადგენის თვალსაზრისით, რომლისთვისაც ბიფურკაციის აქვს ადგილი. ამ საკითხებზე მსჯელობა მათი გააზრებისკენ გადადგმული ნაბიჯია. მოცემულ პარაგრაფში წარმოგიდგინებთ მდგომარეობათა ერთ და ორგანზომილებიან სივრცეებთან დაკავშირებით გამოყენებულ ბიფურკაციათა თეორიის მოკლე შესავალს. ამასთან, ჩვენ მხოლოდ იმ ბიფურკაციებს შევეხებით, რომლებიც თავს იჩენენ სისტემის მხოლოდ ერთი მაკონტროლებელი პარამეტრის ცვლილების შემთხვევაში. ბიფურკაციები უფრო დაწვრილებით B დანართშია განხილული. უნდა აღინიშნოს, რომ ბიფურკაციათა

ელემენტარული თეორია შეეხება მხოლოდ რომელიმე კონკრეტული ატრაქტორის სტაბილურობის ცვლილებას (ანუ, როგორც მე-4 თავში ვნახავთ, მიზიდულობის კონკრეტულ არეს).



ნახ3.13. მახასიათებელი მნიშვნელობა, როგორც მაკონტროლებელი პარამეტრის ფუნქციაა. $\delta < 0$ -სთვის ფიქსირებული წერტილი კვანძია, $\delta > 0$ -სთვის კი - განმზიდველი. როდესაც $\delta = 0$, ადგილი აქვს ბიფურკაციას.

ვინაიდან მდგომარეობების სივრცის სხვადასხვა ნაწილში სისტემას საზოგადოდ ფიქსირებული პარამეტრის მნიშვნელობების შემთხვევაში სხვადასხვა ატრაქტორები შეიძლება აღმოაჩნდეს, ამიტომ ხშირად საჭირო ხდება სრული დინამიკური სისტემის (ანუ მისი „გლობალური“ თვისებების) განხილვა ტრაექტორიების ქმედების დასადგენად, როდესაც საქმე გვაქვს ბიფურკაციასთან.

მაკონტროლებელი პარამეტრის ცვლილებით გამოწვეულ მოვლენებზე დასაკვირვებლად დიაგრამის ორ ტიპს გამოვიყენებთ. პირველი მათგანი, რომელიც ადრე უკვე ვიხილეთ, ბიფურკაციული დიაგრამაა, სადაც ფიქსირებული წერტილის (ან წერტილების) მდებარეობა წარმოადგენს მაკონტროლებელი პარამეტრის ფუნქციას. დიაგრამის მეორე ტიპის შემთხვევაში, ფიქსირებული წერტილის მახასიათებელ მნიშვნელობებს წამოვადგენთ, როგორც მაკონტროლებელი პარამეტრის ფუნქციას.

სათანადო ანალიზის ილუსტრაციის მიზნით, თავდაპირველად მდგომარეობების ერთგანზომილებიან სივრცეს განვიხილავთ. მდგომარეობათა ერთგანზომილებიან სივრცეში ფიქსირებულ წერტილს ერთი მახასიათებელი λ მნიშვნელობა გააჩნია. ანალიზისათვის უმნიშვნელოვანესია დაშვება, რომ λ უწყვეტად იცვლება რომელიმე პარამეტრის, მაგალითად, μ -ს ცვლილებასთან ერთად. მაგალითად, თუ μ -ს რაიმე მნიშვნელობისათვის $\lambda(\mu) < 0$, მაშინ ფიქსირებული წერტილი კვანძია. μ -ს ცვლილებასთან ერთად λ შეიძლება გაიზარდოს (ნაკლებად უარყოფითი გახდეს), გაიაროს ნულოვანი წერტილი და შემდეგ დადებითი გახდეს. როდესაც $\lambda > 0$, მაშინ კვანძი განმზიდველად გადაიქცევა.

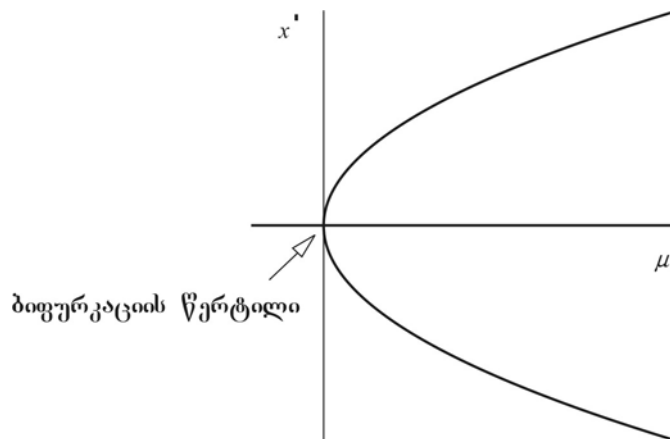
განვიხილოთ კონკრეტული შემთხვევა:

$$\dot{x} = (\mu - 1)(x - a) \quad (3.17-1)$$

ფიქსირებული წერტილი ამ შემთხვევაში არის $x = +a$, ხოლო მახასიათებელი მნიშვნელობაა $\mu - 1$. ამგვარად, $\mu < 1$ -თვის ფიქსირებული წერტილი კვანძია, ხოლო $\mu > 1$ -თვის - განმზიდველი. $\mu = 1$ -თვის ვამბობთ, რომ ადგილი აქვს ბიფურკაციას და კვანძი (სტაბილური ფიქსირებული წერტილი) გადადის განმზიდველში (არასტაბილური ფიქსირებული წერტილი).

ამოცანა 3.17-1. $\mu = 1$ შემთხვევაში ფიქსირებული წერტილის რომელ ტიპთან გვაქვს საქმე?

არაწრფივ დინამიკასთან დაკავშირებულ ლიტერატურაში მაკონტროლებელ პარამეტრს და დამოუკიდებელ ცვლადს, როგორც წესი, წინასწარ საზღვრავენ იმგვარად რომ, ბიფურკაციას ადგილი მაშინ აქვს, როდესაც პარამეტრი და ზოგიერთ შემთხვევაში დამოუკიდებელი ცვლადი 0-ის ტოლია. ამგვარად, წინა მაგალითისათვის ვადგენთ ახალ $\delta = \mu - 1$ პარამეტრს და ახალ $y = x - a$ ცვლადს. დინამიკური განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:



ნახ. 3.14. დიაგრამა კვანძი - განმზიდველის („უნაგირის“ წერტილი - კვანძი) ბიფურკაციისათვის. უწყვეტი მრუდი შეესაბამება კვანძს, წყვეტილი წრფე კი - განმზიდველს. შენიშნეთ, რომ $\mu < 0$ -თვის ფიქსირებული წერტილი საერთოდ არ არსებობს.

$$\dot{y} = \delta y \quad (3.17-2)$$

შემდეგ ვაგებთ მრუდს, სადაც მახასიათებელი მნიშვნელობა წარმოდგენილია როგორც δ პარამეტრის ფუნქცია (ნახაზი 3.13).

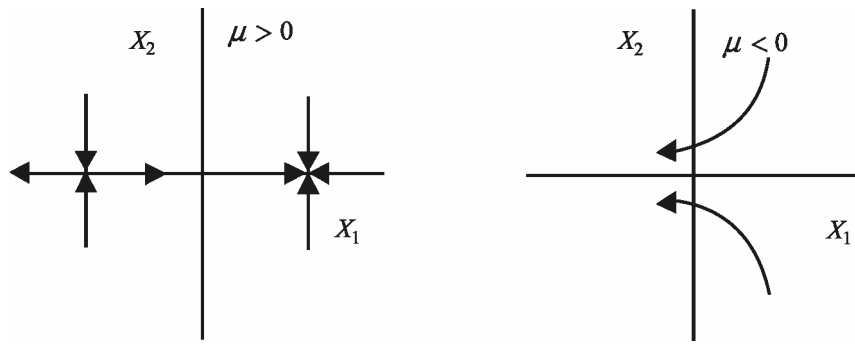
წინა მაგალითი, გარკვეულწილად ხელოვნურია. $\mu=1$ ბიფურკაციული მნიშვნელობისათვის, x -ის ყოველი მნიშვნელობა ფიქსირებული წერტილია. განვიხილოთ განსხვავებული ერთგანზომილებიანი მოდელი:

$$\dot{x} = \mu - x^2 \quad (3.17-3)$$

μ -ს დადებითი მნიშვნელობებისთვის არსებობს ორი ფიქსირებული წერტილი. ერთი მაშინ გვაქვს როდესაც $x = +\sqrt{\mu}$, მეორე კი როდესაც $x = -\sqrt{\mu}$. μ -ს უარყოფითი მნიშვნელობებისთვის ფიქსირებული წერტილები არ არსებობს (რა თქმა უნდა, იგულისხმება, რომ x ნამდვილი რიცხვია). თუ ორი ფიქსირებული წერტილისთვის ($\mu > 0$ პირობებში) მახასიათებელი მნიშვნელობების გამოსათვლელად გამოვიყენებთ (3.6-3) განტოლებას (რომელიც ფიქსირებული წერტილისთვის შესაბამის მახასიათებელ მნიშვნელობას განსაზღვრავს), ვნახავთ, რომ $x = -\sqrt{\mu}$ შემთხვევაში ფიქსირებული წერტილი განმზიდველია, ხოლო $x = +\sqrt{\mu}$ შემთხვევაში კი – კვანძი.

თუ დავიწყებთ $\mu < 0$ მნიშვნელობით და პარამეტრს გავზრდით, დავინახავთ, რომ $\mu = 0$ -ზე ადგილი ექნება ბიფურკაციას. პარამეტრის ამ მნიშვნელობისათვის საქმე გვაქვს “უნაგირის” წერტილთან, რომელიც μ -ს დადებით მნიშვნელობებში გადასვლასთან ერთად კვანძ-განმზიდველის წყვილად გარდაიქმნება. ამიტომ ვიტყვით, რომ $\mu = 0$ -ზე გვაქვს *კვანძი-განმზიდველის ბიფურკაცია*.

თუ 3.5 მრუდის შესაბამის ფუნქციას ისე შევცვლით, რომ ფიქსირებულმა წერტილმა თავი იჩინოს $x=0$ –ში, მაშინ 3.5 ნახაზი წარმოგვიდგენს $f(x)$ ფუნქციის ბიფურკაციულ ცვლილებას. 3.14 ნახაზი ნიშნავს გამზიდველი-კვანძი ბიფურკაციისა. შენიშნეთ, რომ გამზიდველი-კვანძი ბიფურკაციის წერტილი ანუ სისტემის ფიქსირებული წერტილი სტრუქტურულად არასტაბილურია. ასეთი წერტილები კი იმიტომაცაა მნიშვნელოვანი, რომ მათი არსებობა შესაძლო ბიფურკაციის მაჩვენებელია.



ნახ. 3.15. ფაზური გამოსახულებები „უნაგირის“ წერტილი-კვანძი ბიფურკაციის შემთხვევაში. ერთგანზომილებიანი ტრაექტორიები გადატანილია მდგომარეობათა ორგანზომილებიან სივრცეში, როგორც ეს ტექსტშია აღწერილი. $\mu > 0$ -სთვის გვაქვს „უნაგირის“ წერტილი $x_1 = -\sqrt{\mu}$ -ში, ხოლო კვანძი $x_1 = +\sqrt{\mu}$ მნიშვნელობისათვის. $\mu < 0$ -სთვის ფიქსირებული წერტილი არ არსებობს.

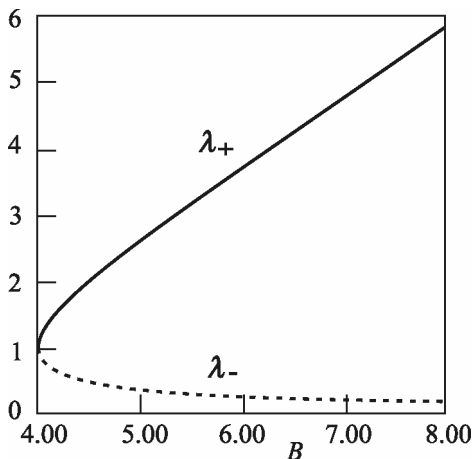
არაწრფივი დინამიკის ლიტერატურაში აღწერილ ბიფურკაციას „უნაგირის“ წერტილი-კვანძ ბიფურკაციას, ტანგენსურ ან გალუნვის ბიფურკაციას უწოდებენ. ამ სახელწოდებების არსი ჩვენთვის ცხადი გახდება, როდესაც ანალოგიურ ბიფურკაციებს უფრო მეტი განზომილების მქონე მდგომარეობათა სივრცისათვის განვიხილავთ. მაგალითად, თუ 3.14 ნახაზზე გამოსახულ მრუდებს წარმოვიდგენთ, როგორც ფურცლის განიკვეთას ნახაზის სიბრტყის მიერ, მაშინ სწორედ ბიფურკაციის წერტილში მოხდება ფურცლის გალუნვა. 3.5 ნახაზი ასევე გვიჩვენებს, რომ X ღერძი წარმოადგენს საკვლევი ფუნქციის მრუდის მხებს ბიფურკაციის წერტილში.

ტრაექტორიების ვიზუალიზაციის მიზნით, როგორც წესი, მდგომარეობათა სივრცეს განზომილებას უმატებენ. დამატებული X_2 ღერძის გასწვრივ მოძრავი ტრაექტორიები მიიზიდებიან X_1 -ის (საწყისი x ღერძი) მიმართულებით. ერთგანზომილებიანი განმზიდველი ამ შემთხვევაში ორგანზომილებიან „უნაგირის“ წერტილად გარდაიქმნება. ასე რომ, ამგვარ „აწეულ“ ან „დაკიდულ“ მდგომარეობების სივრცეში, ბიფურკაცია „უნაგირის“ წერტილისა და კვანძის ურთიერთქმედებას მოიცავს. აქედან გამომდინარე, ჩვენ ამგვარ მოვლენას „უნაგირის“ წერტილი-კვანძი ტიპის ბიფურკაციას ვუწოდებთ. 3.15 ნახაზი გვიჩვენებს ამგვარ ბიფურკაციულ სქემას.

მდგომარეობათა ერთგანზომილებიანი სივრცისთვის ბიფურკაციის სხვა შესაძლო ვარიანტიც არსებობს. B დანართში ბიფურკაციათა თეორია უფრო დაწვრილებით არის განხილული და მოცემულია შესაბამისი ლიტერატურის ჩამონათვალი.

ბიფურკაციები ორ განზომილებაში

პირველ რიგში დავიწყით ფიქსირებული წერტილებით, ხოლო შემდეგ გადავიდეთ ზღვრულ ციკლებზე. მდგომარეობების ორგანზომილებიან სივრცეში ფიქსირებულ წერტილს შესაძლოა გააჩნდეს ერთი მახასიათებელი მნიშვნელობა (გამონაკლისი შემთხვევა), ან, საზოგადოდ, ორი ნამდვილი მახასიათებელი მნიშვნელობა, ან სულაც ნამდვილი და კომპლექსური მნიშვნელობის ორი წყვილი (გაიხსენეთ, რომ ორი კომპლექსური მნიშვნელობა კომპლექსურად შეუღლებულ წყვილს ქმნის.) თუ ორი მახასიათებელი მნიშვნელობა რეალურია, მაშინ შეგვიძლია ავაგოთ მრუდი, რომელიც გამოსახავს ამ მნიშვნელობებს როგორც პარამეტრის ფუნქციას. მაგალითად, ბრიუსელატორის მოდელში მახასიათებელი მნიშვნელობები (3.14-8) განტოლების საშუალებითაა გამოსახული.



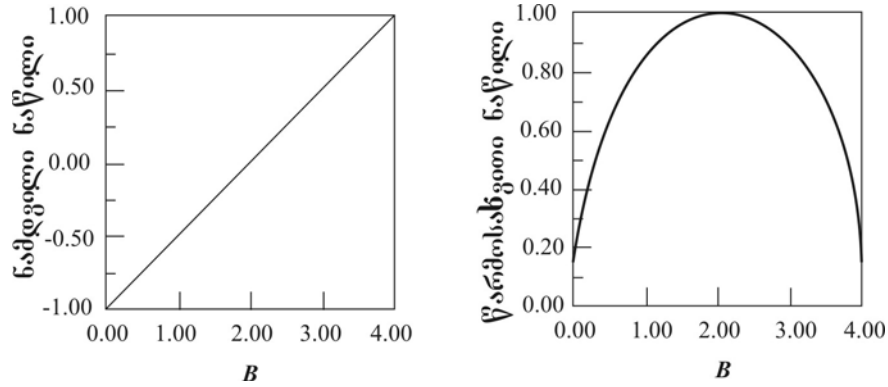
ნახ. 3.16. ბრუსელატორის მოდელის ფიქსირებული წერტილის შესაბამისი მახასიათებელი მნიშვნელობები პარამეტრის $B > 4$ მნიშვნელობებისას. $B < 4$ შემთხვევაში მახასიათებელი მნიშვნელობები კომპლექსურია.

$B > 4$ შემთხვევაში პარამეტრის მნიშვნელობები ისეთია, როგორც ეს 3.16 ნახაზზე ჩანს. $0 \leq B \leq 4$ შემთხვევაში მახასიათებელი მნიშვნელობები კომპლექსურია, როგორც რეალურ, ასევე წარმოსახვით ნაწილებში. 3.17 ნახაზი გვიჩვენებს მახასიათებელი მნიშვნელობების რეალურ და წარმოსახვით ნაწილებს ბრიუსელატორის მოდელისთვის.

ორგანზომილებიან სივრცეებში „უნაგირის“ წერტილი-კვანძი ბიფურკაციას, რომელიც შეესაბამება განზომილებიან ბიფურკაციას ერთ განზომილებაში, ხშირად აქვს ადგილი. ფიქსირებული წერტილების მიდამოში ტრაექტორიების ქმედების მოდელირებას ხშირად ე.წ. **განტოლებათა ნორმალური ფორმის** მეშვეობით ახდენენ (უფრო დაწვრილებით იხ. B დანართი):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mu - x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \end{aligned} \tag{3.17-4}$$

ეს განტოლებები მხოლოდ ფიქსირებული წერტილის მიდამოებშია მართებული.



ნახ. 3.17. λ_+ მახასიათებელი მნიშვნელობის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები, როგორც B პარამეტრის ფუნქციები ბრიუსელატორის მოდელისათვის. λ_- -თვის წარმოსახვითი ნაწილები უარყოფითია.

(3.17-4) განტოლებიდან ვპოულობთ, რომ არსებობს ორი ფიქსირებული წერტილი ($\mu > 0$ -თვის); ერთია $(x_1, x_2) = (+\sqrt{\mu}, 0)$, ხოლო მეორე $(-\sqrt{\mu}, 0)$. პირველი მათგანი კვანძია, მეორე კი – „უნაგირის“ წერტილი. μ -ს უარყოფითი მნიშვნელობებისათვის ფიქსირებული წერტილი არ არსებობს. როდესაც $\mu = 0$ ადგილი აქვს „უნაგირის“ წერტილი-კვანძი ტიპის ბიფურკაციას. 3.15 ნახაზი გვიჩვენებს შესაბამის ფაზურ გამოსახულებებს.

ზღვრული ციკლის ბიფურკაციები

როგორც ვნახეთ, მდგომარეობების ორგანზომილებიან სივრცეში ფიქსირებულ წერტილს კომპლექსური მნიშვნელობის მქონე მახასიათებელი მნიშვნელობები შეიძლება ჰქონდეს, რომლის დროსაც ტრაექტორიებს სპირალური სახის ფორმა გააჩნიათ. როდესაც მახასიათებელი მნიშვნელობები იცვლება კომპლექსური სიბრტყის მარცხენა მხრიდან მარჯვენისკენ, თავს იჩენს ბიფურკაცია ანუ ეს უკანასკნელი მაშინ ხდება, როდესაც მახასიათებელი მნიშვნელობის ნამდვილი ნაწილი ნულისაკენ მიისწრაფვის.

ორგანზომილებიან სისტემაში შესაძლოა ზღვრული ციკლის ტიპის ქმედებასაც ჰქონდეს ადგილი. ზღვრული ციკლის წარმოშობა და გაქრობა ბიფურკაციას უკავშირდება. სტაბილური ზღვრული ციკლის წარმოშობას *ჰოპფის ბიფურკაცია* ეწოდება (მათემატიკოს ე. ჰოპფის პატივსაცემად. მიუხედავად იმისა, რომ ბიფურკაციის ეს ტიპი კარგად შეისწავლა პუანკარემ და მოგვიანებით 1930-იან წლებში მას რუსი მეცნიერი ანდრონოვი იკვლევდა,

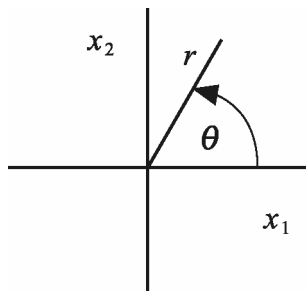
ჰოპფი პირველი გახლდათ, ვინც ეს იდეები მეტი განზომილების მქონე მდგომარეობების სივრცეების მიმართ განავრცო.) მას შემდეგ, რაც ზღვრული ციკლის შესწავლისთვის პუნკარეს მონაკვეთის გამოყენება შეგვიძლია და მდგომარეობების ორგანზომილებიანი სივრცისთვის პუნკარეს მონაკვეთი წრფის ნაწილია, ზღვრული ციკლის ბიფურკაციების შესწავლისთვის ერთგანზომილებიანი დინამიკური სისტემების ანალოგიური მეთოდების გამოყენება შეგვიძლია.

ჰოპფის ბიფურკაციის მოდელირება ჩვეულებრივი ფორმის განტოლებების მეშვეობით არის შესაძლებელი:

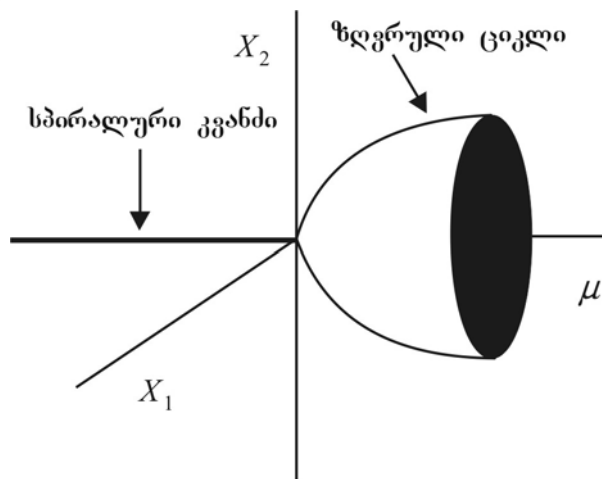
$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_1 \{ \mu - (x_1^2 + x_2^2) \} \quad (3.17-5a)$$

$$\dot{x}_2 = +x_1 + x_2 \{ \mu - (x_1^2 + x_2^2) \} \quad (3.17-5b)$$

ტრაექტორიების გეომეტრიული ფორმა უფრო ცხადი გახდება, თუ (x_1, x_2) კოორდინატებს (r, θ) პოლარულ კოორდინატებში გადავიყვანო.



ნახ. 3.18. პოლარული კოორდინატების განსაზღვრება. r წარმოადგენს რადიუს-ვექტორს, θ კი – კუთხეა რადიუსის ვექტორსა და დადებით x_1 ღერძს შორის.



ნახ. 3.19. დიაგრამა ჰოპფის ბიფურკაციისათვის. $\mu < 0$ შემთხვევაში ფიქსირებული წერტილი სპირალური კვანძია. $\mu > 0$ -თვის კი გვაქვს სპირალური განმზიდველი კოორდინატთა სათავეში; მოცემული სისტემის მიმზიდველი კი წარმოადგენს ზღვრულ ციკლს.

$$r = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)} \quad (3.17-6)$$

$$\tan \theta = \frac{x_2}{x_1}$$

პოლარული კოორდინატების გამოყენებით, (3.17-5) განტოლება შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$\dot{r} = r\{\mu - r^2\} \equiv f(r) \quad (3.17-7a)$$

$$\dot{\theta} = 1 \quad (3.17-7b)$$

ამოცანა 3.17-2. გამოიყენეთ (3.17-6) განტოლება და დაამტკიცეთ, რომ (3.17-7) გამომდინარეობს (3.17-5) განტოლებიდან.

ამჯერად შევისწავლოთ (3.17-7) განტოლებიდან მიღებული ტრაექტორიების გეომეტრიული ბუნება. (3.17-7b) განტოლების ამონახსნი მარტივია:

$$\theta(t) = \theta_0 + t \quad (3.17-8)$$

ანუ კუთხე დროის მსვლელობასთან ერთად იზრდება და გვაქვს სპირალური ტრაექტორია სათავის მიმართ. $\mu < 0$ შემთხვევაში r -სთვის ერთი ფიქსირებული წერტილი არსებობს და ეს წერტილი ზუსტად $r=0$ გახლავთ. $r=0$ წერტილზე $f(r)$ წარმოებულის გამოთვლით ვპოულობთ, რომ მახასიათებელი მნიშვნელობა μ -ის ტოლია. ამგვარად, $\mu < 0$ -სთვის წარმოებულს უარყოფითი ნიშანი აქვს, ხოლო ფიქსირებული წერტილი კი სტაბილურია და ფაქტობრივად სპირალური კვანძია.

$\mu > 0$ -სთვის ფიქსირებული წერტილი კოორდინატთა სათავეში სპირალური განმზიდველია და იგი არასტაბილურია. სათავის მიდამოში დაწყებული ტრაექტორიები სპირალის ფორმას სათავედან მოშორებით იღებენ, მაგრამ r -სთვის სხვა ფიქსირებული წერტილიც არსებობს და ეს წერტილი $r = \sqrt{\mu}$ გახლავთ. მოცემული ფიქსირებული წერტილი 2π პერიოდის მქონე ზღვრულ ციკლს შეესაბამება.

ამგვარად, ზღვრული ციკლი წარმოიქმნება $\mu=0$ ბიფურკაციული მნიშვნელობისათვის.
3.19. ნახაზი გვიჩვენებს დიაგრამას ჰოპფის ბიფურკაციისათვის.

მდგომარეობათა ორგანზომილებიან სივრცეში ბიფურკაციათა შესაძლო ტიპები შეზღუდულია. B დანართის მიხედვით, „უნაგირის“ წერტილი-კვანძი და ჰოპფის ბიფურკაციები ერთი მაკონტროლებელი პარამეტრის შემთხვევაში ყველაზე „ხშირია“.

როდესაც სამი ან მეტი განზომილების მქონე მდგომარეობათა სივრცეში „აღმოჩნდებით“, ბიფურკაციათა რიცხვი ძალიან დიდია.

J დანართში დაწვრილებით განხილულია ლაზერული სისტემისათვის დამახასათებელი ბიფურკაციები, რომლებიც მოცემულ თავში აღწერილ ბევრ თვისებას ავლენენ.

3.18. დასკვნა

მოცემულ თავში დინამიკური სისტემების ქმედების განხილვისთვის საჭირო მათემატიკური „მანქანა ავამოქმედეთ“. უკვე ვიცით, რომ ფიქსირებული წერტილები და მათი მახასათებელი მნიშვნელობები დინამიკის შესწავლისთვის უმნიშვნელოვანესი ცნებებია. აგრეთვე ვიცით, რომ მდგომარეობათა სივრცის განზომილება უმთავრეს როლს ასრულებს შემოსაზღვრულ სისტემებში პოტენციურად აღძვრადი ტრაექტორიების ტიპის განსაზღვრაში.

სისტემის მაკონტროლებელი პარამეტრის ცვლილებასთან ერთად ბიფურკაციის წერტილებში ფიქსირებული წერტილების ტიპი და მათ მიდამოში მდებარე ტრაექტორიების ბუნება მკვეთრად იცვლება. ბიფურკაციული დიაგრამები გამოიყენება ბიფურკაციის წერტილების სიახლოვეს მომხდარი ქმედების ცვლილების აღწერისთვის. მდგომარეობათა სივრცის განზომილება ჩვეულებრივი ტიპის პოტენციურად ბიფურკაციათა ტიპების რაოდენობას ზღუდავს.

ორი ან მეტი განზომილების მქონე მდგომარეობათა სივრცეებში შესაძლოა გამოვლინდეს პერიოდული ქმედების გამომხატველი ზღვრული ციკლები. ზღვრული ციკლის სტაბილურობა შეგვიძლია დავადგინოთ პუნკარეს მონაკვეთისა და პუნკარეს ასახვის ფუნქციის წარმოებულის მეშვეობით განსაზღვრული მახასათებელი კოეფიციენტის დახმარებით. ზღვრული ციკლი შესაძლებელია წარმოიქმნას ჰოპფის ბიფურკაციის შედეგად.

ამგვარი ზღვრული ციკლების ზრდა და ქმედება არაწრფივ დინამიკაში მნიშვნელოვან პარადიგმს ქმნის და ფუნდამენტური თვისებების დემონსტრირებას ახდენს, რასაც შეიძლება ადგილი ჰქონდეს მხოლოდ არაწრფივ სისტემებში. პირველ თავში განვიხილეთ სტაციონარულ გარემოში არსებული სისტემის დროზე დამოკიდებული ქმედება. ასეთი ქმედება წრფივი სისტემის შემთხვევაში არ არის შესაძლებელი. წრფივი სისტემა მხოლოდ იდეალიზებულ (და არარეალურ) შემთხვევაში ინარჩუნებს დროზე დამოკიდებულ ქმედებას. ამ დროს დისიპაციური ძალები (მაგალითად, ხახუნი) აბსოლუტურად უგულვებელყოფილია. თუ დისიპაციას დავუშვებთ, მაშინ წრფივი სისტემა საბოლოოდ დროზე დამოკიდებული გახდება და დროზე დამოკიდებული გარე ძალების მიერ იმართება. მეორეს მხრივ, არაწრფივ სისტემებს სპონტანურად შეუძლიათ გარემოს დროის მიმართ ინვარიანტობის დარღვევა

(მაკონტროლებელი პარამეტრის მნიშვნელობათა გარკვეული დიაპაზონისათვის მაინც). მდგომარეობათა ორგანოზომილებიანი სივრცის შემთხვევაში, შემოსაზღვრული სისტემის დროზე დამოკიდებული ქმედება წარმოადგენს ზღვრულ ციკლს.

3.19 დამატებითი ლიტერატურა

კურსები ფაზური და მდგომარეობათა სივრცეების შესახებ

J. B. Marion and S. T. Thornton, *Classical Dynamics of Particles and Systems*, 4th ed. (Saunders, Fort Worth, 1995). ტექსტი გამიზნულია ბაკალავრიატის სტუდენტებისათვის, რომელთაც ფიზიკა ძირითად საგნად აქვთ არჩეული. მასში მოცემულია არაწრფივი რხევები, საინტერესო შესავალი კურსი ფაზური სივრცის შესახებ.

J. W. Gibbs, *Elementary Principles in Statistical Mechanics* (C. Scribner's Sons, New York, 1902). კლასიკური და საინტერესო ნაშრომი, რომელშიც განხილულია ფუნდამენტალური საკითხები.

V. I. Arnold, *Geometric Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations* (Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1983). ერთ-ერთი საუკეთესო შესავალი კურსი დიფერენცირებულ განტოლებების მიმართ გეომეტრიული მეთოდების გამოყენების შესახებ.

A. P. Pippard, *Response and Stability* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985). ეს ვრცელი ესე ბაკალავრებისათვის მოიცავს იძულებით რხევებს, არაწრფივ ოსცილატორებს, ბიფურკაციებს, კატასტროფებს და ა. შ.

P. Hagedorn, *Nonlinear Oscillations* (Clarendon Press, Oxford, 1981). უფრო რთული ნაშრომი არაწრფივ სისტემათა მიმართ გამოყენებული ანალიზური მეთოდების შესახებ.

M. W. Hirsch and S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra* (Academic Press, New York, 1974). მოიცავს ჰუნკარე-ბენდიქსონის თეორემის დამტკიცებას.

J. A. Sanders and F. Verhulst, *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems* (Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1984). გვაწვდის მრავალი ანალიზური მეთოდის სისტემატიზებულ შესავალს, რომლებიც გამოიყენებიან არაწრფივი სისტემების ქცევის მიახლოებითი აღწერისას.

წრფივი ალგებრა და მათემატიკური მეთოდები

Mary L. Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences*, 2nd ed. (John Wiley and Sons, New York, 1983).

S. Hassani, *Foundations of Mathematical Physics* (Allyn and Bacon, Boston, 1991).

Seymour Lipschutz, *Linear Algebra* (Schaum's Outline Series)(McGraw-Hill, New York, 1968). იაფი წიგნი, რომელშიც მოცემულია ასობით ამოცანა და ამოხსნილი ამოცანები.

D. Gulick, *Encounters with Chaos* (McGraw-Hill, New York, 1992). მათემატიკური შესავალი იტერაციული ასახვებისა და დიფერენციალური განტოლებების შესახებ. მე-3 თავში მოცემულია განსაკუთრებით საინტერესო შესავალი მატრიცის წრფივ ალგებრაში. ახლავს ბევრი კარგი მაგალითი და სავარჯიშო.

არის ფრაქტალური საზღვრები და მიზიდულობის მესრისებრი არეები

C. Grebogi, S. W. McDonald, E. Ott, and J. A. Yorke, "Final State Sensitivity: An obstruction to predictability," *Phys. Lett. A* **99**, 415-418 (1983) and S. W. McDonald, C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke, "Fractal Basin Boundaries," *Physica D* **17**, 125-153 (1985).

E. G. Gwinn and R. M. Westervelt, "Fractal Basin Boundaries and Intermittency in the Driven Damped Pendulum," *Phys. Rev. A* **33**, 4143-55 (1986).

J. C. Alexander, J. A. Yorke, Z. You, and I. Kan, "Riddled Basins," *Int. J. Bifur. and Chaos* 2, 795-80 (1992).

J. C. Sommerer and E. Ott, "A physical system with qualitatively uncertain dynamics," *Nature* 365, 136-140 (1993). მოყვანილია მიზიდულობის მესრისებრი არეების საინტერესო მაგალითები.

J. F. Hagey, T. L. Carroll, and L. M. Pecora, "Experimental and Numerical Evidence for Riddled Basins in Coupled Chaotic Systems," *Phys. Rev. Lett.* 73^ 3528-31 (1994).

State Space Topological Considerations

See [Kaplan and Glass, 1995], pp. 253 ff.

L. Glass, "Combinatorial and topological methods in nonlinear chemical kinetics," *Chem. Phys.* 63, 1325-35 (1975).

[Guckenheimer and Holmes, 1983], pp. 50-51. A discussion of the Poincare Index Theorem.

ბრიუსელატორის მოდელი

G. Nicolis and I. Prigogine, *Exploring Complexity* (W. H. Freeman, San Francisco, 1989). ეს ვრცელი ნაშრომი მოიცავს დეტალურ მსჯელობას ბრიუსელატორის მოდელისა და მისი დინამიკის შესახებ.

პუანკარეს კვეთები

1-ლი თავის ბოლოს ჩამოთვლილ ნაშრომთა უმრავლესობაში მოყვანილია მსჯელობა პუანკარეს კვეთების შესახებ.

F. C. Moon and W. T. Holmes "Double Poincare Sections of A Quasi-Periodically Forced, Chaotic Attractor," *Physics Lett. A* 111, 157-60 (1985) and [Moon, 1992].

3.20 კომპიუტერული სავარჯიშოები

CE3-1. მდგომარეობების სივრცეში ვან დერ პოლის ზღვრული ციკლების განტოლების შესწავლისთვის გამოიყენეთ *Chaos Demonstrations* (ვან დერ პოლის მოდელის აღწერა იხ. დანართ I-ში.) ცვალეთ h პარამეტრი (I დანართში მოცემული R პარამეტრის ანალოგიურად) და დაადგინეთ, თუ როგორ გადაიზრდება რხევები მარტივი ჰარმონიულიდან (მცირე მნიშვნელობების შემთხვევაში) რელაქსაციურ რხევებში.

CE3-2. გამოიყენეთ *Chaos dynamics Workbench* და ძალის შესაბამისი წვერის ნულთან გატოლების გზით (რათა მდგომარეობების სივრცე ორგანზომილებიანად ვაქციოთ) შეისწავლეთ შოუ-ვან დერ პოლის ოსცილატორი. დააკვირდით დინამიკური ცვლადების დროზე დამოკიდებულებას და მდგომარეობათა სივრცის დიაგრამებს, როდესაც (I დანართში მოცემული R -ის შესაბამისი) A კოეფიციენტი იზრდება.

მდგომარეობების სამგანზომილებიანი სივრცე და ქაოსი

ქაოსი მომდინარეობს ორგანიზებული მოუწესრიგებლობიდან, უდროოდ და უმიზეზოდ. George Barker, *The First American Ode*.

4.1 მიმოხილვა

წინა თავში ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემებით აღწერილი დინამიკური სისტემების კვლევის რამდენიმე სტანდარტული მეთოდი წარმოვადგინეთ, მაგრამ ჩვენი მსჯელობა მდგომარეობათა ერთ და ორგანზომილებიანი სივრცეებით შემოიფარგლა. ახლა კი მზად ვართ, რომ სამგანზომილებიანი სისტემებისკენ მნიშვნელოვანი ნაბიჯი გადავდგათ. ეს გადამწყვეტი ნაბიჯია, არა მხოლოდ იმიტომ, რომ ჩვენ სამგანზომილებიან სამყაროში ვცხოვრობთ (გახსოვდეთ, რომ საუბარი მდგომარეობების სივრცეზეა და არა ფიზიკურ სივრცეზე), არამედ იმიტომ, რომ სამგანზომილებიანი დინამიკური სისტემები უჩვენებენ ისეთ ქმედებებს, რაც ერთი ან ორგანზომილებიანობის შემთხვევაში შეუძლებელია. ასეთი ახალი შესაძლებლობების მხრივ ქაოსი უმთავრესია.

თავდაპირველად მოვიყვანოთ არგუმენტს, თუ რატომ არის შესაძლებელი ქაოსური ქმედების აღბერა სამ განზომილებაში, ხოლო შემდეგ სამგანზომილებაში პოტენციურად წარმოქმნადი ფიქსირებულ წერტილთა ტიპების კლასიფიკაციის შესახებ ვისაუბრობთ. მოგვიანებით სტანდარტულ ანალიტიკურ მეთოდებს თანდათანობით „დავივიწყებთ“ და უფრო მეტად გრაფიკულ და გეომეტრიულ (ტოპოლოგიურ) არგუმენტებზე დაყრდნობით ვიმოქმედებთ. ამგვარი მიდგომა დინამიკური სისტემების თეორიაში არსებულ პროგრესს ასახავს. ფაქტობრივად, ამ თავის უმთავრესი მიზანი მდგომარეობათა სამგანზომილებიან სივრცეებში ტრაექტორიების, მიმზიდველებისა და ბიფურკაციების გეომეტრიული ფორმების შექმნაა.

შემდგომში განვიხილავთ მდგომარეობათა სამგანზომილებიან სივრცეებში არსებული დისიპაციური სისტემებისთვის პოტენციურ მიმზიდველების ტიპებსაც. ამ შემთხვევაში ვლინდება ორი ახალი ტიპი: (1) კვანძპერიოდული და (2) ქაოსური მიმზიდველები.

როდესაც სისტემის პარამეტრები შეცვლილია, დინამიკური სისტემის შემთხვევაშიც კი ქაოსური ქმედება შეიძლება გაჩნდეს ან გაქრეს განსხვავებული სახით: სავარაუდოდ, *ქაოსში გადასვლის* სხვადასხვა *გზები* არსებობს. ისინი ორ კატეგორიად შეიძლება დაიყოს, ისე რომ თითოეულ კატეგორიაში არაერთმა ქვეკატეგორიამ იჩინოს თავი. პირველი მათგანი მოიცავს ზღვრული ციკლების შესაბამის ბიფურკაციათა მიმდევრობებს (ანუ, რაც იგივეა, პუანკარეს ასახვასთან დაკავშირებულ ფიქსირებულ წერტილებს) (პირველ თავში განხილული ორმაგ პერიოდთა მიმდევრობა ამ კატეგორიას განეკუთვნება.) მეორე კატეგორია კი სხვადასხვა ფიქსირებულ წერტილთან ან ზღვრულ ციკლთან დაკავშირებული ტრაექტორიების ცვლილებებს მოიცავს. ვინაიდან ეს ცვლილებები გავლენას ახდენს მდგომარეობათა სივრცის მნიშვნელოვან ნაწილზე განფენილ ტრაექტორიათა მახასიათებლებზე, მათ „გლობალურ“ ბიფურკაციებს უწოდებენ (ინდივიდუალურ ფიქსირებულ წერტილებში მომხდარ ცვლილებებთან დაკავშირებული „ლოკალური“ ბიფურკაციებისაგან განსხვავებით).

გლობალური ბიფურკაციებისათვის დამახასიათებელია ჩვეულებრივიდან ქაოსურ ქმედებაში გადასვლით გამოწვეული (პირველ თავში განხილული ლორენცის მოდელის მსგავსი) მყისიერი ცვლილებები. მიუხედავად იმისა, რომ პარამეტრის ცვლილებასთან ერთად მიმზიდველის ბუნება მყისიერად იცვლება, ამგვარი ცვლილება ხშირად *ქაოსში გარდამავალი პროცესის* მანიშნებელია. ასეთ სიტუაციაში მდგომარეობათა სივრცეში ტრაექტორია ქაოსურად მოძრაობს და ბოლოსდაბოლოს იგი ჩვეულებრივი, პერიოდული მიმზიდველისაკენ მიისწრაფვის. მაკონტროლებელი პარამეტრის ცვლილებასთან ერთად ქაოსში გარდამავალი პროცესი სულ უფრო და უფრო მეტხანს გრძელდება, ვიდრე ასიმპტოტური ქმედება ქაოსურში არ გადაიზრდება.

როგორ განვითარდება ამგვარი რთული ქაოსური ქმედება? როგორ გადადის სისტემა ჩვეულებრივი, რეგულარული ქმედებიდან ქაოსურში? მდგომარეობათა სივრცეში ფიქსირებული წერტილებისა და ტრაექტორიების როგორმა ვარიაციებმა შეიძლება გამოიწვიოს ქმედების ამგვარი ცვლილებები?

რა თქმა უნდა, ამ შეკითხვებზე მარტივი პასუხი არ არსებობს. სხვადასხვა დინამიკური სისტემა განსხვავებულად იქცევა, როგორც პარამეტრის მნიშვნელობებზე, ასევე საწყის პირობებთან დამოკიდებულების თვალსაზრისით. ამგვარი სირთულეების მიზეზი ის არის, რომ დინამიკურ სისტემას შეიძლება პარამეტრის მნიშვნელობათა მოცემულ დიაპაზონში „თანაარსებული“ განსხვავებული მიმზიდველები გააჩნდეს (ლორენცის მოდელის ორი ფიქსირებული წერტილის ანალოგიურად). მიმზიდველების მახასიათებლების ცვლილებების გამო სისტემამ შეიძლება ქმედების სახე შეიცვალოს (მაგალითად, ზღვრული ციკლი არასტაბილური გახდეს და ორმაგი პერიოდის ზღვრული ციკლით იქნას

ჩანაცვლებული). ასევე შეიძლება მიზიდულობის არეების ერთიმეორესთან ურთიერთქმედებას ჰქონდეს ადგილი ისე, რომ ქაოსურ დინამიკას იწვევდეს. ყოველ ამგვარ შესაძლო შემთხვევას მოცემული თავის მომდევნო პარაგრაფებში განვიხილავთ.

4.2 ევრისტიკები

ჩვენ ძალიან მარტივად აღვწერთ, თუ რატომ ესაჭიროება ქაოსური ქმედების არსებობას მდგომარეობათა სამი ან მეტგანზომილებიანი სივრცეები. თავდაპირველად შემოვიფარგლოთ ისეთი დისიპაციური სისტემების განხილვით, რომელთა შესაბამისი ტრაექტორიები საბოლოო ჯამში მიმზიდველისაკენ მიისწრაფვის. როდესაც ახლომდებარე ტრაექტორიების დივერგენციაზე ვისაუბრებთ, მხედველობაში გვქეჩება მდგომარეობათა სივრცის მიზიდულობის არეში მდებარე ტრაექტორიების ქმედება.

გარკვეულწილად დაგვჭირდება დამოკიდებულება საწყისი პირობების მიმართაც. საწყისმა პირობებმა, რომლებიც მიმზიდველის ნაწილს არ წარმოადგენენ, სხვადასხვა მიმზიდველებისთვის შეიძლება ძლიერ განსხვავებული ხანგრძლივი ქმედება გამოიწვიოს. მიმზიდველის (ან მიმზიდველების) ბუნებით განსაზღვრული ამგვარი ქმედებები შესაძლოა იყოს დროის მიმართ დამოუკიდებელი, პერიოდული ან ქაოსური.

როგორც პირველ თავში ვიხილეთ, მდგომარეობათა სივრცეში ქაოსურ ქმედებას გამოხატავს ახლომდებარე ტრაექტორიათა დივერგენცია. ორ ახლომდებარე ტრაექტორიას შორის „მანძილი“ დროთა განმავლობაში ექსპონენციალურად იზრდება (დროის მცირე ინტერვალში მაინც). ბოლო შეზღუდვა აუცილებლად გასათვალისწინებელია, რადგან ჩვენ ვიხილავთ ისეთ სისტემებს, რომელთა ტრაექტორიები მდგომარეობათა სივრცეში რაიმე შემოსაზღვრულ არეში მდებარეობს.

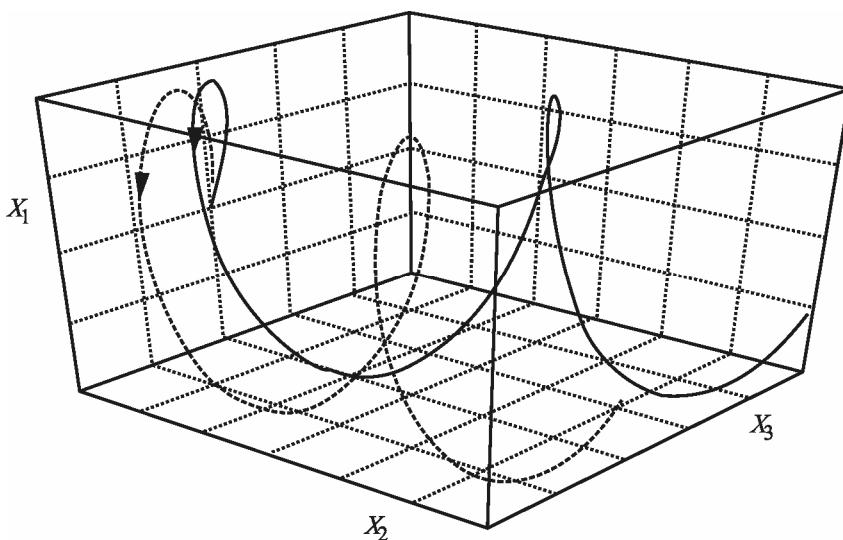
ამ შემთხვევაში ქაოსური ქმედებისადმი არსებობს სამი მოთხოვნა:

1. სხვადასხვა ტრაექტორიების მიერ ერთიმეორის გადაუკვეთელობა;
2. შემოსაზღვრული ტრაექტორიები;
3. ახლომდებარე ტრაექტორიების ექსპონენციალური დივერგენცია.

მდგომარეობათა ერთ ან ორგანზომილებიან სივრცეებში ეს პირობები ერთდროულად ვერ შესრულდება. ამაში ადვილად დავრწმუნდებით, თუკი ორგანზომილებიან სივრცეში

მდებარე ზოგიერთი ტრაექტორიის ესკიზს ქაღალდზე გადავიტანთ. სამი განზომილების შემთხვევაში ერთ დროს ახლომდებარე ტრაექტორიებმა შესაძლოა დივერგენციის პროცესი ერთიმეორის გადაფარვით გააგრძელონ. სამგანზომილებიანი ტრაექტორიების ესკიზების გაკეთება, ცხადია, გაცილებით რთულია. ქაოსურ ქმედებასთან დაკავშირებული სამივე მოთხოვნა რომ დაკმაყოფილდეს, ამის დასამტკიცებლად უხეში მათულის გამოყენებით შევეცადოთ სამ განზომილებაში ზოგიერთი ტრაექტორიის აგება. ალბათ შენიშნეთ, რომ ეს მოთხოვნები ბადებს ისეთ ტრაექტორიებს, რომლებიც თავიდან დივერგენციას განიცდიან, შემდეგ მდგომარეობათა სივრცის გავლით ისევ საწყისი მდებარეობისაკენ ბრუნდებიან და ამ პროცესში რთულ, ფენებად დაყოფილ სტრუქტურას ქმნიან. 4.1 ნახაზი მდგომარეობათა სამგანზომილებიან სივრცეში მდებარე დივერგენციის პროცესში მყოფი ტრაექტორიების სურათს წარმოგვიდგენს.

მდგომარეობათა სამი ან მეტგანზომილებიანი სივრცის უმნიშვნელოვანესი თვისება, რომელიც ხელს უწყობს ქაოსური ქმედების წარმოშობას, გამოიხატება ტრაექტორიების მიერ შემოსაზღვრულ არეში დარჩენის უნარში, ერთიმეორეში გადახლართვის ან გადაფარვის ფონზე (გადაკვეთის გარეშე!), წინა ქმედების ზუსტი განმეორების გარეშე. ცხადია, ამგვარ ტრაექტორიებთან დაკავშირებული გეომეტრია საკმაოდ უცნაური უნდა იყოს. ასეთ მიმზიდველებს *უცნაური მიმზიდველები* ეწოდება. მე-9 თავში შემოგთავაზებთ უცნაური მიმზიდველის უფრო ზუსტ განმარტებას ფრაქტალური განზომილების ცნებაზე დაყრდნობით.



ნახ. 4.1 მდგომარეობათა სამგანზომილებიან სივრცეში მდებარე ტრაექტორიების ესკიზი. შენიშნეთ, თუ როგორ ინარჩუნებს ახლომდებარე ტრაექტორიები ერთმანეთისაგან საკმაოდ განსხვავებულ ქმედებას შემოსაზღვრულობის პირობებში.

თუ მიმზიდველის მიდამოში ქმედება ქაოსურია ანუ ახლომდებარე ტრაექტორიები ექსპონენციალურ დივერგენციას უჩვენებენ, მაშინ ვამბობთ, რომ მიმზიდველი ქაოსურია. ბევრი ავტორი ტერმინებს *უცნაური მიმზიდველი* და *ქაოტური მიმზიდველი* სინონიმებად იყენებს, მაგრამ სინამდვილეში ისინი ერთმანეთისგან განსხვავდება [GOP84].

ახლომდებარე ტრაექტორიების დივერგენციასთანაა კავშირში ე. წ. *ლიაპუნოვის ექსპონენტი*. თუ ქაოსურ მიმზიდველთან ახლომდებარე ორი ტრაექტორია იწყება d_0 მანძილზე და $t=0$ დროში, მაშინ ტრაექტორიები ისეთ დივერგენციას განიცდიან, რომ t მომენტის შესაბამისი მათი $d(t)$ დაშორება აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$d(t) = d_0 e^{\lambda t} \quad (4.2-1)$$

(4.2-1) განტოლებაში შემავალ λ პარამეტრს ტრაექტორიების შესაბამისი ლიაპუნოვის ექსპონენტი ეწოდება. თუ λ დადებითი სიდიდეა, მაშინ ვიტყვით, რომ ქმედება ქაოსურია. (4.13 პარაგრაფში ლიაპუნოვის ექსპონენტას უფრო დაწვრილებით ვიხილავთ). ქაოსური ქმედების ამგვარი განმარტების მეშვეობით ვხვდებით, რომ ქაოსი ტრაექტორიების ერთობლიობის დამახასიათებელი თვისებაა.

ქაოსი ცალკეული ტრაექტორიის ქმედებაშიც ვლინდება. როდესაც ტრაექტორია მდგომარეობათა სივრცეში (ქაოსური) მიმზიდველისაკენ მიისწრაფვის, საბოლოო ჯამში იგი მანამდე განვლილი რომელიმე წერტილის სიახლოვეს მაინც დაბრუნდება (რა თქმა უნდა, ზუსტად ამ წერტილში ის ვერ დაბრუნდება, რადგან მაშინ ტრაექტორია პერიოდული იქნებოდა.) თუ ტრაექტორიები უჩვენებენ ექსპონენციალურ დივერგენციას, მაშინ გარკვეულ არეში ხელახლა შესვლისას ტრაექტორიის ქმედება განსხვავებული იქნება იმისაგან, რასაც იგი გამოავლენდა პირველი „სტუმრობისას“. ასე რომ, ამგვარი ქმედების „ჩანაწერს“ ქაოსური ხასიათი ექნება.

ზემოთ მოყვანილი მოსაზრებების საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ ერთი მაგალითი. წარმოიდგინეთ გორაკის წვერზე, არასტაბილურ წონასწორობის წერტილში მოთავსებული ბურთი, რომელიც უსასრულო ბრტყელი ზედაპირითაა გარშემორტყმული. ამგვარი მდგომარეობა საწყისი პირობების მიმართ ძალზე მგრძობიარეა. ბურთის ტრაექტორია დიდადაა დამოკიდებული მასზე ზემოქმედების ფორმაზე. მაგრამ თუ გორაკზე და სიბრტყეზე ხახუნის ძალა არ მოქმედებს, მაშინ ბურთი სამუდამოდ იგორებს და შემოსაზღვრული ტრაექტორიებიც არ იარსებებს. თუ ხახუნი არსებობს, მაშინ ბურთი საწყისი „ბიძგის“

სიძლიერისა და მიმართულების მიერ განსაზღვრულ რომელიმე წერტილში გაჩერდება (საბოლოო მდგომარეობა გარკვეულ საწყის პირობასთანაა დაკავშირებული).

ამ შენიშვნების არსი ის არის, რომ საწყის პირობებზე და ახლომდებარე ტრაექტორიების დივერგენციის მიმართ დამოკიდებულებასთან დაკავშირებული ჩვენი შეხედულებები მხოლოდ იმ სისტემებისთვის არის მისაღები, რომლებიც შემოსაზღვრულია და მე-3 თავში განსაზღვრული ტიპის მიმზიდველები გააჩნიათ (მე-8 თავში ვნახავთ, თუ როგორ ხდება ამ იდეების განზოგადება ჰამილტონის შემოსაზღვრულ სისტემებში, რომელთათვისაც დისიპაცია და მიმზიდველი არ არსებობს).

4.3 გზები, რომელთაც „ქაოსისაკენ მიყვავართ“

ქაოსის მოძღვრებამ ორი სიურპრიზის წინაშე დაგვაყენა: (1) ქაოსური ქმედება ყოველსმომცველია და (2) ქაოსისკენ მიმავალი გზები უნივერსალურია. რატომა არის ეს სიურპრიზი? მიუხედავად იმისა, რომ ისეთმა მათემატიკოსებმა, როგორც პუანკარეა, დიდი ხნის წინათ მიაგნეს ქაოსურ ქმედებას, ქმედების ეს ტიპი მაინც რაღაც არაჩვეულებრივთან და პათოლოგიურთან არის გაიგივებული. ნებისმიერ შემთხვევაში მისი დეტალური ბუნება საკვლევ არაწრფივ სისტემას უკავშირდება. მეცნიერებმა შეიმუშავეს ძირითადი სტანდარტული მეთოდები, რომელთა მეშვეობითაც წრფივი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნა შესაძლებელია, მაგრამ ეს მეთოდები გამოუსადეგარია არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებების შემთხვევაში. ასეთი განტოლებების მხოლოდ მცირე ნაწილის ამოხსნის გზებია ცნობილი და თითოეული მათგანი მეთოდის დახვეწას საჭიროებს. მათემატიკოსები იტყვიან, რომ თუ ამოხსნის განზოგადებული ხერხები არ არსებობს, მაშინ ამონახსნების ძირითად მახასიათებლებსაც ვერ მივიღებთ. დღესდღეისობით ვიცით, რომ არაწრფივი განტოლებების ამოხსნასთან დაკავშირებით გარკვეული უნივერსალობა არსებობს იმ სისტემებისათვის მაინც, რომელთაც თავისუფლების მცირე ხარისხი გააჩნიათ. უფრო საკვირველია, რომ ამგვარი უნივერსალობა თითქოს ვლინდება რეალურ ფიზიკურ, ქიმიურ თუ ბიოლოგიურ სისტემებში, რომელთა მოდელსაც ამ განტოლებების მეშვეობით ვქმნით.

უნივერსალობა, რომლის აღწერასაც ვაპირებთ, ქაოსში გარდამავალი მეთოდების პროცესებისათვისაა დამახასიათებელი. როგორ ცვლის (არაწრფივი) სისტემა საკუთარ ქმედებას ჩვეულებრივიდან (უძრავიდან ან პერიოდულიდან) ქაოსურში (ან პირიქით) გადასვლისას, როდესაც სისტემის მაკონტროლებელი პარამეტრები (ნელა) იცვლება? ექსპერიმენტის შემთხვევაში ვცვლით პარამეტრის მნიშვნელობას, „გავივლით“ გარდამავალ

სტადიებს და შემდეგ „ასიმპტოტურ“ ქმედებას ვაკვირდებით. ბოლო ოც წელიწადის განმავლობაში გაირკვა, რომ ქაოსისკენ ტენდენციას ბევრი რეალური სისტემა ავლენს და მათი აღწერისთვის გამოყენებული განტოლებები რამდენიმე კატეგორიად შეგვიძლია დავყოთ. როდესაც დავადგენთ, თუ გარდამავალი სტადიის რომელ ტიპს „ამჯობინებს“ სისტემა, ბევრი თვისობრივი და რაოდენობრივი დასკვნის გამოტანის შესაძლებლობა გვეძლევა.

გარდამავალი სტადიების შესახებ ორი მნიშვნელოვანი ფაქტია აღსანიშნავი: 1) მოცემული სისტემა პარამეტრის მნიშვნელობათა განსხვავებულ დიაპაზონებში ქაოსში გადასვლის არაერთ განსხვავებულ ფორმას შეიძლება ამჟღავნებდეს (გაიხსენეთ პირველ თავში მოყვანილი მაგალითები). 2) თავშეკავების მომენტი: არაწრფივი სისტემების თეორია დღესდღეობით იმ დონეზე არა არის განვითარებული, რომ გვითხრას, მოცემული სისტემისთვის პარამეტრის ამა თუ იმ დიაპაზონში გარდამავალი სტადიის რომელი ტიპი(ები) იჩენს თავს. „ქაოსისკენ მიმავალ გზებს“, ალბათ, მომავალში აუცილებლად აღმოაჩენენ, განსაკუთრებით მაშინ, როდესაც თავისუფლების უფრო მეტი ხარისხის მქონე სისტემები კარგად იქნება შესწავლილი. ამჟამად ცნობილი ქაოსისაკენ „მიმავალი გზები“ თავმოყრილია 4.1 ცხრილში.

გარდამავალი სტადიების პირველი (ლოკალური ბიფურკაციებით გამოწვეული) კატეგორიის შემთხვევაში, პარამეტრის მნიშვნელობების გარკვეული დიაპაზონისათვის სახეზეა ზღვრული ციკლი. როდესაც სისტემის რომელიმე მაკონტროლებელი პარამეტრი იცვლება, ზღვრული ციკლის ტიპის ქმედება „უჩინარდება“ და თავს იჩენს ქაოსური ქმედება. მეორე კატეგორიაში (გლობალური ბიფურკაციები), სისტემის ხანგრძლივი ქმედება არასტაბილური ფიქსირებული წერტილების, ციკლების ან მიმზიდველის (ან სხვადასხვა მიმზიდველების) გავლენას განიცდის.

ცხრილი. 4.1

ქაოსში გარდამავალი სტადიები
I.ლოკალური ბიფურკაციებით გამოწვეული
A.პერიოდის გაორმაგება
B.კვაზიპერიოდულობა
C.წყვეტა
1.ტიპი I (მხები ბიფურკაციის წყვეტა)
2.ტიპი II (ჰოპფის ბიფურკაციის წყვეტა)
3.ტიპი III (პერიოდის გაორმაგების წყვეტა)
4.“რელეს” ტიპის წყვეტა
II.გლობალური ბიფურკაციებით გამოწვეული
A.ქაოსური გარდამავალი სტადიები
B.კრიზისები

პარამეტრის ცვლილებასთან ერთად გარდამავალი ქმედების შესაბამისი ტრაექტორიები, უახლოვდებიან რა ფიქსირებულ წერტილს (ან ციკლს), სულ უფრო და უფრო რთულ ხასიათს იძენენ და ვლბულობთ ე.წ. *ქაოსურ გარდამავალ სტადიებს*. ამგვარი სტადიები უსასრულოდ გრძელდება და დროის ხანგრძლივ ინტერვალზე აღებული სისტემის ქმედება ქაოსური იქნება.

გარდამავალი სტადიების ზემოთმოყვანილი ორი კატეგორია ერთმანეთისაგან განსხვავდება მათი ანალიზისთვის საჭირო მათემატიკური და გეომეტრიული მეთოდების მხრივაც. ლოკალური ბიფურკაციების კატეგორიის შემთხვევაში პუნქარეს კვეთის მეთოდი საშუალებას გვაძლევს გავიაზროთ და აღვწეროთ გარდამავალი სტადია. არსებობს სამი ქვეკატეგორია, რომლებიც გვიჩვენებენ პუნქარეს კვეთის შესაბამისი ფიქსირებული წერტილების ევოლუციას პარამეტრების ცვლილებასთან ერთად. გლობალური ბიფურკაციების კატეგორიისათვის ანალიზი საჭიროებს თანმიმდევრული ტრაექტორიების განხილვას მდგომარეობათა სივრცის საკმაოდ დიდ არეში, რათა გამოჩნდეს, თუ რა სახის ზეგავლენას განიცდიან ეს ტრაექტორიები მდგომარეობათა სივრცის განსხვავებულ უბნებში სხვადასხვა ტიპის მიმზიდველების, ფიქსირებული წერტილებისა და ციკლების მხრივ. პუნქარეს კვეთები აქაც გამოიყენება, მაგრამ ცალკეული ფიქსირებული წერტილებისა და ზღვრული ციკლების შესახებ ინფორმაცია („ლოკალური ინფორმაცია“) აღარაა საკმარისი დროის დიდ ინტერვალზე აღებული ტრაექტორიების ბუნების განსაზღვრისთვის. ჩვენ მდგომარეობათა სივრცის სტრუქტურის შესახებ უფრო და გლობალური ხედვა გვესაჭიროება.

ჩვენ ასევე ვნახავთ, რომ გარდამავალ სტადიათა ეს ორი კატეგორია იმდენად არ განსხვავდება ერთიმეორისაგან, როგორც ეს ერთი შეხედვით ჩანს. მაგალითად, რომ შევისწავლოთ წყვეტის დინამიკა, საჭიროა თვალი გავადევნოთ ტრაექტორიებს მდგომარეობათა სივრცის საკმარისად დიდ უბანზე. და პირიქით, გლობალური ბიფურკაციები დამოკიდებული არიან ლოკალური ფიქსირებული წერტილების განლაგებასა და თვისებებზე. თუმცა, უნდა აღინიშნოს, რომ ზემოთმოყვანილი ორი კატეგორია დიდ დახმარებას გაგვიწევს ქაოსური ქმედების ჩამოყალიბების და განვითარების შესახებ ჩვენი წარმოდგენის შექმნაში.

4.4 სამგანზომილებიანი დინამიკური სისტემები

ახლა შემოვთავაზებთ მცირე ინფორმაციას იმ დინამიკური სისტემების შესახებ, რომლებიც მდგომარეობათა სივრცის სამი ცვლადის მეშვეობით აღიწერებიან. თუ დინამიკურ სისტემას სამი დამოუკიდებელი დინამიკური ცვლადი გააჩნია, რომელთა მნიშვნელობებიც დროის

მოცემულ მომენტში სისტემის მდგომარეობას სრულყოფილად აღწერს, მაშინ ასეთ სისტემას სამგანზომილებიანს ვუწოდებთ. სისტემისთვის შეგვიძლია პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალურ განტოლებათა სტანდარტული სისტემის შედგენა (იტერაციული ასახვის ფუნქციების მეშვეობით აღწერილი დინამიკური სისტემები განხილული იქნება მე-5 თავში.) ამ შემთხვევაში ცვლადებს აღვნიშნავთ x -ით, და გამოვიყენებთ 1, 2 და 3 ინდექსებს. ეს წესი მომავალში ნებისმიერი განზომილებისთვის გამოგვადგება. დიფერენციალური განტოლებები შემდეგ სახეს მიიღებენ:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3) \end{aligned} \quad (4.4-1)$$

პირველ თავში განხილული ლორენცის მოდელის განტოლებები სწორედ ასეთი სახისაა. ყურადღება მიაქციეთ, რომ f_1, f_2 და f_3 ფუნქციები დროს ცხადი სახით არ შეიცავენ და როგორც ვხედავთ, სისტემა ავტონომიურია.

აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ ზოგიერთი ავტორი განტოლებათა სისტემის ჩაწერისას იყენებს „ვექტორულ“ ფორმას:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) \quad (4.4-2)$$

აქ \vec{x} წარმოადგენს სამ x_1, x_2 და x_3 სიმბოლოს, ხოლო \vec{f} კი 4.4.1 განტოლებების მარჯვენა მხარეში მყოფ სამ ფუნქციას ანაცვლებს.

ორგანზომილებიანი სისტემების აღმწერი განტოლებები, სადაც გვაქვს დროზე დამოკიდებული „ძალისმიერი“ წევრები (ე.ი. განტოლებათა სისტემა არაა ავტონომიური) შეგვიძლია დავწეროთ 4.4.1 განტოლების ფორმით. ვთქვათ, ორგანზომილებიანი სისტემა მოიცემა შემდეგი განტოლებების მეშვეობით:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, t) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, t) \end{aligned} \quad (4.4-3)$$

შემოგვაქვს ახალი ცვლადი $x_3 \equiv t$, რის შედეგადაც სამი „ავტონომიური“ განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_3 &= 1 \end{aligned} \quad (4.4-4)$$

ამგვარად, მივიღეთ 4.4.1 სისტემის ანალოგიური ფორმა. როგორც ქვემოთ ვნახავთ, ეს მეთოდი გარკვეულწილად გამოსადეგია, როდესაც დროზე დამოკიდებული წევრი პერიოდულია დროში.

ამოცანა 4.4-1. ვან დერ პოლის „ძალისმიერი“ განტოლება გამოიყენება ელექტრული ტრიოდის წრედის აღწერისთვის, როდესაც საქმე გვაქვს პერიოდულ ელექტრულ სიგნალთან. ცვლადი $q(t)$ მუხტისთვის განტოლებას აქვს შემდეგი ფორმა:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \gamma(q) \frac{dq}{dt} + q(t) = g \sin \omega t$$

გამოიყენეთ ზემოთ განხილული მეთოდი და ეს განტოლება 4.4.1 განტოლების შესაბამისი სტანდარტული ფორმით წარმოადგინეთ.

4.5 ფიქსირებული წერტილები სამ განზომილებაში

რა თქმა უნდა, (4.4-1) განტოლებებით აღწერილი სისტემისთვის ფიქსირებული წერტილები მიიღება სამთავე ცვლადის დროის მიხედვით წარმოებულების ნულთან გატოლებით. [სამგანზომილებიანი ფორმით წარმოდგენის შემთხვევაშიც კი ორგანზომილებიანი ძალისმიერ სისტემებს ფიქსირებული წერტილები საერთოდ არ გააჩნია, რადგან, როგორც განტ. (4.4-4) განტოლებებიდან უკანასკნელი გვიჩვენებს, არასოდეს შესრულდება პირობა $\dot{x}_3 = 1 = 0$. ამგვარად, მათ საპოვნელად სხვა მეთოდი უნდა გამოვიყენოთ). თითოეული ფიქსირებული წერტილის ბუნების დასადგენად უნდა შევადგინოთ სისტემის იაკობიანი მოცემულ წერტილში და ვიპოვოთ ეს მახასითებელი მნიშვნელობები. იაკობიანს ექნება შემდეგი სახე:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (4.5-1)$$

მატრიცის მახასიათებელი მნიშვნელობების პოვნისას საქმე გვაქვს კუბურ განტოლებასთან, რომელთა λ_1 , λ_2 , და λ_3 ფესვები წარმოადგენენ საძიებელ მახასიათებელ მნიშვნელობას.

აღსანიშნავია ზოგიერთი მათემატიკური დეტალი: კუბური განტოლებების სტანდარტული თეორიის მიხედვით

$$\lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + r = 0 \quad (4.5-2)$$

ფორმის კუბური განტოლება შეგვიძლია ჩავანაცვლოთ შემდეგი „სტანდარტული“ ფორმით:

$$x^3 + ax + b = 0 \quad (4.5-3)$$

სადაც გამოყენებულია შემდეგი ჩასმები:

$$\begin{aligned} x &= \lambda + p/3 \\ a &= \frac{1}{3}(3q - p^2) \\ b &= \frac{1}{27}(2p^3 - 9qp + 27r) \end{aligned} \quad (4.5-4)$$

შემოვიყვანოთ ახალი ცვლადები:

$$\begin{aligned} s &= \left(\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} \right) \\ A &= (-b/2 + \sqrt{s})^{\frac{1}{3}} \\ B &= (-b/2 - \sqrt{s})^{\frac{1}{3}} \end{aligned} \quad (4.5-5)$$

x-ის მიმართ ჩაწერილი განტოლების სამი ფესვი ასე შეიძლება გამოისახოს

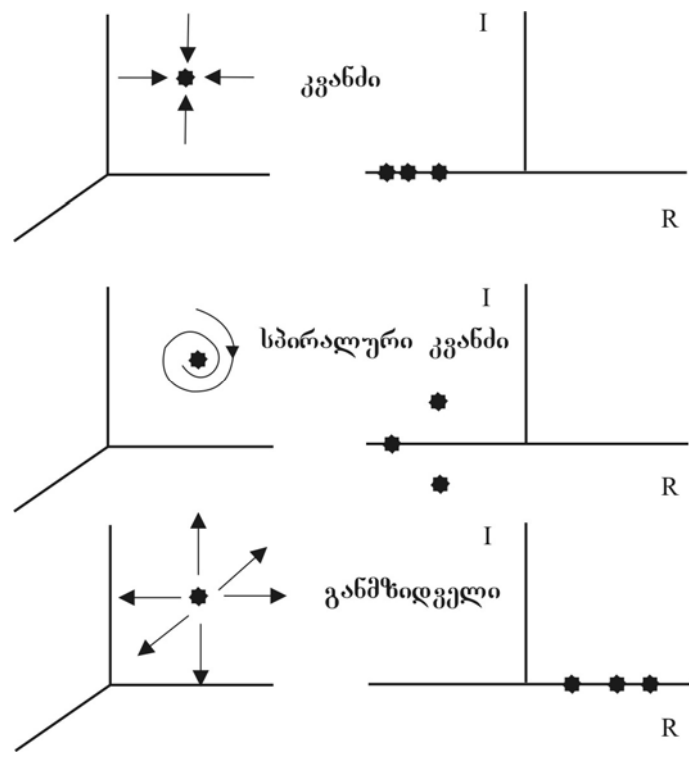
$$\begin{aligned} &A + B \\ &-\left(\frac{A+B}{2}\right) + \left(\frac{A-B}{2}\right)\sqrt{-3} \\ &-\left(\frac{A+B}{2}\right) - \left(\frac{A-B}{2}\right)\sqrt{-3} \end{aligned} \quad (4.5-6)$$

რომლებიდანაც მატრიცის მახასიათებელი მნიშვნელობების პოვნა კვლავ ძველ ცვლადებზე გადასვლით მიიღწევა. ამჯერად ამონახსნთა ცხადი სახით ჩაწერას არ შეუძლებით. მაგრამ აუცილებელია ამოხსნათა სახის ცოდნა.

არსებობს სამი შესაძლო შემთხვევა:

1. სამივე მახასიათებელი მნიშვნელობა ნამდვილია და ერთმანეთისაგან განსხვავდება ($s < 0$).
2. სამთავე მახასიათებელი მნიშვნელობა ნამდვილია და ორი მათგანი მაინც ერთმანეთის ტოლია ($s = 0$).
3. არსებობს ერთი ნამდვილი და ორი კომპლექსურად შეუღლებული მახასიათებელი მნიშვნელობა ($s > 0$).

მეორე შემთხვევა გარდამავალია და ცალკე განხილვას არ საჭიროებს. პირველი თავის მსგავსად, ფიქსირებული წერტილების ტიპების კლასიფიკაციას მათი მახასიათებელი მნიშვნელობების თვისებების მიხედვით მოვახდენთ. ქვემოთ ჩამოთვლილია სამგანზომილებიან სივრცეში პოტენციურად შესაძლებელი ფიქსირებული წერტილები. 4.2 და 4.3 ნახაზებზე სქემატურადაა გამოსახული ტრაექტორიათა „ქცევა“ ფიქსირებული წერტილების მიდამოებში. ასევე მოყვანილია კომპლექსური სიბრტყის დიაგრამა, რომელიც მოიცავს შესაბამის მახასიათებელი მნიშვნელობების რეალურ და წარმოსახვით ნაწილებს.



ნახ. 4.2 მარცხენა მხარეს მოყვანილია ფიქსირებული წერტილების ტრაექტორიების ესკიზები მდგომარეობათა სამგანზომილებიან სისტემაში. ფიქსირებული წერტილის მდებარეობა ვარსკვლავითაა აღნიშნული. მარჯვნივ გამოსახულია ფიქსირებული წერტილების მახასიათებელი მნიშვნელობები კომპლექსურ სიბრტყეში. წარმოსახვითი ნაწილი დატანილია ვერტიკალურ ღერძზე, ხოლო ნამდვილი ნაწილი – ჰორიზონტალურ ღერძზე.

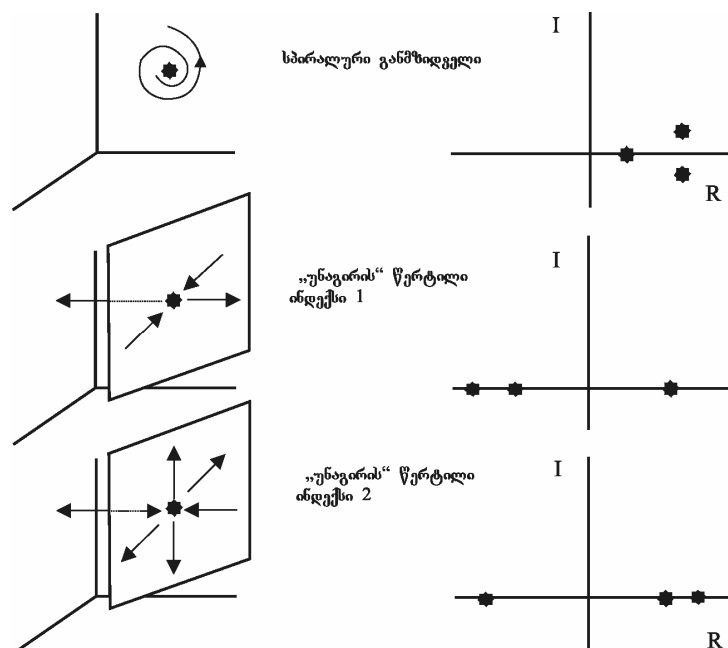
სამი ან მეტი განზომილების მქონე მდგომარეობათა სივრცეებისთვის შემოჰყავთ ე.წ. ფიქსირებული წერტილის *ინდექსი*.

ფიქსირებული წერტილის *ინდექსი* წარმოადგენს მოცემული წერტილის იმ მახასიათებელ მნიშვნელობათა რიცხვს, რომელთა ნამდვილი ნაწილი დადებითია.

გეომეტრიული თვალსაზრისით, ინდექსი ფიქსირებული წერტილის მიმართ გარე სიმრავლის განზომილების ტოლია. კვანძისათვის (რომელსაც გარე სიმრავლე არ გააჩნია) ინდექსი ნულის ტოლია. განმზიდველისათვის ინდექსი 3-ის ტოლია მდგომარეობათა სამგანზომილებიანი სივრცის შემთხვევაში. „უნაგირის“ წერტილის ინდექსი ერთის ტოლია, თუ მისი გარე სიმრავლე მრუდს წარმოადგენს, ხოლო 4.3 ნახაზზე გამოსახული ზედაპირის შემთხვევაში კი უდრის ორს.

მდგომარეობათა სამგანზომილებიანი სივრცის შემთხვევაში არსებობს ფიქსირებული წერტილების ოთხი ძირითადი ტიპი:

1. **კვანძი.** ყველა მახასიათებელი მნიშვნელობა ნამდვილი უარყოფითი რიცხვია. კვანძის მიდამოში ყოველი ტრაექტორია მიიზიდება ფიქსირებული წერტილის მიერ ისე, რომ არ ხდება შეკრული კონტურის შექმნა.



ნახ. 4.3 სხვა ნიმუშები ფიქსირებული წერტილების მიდამოებში მყოფი ტრაექტორიებისა, მდგომარეობათა სამგანზომილებიან სივრცის შემთხვევაში. „უნაგირის“ წერტილების ორი ტიპისათვის შესაძლო სპირალური ვერსიები არაა მოყვანილი. მარჯვნივ, კომპლექსურ სიბრტყეზე დატანილია ფიქსირებული წერტილების მახასიათებელი მნიშვნელობები. ინდექსი-1 ტიპის სპირალური „უნაგირის“ წერტილის შემთხვევაში ტრაექტორიები ჩაეხვევა შიდა სიმრავლის ზედაპირზე ფიქსირებული წერტილის მიმართულებით. ინდექსი-2 ტიპის სპირალური „უნაგირის“ წერტილისთვის კი ტრაექტორიები წარმოადგენენ ფიქსირებული წერტილიდან გამომავალ განშლად სპირალებს.

1ს. **სპირალური კვანძი.** ყოველ მახასიათებელ მნიშვნელობას გააჩნია უარყოფითი დადებითი ნაწილი, მაგრამ ორი მათგანის წარმოსახვითი ნაწილი ნულისაგან განსხვავებულია (და ქმნის კომპლექსურად შეუღლებულ წყვილს). კვანძთან მიახლოებისას ტრაექტორიები სპირალურად ჩაეხვევიან.

2. **განშზიდველი.** ყველა მახასიათებელი მნიშვნელობა ნამდვილი დადებითი რიცხვია. **განშზიდველის** მიდამოში გამავალი ნებისმიერი ტრაექტორია ამ წერტილისაგან განიზიდება.

2ს. **სპირალური განშზიდველი.** ყველა მახასიათებელ მნიშვნელობას გააჩნია დადებითი ნამდვილი ნაწილი, ხოლო ორ მათგანს არანულოვანი წარმოსახვითი ნაწილი აქვს (ისინი კომპლექსურადაა შეუღლებული). განიზიდებიან რა ფიქსირებული წერტილის მიმართ, ტრაექტორიები ღებულობენ სპირალურ ფორმას.

3. **„უნაგირის“ წერტილი – ინდექსი-1.** ყოველი მახასიათებელი მნიშვნელობა ნამდვილი რიცხვია. ერთი დადებითია, ხოლო ორი უარყოფითი. ტრაექტორიები მიისწრაფვიან საყრდენი წერტილისაკენ (შიდა სიმრავლის შემთხვევაში) და განიცდიან დივერგენციას მის მიმართ (გარე სიმრავლე).

3ს. **სპირალური „უნაგირის“ წერტილი – ინდექსი-1.** უარყოფითი ნამდვილი ნაწილის მქონე ორი მახასიათებელი მნიშვნელობა კომპლექსურად შეუღლებულ წყვილს ქმნის. ტრაექტორიები სპირალურად ჩაეხვევიან „უნაგირის“ წერტილის მიმართ შიდა სიმრავლის ზედაპირთან მიახლოებისას.

4. **„უნაგირის“ წერტილი – ინდექსი-2.** ყველა მახასიათებელი მნიშვნელობა ნამდვილი რიცხვია. ორი დადებითია, ერთი კი უარყოფითი. ტრაექტორიები „უნაგირის“ წერტილისაკენ მიისწრაფვიან მრუდის გასწვრივ (შიდა სიმრავლე) და განიცდიან დივერგენციას ზედაპირზე (გარე სიმრავლე).

4s. სპირალური „უნაგირის“ წერტილი – ინდექსი-2. დადებითი ნამდვილი ნაწილების მქონე ორი მახასიათებელი მნიშვნელობა კომპლექსურად შეუღლებულ წყვილს ქმნის. ტრაექტორიები ღებულობენ სპირალურ ფორმას ზედაპირზე, განიცდიან რა დივერგენციას „უნაგირის“ წერტილის მიმართ.

სანამ მომდევნო პარაგრაფებზე გადავალთ, მოვლენებს ოდნავ წინ გავუსწრებთ და აღვნიშნავთ, რომ მდგომარეობათა ერთი ან ორგანზომილებიანი სივრცეების შემთხვევაში „უნაგირის“ წერტილების შიდა და გარე სიმრავლეები მდგომარეობათა სივრცეში ტრაექტორიების გლობალური (ფართომასშტაბიანი) ქმედების ორგანიზებისაკენ მიისწრაფვიან. აღმოჩნდება, რომ რომელიმე მაკონტროლებელი პარამეტრის შეცვლისას, როდესაც გარე და შიდა სიმრავლეები ერთმანეთს უახლოვდებიან, მთლიანი სისტემის ქმედება საგრძნობლად შეიძლება შეიცვალოს.

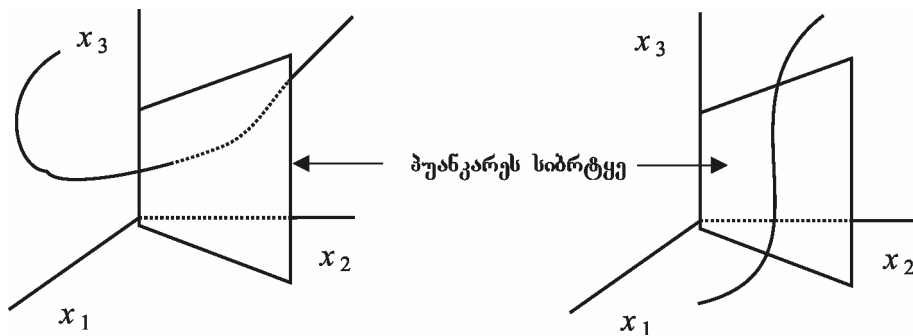
B დანართი მდგომარეობათა სამგანზომილებიანი სივრცეში არსებული ფიქსირებული წერტილების ბიფურკაციებს ეძღვნება.

4.6 ზღვრული ციკლები და პუანკარეს კვეთები

როგორც მე-3 თავში ვნახეთ, ორი ან მეტგანზომილებიანი დინამიკური სისტემების ქმედება დროის დიდი ინტერვალის შემთხვევაში განმეორებადი, პერიოდული ზღვრული ციკლების შესაბამის ქმედებაში შეიძლება გადაიზარდოს. აგრეთვე ვნახეთ, რომ პუანკარეს კვეთის მეთოდის გამოყენებით ზღვრული ციკლების განზომილების შემცირება შესაძლებელია და მათი ანალიზი საგრძნობლად მარტივდება.

თავდაპირველად ვაღვანთ პუანკარეს კვეთის კონსტრუქციას მოცემული სისტემისთვის. მდგომარეობათა სამგანზომილებიანი სივრცის შემთხვევაში პუანკარეს კვეთა **პუანკარეს სიბრტყის** შერჩევის გზით დგინდება, რომელიც ზედაპირზე მონიშნავს იმ წერტილებს, რომელთაც გაივლის მოცემული ტრაექტორია ზედაპირის გადაკვეთისას (უმეტეს შემთხვევებში სიბრტყის შერჩევა არ არის გადამწყვეტი, ვინაიდან ტრაექტორიები ზედაპირს მართობულად კვეთენ, იხ. ნახ. 4.4). ისეთი ავტონომიური სისტემებისთვის, როგორცაა ლორენცის მოდელის განტოლებები, შევარჩევთ რომელიმე მოხერხებულ სიბრტყეს მდგომარეობათა სივრცეში (მაგალითად, XY სიბრტყე ლორენცის განტოლებებისთვის). როდესაც ტრაექტორია Z -ის უარყოფითი მნიშვნელობებიდან დადებითში გადასვლისას ამ სიბრტყეს გადაკვეთს, მოვინიშნავთ გადაკვეთის წერტილს.

თუ სისტემას გააჩნია ბუნებრივი პერიოდი, მაგალითად, მასზე მოქმედი ძალა პერიოდულია, მაშინ პუნკარეს სიბრტყედ მოცემული ძალის რომელიმე ფაზური ზედაპირი შეგვიძლია ავირჩიოთ. ასეთ შემთხვევაში პუნკარეს კვეთა წააგავს მექანიკური სისტემის „სტრობოსკოპულ გამოსახულებას“, რომლის ჩაწერაც ხდება სისტემის მოძრაობისას სტრობოსკოპული ნათურის ანთებით ყოველ პერიოდზე ერთხელ. ამ თვალსაზრისით შეგვიძლია განვაცხადოთ, რომ პუნკარეს კვეთა „ყინავს“ დინამიკური სისტემის მოძრაობას.

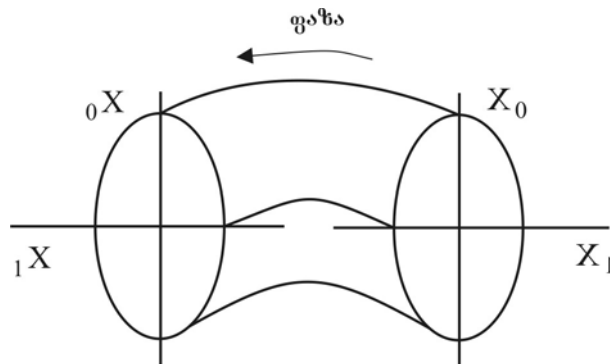


ნახ. 4.4 პუნკარეს კვეთა მდგომარეობათა სამგანზომილებიანი სივრცისთვის. მარცხნივ ტრაექტორია განივად კვეთს პუნკარეს სიბრტყეს. მარჯვნივ მოყვანილ ნახაზზე არა გვაქვს განივი კვეთა, რადგანაც გარკვეულ მანძილზე ტრაექტორია სიბრტყის პარალელურადაა განლაგებული.

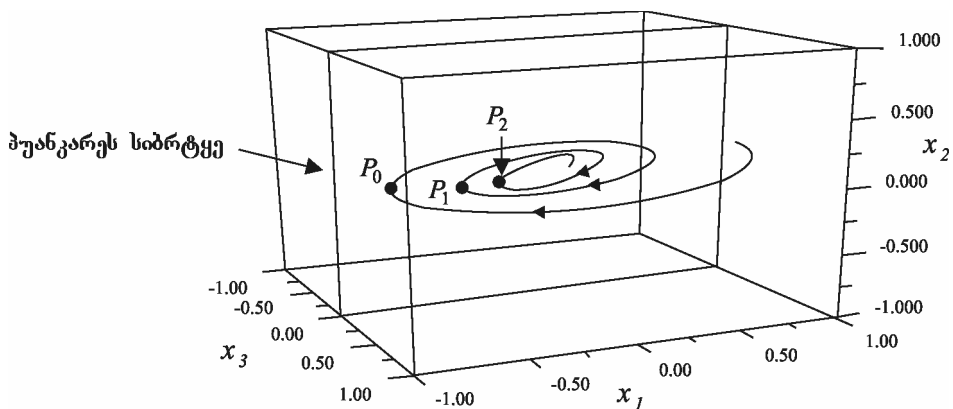
მეტი სიზუსტისთვის განვიხილოთ X_0 და X_1 დამოუკიდებელი ცვლადებით აღწერილი პერიოდული ძალის მოქმედების შემთხვევა (ქვემოთ მოყვანილი ყველა შედეგი სამართლიანი იქნება ავტონომიური შემთხვევებისთვისაც) 4.5 ნახაზზე პუნკარეს კვეთა ღვინდება იმ X_0 და X_1 მნიშვნელობების დაფიქსირების გზით, როდესაც პერიოდული ძალის ფაზა რომელიმე გარკვეულ მნიშვნელობას აღწევს (საერთოდ, ფაზა 0 -სა და 2π -ისაა). ამგვარად, გვექნება მდგომარეობათა სამგანზომილებიან სივრცე, რომელიც გეომეტრიულად წარმოიქმნება X_0X_1 სიბრტყის რომელიმე ღერძის ირგვლივ ბრუნვის შედეგად.

მას შემდეგ, რაც დასრულდება გარდამავალი სტადიები, სისტემის ასიმპტოტური ქმედება იქნება პერიოდული და ეს პერიოდი $g(t)$ ძალის პერიოდის ტოლია. ამის შემდგომ პუნკარეს კვეთა წარმოდგენილი იქნება მხოლოდ ერთი წერტილით, რომლის კოორდინატებსაც სიბრტყეზე x_1^* -ითა და x_2^* -ით აღვნიშნავთ. მეორეს მხრივ, თუ დროის ხანგრძლივ ინტერვალზე აღებული ქმედება პერიოდული ძალის სუბჰარმონიკაა, მაგალითად $T=NT_f$ პერიოდით (სადაც N დადებითი მთელი რიცხვია), მაშინ პუნკარეს კვეთა შედგება N

რაოდენობის წერტილებისგან, რომელთა კოორდინატებიც შეიძლება აღინიშნოს $(x_1^*, x_2^*)_{i=1, \dots, N}$ სიმბოლოებით.



ნახ. 4.5. პერიოდული სისტემისთვის მდგომარეობათა სივრცე წარმოადგენს ღერძის ირგვლივ X_0 - X_1 სიბრტყის ბრუნვის შედეგად მიღებულ სამგანზომილებიან ცილინდრს. აქ ელიფსური ტრაექტორია მდებარეობს სამგანზომილებიან თორზე. მოქმედი ძალის ფაზა შეესაბამება ტრაექტორიის წერტილის პერიფერიულ მდებარეობას.



ნახ. 4.6. P_0, P_1 და P_2, \dots წერტილები წარმოადგენენ ჰუანკარეს სიბრტყის ($x_3=0$ წერტილზე გამავალი სიბრტყე) მიერ ცალკეული ტრაექტორიის გადაკვეთის წერტილთა მიმდევრობას, როდესაც ტრაექტორია მიემართება $x_3 > 0$ -დან $x_3 < 0$ -სკენ.

მეტი მოხერხებულობისათვის დავაფიქსირით პუნქარეს სიბრტყისა და ტრაექტორიის გადაკვეთის ყოველი წერტილი. მაგალითად, 4.6 ნახაზი გვიჩვენებს P_0, P_1 და P_2, \dots წერტილების მიმდევრობას, როდესაც ტრაექტორია უახლოვდება მიზიდულობის ზღვრულ ციკლს მდგომარეობების სამგანზომილებიან სივრცეში. (შეადარეთ 4.6 ნახაზი 3.13-ს) მკითხველი უნდა გავაფრთხილოთ, რომ ლიტერატურაში არსებულ ზოგიერთ დიაგრამაზე წერტილების ეს მიმდევრობა შეერთებულია გლუვი მრუდით, რომელიც გადის (x_1^*, x_2^*) წერტილში. მნიშვნელოვანია გვახსოვდეს, რომ ეს მრუდი არ არის ტრაექტორია. ფაქტურად, ნებისმიერი ცალკეული ტრაექტორიის პუნქარეს კვეთა 4.6 ნახაზზე ნაჩვენებ წერტილების მიმდევრობაა. ნებისმიერი ასეთი მრუდი მიისწრაფვის (x_1^*, x_2^*) წერტილისაკენ. მოგვიანებით ვნახავთ შემთხვევებს, როდესაც ეს მრუდები იკვეთება. მნიშვნელოვანია გვახსოვდეს, რომ ამგვარი გადაკვეთა არათანაკვეთადობის თეორემას არ არღვევს, რადგანაც ასეთ შემთხვევაში ერთმანეთის გადამკვეთი მრუდები არ წარმოადგენენ ტრაექტორიებს.

დავუბრუნდეთ ზღვრულ ციკლებს. მათი სტაბილურობა წინა თავში მოყვანილი პუნქარეს კოეფიციენტების განზოგადების გზით განისაზღვრება. ჩვენ ვუშვებთ, რომ დინამიკური სისტემის ამსახველი განტოლებების ამონახსნის ერთადერთობა პუნქარეს ასახვის ფუნქციის არსებობაზე მიგვითითებს, რომელიც ტრაექტორიის მიერ პუნქარეს სიბრტყის გადაკვეთის სახადასხვა წერტილთა კოორდინატებს ერთმანეთთან აკავშირებს. მოცემულ ფუნქციებს გააჩნიათ შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} x_1^{(n+1)} &= F_1(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \\ x_2^{(n+1)} &= F_2(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \end{aligned} \quad (4.6-1)$$

სადაც ფრჩხილებში მოცემული სიმბოლოები გადაკვეთის წერტილის რიგს აღნიშნავს.

აქ პუნქარეს ასახვის ფუნქციები მიიღებიან დიფერენციალური განტოლებების სისტემით განსაზღვრული ტრაექტორიების პუნქარეს კვეთის ანალიზის გზით. მე-5 თავში ასეთი ასახვის ფუნქციებით აღწერილ საინტერესო მოდელებს განვიხილავთ.

პუნქარეს კვეთის ფიქსირებული წერტილები აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას.

$$\begin{aligned} x_1^* &= F_1(x_1^*, x_2^*) \\ x_2^* &= F_2(x_1^*, x_2^*) \end{aligned} \quad (4.6-2)$$

პუნკარეს კვების ყოველი ფიქსირებული წერტილი შეესაბამება ზღვრულ ციკლს მდგომარეობათა სამგანზომილებიან სივრცეში.

ფიქსირებული წერტილების სტაბილურობის დახასიათება შესაბამისი იაკობიანის შედგენითა და მახასიათებელი მნიშვნელობების გამოთვლის გზით შეგვიძლია [მას შემდეგ, რაც ფრანგმა მათემატიკოსმა გასტონ ფლოკუემ (1847-1920), სხვა მოვლენებთან ერთად, პერიოდული წევრების შემცველი დიფერენციალური განტოლებების მახასიათებლები შეისწავლა, მოცემულ იაკობიანს ზოგჯერ **ფლოკუეს მატრიცასაც** უწოდებენ]. იგი მდგომარეობათა სივრცეში არსებული ფიქსირებული წერტილის მახასიათებელი მნიშვნელობების განსაზღვრისათვის გამოყენებული იაკობიანის ანალოგიურია. JM იაკობიანი მოიცემა შემდეგი სახით:

$$JM = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad (4.6-3)$$

სადაც მატრიცა განსაზღვრულია პუნკარეს ასახვის საძიებელ ფიქსირებულ წერტილში. მისი მახასიათებელი მნიშვნელობები განსაზღვრავს ზღვრული ციკლის სტაბილურობას. სტაბილური ზღვრული ციკლი ახლომდებარე ტრაექტორიებს მიიზიდავს, ხოლო არასტაბილური მათ განიზიდავს. მახასიათებელი მნიშვნელობების გამოთვლა მე-3 თავში მოყვანილი მათემატიკური მეთოდების საშუალებით შეგვიძლია. მიუხედავად ამისა, პრაქტიკაში მათი ცალსახად დადგენა მინც ვერ ხერხდება, რადგან ამ შემთხვევაში გვჭირდება პუნკარეს ასახვის ფუნქციის ზუსტი გამოსახულება, რაც უმეტესწილად არ ვიცით [მე-5 თავში გავეცნობით ზოგიერთ მოდელს, რომლებიც ასახვის ფუნქციის პირდაპირ განსაზღვრის საშუალებას იძლევიან. თუმცა მდგომარეობათა სამ ან მეტგანზომილებიან სივრცეებში, დიფერენციალური განტოლებებით აღწერილი სისტემებისთვის ასახვის ფუნქციების პოვნა საზოგადოდ შეუძლებელია.]

ვინაიდან მდგომარეობათა სამგანზომილებიან სივრცეში იაკობიანი წარმოადგენს 2×2 მატრიცას, ფიქსირებულ წერტილს გააჩნია ორი მახასიათებელი მნიშვნელობა. ამგვარად, სახეზეა სტაბილურობის შემთხვევათა იგივე რაოდენობა, რაც გვქონდა მდგომარეობათა ორგანზომილებიან სივრცეში არსებული ფიქსირებული წერტილებისათვის: კვების წერტილები შეიძლება ფიქსირებული წერტილის ერთი მხრიდან მეორეზე გადასვლისას

მონაცვლეობდეს. (გაიხსენეთ, რომ ორ განზომილებაში ამგვარი მონაცვლეობა შესაძლებელი არ იყო, რადგან ამ შემთხვევაში ტრაექტორიას საკუთარი თავი უნდა გადაეკვეთა. სამ განზომილებაში კი ტრაექტორიას პერიოდული ცვლილება ყოველგვარი გადაკვეთის გარეშე, საკუთარი თავის ზემოთ ან ქვემოთ გადაადგილებით შეუძლია.)

დისიპაცია

2X2 მატრიცისთვის ორი მახასიათებელი მნიშვნელობა არსებობს. ჩვენ მახასიათებელი მნიშვნელობები M_1 -ით და M_2 -ით მას შემდეგ აღვნიშნეთ, რაც ზღვრული ციკლის პუნქარეს კვეთის წერტილის მიმართ დაახლოვებადი ან დაშორებადი ტრაექტორიების განსაზღვრისთვის *ფლოკუს კოეფიციენტები* გამოვიყენეთ. ისევე როგორც მდგომარეობათა ორგანზომილებიანი სივრცის არსებული პუნქარეს კვეთების შემთხვევაში, დისიპაციის კრიტერიუმი შესაძლებელია ჩამოყალიბებული იქნას კოეფიციენტების მეშვეობით, რადგან დისიპაცია დაკავშირებულია საწყისი პირობების სიმრავლის შემცირებასთან. რადგან M_1 კოეფიციენტი განსაზღვრავს გაფართოებას x_1 მიმართულებით, ხოლო M_2 კი – x_2 მიმართულებით, ცხადია, M_1M_2 ნამრავლი განსაზღვრავს *არეების* გაფართოებას ან შევიწროვებას პუნქარეს სიბრტყეში. დისიპაციური სისტემისათვის საშუალოდ გვექნება $M_1M_2 < 1$ (არ შესრულდება მხოლოდ ფიქსირებული წერტილების მიდამოებში). მე-8 თავში განვიხილავთ მოდელური ასახვის სისტემებს, რომელთათვისაც მდგომარეობა-სივრცის არე მუდმივია. მათ შემთხვევაში $M_1M_2 = 1$.

ზღვრული ციკლების სტაბილურობა

ორგანზომილებიანმა სისტემებმა გვიჩვენეს, თუ ფიქსირებული წერტილები სტაბილურია და მათ მიდამოებში მყოფი ტრაექტორიები ამ წერტილებისაკენ მიისწრაფვიან, მაშინ თითოეული კოეფიციენტის აბსოლუტური მნიშვნელობა 1-ზე ნაკლები იქნება [სამი ან მეტი განზომილების მქონე მდგომარეობების სივრცეებში შესაძლებელია შესრულდეს პირობა $M < 0$. ამგვარად, სტაბილურობის კრიტერიუმი კოეფიციენტების აბსოლუტური მნიშვნელობების მეშვეობით განისაზღვრება.

არსებობს ზღვრულ ციკლთა შემდეგი ტიპები

- I. *სტაბილური ზღვრული ციკლი* (კვანძი პუნქარეს ასახვისათვის)
- II. *განმზიდველი ზღვრული ციკლი* (განმზიდველი პუნქარეს ასახვისათვის)

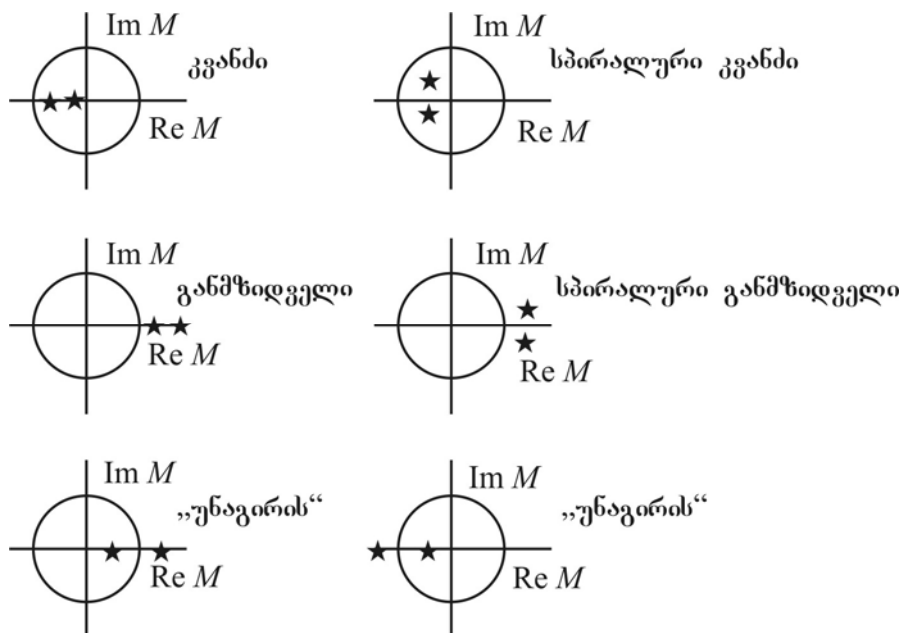
III. „უნაგირისებრი“ ციკლი („უნაგირის“ წერტილი პუნკარეს ასახვისათვის)

4.2 ცხრილში მოყვანილია პუნკარეს სიბრტყის ფიქსირებული წერტილებისა და მდგომარეობათა სამგანზომილებიანი სივრცეების ზღვრული ციკლების შესაბამისი მახასიათებელი კოეფიციენტების კატეგორიები (შეადარეთ იგი 3.4 ცხრილს, რომელიც მდგომარეობათა ორგანზომილებიან სივრცეებში არსებული ზღვრული ციკლებისთვისაა შედგენილი).

ცხრილი 4.2

მდგომარეობათა სამგანზომილებიანი სივრცეების პუნკარეს კვეთების მახასიათებელი კოეფიციენტები

ფიქსირებული წერტილის ტიპი	მახასიათებელი კოეფიციენტი	შესაბამისი ციკლი
კვანძი	$M_1 M_2 < 1$	ზღვრული ციკლი
განმზიდველი	$M_1 M_2 > 1$	ამცდენი ციკლი
„უნაგირის“	$M_1 < 1, M_2 > 1$	„უნაგირისებრი“ ციკლი



ნახ. 4.7. მახასიათებელი კოეფიციენტები კომპლექსურ სიბრტყეში. თუ ორივე კოეფიციენტი ერთეულოვანი რადიუსის მქონე წრეში იმყოფება, მაშინ შესაბამისი ზღვრული ციკლი სტაბილურია. თუ ერთ-ერთი (ან ორთავე) კოეფიციენტი წრის მიღმაა, მაშინ ზღვრული ციკლი არასტაბილურია.

ამოცანა 4.6-1. აღნიშნოთ 4.6.3 განტოლებაში იაკობიანის კვალი Tr -ით, ხოლო დეტერმინანტი Δ -ით.

(a) აჩვენეთ, რომ ორი მახასიათებელი კოეფიციენტი შეიძლება შემდეგნაირად გამოისახოს:

$$M_{1,2} = \frac{1}{2}[Tr \pm \sqrt{Tr^2 - 4\Delta}]$$

(b) აჩვენეთ, რომ მდგომარეობის სივრცის უბნებისთვის გაფართოების (შევიწროების) კოეფიციენტი მოცემულია განტოლებით

$$M_1 M_2 = \Delta$$

(c) მე-3 თავში დავადგინეთ, რომ იაკობიანის კვალი დიფერენციალური განტოლებების სისტემის მეშვეობით მოდელირებული დინამიკური სისტემის დისიპაციის შესახებ მიანიშნებს. ამჯერად ჩვენ იაკობიანის დეტერმინანტს ვიყენებთ. ახსენით განსხვავება.

რა თქმა უნდა, მახასიათებელი კოეფიციენტები კომპლექსური რიცხვებიც შეიძლება იყოს. როგორც მდგომარეობათა ორგანზომილებიანი სივრცეში ფიქსირებული წერტილების შემთხვევაში ვიხილეთ, ეს რიცხვები კომპლექსურად შეუღლებულ წყვილს ქმნიან. გრაფიკული თვალსაზრისით, კომპლექსურ კოეფიციენტებთან დაკავშირებული პუანკარეს კვეთის მიმდევრობითი წერტილები ზღვრული ციკლის გადაკვეთის წერტილის ირგვლივ იყრიან თავს – უახლოვდებიან ან შორდებიან მას. მათემატიკური თვალსაზრისით, სტაბილურობასაც იგივე პირობა გვაქვს: სტაბილური ზღვრული ციკლისთვის ორთავე კოეფიციენტის აბსოლუტური მნიშვნელობა 1-ზე ნაკლებია. არგანდის შესაბამის დიაგრამაზე (კომპლექსური სიბრტყე) დაყრდნობით, ზღვრული ციკლის ორივე მახასიათებელი კოეფიციენტი, ერთეულოვანი რადიუსის მქონე წრის (ე.წ. *ერთეულოვანი წრე*) ფარგლებში იმყოფება (იხ. ნახ. 4.7). მაკონტროლებელი პარამეტრის ცვლილებასთან ერთად მახასიათებელი კოეფიციენტების მნიშვნელობებიც შეიძლება შეიცვალოს. თუ ერთ-ერთი მახასიათებელი კოეფიციენტი მაინც ერთეულოვან წრეს გადაკვეთს, თავს იჩენს ბიფურკაცია. ზოგიერთი ამგვარი ბიფურკაცია მოცემული თავის ბოლოში იქნება განხილული.

ამოცანა 4.6-2. აჩვენეთ, რომ მდგომარეობათა სამგანზომილებიანი სივრცის პუანკარეს (ორგანზომილებიანი) კვეთაში „უნაგირის“ წერტილის მიდამოში სპირალური ტიპის ქმედება არ შეიძლება არსებობდეს.

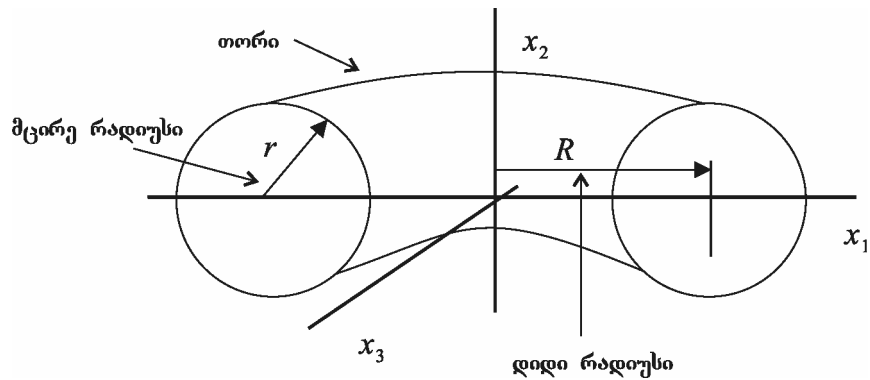
4.7 კვაზიპერიოდული ქმედება

მდგომარეობათა სამგანზომილებიანი სივრცის შემთხვევაში მოძრაობის ახალმა ტიპმა შეიძლება იჩინოს თავი, რომელიც ვერასოდეს აღიძვრება მდგომარეობათა ერთ ან ორგანზომილებიან სივრცეებში. მოძრაობის ახალ ტიპს *კვაზიპერიოდული* ეწოდება, რადგან მას ორი განსხვავებული სიხშირე გააჩნია ანუ მისი გამოკვლევა ორი დამოუკიდებელი, პერიოდული მოძრაობის საშუალებით შეიძლება. კვაზიპერიოდული მოძრაობისას მდგომარეობათა სამგანზომილებიან სივრცეში ტრაექტორიები შეზღუდულია თორის ზედაპირზე. მოძრაობის ამ სახეობის მათემატიკური აღწერა მოიცემა შემდეგი განტოლებებით:

$$\begin{aligned}x_1 &= (R + r \sin \omega_r t) \cos \omega_R t \\x_2 &= r \cos \omega_r t \\x_3 &= (R + r \sin \omega_r t) \sin \omega_R t\end{aligned}\tag{4.7-1}$$

სადაც სიმბოლოებით აღნიშნულია ω_R და ω_r კუთხური სიხშირეები. გეომეტრიული თვალსაზრისით (4.7-1) განტოლებები აღწერენ მოძრაობას თორის ზედაპირზე (თორის ცენტრი იმყოფებ კოორდინატთა სათავეში), რომლის დიდი რადიუსი R -ია, ხოლო განივკვეთის რადიუსი კი r გახლავთ (ნახ. 4.8). ω_R სიხშირე შეესაბამება დიდი წრის გარშემო $T_R=2\pi/\omega_R$ პერიოდით ბრუნვას, ω_r კი – განივკვეთის გასწვრივ $T_r=2\pi/\omega_r$ პერიოდით ბრუნვის სიხშირეს. თორს, როგორც წესი, ელიფსის ფორმის განივკვეთა უნდა ჰქონდეს, მაგრამ ელიფსები შეიძლება წრებად გარდაიქმნას კოორდინატთა ღერძების შესაბამისი დაყალიბების შედეგად.

კვაზიპერიოდული მოძრაობისთვის პუანკარეს კვეთა მიიღება პუანკარეს სიბრტყის მიერ თორის კვეთის შედეგად. პუანკარეს ასახვის მახასიათებელი 4.9 ნახაზზე გამოსახულ ორ სიხშირეს შორის რიცხობრივი კავშირის არსებობაზე მიგვითითებს. თუ ორი სიხშირის თანაფარდობა ორი მთელი რიცხვის თანაფარდობის სახით გამოისახება (მაგალითად, როგორც „რაციონალური წილადი“ 14/17) მაშინ პუანკარეს კვეთა მოიცავს წერტილთა სასრულ რაოდენობას. მოძრაობის ამგვარ სახეს ხშირად *სინქრონიზებულ* მოძრაობას უწოდებენ, რადგან ერთ-ერთი სიხშირის (ხშირად განსაზღვრულია მაკონტროლებელი პარამეტრის მხოლოდ გარკვეულ დიაპაზონში) ნამრავლი მთელ რიცხვზე ტოლია მეორე სიხშირის ნამრავლისა სხვა მთელ რიცხვზე.



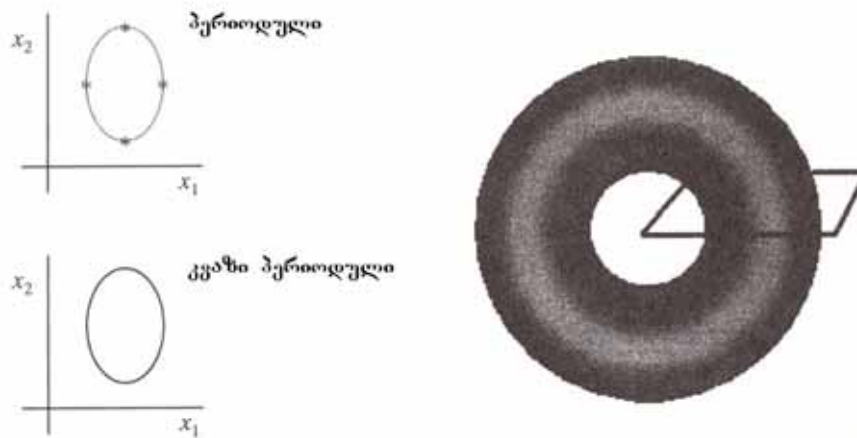
ნახ. 4.8. სამგანზომილებიან სისტემაში კვაზიპერიოდული ტრაექტორიები განლაგებულია თორის ზედაპირზე. აქ მოყვანილია თორის განსაკუთრებული შემთხვევა წრიული განვიკვეთით. r განვიკვეთის მცირე რადიუსია, ხოლო R თორის დიდი რადიუსია. თორის ზედაპირზე მყოფი პერიოდული ტრაექტორია თავის თავში იკეტება.

(ტერმინები *ფაზათა სინქრონიზაცია* და *ტალღების სინქრონიზაცია* ასევე ამგვარი ტიპის ქმედებათა აღწერისთვის გამოიყენება).

თუ სიხშირეების ფარდობა მთელი რიცხვები არ გამოისახება, მაშინ ფარდობას „ირაციონალური“ ეწოდება (მათემატიკური და არა ფსიქოლოგიური თვალსაზრისით). ირაციონალურობის შემთხვევაში, პუანკარეს ასახვის წერტილები პუანკარეს სიბრტყეში საბოლოო ჯამში ავსებენ უწყვეტ მრუდს და მოძრაობა კვაზიპერიოდული იქნება, რადგან იგი ზუსტად არასოდეს გამეორდება (რუსი მათემატიკოსები მას *პირობითად პერიოდულს* უწოდებენ. მაგალითად, [Arnold, 1983]. მათემატიკურ ლიტერატურაში ასევე გამოიყენება ტერმინი *თითქმის პერიოდული*.)

კვაზიპერიოდულობის შემთხვევაში მოძრაობა ზუსტად არასოდეს მეორდება, მაგრამ ამავე დროს იგი არ არის ქაოსური და ორი (ან მეტი) პერიოდული კომპონენტისგან შედგება, რომელთა არსებობა მოძრაობის სიხშირეთა სპექტრის (ფურიეს სპექტრი) გაზომვით აშკარავდება. უნდა აღინიშნოს, რომ დიდი მთელი რიცხვების შემთხვევაში კვაზიპერიოდულ მოძრაობასა და სიხშირეთა რაციონალური ფარდობის მქონე მოძრაობას შორის განსხვავების აღმოჩენა რთულია. შეუძლია კი კონკრეტულ ექსპერიმენტს განასხვავოს ეს ორი შემთხვევა? როგორც შემდგომში ვნახავთ, პარამეტრის ცვლილებასთან ერთად სისტემის ქმედება შესაძლოა ზემოთხსენებულ ორ შემთხვევას შორის ცვალებადობდეს. არსებითია, რომ კვაზიპერიოდული ქმედებისათვის სისტემის მიმზიდველი თორის ორგანზომილებიანი ზედაპირია.

ეს შედეგი უფრო მეტი განზომილების მდგომარეობების სივრცეებზეც ვრცელდება. მაგალითად, მდგომარეობათა ოთხგანზომილებიან სივრცეში კვაზიპერიოდული მოძრაობა სამი სინშირით შეიძლება გამოისახებოდეს, რომელთაგან არც ერთი არ არის კავშირში დანარჩენ ორთან რაციონალური ფარდობის მეშვეობით. ამ დროს ტრაექტორიები სამგანზომილებიანი თორის „ზედაპირზე“ არიან განაწილებული. თუ მხოლოდ ორი სინშირე გვაქვს, მაშინ მოძრაობა თორის ორგანზომილებიან ზედაპირზე ხდება.



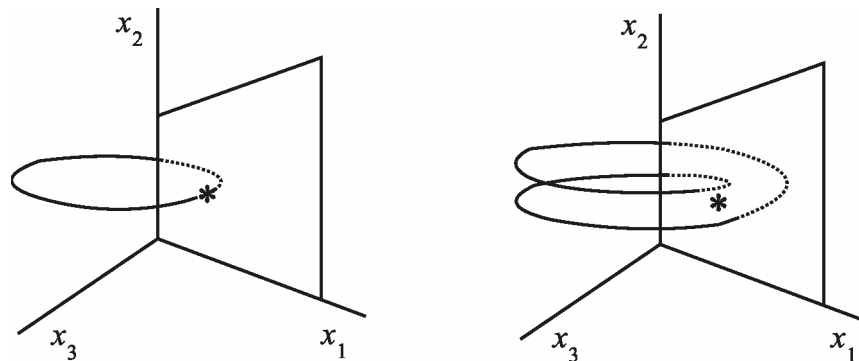
ნახ. 4.9. პუანკარეს სიბრტყისა და თორის კვეთა მდგომარეობათა სამგანზომილებიან სივრცეში. მარცხენა ზედა დიაგრამა გვიჩვენებს პუანკარეს ასახვის წერტილებს სინშირეთა რაციონალური ფარდობის მქონე ორსინშირიანი პერიოდული სისტემისთვის. კვეთის წერტილები ვარსკვლავებითაა აღნიშნული. მარცხენა ქვედა დიაგრამა კვაზიპერიოდულ ქმედებას ასახავს. სინშირეთა ფარდობა ირაციონალურია და კვეთის წერტილები პუანკარეს სიბრტყეში საბოლოო ჯამში ქმნის მრუდს (რომელსაც ზოგჯერ „მოდრეიფე რგოლსაც“ უწოდებენ).

ჩვეულებრივ (არაქაოსურ) მიმზიდველებს უკვე სრულად გავეცანით: ფიქსირებული წერტილები (განზომილება – 0), ზღვრული ციკლები (განზომილება – 1) და კვაზიპერიოდული მიმზიდველები (განზომილება – 2 ან მეტი). უკვე შეგვიძლია ვიმსჯელოთ, თუ როგორ გარდაიქმნება ეს მიმზიდველები ქაოსურებად. ჩვენ პერიოდის გაორმაგების, კვაზიპერიოდულობის და წყვეტის გზების მოკლე განხილვით შემოვიფარგლებით. თითოეულ მათგანზე უფრო დაწვრილებით მე-5, მე-6 და მე-7 თავებში ვიმსჯელებთ. მე-7 თავში კრიზისის მოვლენასაც გავეცნობით. ვნახავთ, რომ ქაოსში გარდამავალი სტადიის აღწერა თვალსაზრისით შედარებით რთულია, რადგან იგი მდგომარეობათა სივრცის მთელ რიგ

უბნებზე ტრაექტორიათა „ქცევის“ შესწავლას მოითხოვს. მიერიდან ყურადღებას ცალკეულ ფიქსირებულ წერტილსა თუ ზღვრულ ციკლზე აღარ გავამახვილებთ.

4.8 პირველი გზა ქაოსისაკენ: პერიოდის გაორმაგება

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, პერიოდის გაორმაგების მოვლენა სისტემის ზღვრული ციკლის ტიპის ქმედებასთან ერთად აღიძვრება. რა თქმა უნდა, ზღვრული ციკლი კვანძის ან სხვა ფიქსირებული წერტილის შემცველი ბიფურკაციისაგან შეიძლება „წარმოიშვას“, მაგრამ ჯერჯერობით ამაზე არ შევჩერდებით. რომელიმე მაკონტროლებელი პარამეტრის ცვლილებასთან ერთად ზღვრული ციკლი არასტაბილური ხდება. ამ მოვლენას საუკეთესოდ ასახავს პუანკარეს შესაბამისი კვეთა. დავეშვათ, პერიოდული ზღვრული ციკლი პუანკარეს კვეთაში მხოლოდ ერთ წერტილს წარმოქმნის. თუ ზღვრული ციკლი არასტაბილური ხდება და მისი ერთ-ერთი მახასიათებელი კოეფიციენტი – 1-ზე ნაკლები ხდება (რაც, რა თქმა უნდა ნიშნავს, რომ $|M| > 1$), მაშინ ხშირ შემთხვევაში ახალი სახის მოძრაობა პერიოდულია, მაგრამ მისი პერიოდულობა საწყის მოძრაობის პერიოდზე ორჯერ მეტია. პუანკარეს კვეთისას ამგვარი ახალი სახეობის ზღვრული ციკლი პუანკარეს საწყისი კვეთის წერტილის ორივე მხარეს მდებარე ორ წერტილს მოგვცემს (იხ. ნახ. 4.10).



ნახ. 4.10. პუანკარეს კვეთა ტრაექტორიისათვის, რომელმაც განიცადა პერიოდის გაორმაგების ბიფურკაცია. მარცხნივ ნაჩვენებია საწყისი პერიოდული ტრაექტორია, რომელიც პუანკარეს სიბრტყეს ერთ წერტილში კვეთს. მარჯვნივ ორმაგი პერიოდის შესაბამისი ტრაექტორიაა გამოსახული, რომელიც პუანკარეს სიბრტყეს ორ წერტილში გადაკვეთს.

გადაკვეთის წერტილების ამგვარი მონაცვლეობა საწყისი ზღვრული ციკლის მახასიათებელ კოეფიციენტთანაა დაკავშირებული. იგი 1-ზე ნაკლები უარყოფითი სიდიდეა. ვინაიდან $|M| > 1$, ტრაექტორიების ასახვის წერტილები „განზიდულია“ საწყისი ასახვის

წერტილის მიერ. ნიშანი „მინუსი“ გვაუწყებს, რომ ისინი მდებარეობას იცვლიან. ბიფურკაციის ამგვარ ტიპს „მზტუნავ“ ბიფურკაციასაც უწოდებენ, რადგან ახლად წარმოქმნილი ტრაექტორია საწყისი ტრაექტორიის მიმართ ერთი მხრიდან მეორეში „დახტის“.

კითხვა: რატომ ვერ ვამჩნევთ სამმაგ, ოთხმაგ და ა.შ. პერიოდებს? არსებობს მარტივი ახსნა? იხ. თავი 5.

მაკონტროლებელი პარამეტრის შემდგომ ცვლილებასთან ერთად, პერიოდი 2-ის შესაბამისი ზღვრული ციკლი შეიძლება არასტაბილურ მდგომარეობაში გადავიდეს და შექმნას პერიოდი-4-ის ტიპის ციკლი, რომელსაც პუანკარეს კვეთის ოთხი წერტილი ექნება. მე-5 თავი დაწვრილებით გვიხსნის, თუ როგორ, როდის და სად ხდება ეს მოვლენა. პერიოდის გაორმაგების პროცესი შეიძლება პერიოდის უსასრულობაში გადასვლამდე გაგრძელდეს ანუ, ტრაექტორია საკუთარ თავს არასოდეს იმეორებს და ამ შემთხვევაში იგი ქაოსურია.

4.9 მეორე გზა ქაოსისაკენ: კვაზიპერიოდულობა

კვაზიპერიოდული სცენარის მიხედვით, სისტემის ქმედება კვლავ ზღვრული ციკლის ტიპის ტრაექტორიით იწყება. მაკონტროლებელი პარამეტრის ცვლილებასთან ერთად სისტემის ქმედებაში მეორე ტიპის პერიოდულობა იჩენს თავს. ამგვარი ბიფურკაციაა მე-3 თავში განხილული *ჰოპფის* ბიფურკაციის განზოგადებაა და მასაც იგივე სახელწოდებით მოიხსენიებენ. მახასიათებელი კოეფიციენტების თვალსაზრისით, ჰოპფის ბიფურკაცია ხასიათდება კომპლექსურად შეუღლებული ორი კოეფიციენტით, რომლებიც ერთდროულად კვეთენ ერთეულოვან წრეს.

თუ მოძრაობის მეორე ტიპის მოძრაობის პერიოდის ფარდობა პირველი ტიპის მოძრაობის პერიოდთან არაა რაციონალური, მაშინ ადრინდელის მსგავსად ვიტყვით, რომ მოძრაობა კვაზიპერიოდულია. გარკვეულ პირობებში, მაკონტროლებელი პარამეტრის შემდგომ ცვლილებასთან ერთად მოძრაობა ქაოსური გახდება. ქაოსისკენ მიმავალ ამ გზას რუელ-თეიქენსის სცენარი ეწოდება, მას შემდეგ, რაც 1971 წელს დ. რუელმა და ფ. თეიქენსმა მისი განვითარების თეორიული შესაძლებლობა ივარაუდეს. მისი მთავარი ნიშანია ერთი შეხედვით იმის მოლოდინი, რომ პარამეტრის ცვლილებასთან ერთად წინა პარაგრაფში აღწერილი ორმაგი პერიოდების უსასრულო მიმდევრობის მსგავს, განსხვავებული სიხშირეების გრძელ

მიმდევრობას ვიხილავთ (1944 წელს რუსმა ფიზიკოსმა ლ. ლანდაუმ სითხეებში ტურბულენტობის განვითარების წყაროდ სინშირეთა ამგვარი უსასრულო მიმდევრობა ივარაუდა. [Landau and Lifshitz, 1959]). თუმცა, სულ მცირე რამდენიმე შემთხვევაში მაინც, სისტემის მოძრაობაში მესამე, განსხვავებული სინშირის შემოსვლის ნაცვლად სისტემა ქაოსური ხდება. ამგვარ სცენარს მე-6 თავში განვიხილავთ.

ქაოსისკენ მიმავალი კვაზიპერიოდული გზის ექსპერიმენტულმა მტკიცებულებამ (GOS75) სამეცნირო წრეები გამოაფხიზლა და არაწრფივ დინამიკაში ბევრი ახალი, სასარგებლო იდეა დაინერგა. 1970-იანი წლების მეორე ნახევარსა და 1980-იანი წლების დასაწყისში უკვე არსებობდა ორსინშირიანი კვაზიპერიოდული ქმედებიდან ქაოსში გადასვლის გარდაუვალობის მრავალი თეორიული ჰიპოთეზა. შედარებით თანამედროვე შრომებმა (იხ. მაგალითად, BAT 88) გვიჩვენა, რომ მნიშვნელოვანი სივრცითი განფენილობისა და თავისუფლების მრავალი ხარისხის მქონე სისტემები ქაოსურ მდგომარეობაში გადასვლამდე სამ ან მეტსინშირიან კვაზიპერიოდულ ქმედებას ავლენენ.

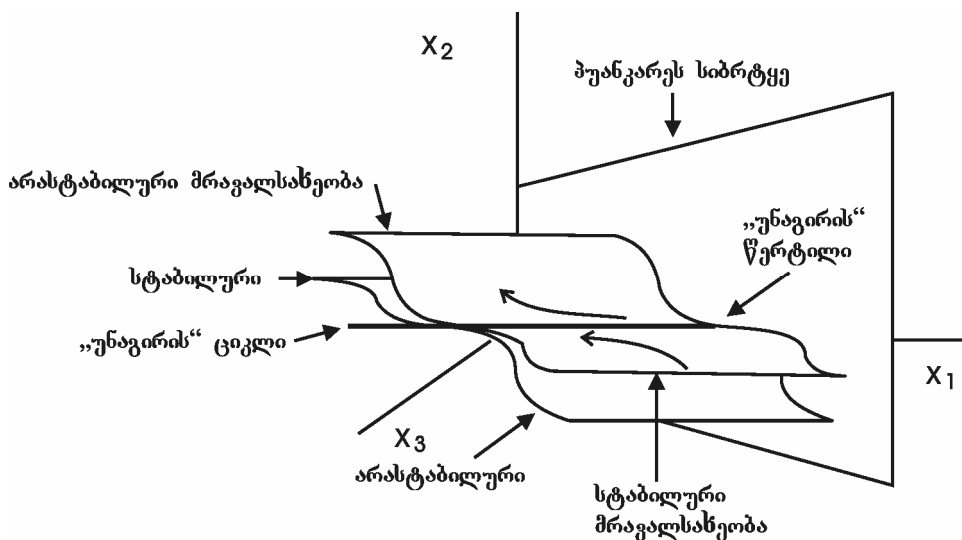
4.10 მესამე გზა ქაოსისაკენ: წყვეტა და კრიზისები

მე-7 თავში წყვეტასა და კრიზისებს დაწვრილებით განვიხილავთ, ამიტომ ამჟამად ძალზე მოკლე დახასიათებით შემოვიფარგლებით. ქაოსისკენ წყვეტით მიმავალ გზას სხვადასხვა ინტერვალებში პერიოდული ქმედების და ქაოტური ქმედების არარეგულარული „აფეთქებები“ ახასიათებს. სისტემის რაიმე პარამეტრის შეცვლასთან ერთად ქაოსური აფეთქებები უფრო ხანგრძლივი და მეტი ინტენსივობისაა, ვიდრე საბოლოოდ ქაოსი არ „დაისადგურებს“.

კრიზისი ბიფურკაციული მოვლენაა, რომლის დროსაც ქაოსური მიმზიდველი და მისი მიზიდულობის არე უეცრად ქრება ან რომელიმე მაკონტროლებელი პარამეტრის რეგულირებასთან ერთად ზომას იცვლის. თუ პარამეტრი კვლავ საპირისპირო მიმართულებით შეიცვლება, ქაოსური მიმზიდველი შეიძლება უეცრად გამოჩნდეს ან თავდაპირველი ზომა აღიდგინოს. როგორც მე-7 თავში ვიხილავთ, კრიზისი ქაოსურ მიმზიდველსა და არასტაბილურ ფიქსირებულ წერტილს შორის ან სტაბილურ ზღვრულ ციკლს შორის ურთიერთქმედებას მოიცავს.

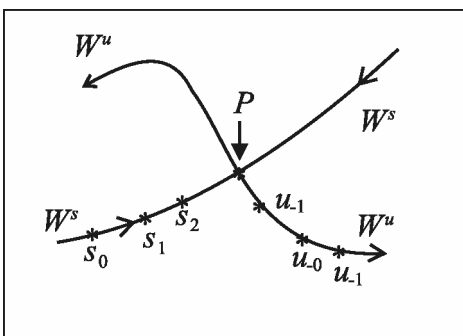
4.11 მეოთხე გზა ქაოსისაკენ: ქაოსური გარდამავალი სტადიები და ჰომოკლინიკური ორბიტები

ქაოსისკენ მიმავალი გზების მეორე, გლობალური ბიფურკაციების ფართო კატეგორიაში ქაოსური გარდამავალი სტადია უმნიშვნელოვანესია ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების მეშვეობით მოდელირებული სისტემებისთვის. მიუხედავად იმისა, რომ ქაოსში გადასვლის ეს გზა ერთ-ერთი პირველი აღმოჩენა იყო ფიზიკური სისტემების მოდელირებისას (ლორენცის მოდელი), იგი პერიოდის გაორმაგების, კვაზიპერიოდულობისა და წყვეტის თეორიებთან შედარებით ნაკლებად განვითარდა. მიზეზი იმაში მდგომარეობს, რომ ქაოსისკენ მიმავალ ამ გზას არ ახასიათებს სისტემის ფიქსირებული წერტილების ან პუანკარეს კვეთის ფიქსირებული წერტილების ტიპის ცვლილება.



ნახ. 4.11. „უნაგირისებრი“ ციკლი მდგომარეობათა სამგანზომილებიან სივრცეში. სტაბილური და არასტაბილური მრავალსახეობები ის ზედაპირებია, რომლებიც ერთმანეთს „უნაგირისებრი“ ციკლზე კვეთენ. იქ, სადაც „უნაგირისებრი“ ციკლი კვეთს პუანკარეს სიბრტყეს, გვაქვს „უნაგირის“ წერტილი პუანკარეს ასახვის ფუნქციისთვის. „უნაგირისებრი“ ციკლის მიერ განზიდული ერთი ტრაექტორიის ნაწილი მდებარეობს არასტაბილურ მრავალსახეობაზე, ხოლო „უნაგირისებრი“ ციკლთან მიახლოებული მეორე ტრაექტორიის ნაწილი – სტაბილურ მრავალსახეობაზე.

გარდამავალ სტადიას საფუძვლად უდევს მდგომარეობათა სივრცეში ტრაექტორიების ურთიერთქმედება სხვადასხვა არასტაბილურ ფიქსირებულ წერტილთან და ციკლებთან. ხშირად გვხვდება ე.წ. *ჰომოკლინიკური* ორბიტები და მათი „მონათესავე“ *ჰეტეროკლინიკური* ორბიტები. ამ სივრცულმა ორბიტებმა შესაძლოა უეცრად იჩინონ თავი მაკონტროლებელი პარამეტრის ცვლილებასთან ერთად. გაცილებით მნიშვნელოვანია, რომ ეს ორბიტები ძლიერ ზეგავლენას ახდენენ მათ სახლოვეს გამავალ ტრაექტორიების ბუნებაზე. რას წარმოადგენს ჰომოკლინიკური ორბიტა? ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად განვიხილოთ „უნაგირისებრი“ ციკლები მდგომარეობათა სამგანზომილებიან სივრცეში (ეს მსჯელობა მდგომარეობათა უფრო მეტ განზომილებიან სივრცეებზეც ვრცელდება). გავიხსენოთ, რომ „უნაგირის“ წერტილები, ციკლები და მათი შიდა და გარე სიმრავლეები მნიშვნელოვან როლს ასრულებენ მდგომარეობათა სივრცის ორგანიზაციაში. სხვანაირად რომ ვთქვათ, შიდა და გარე სიმრავლეები მდგომარეობათა სივრცის სხვადასხვა ნაწილებს შორის არსებულ „საზღვრის“ როლში გვევლინება და ყველა ტრაექტორიამ „ანგარიში უნდა გაუწიოს“ ამ საზღვრებს. ყურადღება უნდა გავამახვილოთ მდგომარეობათა სივრცის პუანკარეს კვეთაში მდებარე „უნაგირის“ წერტილზე, რომელიც მდგომარეობათა სამგანზომილებიან საწყის სივრცეში მყოფ „უნაგირისებრ“ ციკლს შეესაბამება (იხ. ნახ. 4.11). ეს ციკლი ორი ზედაპირის თანაკვეთაა: ერთი ზედაპირი ციკლის შესაბამისი შიდა სიმრავლეა (ანუ სტაბილური მრავალსახეობა), ხოლო მეორე – გარე სიმრავლე (ანუ არასტაბილური მრავალსახეობა). შიდა სიმრავლის შესაბამისი ტრაექტორიები დროთა განმავლობაში მიისწრაფვიან „უნაგირისებრი“ ციკლისაკენ. საპირისპირო სიტუაციასთან გვაქვს საქმე გარე სიმრავლის შემთხვევაში.



ნახ. 4.12. P წერტილი „უნაგირის“ წერტილია პუანკარეს კვეთაში. იგი მდგომარეობათა მთლიან სამგანზომილებიან სივრცეში არსებულ „უნაგირისებრ“ ციკლს შეესაბამება. მოცემული ციკლის შიდა სიმრავლის თანაკვეთას პუანკარეს სიბრტყესთან გამოსახავს W^s მრუდი, ხოლო გარე სიმრავლის შემთხვევაში - W^u მრუდი.

ნახ. 4.12. გვიჩვენებს პუანკარეს ეკვივალენტურ კვეთას საყრდენი P წერტილით, რომელშიც „უნაგირისებრი“ ციკლი სიბრტყეს კვეთს. რამდენიმე მრუდის მეშვეობით სქემატურად გამოსახულია, თუ სად კვეთენ შიდა და გარე სიმრავლეთა ზედაპირები პუანკარეს სიბრტყეს. W^s და W^u მრუდებს P საყრდენი წერტილის *სტაბილური* და *არასტაბილური მრავალსახეობები* ეწოდებათ. ვინაიდან „უნაგირისებრი“ ციკლის შიდა და გარე სიმრავლეები

ორგანზომილებიანი ზედაპირებია (მდგომარეობათა საწყის სამგანზომილებიან სივრცეში), პუნკარეს სიბრტყესთან ერთ-ერთი ამ ზედაპირის კვეთა ქმნის მრუდს. საჭიროა გვახსოვდეს, რომ ეს მრუდები ტრაექტორიებს არ წარმოადგენენ. მაგალითად, თუ $W^s(P)$ ზედაპირის იმ წერტილს, რომელშიც ტრაექტორია კვეთს პუნკარეს სიბრტყეს, s_0 -ით აღვნიშნავთ, მაშინ პუნკარეს ასახვის F ფუნქცია ტრაექტორიის მიერ სიბრტყის გადაკვეთის შემდეგი წერტილის s_1 კოორდინატებს მოგვცემს. s_1 -იდან s_2 -ის პონას შევძლებთ და ა.შ. წერტილების მიმდევრობა განლაგდება $W^s(P)$ მრუდზე და მიისწარფვის P -კენ, როდესაც $n \rightarrow \infty$. თუ u_0 არის $W^u(P)$ -ზე მდებარე წერტილი, მაშინ $F(u_0)=u_1$, $F(u_1)=u_2$ და ა.შ. შეიქმნება წერტილთა მიმდევრობები, რომლებიც P -ს მიმართ დივერგენციას განიცდიან $W^u(P)$ -ს გასწვრივ. თუ პუნკარეს ასახვის F^{-1} ფუნქციის შექცევადობას u_0 -ს მიმართ გამოვიყენებთ, შევადგენთ u_{-1} , u_{-2} და ა.შ. წერტილების მიმდევრობას, რომლებიც მიისწრაფვიან P -საკენ, როდესაც $n \rightarrow \infty$.

4.12 ნახაზზე გამოსახული მრუდები ერთიანობაში წარმოგვიდგენენ უსასრულოდ ბევრი საწყისი წერტილისგან შემდგარ მიმდევრობებს. ნებისმიერი საწყისი წერტილის შემთხვევაში, მიმდევრობა „ხტუნავს“ W^s -ს ან W^u -ს გასწვრივ და არ გვაქვს ტრაექტორიის წერტილის ისეთი გლუვი მოძრაობა, როგორც ეს ხდებოდა მდგომარეობათა საწყის სივრცეში აღებულ ტრაექტორიაზე მდებარე წერტილის შემთხვევაში.

კონტროლის პარამეტრის ცვლილებასთან ერთად შესაძლებელია W^s -ისა და W^u -ს ერთმანეთთან მიახლოება და შემდგომში მათი გადაკვეთა, მაგალითად, q წერტილში. თუკი ამგვარი გადაკვეთა ხდება, ვიტყვი, რომ q -ზე ადგილი აქვს **ჰომოკლინიკურ გადაკვეთას**, ხოლო q წერტილს **გადაკვეთის ჰომოკლინიკურ წერტილს** ვუწოდებთ. აგრეთვე შესაძლებელია, რომ ერთი „უნაგირის“ წერტილის შემცველმა არასტაბილურმა მრავალსახეობამ რომელიმე სხვა „უნაგირის“ წერტილის შესაბამისი სტაბილური მრავალსახეობა გადაკვეთოს. ასეთ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ ადგილი აქვს **ჰეტეროკლინიკურ გადაკვეთას**. არსებობს სხვა ჰეტეროკლინიკური კომბინაციებიც. მაგალითად, შეიძლებოდა გვეჩინდეს ინდექსი-2 ტიპის „უნაგირის“ წერტილის შემცველი არასტაბილური მრავალსახეობის ზედაპირისა და „უნაგირისებრი“ ციკლის შემცველი სტაბილური მრავალფეროვნების გადაკვეთა. (გადაკვეთების ყველა შესაძლო შემთხვევა იხილეთ [Abraham and Shaw, 1992] [Abraham, Abraham and Shaw, 1996].) ჩვენ ყურადღებას ჰომოკლინიკურ გადაკვეთებზე გავამახვილებთ.

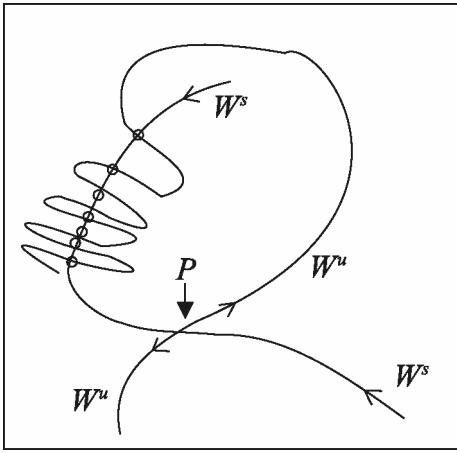
ახლა კი უმნიშვნელოვანეს ფუნდამენტურ თეორემას ჩამოვყალიბებთ:

თუ დინამიკური სისტემის შესაბამის პუნქტარეს კვეთაში მდებარე „უნაგირის“ წერტილის შიდა და გარე სიმრავლეები ჰომოკლინიკური გადაკვეთის ერთ q_0 წერტილში მაინც კვეთენ ერთმანეთს, მაშინ იარსებებს ჰომოკლინიკური გადაკვეთების უსასრულო რაოდენობა.

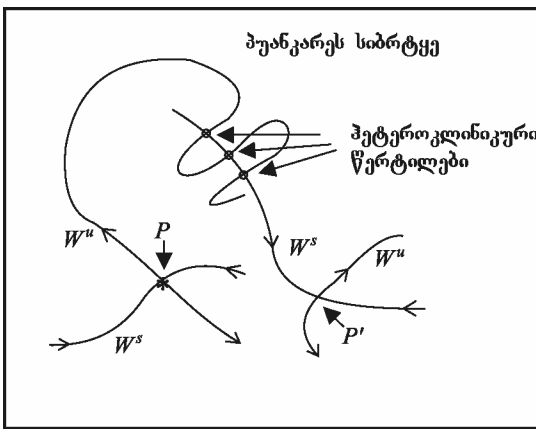
თეორემის დასამტკიცებლად, გამოვიყენოთ q_0 -ს მიმართ ასახვის F ფუნქცია. შედეგად მივიღებთ სხვა q_1 წერტილს. ვინაიდან q_0 მიეკუთვნება როგორც W^s -ს, ასევე W^u -ს, წინა თავებიდან გამომდინარე ვასკენით, რომ F ასახვის გამოყენება W^s -ს ან W^u -ს რომელიმე წერტილის მიმართ W^s -ს ან W^u -ს სხვა q_1 წერტილსაც გვაპოვინებს. წერტილთა ამ მიმდევრობის მიმართ F -ის გამოყენების გაგრძელების შემთხვევაში ჰომოკლინიკური წერტილების უსასრულო რიცხვს დავადგენთ. 4.13 ნახაზი გვიჩვენებს საბოლოო ჰომოკლინიკური მარყუჟის ნაწილს, რომელიც ჰომოკლინიკური გადაკვეთების შედეგად მიიღება.

გაითვლისწინეთ, რომ 4.13 ნახაზზე გამოსახული გლუვი მრუდები ცალკეული ტრაექტორიები არ არის (არათანაკვეთადობის თეორემას ვერ დავარღვევთ!) ისინი W^s -ისა და W^u -ზე უსასრულოდ ბევრი საწყისი წერტილის ალების შედეგადაა მიღებული. ის ტრაექტორია, რომლებიც ერთ-ერთ ჰომოკლინიკურ წერტილში გადის, ასევე გაივლის ზოგიერთ სხვა ჰომოკლინიკურ წერტილებსაც.

რა არის ჰომოკლინიკური წერტილისა და მასთან დაკავშირებული ჰომოკლინიკური მარყუჟის დინამიკური მნიშვნელობა? თუ ჩვენს ყურადღებას კვლავ მდგომარეობათა სამგანზომილებიან საწყის სივრცეს დავუთმობთ, მაშინ ვნახავთ, რომ ჰომოკლინიკური წერტილი პუნქტარეს კვეთაში შეესაბამება მდგომარეობათა საწყის სივრცეში უწყვეტ ტრაექტორიას. ჰომოკლინიკური გადაკვეთისას არასტაბილურ მრავალსახეობაში მდებარე ერთი ტრაექტორია სტაბილური მრავალსახეობის სხვა ტრაექტორიას უერთდება და ქმნის ახალ ტრაექტორიას, რომლის პუნქტარეს კვეთის წერტილები ზემოთ აღწერილი ჰომოკლინიკური წერტილებია (ამ პროცესის უფრო თვალნათლივ დასანახად, გაიხსენეთ, რომ მდგომარეობათა სამგანზომილებიან სივრცეში „უნაგირისებრი“ ციკლების შიდა და გარე სიმრავლეები ორგანზომილებიანი ზედაპირებია.) ეს ახალი ტრაექტორია „უნაგირის“ წერტილს საკუთარ თავთან აერთებს და ამიტომ მას *ჰომოკლინიკური შეერთების შესაბამისი ჰომოკლინიკური ტრაექტორია* ან *ჰომოკლინიკური ორბიტა* ეწოდება. ზემოყვანილი თეორემიდან გამომდინარე, ჰომოკლინიკურმა ტრაექტორიამ პუნქტარეს სიბრტყე უსასრულოდ ბევრჯერ უნდა გადაკვეთოს.



ნახ. 4.13. ჰომოკლინიკური მარყუჟი მიიღება არასტაბილური $W^u(P)$ მრავალსახეობის მიერ „უნაგირის“ P წერტილის შემცველ სტაბილურ $W^s(P)$ მრავალსახეობასთან ჰომოკლინიკური გადაკვეთის შედეგად. წრეში ჩასმული თითოეული წერტილი წარმოადგენს ჰომოკლინიკური გადაკვეთის წერტილს. სიმარტივისთვის, ნახაზზე გამოსახულია მხოლოდ მარყუჟის ნაწილი.



ნახ. 4.14. ჰეტეროკლინიკური შეერთების პუნკარეს კვეთა. ორი „უნაგირისებრი“ ციკლი სიბრტყეს კვეთს შესაბამისად P -ზე და P' წერტილებში. ჰეტეროკლინიკური ორბიტა აკავშირებს ორ „უნაგირისებრი“ ციკლს და ქმნის ჰეტეროკლინიკურ შეერთებას. სიმარტივისთვის მოყვანილია მხოლოდ მარყუჟის ნაწილი.

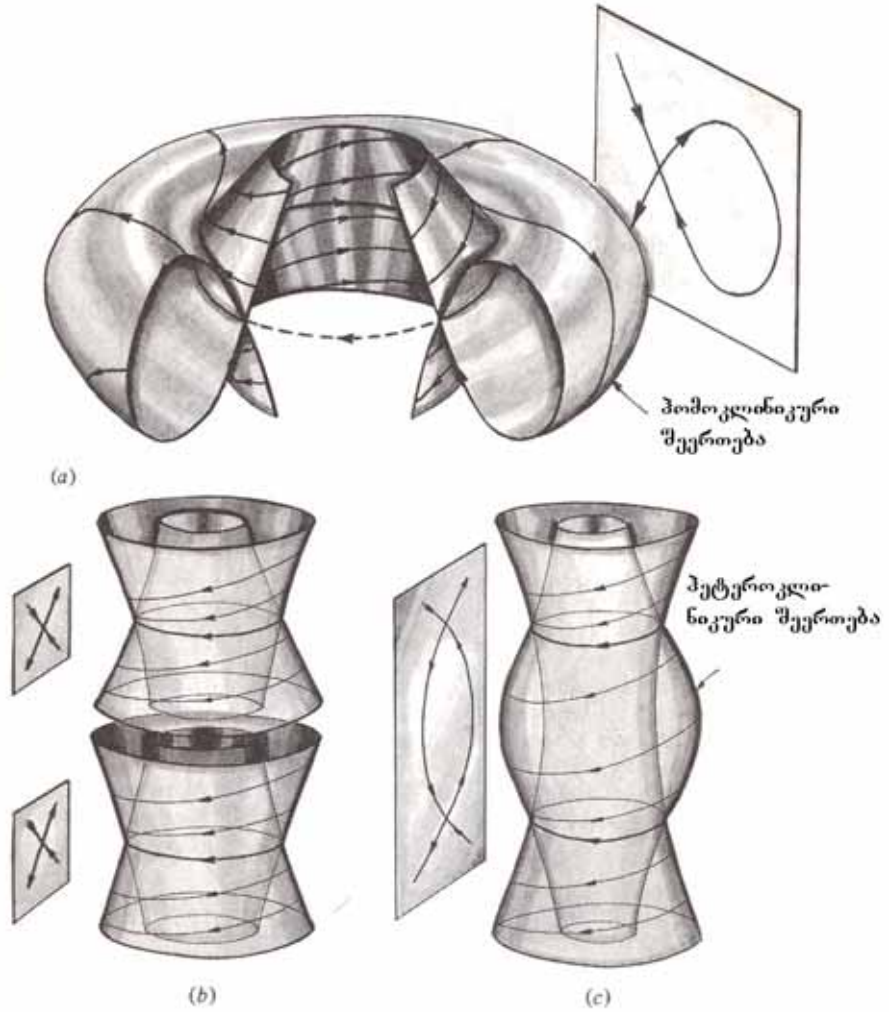
როგორ ხდება ჰომოკლინიკური ორბიტა ქაოსური ქმედების გამომწვევი მიზეზი? ამის გასაგებად განვიხილოთ სხვა ტრაექტორები, რომლებიც პუნკარეს მონაკვეთის „უნაგირის“ წერტილის სიახლოვეს გაივლიან. საზოგადოდ, „უნაგირის“ წერტილის სიახლოვეს გამავალი ტრაექტორიები ახლოსაა შიდა სიმრავლესთან (სტაბილური მრავალსახეობა), ხოლო გარე სიმრავლის (არასტაბილური მრავალსახეობა) სიახლოვეს მდებარე „უნაგირის“ წერტილისგან განიზიდება. ჰომოკლინიკური მარყუჟის შექმნის შემდეგ ტრაექტორია „უნაგირის“ წერტილიდან განიზიდება მარყუჟის გარესიმრავლური ნაწილის მიერ, მაგრამ შიდასიმრავლური ნაწილი მას ისევ „უკან დააბრუნებს“. ადვილად შესამჩნევია, რომ ჰომოკლინიკური მარყუჟი ბადებს ისეთ ტრაექტორიებს, რომლებიც „უნაგირისებრი“ წერტილის მიდამოში მოუწესრიგებლად „მოძრაობენ“.

ქმედების ამგვარი სახე **ჰეტეროკლინიკური ორბიტადაც** შეიძლება გამომდინარეობდეს, რომელიც ერთ „უნაგირის“ წერტილს (ან მდგომარეობათა საწყის სივრცეში მყოფ „უნაგირისებრი“ ციკლს) მეორესთან აკავშირებს. სხვა ჰეტეროკლინიკურ ორბიტას მეორე საყრდენი წერტილიდან კვლავ პირველისაკენ „მიყვავართ“. ასეთი კომბინირებული ტრაექტორიის არსებობის შემთხვევაში ვამბობთ, რომ ორ „უნაგირისებრი“

ციკლს შორის *ჰეტეროკლინიკური შეერთება* არსებობს. 4.14 ნახაზზე სქემატურადაა ნაჩვენები ჰეტეროკლინიკური შეერთების ნაწილი მდგომარეობათა სამგანზომილებიანი სივრცის პუნკარეს კვეთაში. იგივე თვისება დამახასიათებელია აგრეთვე იმ ჰეტეროკლინიკური ორბიტებისთვისაც, რომლებიც თანმიმდევრულად აკავშირებენ სამ ან მეტ ზღვრულ ციკლს. 4.15 ნახაზი გვიჩვენებს მდგომარეობათა სამგანზომილებიან სივრცეებში ჰომოკლინიკურ და ჰეტეროკლინიკურ შეერთებათა ნიმუშებს, რომლებისთვისაც „უნაგირისებრი“ ციკლის შიდა და გარე სიმრავლეები ორგანზომილებიანი ზედაპირებია. აგრეთვე ნაწილობრივ ნაჩვენებია შედეგად მიღებული პუნკარეს კვეთების სურათები.

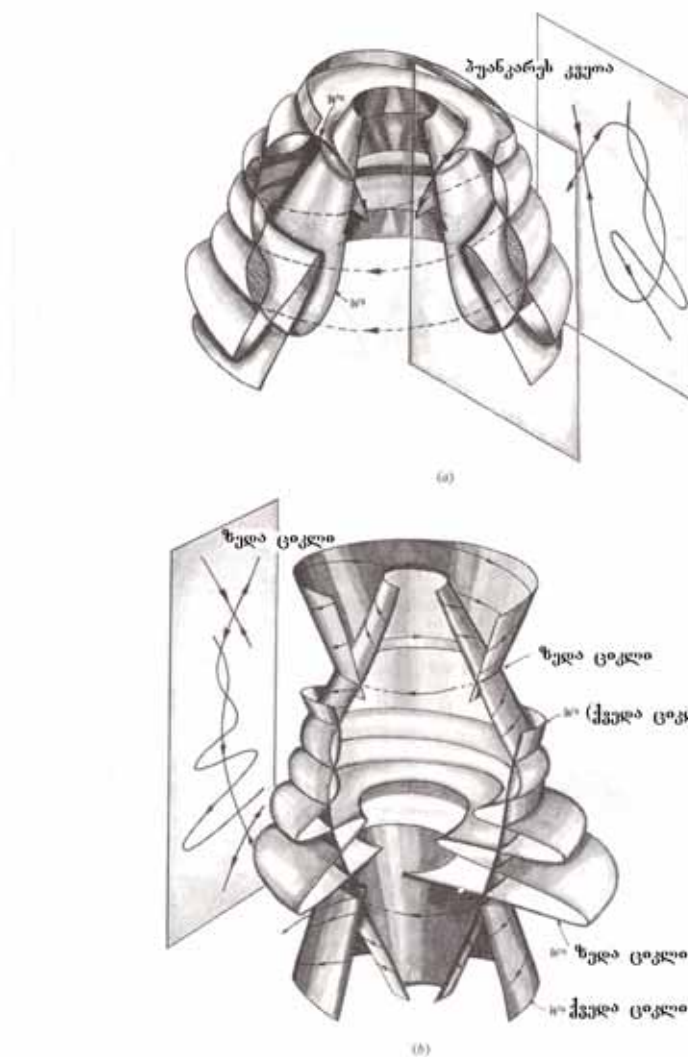
ამოცანა 4.11-1. დაამტკიცეთ, რომ „უნაგირის“ წერტილის (ან „უნაგირისებრი“ ციკლის) შემცველი არასტაბილური მრავალსახეობა სხვა „უნაგირის“ წერტილის (ან ციკლის) შემცველ არასტაბილურ მრავალსახეობას ვერ გადაკვეთს. გარდა ამისა, უჩვენეთ, რომ ორი სტაბილური მრავალსახეობა ერთმანეთს ვერ გადაკვეთს.

4.16 ნახაზი გვიჩვენებს „უნაგირისებრი“ ციკლების შიდა და გარე სიმრავლეების გადაკვეთის შედეგად მიღებული ჰომოკლინიკური და ჰეტეროკლინიკური მარყუეების სამგანზომილებიან კონსტრუქციებს. აგრეთვე ნაჩვენებია შესაბამისი პუნკარეს კვეთების დიაგრამები.



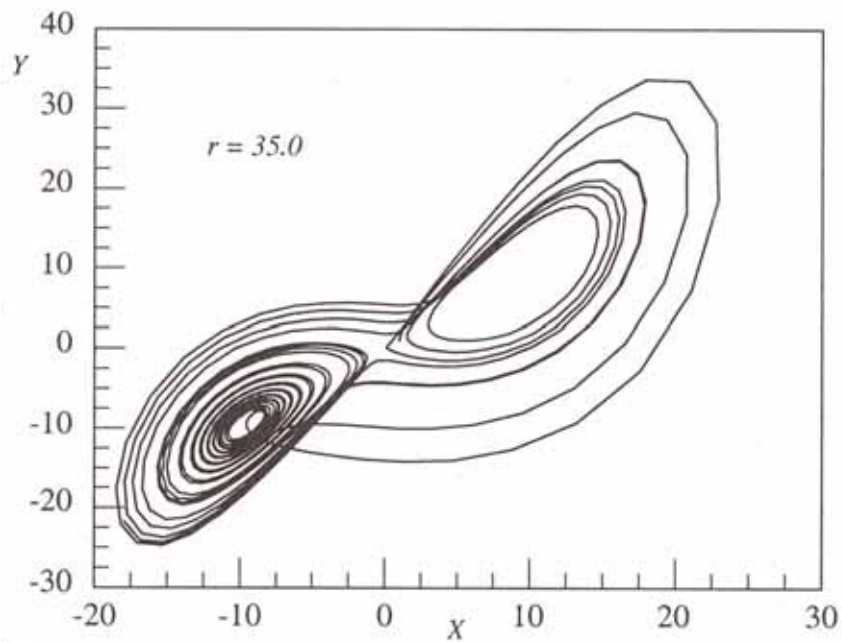
ნახ. 4.15. მდგომარეობათა სამგანზომილებიან სივრცეებში ჰომოკლინიკური და ჰეტეროკლინიკური შეერთების ამსახველი დიაგრამები. (a) შემთხვევაში „უნაგირისებრი“ ციკლის შიდა და გარე სიმრავლეები ერთმანეთს გლუვად უერთდებიან და ქმნიან ჰომოკლინიკურ შეერთებას. (b) და (c) შემთხვევებში ჰეტეროკლინიკური შეერთების წარმოქმნისთვის „უნაგირისებრი“ ციკლის გარე სიმრავლე მეორე ციკლის შიდა სიმრავლეს უერთდება. ორთავე შემთხვევაში ნაჩვენებია პუანკარეს კვეთების ორგანზომილებიანი კონსტრუქციები (Ottino, 1989).

იმის სანახავად, თუ როგორ ახდენს გავლენას ჰომოკლინიკური და ჰეტეროკლინიკური შეერთებები სისტემის დინამიკაზე, ვუბრუნდებით პირველ თავში მოყვანილ ლორენცის მოდელს. ეს მოდელი შესანიშნავი მაგალითია ჰომოკლინიკური და ჰეტეროკლინიკური შეერთებების შედეგად მიღებული ქაოსში გარდამავალი სტადიებისა, რომლებიც საბოლოო ჯამში ქაოსურ ქმედებაში გადაიზრდებიან. ჰომოკლინიკური შეერთება გვაქვს მაშინ, როდესაც r პარამეტრი მიახლოებით უდრის 13.93-ს ($b=8/3$ და $p=10$, როგორც პირველ თავში გვქონდა). პარამეტრის ამ მნიშვნელობისათვის კოორდინატთა სათავეში მდებარე ფიქსირებული („უნაგირის“) წერტილის ერთგანზომილებიანი გარე სიმრავლე მთელ სივრცეზე გასდევს იმავე წერტილის ორგანზომილებიან შიდა სიმრავლეს.



ნახ. 4.16. „უნაგირისებრ“ ციკლებთან დაკავშირებული შიდა და გარე სიმრავლეების შესაბამისი ზედაპირების გადაკვეთის შედეგად მიღებული ჰომოკლინიკური (ზემოთ) და ჰეტეროკლინიკური (ქვემოთ) მარყუქების სამგანზომილებიანი კონსტრუქციები. ასევე მოყვანილია მარყუქების მიერ შექმნილი პუნკარუს ორგანზომილებიანი კვეთების ნაწილთა ესკიზები (Ottino, 1989).

ფაქტობრივად, ორმაგი ჰომოკლინიკური შეერთება იმიტომ მყარდება, რომ არსებობს ერთგანზომილებიანი გარე სიმრავლის ორი განშტოება. ერთ-ერთი მათგანს მივყავართ კოორდინატთა სათავის გარეთ მდებარე ფიქსირებული წერტილებიდან ერთერთისაკენ, ხოლო მეორე განშტოებას კი – მეორე წერტილისაკენ. ჰომოკლინიკურ შეერთებებთან ახლოს გამავალი ტრაექტორიები მრავალჯერ განიზიდება და მიიზიდება სათავეში მყოფი „უნაგირის“ წერტილის მიმართ, ქაოსურად იმოძრაავებს სათავიდან მოშორებით მყოფი ორი ფიქსირებული წერტილების მიდამოებში და საბოლოოდ ერთ-ერთ მათგანში დასრულდება.



ნახ. 4.17. ჰეტეროკლინიკური ქმედების სქემა ლორენცის მოდელისათვის, როდესაც $r=35.0$. ნაჩვენებია ტრაექტორიის გეგმილი XY სიბრტყეზე. ტრაექტორია იწყება კოორდინატთა სათავეში მდებარე „უნაგირის“ წერტილის მიდამოში. სათავის მიმართ გარე სიმრავლე უერთდება ერთ-ერთი „უნაგირისეული“ ციკლის მიმართ შიდა სიმრავლეს, $X=Y= +9.5$ კოორდინატების მქონე ფიქსირებული წერტილის მიდამოში. შემდეგ ტრაექტორია „უნაგირისეულ“ ციკლს შორდება გარე სიმრავლის გავლით. ეს უკანასკნელი სხვა „უნაგირისეული“ ციკლის შიდა სიმრავლესთანაა შეერთებული. $X=Y=-9.5$ ფიქსირებული წერტილის გარშემო ორბიტული მოძრაობის შემდეგ ტრაექტორია უბრუნდება „უნაგირისეული“ ციკლის მიმართ გარე სიმრავლეში მყოფ საწყის წერტილს.

ამგვარი სახის ქმედება ქაოსურს მოგვაგონებს, მაგრამ რადგან იგი რეალურად მხოლოდ გარდამავალი სტადიაა, მას **გარდამავალ ქაოსს** უწოდებენ. ამგვარი ქაოსის შესახებ მეტი ინფორმაციისთვის იხილეთ მოცემული თავის ბოლოში ციტირებული ლიტერატურა.

როდესაც ადგილი აქვს ამგვარ ჰომოკლინიკურ შეერთებას, წარმოიქმნება ორი „უნაგირისეული“ ციკლი. ისინი განსაკუთრებულ როლს ასრულებს ლორენცის მოდელში ქაოსური მიმზიდველის გენერაციის თვალსაზრისით. როდესაც r გადააჭარბებს 13.93-ს, სათავის გარეთ მდებარე ფიქსირებული წერტილების მიდამოში არსებული „უნაგირისეული“ ციკლები (რომლებიც თავისთავად სპირალური კვანძებია) ზომაში კლებას იწყებს და სპირალური კვანძების კარშემო „იკუმშება“. $r=24.74$ -თვის სპირალური კვანძების კომპლექსური მახასიათებლების ნამდვილი ნაწილები 0-სკენ მიისწრაფვიან და „უნაგირისეული“ ციკლები განიცდიან კოლაფსს და გარდაიქმნებიან კვანძებად. მაგრამ

როდესაც $r < 24.06$, სათავეში მდებარე „უნაგირის“ წერტილის გარე სიმრავლე „უნაგირისეული“ ციკლების გარეთ გამოდის. $r > 24.06$ -სთვის, გარე სიმრავლე მოხვდება „უნაგირისეული“ ციკლების შიგნით, ამიტომ, $r = 24.06$ -ზე (მიახლოებით) სათავეში მდებარე „უნაგირის“ წერტილის გარე სიმრავლემ ჰეტეროკლინიკური შეერთების დასამყარებლად უნდა გადაკვეთოს „უნაგირისეული“ ციკლები. $r < 24.74$ -სთვის ორი სპირალური კვანძის მიდამოებში არსებობს მიზიდულობის ორი (მცირე) არე, მაგრამ ამ არეების გარეთ საწყისის მქონე ტრაექტორიები ჰეტეროკლინიკური შეერთებისა და შედეგად მიღებული მარყუჟის გავლენის გამო ქაოსურად ვითარდებიან.

ასეთი შეერთების შედეგად წარმოიქმნება ქაოსური მიმზიდველი. ნახ. 4.17 გვიჩვენებს, თუ რა ზეგავლენას ახდენენ ჰეტეროკლინიკური შეერთებები „უნაგირის“ წერტილის მიდამოში საწყისის მქონე ტრაექტორიაზე. ლორენცის მოდელის შესაბამის ტრაექტორიებსა და ბიფურკაციებს ვრცლად განვიხილავთ მე-7 თავში.

სილნიკოვის ქაოსი

ჰომოკლინიკური მდგომარეობის ოდნავ განსხვავებული ტიპი მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ზოგიერთ დინამიკურ სისტემისათვის. ასეთი შემთხვევა გამოიკვლია სილნიკოვა (SIL70) და ამიტომ განსახილველ ქმედებას სილნიკოვის ქაოსი ეწოდება. ასეთი სიტუაციასთან მაშინ გვაქვს საქმე, როდესაც მდგომარეობათა სამგანზომილებიან სივრცეებში მყოფ „უნაგირის“ წერტილს ერთი ნამდვილი დადებითი λ და ორი კომპლექსურად შეუღლებული მახასიათებელი მნიშვნელობების $\alpha \pm i\beta$ წყვილი გააჩნია: „უნაგირის“ წერტილს გააჩნია ერთგანზომილებიანი გარე სიმრავლე და ავლენს სპირალური ტიპის ქმედებას ორგანზომილებიან შიდა სიმრავლეში

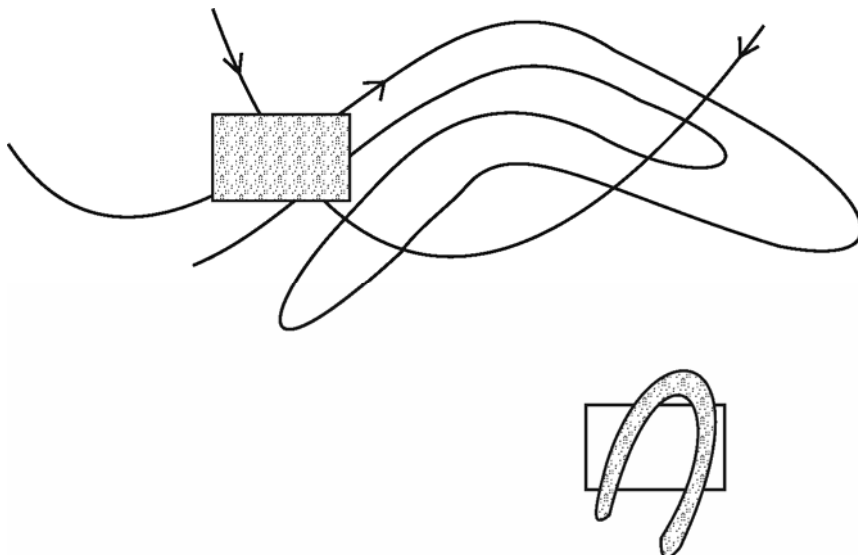
სილნიკოვა უჩვენა, რომ თუ მოცემული „უნაგირის“ წერტილისთვის გვაქვს ჰომოკლინიკური ორბიტა და, გარდა ამისა, $\lambda > |\alpha|$ ანუ (ორგანზომილებიანი) ტრაექტორიები შიდა სიმრავლის გასწვრივ მიზიდვასთან შედარებით გარე სიმრავლის გასწვრივ უფრო სწრაფად განიზიდება, მაშინ აღიძვრება ქაოსური ქმედება პარამეტრის მნიშვნელობათა იმ დიაპაზონისათვის, რომლის შემთხვევაშიც ჰომოკლინიკური ორბიტა ყალიბდება. ამგვარი ქმედება უნდა განვასხვავოთ ადრე განხილული ქმედებისაგან, როდესაც არანაირ ქაოსურ ქმედებას არ აქვს ადგილი პარამეტრის იმ მნიშვნელობის ქვემოთ, რომლისთვისაც გადაკვეთას აქვს ადგილი. Guckenheimer and Holmes (1990) სილნიკოვის ქაოსს დაწვრილებით, მათემატიკურად განიხილავენ.

4.12 ჰომოკლინიკური მარყუჟები და ნალები

მდგომარეობათა სივრცის ორბიტებზე ჰომოკლინიკური და ჰეტეროკლინიკური კვანძების გავლენის დემონსტრაციის თვალსაზრისით, მეტად მნიშვნელოვანი და მოხერხებული გეომეტრიული მოდელია სმეილის ნალი. ამგვარი მეტაფორა დინამიკურ სისტემებზე ჰომოკლინიკური მარყუჟების ზემოქმედების ეფექტის წარმოსაჩენად მათემატიკოსმა სტივენ სმეილმა (SMA67) შემოიტანა. ნალის კონსტრუქციას სხვა ღირსებებიც გააჩნია რადგან იგი გვაწვდის ისეთ სქემას, რომელიც ბევრი მნიშვნელოვანი ასპექტის მათემატიკურ დამტკიცებას უზრუნველყოფს. ამჯერად მხოლოდ ნალის არსს წარმოგიდგენთ, ხოლო მე-5 თავში ამ კონსტრუქციის მათემატიკური შედეგები იქნება მოყვანილი.

სმეილის კონსტრუქციაში გასარკვევად განვიხილოთ დინამიკური სისტემის პუნკარეს კვთაში მდებარე „უნაგირის“ წერტილის გარემომცველი, საწყისი წერტილებისგან შემდგარი მცირე ზომის მართკუთხედი. სისტემის ქმედებასთან ერთად მოცემული მართკუთხედი W^u არასტაბილური მრავალსახეობის მიმართულებით გაფართოებისკენ მიისწრაფვის, ხოლო W^s სტაბილური მრავალსახეობის მიმართულებით კი ადგილი აქვს შეკუმშვას. საბოლოოდ მართკუთხედი 4.13 ნახაზზე ნაჩვენებ W^u -ს მარყუჟისებრ არეს მიაღწევს და მისი ფორმა უკვე ცხენის ნალის მსგავსი იქნება. სისტემის შემდგომ ევოლუციასთან ერთად ნალი ნაწილობრივ გადაფარავს საწყის მართკუთხედს. სმეილმა ააგო ასახვის ფუნქცია, რომელიც ამჟამად სმეილის ნალისებრი ასახვის სახელით არის ცნობილი.

სმეილის ნალში საწყისი წერტილებისგან შემდგარი ოთხკუთხედი ერთი მიმართულებით გაწელილია, ხოლო პერპენდიკულარული მიმართულებით კი – შეკუმშული. 4.18 ნახაზზე ნაჩვენები წაგრძელებული მართკუთხედი გაღუნულია და გადაფარებულია საწყის კვადრატზე.



ნახ. 4.18. სმეილის ნალი წარმოადგენს საწყისი პირობების მართკუთხედზე ჰომოკლინიკური მარყუჟის ზემოქმედების აბსტრაქციულ გამოხატულებას. ნახაზის ზედა ნაწილში საწყისი პირობების მართკუთხედი ჰომოკლინიკური მარყუჟის ნაწილზეა გადაფარებული. სისტემის ევოლუციის პირობებში ეს მართკუთხედი არასტაბილური მრავალსახეობის მიმართულებით იწელება, ხოლო სტაბილური მრავალსახეობის მიმართულების გასწვრივ კი იკუმშება. ნახაზის ქვედა ნაწილში გამოსახულია ამ პროცესის სმეილის აბსტრაქციის შედეგად მიღებული ნალი, რომელიც საწყის მართკუთხედზეა გადაფარებული.

პროცესი იტერაციულია და თვალი მივადევნოთ საწყის მართკუთხედში დარჩენილ წერტილებს იტერაციების უსასრულო რაოდენობის შემთხვევაში. ერთი მიმართულებით გაწევა, მეორე მიმართულებით შეკუმშვა მოკეცვასთან კომბინაციაში იძლევა დინამიკური სისტემის შესაბამის ტრაექტორიებზე ჰომოკლინიკური მარყუჟის ზემოქმედების იმიტაციას. სმეილ-ბირჰოფის ცნობილი თეორემა [Guckenheimer and Holmes, 1990] ამტკიცებს, რომ ჰომოკლინიკური მარყუჟის არსებობის შემთხვევაში სისტემა „ნალისებრ დინამიკას“ გამოავლენს.

სმეილ-ბირჰოფის თეორემა: თუ ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების სისტემით აღწერილ დინამიკურ სისტემას გააჩნია ჰომოკლინიკური კვანძები, მაშინ მას ექნება კვანძები პუანკარეს სიბრტყესთან, რომლის ქმედებაც აღიწერება ნალის ასახვის მეშვეობით.

გაფართობა, შეკუმშვა და მოკეცვა

მიუხედავად იმისა, რომ სმაილის თავდაპირველ ნალის ასახვას მიმზიდველი არ გააჩნია და ის ვერ იქნება დისიპაციური სისტემის ქაოსური ქმედების ამსახველი მოდელი, ბევრმა ავტორმა ქაოსური ქმედების ნალის დინამიკასთან გაიგივება გადაწყვიტა, რადგან გაწევა (მდგომარეობათა სივრცის ერთი მიმართულებით მანძი) გამოიწვევს ახლომდებარე საწყისი პირობების ექსპონენციალურ დივერგენციას. ცხადია, როდესაც სახეზეა ერთი მიმართულებით გაწევა, მეორე მიმართულებით შეკუმშვა მოკეცვასთან კომბინაციაში (რათა სისტემა დარჩეს მდგომარეობათა სივრცის სასრულ არეში), ნალისებრი დინამიკა ქაოსური ქმედების ზოგადი მახასიათებელი უნდა იყოს.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ბევრ სისტემაში გაფართოება და გაღრმავება ფაქტიურად ხორციელდება ჰეტეროკლინიკური შეერთებების მეშვეობით, რომლებიც ერთი „უნაგირისებრი“ ციკლის (მდგომარეობათა საწყის სივრცეში მდებარე პუნკარეს კვეთის შესაბამისი წერტილი) არასტაბილურ მრავალსახეობას აკავშირებს მეორე „უნაგირისებრი“ ციკლის ან „უნაგირის“ წერტილის სტაბილურ მრავალსახეობასთან. ამ უკანასკნელის არასტაბილურმა მრავალსახეობამ შესაძლოა საწყისი „უნაგირისებრი“ ციკლში უკუასახვა მოახდინოს. საწყისი პირობების შესაბამის წერტილების სიმრავლეზე ჰეტეროკლინიკური ციკლის მოქმედების საბოლოო ეფექტი ტოპოლოგიურად იგივეა, რაც ჰომოკლინიკური შეერთების შემთხვევაში.

საწყისი პირობების შესაბამისი წერტილების სიმრავლეზე ჰომოკლინიკური ან ჰეტეროკლინიკური მარყუჟის მოქმედების ეფექტს თვალნათლივ შეგვიძლია დავაკვირდეთ სითხეთა შერევის ექსპერიმენტებში. ორგანოზომილებიანმა სითხის ნაკადმა, რომელიც განიცდის პერიოდულ შემოფოთებას, ხსნარში შერეული ტრასირებადი ნაწილაკებისთვის შეიძლება გვიჩვენოს ქაოსური ტრაექტორიები (ამ საკითხს უფრო დეტალურად მე-11 თავში დავუბრუნდებით.) „უნაგირის“ წერტილის (ხსნარების დინამიკის ლიტერატურაში მას *ჰიპერბოლური წერტილი* ეწოდება) სიახლოვეს შეყვანილი ტრასირებადი ნაწილაკების მიერ მოცული არე იწვევება, იკეცება, შემდეგ კვლავ უბრუნდება საწყის არეს და ამგვარად ნალის ტიპის ქმედებას ავლენს (იხ. Ottino, 1989 და OTT89).

4.13 ლიაპუნოვის ექსპონენტები და ქაოსი

ქაოსური ქმედების განხილვა აქამდე თვისობრივ ხასიათს ატარებდა. ამჯერად ქაოსური ქმედების რაოდენობრივი კვლევის ერთ მეთოდს შემოგთავაზებთ. ამისათვის ორგვარი მოტივაცია არსებობს. 1) გვსურს ქაოსური ქმედების რაოდენობრივი ტესტის ჩატარება, რომელიც ქაოსურ ქმედებას გარეშე ზემოქმედებით გამოწვეული უწესრიგო ხმაურისაგან განასხვავებს. 2) სასურველია, რომ ქაოსურობის დონის რაიმე რაოდენობრივი საზომი გავაჩნდეს. ამის შემდეგ შევძლებთ განვსაზღვროთ, თუ როგორ იცვლება ქაოსური ქმედება სისტემის მაკონტროლებელ პარამეტრების ცვლილებასთან ერთად. ამ პარაგრაფში ქაოსის ერთ-ერთ რაოდენობრივ საზომად ლიაპუნოვის ექსპონენტებს წარმოგიდგინო. მე-5 თავში ვისაუბრებთ, თუ რა მეთოდით არის შესაძლებელი ლიაპუნოვის ექსპონენტების გამოთვლა. მე-9 და მე-10 თავებში გავეცნობით, თუ როგორ ხდება იტერაციული ასახვებისთვის ლიაპუნოვის ექსპონენტებთან ერთად ქაოსის სხვა რაოდენობრივი მაჩვენებლების დადგენა

ექსპერიმენტული მონაცემებისთვის. ამ თავში ყურადღებას გავამახვილებთ ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების სისტემებით გამოსახულ დინამიკურ სისტემებზე.

როგორც 3.7 პარაგრაფში აღვნიშნეთ, ლიაპუნოვის ექსპონენტა მდგომარეობათა სივრცეში მდებარე ფიქსირებული წერტილის მიმართ მიზიდვისა და განზიდვის ხარისხის საზომია. 4.2 პარაგრაფში აღვნიშნეთ, რომ ამ ცნების გამოყენება მდგომარეობათა სივრცეში მდებარე ნებისმიერ წერტილზე გამავალი ახლომდებარე ტრაექტორიების დივერგენციის მიმართაც შეიძლება. მდგომარეობათა ერთგანზომილებიან სივრცეში ერთ-ერთი საწყისი წერტილი აღვნიშნოთ x_0 -ით, x -ით კი – მის მიდამოში მყოფი რომელიმე სხვა საწყისი წერტილი. $x_0(t)$ იყოს ერთი საწყისი წერტილიდან გამომავალი ტრაექტორია, ხოლო $x(t)$ – მეორეიდან. თუ (3.7-3) გამოსახულების მიღებისას გამოყენებულ მეთოდს კვლავ მივმართავთ, ვნახავთ, რომ ორ ტრაექტორიას შორის არსებული s „მანძილი“ $s=x(t) - x_0(t)$ დროში ექსპონენციალურად იზრდება ან მცირდება.

ჩაწეროთ დინამიკური განტოლება შემდეგი სახით:

$$\dot{x}(t) = f(x) \tag{4.13-1}$$

თუ დავუშვებთ, რომ x ახლოსაა x_0 -თან, მაშინ ტეილორის მწკრივად წარმოდგენის გზით მივიღებთ:

$$f(x) = f(x_0) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) + \dots \tag{4.13-2}$$

აქედან გამომდინარე, ორ ტრაექტორიას შორის მანძილის ცვლილების სიჩქარე მოიცემა შემდეგი განტოლებით

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \dot{x} - \dot{x}_0 \\ &= f(x) - f(x_0) \\ &= \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) \end{aligned} \tag{4.13-3}$$

სადაც $f(x)$ -ის ტეილორის მწკრივში მხოლოდ პირველი რიგის წარმოებული გვაქვს შენარჩუნებული. თუ დროში მანძილის ექსპონენციალურ ცვლილებას ველით, მაშინ რაოდენობრივი თვალსაზრისით ლიაპუნოვის λ ექსპონენტს შემოვიტანთ, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$s(t) = s(t=0)e^{\lambda t} \tag{4.13-4}$$

თუ მოვახდენთ (4.13-4) გამოსახულების დიფერენცირებას დროის მიმართ, გვექნება

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \lambda s(t=0)e^{\lambda t} \\ &= \lambda s \end{aligned} \quad (4.13-5)$$

(4.13-5) და (4.13-3) განტოლებების შედარების გზით მივიღებთ:

$$\lambda = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} \quad (4.13-6)$$

ამრიგად, თუ λ დადებითია, მაშინ ტრაექტორიები ერთმანეთს დაშორდებიან, ხოლო თუ λ უარყოფითია, მაშინ ტრაექტორიები ერთმანეთს დაუახლოვდებიან.

ორი (ან მეტი) განზომილების მქონე მდგომარეობათა სივრცეებში, ნებისმიერი მიმართულებით ტრაექტორიების განვრცობისა თუ შემოკლების ხარისხთან ლიაპუნოვის ექსპონენტის მისადაგება შეგვიძლია. კერძოდ, სამი განზომილების შემთხვევაში შეგვიძლია ლიაპუნოვის სამი ექსპონენტის დადგენა, რომლებიც მდგომარეობათა სივრცის საძიებელ წერტილში განსაზღვრული იაკობიანის მახასიათებელ მნიშვნელობებს წარმოადგენენ. განსაკუთრებულ შემთხვევაში, როდესაც იაკობიანის მთავარი დიაგონალის გარდა ყველა წევრი 0-ის ტოლია, სამი მახასიათებელი რიცხვი (და ამრიგად სამი ლოკალური ლიაპუნოვის ექსპონენტი) გვექნება:

$$\lambda_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \quad (4.13-7a)$$

$$\lambda_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \quad (4.13-7b)$$

$$\lambda_3 = \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \quad (4.13-7c)$$

სადაც კერძო წარმოებულები მდგომარეობების სივრცის საძიებელ წერტილშია განსაზღვრული.

პრაქტიკიდან ვიცით, რომ დინამიკური ფუნქციის წარმოებული იცვლება x -თან ერთად, ამიტომ გვჭირდება λ საშუალო მნიშვნელობის პოვნა მთლიანი ტრაექტორიის გასწვრივ. თუ ცნობილია დინამიკური ფუნქციის სახე, ტრაექტორიის გასწვრივ ამ ფუნქციის წარმოებულს ადვილად განვსაზღვრავთ და საშუალო მნიშვნელობასაც დავადგენთ (ერთგანზომილებიანი დისიპაციური სისტემისთვის ვიცით, რომ ლიაპუნოვის საშუალო ექსპონენტი უარყოფითი სიდიდეა).

საწყისი პირობების სიმრავლის თვისებები

ლიაპუნოვის ექსპონენტების გეომეტრიული ინტერპრეტაციისთვის განვიხილოთ საწყისი პირობების მცირე ზომის მართკუთხა მოცულობა S_1, S_2 და S_3 განზომილებებით, რომელიც მოცემულ წერტილს მოიცავს იმგვარად, რომ მისი წახნაგები მიმართულია მდგომარეობათა სივრცის სამი ღერძის გასწვრივ. ეს მოცულობა დროში შემდეგნაირად განიცდის ევოლუციას:

$$V(t) = S_1 S_2 S_3 e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t} \quad (4.13-8)$$

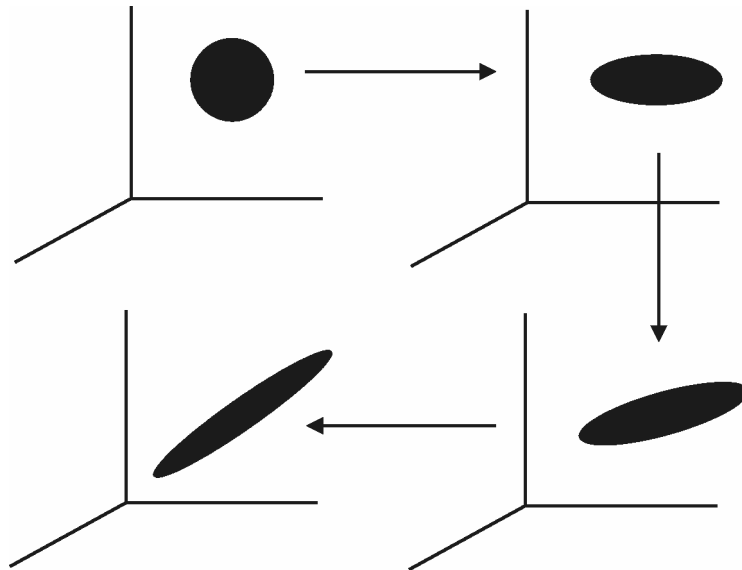
(4.13-8) და (3.13-6) განტოლებების შედარების შედეგად ვნახავთ, რომ ლიაპუნოვის სამი ექსპონენტის ჯამი გვაძლევს დინამიკურ ფუნქციათა სიმრავლის მათემატიკურ დივერგენციას. ჩვენ კვლავ გვანტერესებს ლიაპუნოვის ექსპონენტების საშუალო მნიშვნელობის პოვნა გავლილი ტრაექტორიის გასწვრივ. დისიპაციური სისტემისთვის ექსპონენტების საშუალო ჯამური სიდიდე უარყოფითი იქნება.

პირველი რიგის სამი დიფერენციალური განტოლებების მიერ აღწერილი, მდგომარეობათა სამგანზომილებიანი სივრცეში მყოფი სისტემისთვის ლიაპუნოვის ექსპონენტებიდან ერთ-ერთი მაინც ნულის ტოლი უნდა იყოს, გარდა იმ შემთხვევისა თუ მიზიდულობის წერტილი ფიქსირებული წერტილი არაა (HAK83) (ლიაპუნოვის ექსპონენტისთვის ნულოვანი მნიშვნელობა შეესაბამება ახლომდებარე წერტილებში საწყისის მქონე ტრაექტორიების უმნიშვნელო მიზიდვას ან განზიდვას.) ამგვარად, დისიპაციური სისტემისთვის ლიაპუნოვის დანარჩენი ექსპონენტების საშუალო მნიშვნელობებიდან ერთ-ერთი მაინც უარყოფითი სიდიდეა. თუ მდგომარეობათა სამგანზომილებიანი სივრცისათვის სისტემა ქაოსურია, მაშინ ლიაპუნოვის ერთ-ერთი ექსპონენტი დადებითი იქნება.

მდგომარეობათა ოთხი ან მეტი განზომილების მქონე სივრცეებში, შესაძლოა ერთზე მეტი დადებითი საშუალო ლიაპუნოვის ექსპონენტი გამოვლინდეს. ასეთ შემთხვევებში ვამბობთ, რომ *ჰიპერქაოსს* აქვს ადგილი. პერიოდულიდან ჰიპერქაოსურ ქმედებაში გადასვლის ერთ-ერთი შესაძლო გზა HAL99-შია მოყვანილი.

მოვლენების უფრო თვალნათლივ წარმოდგენის მიზნით მოვახდინოთ გრაფიკული წარმოდგენა. დისიპაციური სისტემისთვის ავიღებთ საწყის წერტილს და თვალს გავადევნებთ ტრაექტორიის მსვლელობას მდგომარეობათა სივრცეში მდებარე მიზიდულობის არემდე.

შემდეგ ავირჩევთ ტრაექტორიის რაიმე წერტილს და მის გარშემო მცირე სფეროს ავაგებთ. შემდეგ ამ სფეროში მდებარე წერტილებში სათავეების მქონე ტრაექტორიების ევოლუციას შევისწავლით.



ნახ. 4.19. მდგომარეობათა სივრცეში მდებარე საწყისი წერტილების სფეროს ევოლუციის სქემა. სფერო იწყება მარცხენა ზედა მხარეზე. ნახაზზე დროის ცვლილება საათის ისრის მიმართულებით ხდება. დისიპაციური სისტემისთვის საწყისი წერტილების სიმრავლესთან დაკავშირებული მოცულობა ნულისაკენ უნდა მიისწრაფოდეს. ქაოსურ სისტემაში კი სფერო ექსპონენციალურად გაიწელება ერთი მიმართულებით მაინც.

როგორც 4.19 ნახაზზეა ნაჩვენები, დროთა განმავლობაში სფერო შეიძლება გაიწელოს ერთი მიმართულებით და შეიკუმშოს დანარჩენი მიმართულებებით. შედეგად სფერო ელიფსოიდში გადავა (თუ დისიპაციურ სისტემას საკმარისად დიდხანს ვაღვენებთ თვალყურს, სფეროს მოცულობა ნულამდე უნდა შემცირდეს.)

თუ ელიფსოიდის სხვადასხვა ღერძებისთვის გაფართოებისა და შეკუმშვის ექსპონენციალურ მნიშვნელობებს შევაფასებთ, მაშინ შევძლებთ მიმზიდველის მოცემული არისათვის ლიაპუნოვის ექსპონენტების დადგენას. ამ პროცედურის ტრაექტორიის მთელ სივრცეზე ჩატარების შემთხვევაში სისტემისთვის ლიაპუნოვის საშუალო ექსპონენტების მნიშვნელობებსაც გამოვთვლით. ლიაპუნოვის საშუალო ექსპონენტების სიმრავლეს **ლიაპუნოვის ექსპონენტების სპექტრი** ეწოდება. თუ ლიაპუნოვის საშუალო ექსპონენტებიდან ერთ-ერთი მაინც დადებითი სიდიდეა, მაშინ ვასკვნით, რომ სისტემა ამჟღავნებს ახლომდებარე ტრაექტორიების დივერგენციას და იგი „მართლაც“ ქაოსურია. 4.3 ცხრილში მოყვანილია ლიაპუნოვის ექსპონენტების სპექტრსა და მიმზიდველის სახეობას შორის დამოკიდებულება

(0, -, -) ნიშნავს, რომ ლიაპუნოვის ერთ-ერთი ექსპონენტი 0-ის ტოლია, დანარჩენი ორი კი უარყოფითი სიდიდეა.

ცხრილი 4.3

ლიაპუნოვის ექსპონენტების სპექტრი და შესაბამისი მიმზიდველები მდგომარეობათა სამგანზომილებიანი სივრცე

λ s-ის ნიშანი	მიმზიდველის სახეობა
(-, -, -)	ფიქსირებული წერტილი
(0, -, -)	ზღვრული ციკლი
(0, 0, -)	კვაზიპერიოდული თორი
(+, 0, -)	ქაოსური

პრაქტიკაში ლიაპუნოვის საშუალო ექსპონენტების გამოთვლა რთულია, რადგან ელიფსოიდი ტრაექტორიების ევოლუციასთან ერთად ბრუნვითი ხდება და დისტორსიას განიცდის. დინამიკური განტოლებების ცოდნის შემთხვევაში ლიაპუნოვის ექსპონენტების გამოთვლის მიზნით შექმნილია სხვადასხვა ალგორითმები. მკითხველი აუცილებლად უნდა გაეცნოს თავის ბოლოში მოყვანილ ციტირებულ ლიტერატურას. მოცემულ თავში ჩვენ თვისობრივად შევაჯამეთ მდგომარეობათა სამ ან მეტგანზომილებიან სივრცეებში ქაოსის წარმოშობის ძირითადი გზები. მთავარი ნიშანთვისება მდგომარეობს იმაში, რომ ტრაექტორიები მდგომარეობათა სივრცეში „დაეხეტებიან“ აპერიოდულად და ერთმანეთში არიან „გადახლართული“. ქაოსური ქმედების შემთხვევაში ახლომდებარე ტრაექტორიების დივერგენცია საწყისი პირობების სიმრავლის გაწელებასა და გაღუნვას განაპირობებს. ზემოთ მოყვანილი მეტწილად თვისობრივ ხასიათს ატარებდა. მომდევნო თავებში გაცილებით მეტ ყურადღებას ქაოსური ქმედების რაოდენობრივ აღწერას დავუთმობთ.

ზოგიერთი შენიშვნა ლიაპუნოვის ექსპონენტების შესახებ

ჩვენ ხაზი გავუსვით, რომ ლიაპუნოვის ექსპონენტა გასაშუალოებული რაოდენობრივი პარამეტრია და თავდაპირველად ახლომდებარე ორი ტრაექტორიების დივერგენციის საშუალო მაჩვენებელია. ჩვენ დავასკვნით, რომ სისტემის ქმედება მხოლოდ იმ შემთხვევაშია ქაოსური, თუ მისი ლიაპუნოვის საშუალო ექსპონენტა დადებითია.

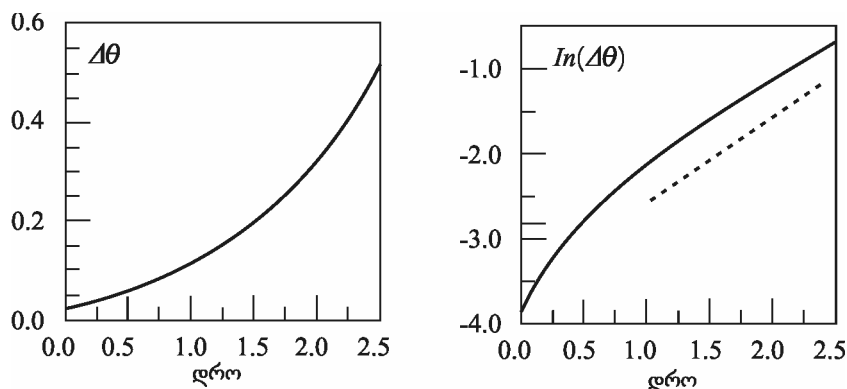
ახლომდებარე ტრაექტორიების ექსპონენციალური დივერგენციის პოვნა იმ სისტემებშიც კი შესაძლებელია, რომლებიც ქაოსური არ არიან. ამგვარი ფსევდოქაოსი მაშინ აღიძვრება, როდესაც მდგომარეობათა სივრცეში ტრაექტორიები „უნაგირის“ წერტილის გარე

სიმრავლის სიახლოვეს გაივილიან. გარე სიმრავლეზე „უნაგირის“ წერტილის მახასიათებელი მნიშვნელობა დადებითია. გარე სიმრავლის სიახლოვეს გამავალი ტრაექტორიათა ქმედება მსგავსია იმისა რაც გვექნებოდა თვით ამ სიმრავლეში, ვინაიდან მდგომარეობათა სივრცეში მახასიათებელი მნიშვნელობები თანაბრად იცვლებიან. თავდაპირველად „უნაგირის“ წერტილის გარე სიმრავლის სიახლოვეს მდებარე ორი ახლომდებარე ტრაექტორია ექსპონენციალურ დივერგენციას განიცდის და შესაბამისი ლიაპუნოვის ლოკალური ექსპონენტა ახლოსაა იმ მახასიათებელ მნიშვნელობასთან, რომელიც დაკავშირებულია „უნაგირის“ წერტილის გარე სიმრავლესთან. გარკვეულწილად სარისკოა იმის დაშვება, რომ ლიაპუნოვის საშუალო ექსპონენტა დადებითია დროის მხოლოდ მცირე ინტერვალში.

ამგვარი ქმედების მაგალითია ფიზიკის შესავალი კურსიდან ჩვენთვის კარგად ნაცნობი მათემატიკური ქანქარა. ქანქარის მდებარეობა მოიცემა მის ღეროსა და ვერტიკალს შორის არსებული θ კუთხის მეშვეობით. როდესაც ქანქარა უძრავია, მაშინ $\theta=0$. სისტემის გადაადგილებას აღვწერთ მიმდევრობითი ტრაექტორიებით მდგომარეობათა სივრცეში, რომლის კოორდინატებია $(\dot{\theta})$ კუთხური სიჩქარე და (θ) კუთხე. გამოვიყენოთ, რომ $u=\dot{\theta}$ დამოკიდებულია და დავწეროთ მდგომარეობათა სივრცის განტოლებები მოცემული სისტემისთვის:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\frac{g}{L} \sin \theta \\ \dot{\theta} &= u \end{aligned} \tag{4.13-9}$$

სადაც g თავისუფალი ვარდნის აჩქარებაა (9.86/კგ დედამიწის ზედაპირთან ახლოს), ხოლო L კი ქანქარის სიგრძეა.



ნახ. 4.20. მათემატიკური ქანქარის კუთხურ მდებარეობებს შორის არსებული სხვაობა (როდესაც $g/L = 1$) ორ თავდაპირველად ახლომდებარე ტრაექტორიისთვის გამოსახულია

დროის ფუნქციის სახით. ერთი ტრაექტორია იწყება $\theta_0=3.00$ რადიანზე და $d\theta/dt = 0.0724$ პირობებში, ხოლო მეორე $\theta_0=3.02$ რადიანზე და $d\theta/dt=0$ პირობებში. ამ სხვაობის ნატურალური ლოგარითმი გამოსახულია მარჯვნივ. ექსპონენციალური დივერგენციის შემთხვევაში, მარჯვენა მხარეს გამოსახული მრუდი შეიძლება იყოს წრფის მონაკვეთი, რომლის კუთხური კოეფიციენტი ლიაპუნოვის ლოკალური ექსპონენტის ტოლია. მარჯვნივ, წყვეტილ მონაკვეთს 1-ის ტოლიკუთხური კოეფიციენტი აქვს.

მდგომარეობათა ორგანზომილებიანი სივრცისთვის მე-3 თავში მოყვანილი მეთოდების გამოყენებით ვპოულობთ, რომ სისტემას ფიქსირებული წერტილები გააჩნია $\dot{\theta}=0$ -სა და $\theta=0,\pi$ -თვის. ფიქსირებული წერტილი $\theta=\pi$ -ში წარმოადგენს „უნაგირის“ წერტილის შემდეგი მახასიათებელი მნიშვნელობებით

$$\begin{aligned} \lambda_+ &= +\sqrt{\frac{g}{L}} \\ \lambda_- &= -\sqrt{\frac{g}{L}} \end{aligned} \quad (4.13-10)$$

ამოცანა 4.13-1. შეამოწმეთ ზემოთ მოყვანილი მტკიცებები ფიქსირებული წერტილებისა და მათემატიკური ქანქარას მახასიათებელი მნიშვნელობებისა.

ამრიგად, თუ ორი ტრაექტორია “უნაგირის” წერტილის გარე სიმრავლის სიახლოვეს იღებს სათავეს, ისინი არასტაბილური მრავალსახეობის მიმართულებით მიემართებიან და

შემდეგ („უნაგირის“ წერტილის მიდამოს დატოვებამდე) გადაიხრებიან $\sqrt{\frac{g}{L}}$ -ის ტოლი მახასიათებელი მნიშვნელობით. 4.20 ნახაზზე გამოსახულია ორი ტრაექტორიის კუთხურ მდებარეობებს შორის არსებული. ერთი ტრაექტორიის დახრის საწყისი კუთხეა $\theta_0=3.00$ რადიანი, ხოლო მეორისა – $\theta_0=3.02$ რადიანი. პირველ შემთხვევაში კუთხური სიჩქარე წამში 0.0724 რადიანია, მეორეში 0. (ასეთი შერჩევის პირობებში ქანქარისათვის ორივე

შემთხვევაში მინიჭებულია ერთი და იგივე საწყისი ენერგია. ამასთან, გვაქვს $\sqrt{\frac{g}{L}}=1$.) 4.20 ნახაზის მარჯვენა მხარეს ორ კუთხურ მდებარეობას შორის განსხვავების ნატურალური ლოგარითმი გამოსახულია დროის ფუნქციის სახით. შეგვიძლია დავინახოთ, რომ საწყისი გარდამავალი სტადიის შემდეგ დივერგენცია (როგორც მოსალოდნელი იყო) ექსპონენციალურია 1-ის ტოლი მახასიათებელი მნიშვნელობით დაახლოებით $t=2.5$ -მდე.

თუ ტრაექტორიებს უფრო დიდხანს გავადევნებთ თვალს, ვნახავთ, რომ კუთხურ მდებარეობებს შორის განსხვავება შემდგომში კლებულობს და იძლევა ნულის ტოლ ლიაპუნოვის გასაშუალოებულ ექსპონენტას, რასაც ჩვენი ხახუნისგან თავისუფალი მოდელი მოითხოვს. თუ ტრაექტორიებს $t=2.5$ -მდე მივყვებით, დავასკვნით (არასწორად), რომ ქმედება ქაოსურია. ასეთი შეცდომის თავიდან ასაცილებლად, ტრაექტორიებს საკმარისად დიდხანს უნდა გავადევნოთ თვალი, რათა მათ მდგომარეობების სივრცის მთლიან უბანში „მოგზაურობის“ საშუალება მიეცე. (პრაქტიკაში ძნელია იმის გარკვევა, თუ რამდენი დროა ამისათვის საკმარისი). მის შემდეგ ლიაპუნოვის გასაშუალოებული ექსპონენტა სისტემის ქაოსური და არაქაოსური ქმედების ჭეშმარიტი ინდიკატორი გახდება.

4.14 დამატებითი ლიტერატურა

ქაოსში გადასვლის გზები

ქაოსში გადასვლის გზების განხილვას შეხვედებით 1-ლი თავის ბოლოს ჩამოთვლილ შესავალ კურსთა უმრავლესობაში.

[Abraham and Shaw, 1992] and F. D. Abraham, R. H. Abraham, and C. D. **Shaw**, *Dynamical Systems: A Visual Introduction*, (Science Frontier Express, 1996). ნაშრომში მოცემულია დიდი რაოდენობით ილუსტრირებული მაგალითები. სხვადასხვა ბიფურკაციული მოვლენები გამოსასახულია გრაფიკულად.

J. M. Ottino, *The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos, and Transport* (Cambridge University Press, Cambridge, 1989) pp. 111-15. [Guckenheimer and Holmes, 1990]. ავტორები განიხილავენ homoclinic and heteroclinic ორბიტებს.

M. A. Harrison and Y.-C. Lai, "Route to high-dimensional chaos," *Phys. Rev. A* 59, R3799-R3802 (1999).

უცნაური არაქაოსური მიმზიდველები

C. Grebogi, E. Ott, S. Pelikan, and J. A. Yorke, "Strange Attractors that are not Chaotic," *Physica D* 13, 261-68 (1984).

კვაზიპერიოდულობა

L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, (Pergamon, London, 1959).

J. P. Gollub and H. L. Swinney, "Onset of Turbulence in a Rotating Fluid," *Phys. Rev. Lett.* 35, 927-30 (1975).

P. M. Battelino, "Persistence of Three-Frequency Quasiperiodicity under Large Perturbation," *Phys. Rev. A* 38, 1495-502 (1988). ნაშრომში ნაჩვენებია, რომ ზოგიერთ შემთხვევაში ქაოსის დაწყებამდე შესაძლებელია სამზე მეტი არათანაზომადი სიხშირის თანაარსებობა.

ქაოსში გარდამავალი მდგომარეობა

H. Krantz and P. Grassberger, "Repellers, Semi-attractors, and Long-lived Chaotic Transients," *Physica D* 17, 75-86 (1985). T. Tel, "Transient Chaos," in [Hao, 1990].

სილნიკოვის ქაოსი

L. P. Sil'nikov, "A contribution to the problem of the structure of an extended neighborhood of a rough equilibrium state of saddle-focus type," *Math. USSR Sbornik* 10, 91-102 (1970).

[Hale and Kocak, 1991]. 17.3 ნაწილში მოცემულია სილნიკოვის ქაოსის მოკლე შესავალი.

[Guckenheimer and Holmes, 1990]. მოცემულია სილნიკოვის ქაოსის ვრცელი მათემატიკური განხილვა.

ნალის ასახვა

S. Smale, "Differentiable Dynamical Systems," *Bull. Amer. Math. Soc.* 73, 747-817 (1967).

[Guckenheimer and Holmes, 1991].

[Gulick, 1992].

[Ottino, 1989] and J. M. Ottino, "The Mixing of Fluids," *Scientific American*, **260** (1), 56-67, (January, 1989).

ლიაპუნოვის ექსპონენტები

H. Haken, "At Least One Lyapunov Exponent Vanishes if the Trajectory of an Attractor does not Contain a Fixed Point," *Phys. Lett. A* 94,71-74 (1983).

ლიაპუნოვის ექსპონენტების გამოთვლის სხვადასხვა მეთოდები განხილულია:

A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, and J. A. Vasano, "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series," *Physica D* 7,285-317 (1985).

A. Wolf "Quantifying Chaos with Lyapunov Exponents," in *Chaos*, A. V. Holden, ed. (Princeton University Press, Princeton, 1986).

S. Neil Rasband, *Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems* (Wiley, New York, 1990).

4.15 კომპიუტერული ამოცანები

CE4-1. გამოიყენეთ Chaotic Dynamics Workbench ან *Chaos for Java* (იხილეთ ინფორმაცია მე-2 თავის ბოლოს) და გამოიკვლიეთ ლორენცის მოდელის ტიპის ქმედება, როდესაც პარამეტრის მნიშვნელობებია დაახლოებით $r = 13.96$ და $r = 24-25$. გამოიყენეთ Chaotic Dynamics Workbench-თვის პუნქტარეს კვეთები და დააკვირდით კოორდინატთა სათავეში მყოფი განმზიდველი ფიქსირებული წერტილისა და სათავიდან დაცილებული ფიქსირებული წერტილების სიახლოვეს მყოფი განმზიდველი ციკლების მოქმედების ეფექტს.

CE4-2. გამოიყენეთ Chaotic Dynamics Workbench და გამოთვალეთ ლიაპუნოვის ექსპონენტები ლორენცის მოდელისთვის. დაამტკიცეთ, რომ ლორენცის მოდელისთვის ექსპონენტების ვაში უარყოფითი სიდიდეა. აჩვენეთ, რომ ლიაპუნოვის ერთი ექსპონენტი ნულის ტოლია. დაამტკიცეთ, რომ ქაოსური ორბიტისთვის ლიაპუნოვის ერთი ექსპონენტი დადებითი სიდიდეა.

CE4-3. განიხილეთ შემდეგი მარტივი დიფერენციალური განტოლებით აღწერილი სისტემა:

$$\dot{x} + x + x^2 = 0$$

(a) გამოსახეთ სისტემა პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებების წყვილის მეშვეობით და შემდეგ მდგომარეობათა ორგანზომილებიან სივრცეში დაადგინეთ ფიქსირებული წერტილების მდებარეობა. აჩვენეთ, რომ „უნაგირის“ წერტილი იმყოფება (-1.0) -ში, ხოლო განმზიდველი – (0.0) -ში. (b) სისტემას „უნაგირის“ წერტილის შესაბამისი ჰომოკლინიკური ორბიტა გააჩნია. შეადგინეთ „უნაგირის“ და განმზიდველი წერტილის მიდამოებში მდებარე ტრაექტორიების გამომსახველი კომპიუტერული პროგრამა. სცადეთ ჰომოკლინიკური ორბიტის პოვნა [მინიშნება: ჰომოკლინიკური ორბიტა გაივლის წერტილზე $(0, 1/\sqrt{3})$. მე-8 თავში ვიხილავთ, თუ რატომ ხდება ასე.]

CE4-4. როსლერის მოდელი (ROS76) პირველ თავში წარმოდგენილი ლორენცის განტოლებების გამარტივებული ვერსიაა. მოდელის ამსახველი განტოლებები შემდეგი ფორმისაა

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + z(x - c)\end{aligned}$$

სადაც a , b და c პარამეტრებია, x , y და z კი – დინამიკური ცვლადები. იპოვეთ სისტემის შესაბამისი ფიქსირებული წერტილები. შემდეგ გამოიყენეთ *Chaos for Java* მოცემული სისტემის ქმედების შესწავლისთვის, როდესაც $a = 0.2$, $b = 0.2$, ხოლო c კი ცვლადი პარამეტრია. (ცვალეთ c 2.5-სა და 6-ს შორის). შეისწავლეთ სისტემის ქმედება მდგომარეობათა xyz სივრცეში არსებული მრუდების, აგრეთვე „უკუასახვის“ მეშვეობით. გამოიყენეთ x_{\max} სიდიდე (რომელიც წარმოადგენს $x(c)$ ფუნქციისა მაქსიმუმს) და პუანკარეს კვეთა. ამ სისტემის ზოგიერთი გრაფიკული შედეგისათვის იხილეთ [Strogatz, 1994], გვ. 376-379. დაწერეთ ბიფურკაციული დიაგრამის ასაგებად საკუთარი პროგრამა, რომელიც x_{\max} -ს c -ს ფუნქციის სახით გამოსახავს.

იტერაციული ასახვები

მას ყოველთვის y -ის მნიშვნელობა გამოჰყავს, y -ს კი x -ის მომდევნო მნიშვნელობის გასაგებად იყენებს და ა.შ. შემდეგ კვლავ აბრუნებს ამონახსნს განტოლებაში და თავიდან გამოჰყავს იგი. განმეორებაა, ხომ ხედავთ?! ტომ სტოპარდი, *Arcadia* (გვ. 44).

5.1 შესავალი

მოცემულ თავში სიღრმისეულად გავეცნობით დინამიკური სისტემების მიმართ გამოყენებული იტერაციული ასახვის ფუნქციების თეორიასა და ანალიზს. მათი შესწავლის მოტივაცია მას შემდეგ გაგვიჩნდა, რაც ამგვარ ასახვებს წინა თავში აღწერილ მდგომარეობათა სივრცეში არსებულ ტრაექტორიებისა და პუნქტების კვთების ურთიერთობასთან დაკავშირებით შევხვდით. ასეთი ასახვები, რა თქმა უნდა, მათემატიკური თვალსაზრისითაც ძალიან საინტერესოა. უფრო მეტიც, ხშირ შემთხვაში ფიზიკური სისტემებისთვის იტერაციული ასახვების გამოყენება მაშინაც კი შეგვიძლია, როდესაც მათი ამსახველი დიფერენციალური განტოლების შესაბამისი მოდელი ჩვენთვის უცნობია. მოდელირების მიმართ ასეთ მიდგომას გარკვეული საფრთხეებიც ახლავს თან (ზოგიერთ მათგანზე შემდგომში ვისაუბრებთ), მაგრამ მიუხედავად ამისა, კომპლექსური სისტემების დინამიკის შესწავლისას იგი უდიდეს სარგებელს მოგვიტანს.

თავდაპირველად ისეთ სისტემებზე ვიმსჯელებთ, რომელთა დინამიკის აღწერა ე.წ. ერთგანზომილებიანი იტერაციული ასახვებით არის შესაძლებელი. ერთგანზომილებიანი იტერაციული ასახვა ერთი (ნამდვილი) ცვლადის ფუნქციას ემყარება და გააჩნია შემდეგი ფორმა:

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (5.1-1)$$

5.2 პარაგრაფში მოყვანილია ზოგიერთი არგუმენტი, თუ რატომაა ერთგანზომილებიანი იტერაციული ასახვების გამოყენება ისეთი სისტემების, რომელთა „ბუნებრივი“ აღწერა შესაძლოა დიფერენციალური განტოლებების მეშვეობით.

მკითხველი უნდა გავაფრთხილოთ, რომ არაწრფივი დინამიკის თეორია ჯერჯერობით არ გვაძლევს სათანადო შესაძლებლობებს, რათა წინასწარ განსაზღვროთ, რა პირობებში შეგვიძლია აღვწეროთ კონკრეტული სისტემის ქმედება მოცემულ თავში განხილული მეთოდების მეშვეობით. თუმცა უნდა ითქვას, რომ ბევრი სისტემა როგორც თეორიული, ასევე პრაქტიკული თვალსაზრისით შეგვიძლია აღვწეროთ ამგვარი სქემის მეშვეობით მაკონტროლებელი პარამეტრის მნიშვნელობათა გარკვეულ დიაპაზონში მაინც. ვიმედოვნებთ, რომ 5.2 პარაგრაფში მოყვანილი არგუმენტები ამ მტკიცების საფუძვლიანობაში დაგვარწმუნებს.

ერთგანზომილებიანი იტერაციული ასახვების მათემატიკურმა თეორიამ როგორც ისტორიული, ასევე კონცეპტუალური თვალსაზრისით უმნიშვნელოვანესი როლი შეასრულა ქაოსის თეორიის განვითარებაში. ამ თავის შემდგომ პარაგრაფებში წარმოგიდგენილი ზოგიერთი ასპექტი შეიძლება უინტერესოდ მოგეჩვენოთ, მაგრამ „რეალური სამყაროს“ სიღრმისეული შეცნობის გზა სწორედ არაწრფივ დინამიკაზე გადის. ამრიგად, განსაკუთრებული ყურადღება უნდა დაუთმოთ მათემატიკის ისეთ ასპექტებს, რომლებიც მჭიდრო კავშირშია ბუნებაში არსებული სისტემების აღწერასთან.

5.2 პუანკარეს კვეტები და იტერაციული ასახვები

როგორც წინა თავში აღვნიშნეთ, პუანკარეს კვეტა, ახდენს რა მდგომარეობათა სივრცის განზომილების ერთით შემცირებას, ამარტივებს სისტემის დინამიკის გეომეტრიულ აღწერას. მთავარი კი ის არის, რომ მიუხედავად ამისა, გამარტივებული გეომეტრია სისტემის დინამიკის პერიოდულობის, კვაზიპერიოდულობის, ქაოტურობისა და ბიფურკაციების შესახებ „ფუნდამენტურ“ ინფორმაციას მოიცავს.

მდგომარეობათა სამგანზომილებიანი სივრცისთვის პუანკარეს კვეტა იმგვარად შერჩეული ორგანზომილებიანი სიბრტყეა, რომ მას ტრაექტორიები განივად კვეთენ (4.6 პარაგრაფში განსაზღვრული აზრით). 5.1 ნახაზზე მოყვანილია პუანკარეს სიბრტყე, სადაც დატანილია დეკარტის კოორდინატთა სისტემა u და v კოორდინატებით (რათა ისინი განვასხვავოთ მდგომარეობათა სივრცის x_1 , x_2 და x_3 კოორდინატებისაგან).

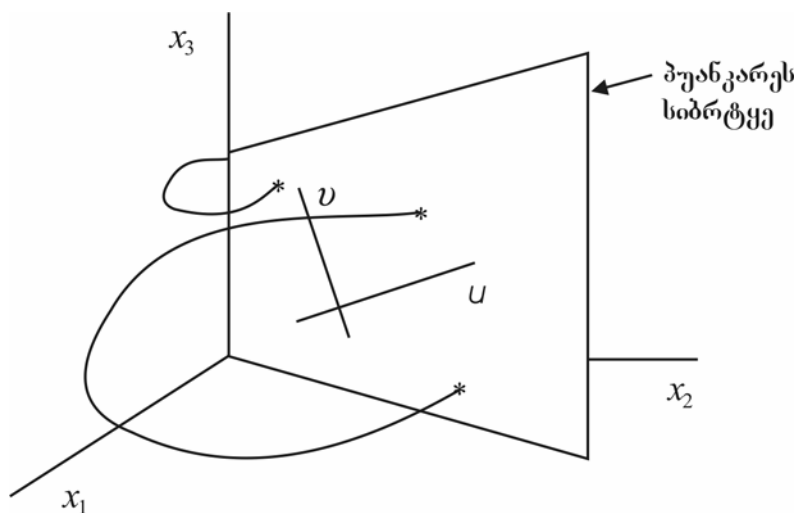
სისტემის დინამიკის აღმწერი დიფერენციალური განტოლებების ამონახსნთა ცალსახობა და დეტერმინიზმი არაცხადი სახით გულისხმობს პუანკარეს ასახვის ფუნქციის არსებობას, რომელიც ტრაექტორიასთან გადაკვეთის ერთ წერტილს, გადაკვეთის მომდევნო წერტილთან აკავშირებს. დავუშვათ, ტრაექტორია პუანკარეს სიბრტყეს გადაკვეთს (u_1, v_1) წერტილში.

მაშინ მდგომარეობათა სივრცის ფარგლებში „წრის დარტყმის“ შემდეგ ტრაექტორია სიბრტყეს ხელმეორედ (u_2, v_2) წერტილში გადაკვეთს. არსებითად რომ ვთქვათ, არსებობს პუანკარეს ასახვის ფუნქციების წყვილი, რომელიც (u_2, v_2) -ს (u_1, v_1) -თან აკავშირებს.

$$\begin{aligned} u_2 &= P_u(u_1, v_1) \\ v_2 &= P_v(u_1, v_1) \end{aligned} \tag{5.2-1}$$

(u_2, v_2) წყვილიდან (u_3, v_3) -ს ვპოულობთ და ა.შ. ამრიგად, თუ P_u და P_v ასახვის ფუნქციები ცნობილია, მაშინ სისტემის დინამიკის დახასიათებისთვის საჭირო ამომწურავ ინფორმაციას ვფლობთ. უნდა აღვნიშნოთ, რომ არ გვსურს სისტემის ხანგრძლივი ქმედებით შემოვიფარგლოთ ანუ არ დაგვჭირდება შემოვიფარგლოთ დისიპაციური სისტემების მიმზიდველით. თუმცა, პუანკარეს კვეთის მეთოდი უმთავრესად მიმზიდველებისა და პარამეტრების ცვლილებასთან ერთად მათი ევოლუციის შესასწავლად გამოიყენება.

აღბათ გასაკვირია, რომ ხშირად პუანკარეს ასახვის ფუნქციები ერთგანზომილებიან იტერაციულ ასახვამდე დაიყვანება. იმის სანახავად, თუ რას ნიშნავს ამგვარი კოლაფსი, დავიწყოთ მდგომარეობათა სამგანზომილებიანი სივრცისა და პუანკარეს ორგანზომილებიანი სიბრტყის განხილვით. სიბრტყესთან ტრაექტორიის ერთი გადაკვეთის წერტილის ორივე კოორდინატის (ვთქვათ u და v) ცოდნა ისევე გვანტერესებს, როგორც ასახვის იმ ფუნქციებისა, რომლებიც შემდეგი გადაკვეთის წერტილის მდებარეობის პროგნოზის საშუალებას მოგვცემენ. ზოგჯერ სისტემის ქმედება ისეთია, რომ მხოლოდ მცირე ინფორმაცია გვჭირდება. მაგალითად, v_n -ის



ნახ. 5.1. პუანკარეს სიბრტყე, რომელიც მდგომარეობათა სამგანზომილებიანი სივრცისთვის პუანკარეს კვეთაა. u და v კოორდინატები სიბრტყეზე გადაკვეთის წერტილების მდებარეობას აღნიშნავენ.

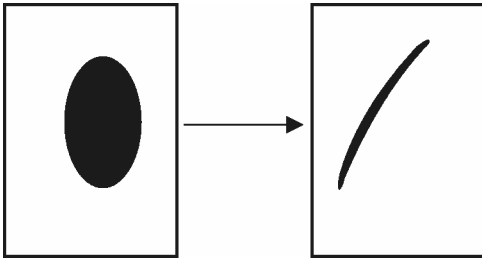
პროგნოზისთვის შესაძლოა მხოლოდ u_n -ის ცოდნა დაგვჭირდეს. ამ შემთხვევაში ასახვის ფუნქციები შეიძლება ასე დაიწეროს:

$$\begin{aligned} v_n &= P_v(u_n) \\ u_{n+1} &= P_u(u_n, P(u_n)) \\ &\equiv f_A(u_n) \end{aligned} \quad (5.2-2)$$

სადაც A მაკონტროლებელი პარამეტრია.

განვიხილოთ დისიპაციური სისტემა. მე-2 და მე-3 თავებიდან გავიხსენოთ, რომ დისიპაციურია ისეთი სისტემა, რომლებისთვისაც მდგომარეობათა სივრცეში საწყისი წერტილების სიმრავლის მიერ დაკავებული საწყისი (არანულოვანი) მოცულობა ნულოვან მოცულობამდე განიცდის კოლაფსს. სისტემის ევოლუციასთან ერთად (წერტილები შეიძლება გავრცობილი იქნას სასრულ არეზე ან შემოსაზღვრული სივრცის მქონე მრუდის გასწვრივ, მაგრამ მოცულობა მაინც ნულისაკენ მიისწრაფვის.) ამგვარი ნულოვანი მოცულობა სისტემისთვის მდგომარეობათა სივრცის მიმზიდველის ნაწილია. პუანკარეს კვეთის თვალსაზრისით, საწყისი წერტილების სიმრავლეს (მდგომარეობათა სამგანზომილებიანი სივრცისთვის) უჭირავს პუანკარეს კვეთის ზედაპირის სასრული უბანი.

დროთა განმავლობაში მდგომარეობათა სამგანზომილებიანი სივრცეში წერტილთა მიერ დაკავებული მოცულობის კოლაფსი ნიშნავს, რომ პუანკარეს სიბრტყეზე პუანკარეს წერტილები განლაგებიან პუანკარეს სიბრტყეზე მყოფ (მეტად რთული გეომეტრიის მქონე) „მრუდზე“ (კერძო შემთხვევაში, როდესაც მიმზიდველი წარმოადგენს პერიოდულ ზღვრულ ციკლს მდგომარეობათა სამგანზომილებიანი სივრცეში, პუანკარეს კვეთა უფრო მეტად წერტილების სასრული რაოდენობა იქნება, ვიდრე მრუდი.) 5.2 ნახაზზე მოყვანილია საწყისი წერტილების სიმრავლის მრუდში კოლაფსის სქემატური გამოსახულება.



ნახ. 5.2. სამგანზომილებიანი დისიპაციური სისტემის პუნკარეს სიბრტყეზე დატანილი საწყისი პირობების შესაბამისი წერტილების სიმრავლის ევოლუციის ესკიზი. დროთა განმავლობაში სიმრავლე მრუდად ან წერტილების მიმდევრობად გარდაიქმნება.

ზოგჯერ დინამიკური სისტემის მიმზიდველს პუნკარეს სიბრტყის ერთ-ერთი მიმართულებით ისეთი მახასიათებელი კოეფიციენტი აღმოაჩნდება, რომელიც სხვა მიმართულების კოეფიციენტზე ბევრად მცირეა. მცირე კოეფიციენტი ნიშნავს, რომ მიმზიდველის გარეთ მდებარე ტრაექტორიის პუნკარეს სიბრტყესთან გადაკვეთის წერტილი ძალიან სწრაფად „მიიტაცება“ მიმზიდველის მიერ (მცირე კოეფიციენტი დიდ უარყოფით ლიაპუნოვის ექსპონენტას შეესაბამება.) ასეთი სწრაფი (სისტემის დინამიკური ევოლუციის ხანგრძლივობასთან შედარებით) კოლაფსის საბოლოო შედეგი იმაში მდგომარეობს, რომ ჩვენ უნდა შემოვიფარგლოთ მხოლოდ სისტემის ევოლუციით პუნკარეს სიბრტყეში მდებარე ამ მრუდის გასწვრივ). თუ ამ მრუდს საკმარისად მარტივი გეომეტრია აქვს, მაშინ ვიტყვი, რომ სისტემის ევოლუცია არსებითად ერთგანზომილებიანია, რომელიც შეესაბამება ევოლუციას მრუდის გასწვრივ. უფრო დაწვრილებით ამ საკითხს მომავალში დავუბრუნდებით.

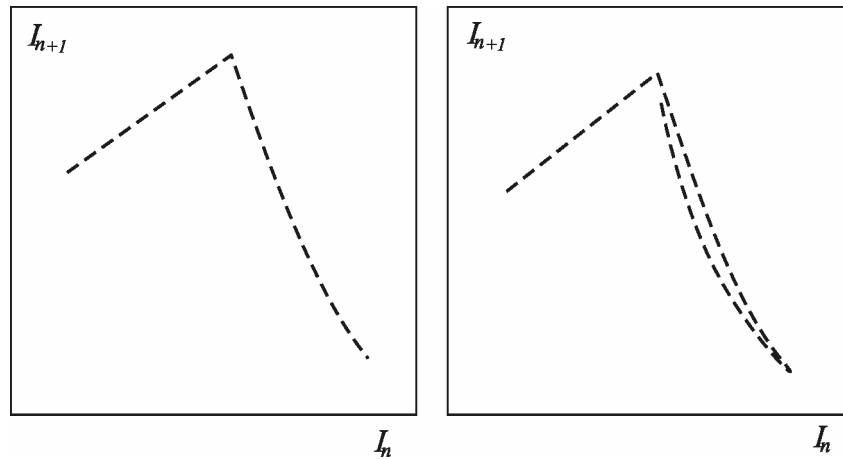
მიუხედავად იმისა, რომ არაწრფივი დინამიკის თეორია ერთგანზომილებამდე კოლაფსის ამომწურავი ანალიზის ჩატარების საშუალებას ჯერჯერობით არ გვაძლევს, საზოგადოდ მიღებულია, რომ ამგვარი ქმედება აღიძვრება მაშინ, როდესაც სისტემა „საკმარისად“ დისიპაციურია (საკმარისი ნიშნავს, რომ დადგენილი არ არის, თუ დისიპაციის რა მნიშვნელობაა ზუსტად საჭირო.) მაგალითად, პირველ თავში აღწერილ დიოდის წრედში წინააღმდეგობის გაზრდით საკმარის დისიპაციას ვაღწევთ. ხსნარის ექსპერიმენტში კი შეგვიძლია სიბლანტის გაზრდა. აქედან გამომდინარე ვასკვნით, რომ პუნკარეს ასახვის ფუნქცია დისიპაციის ზრდასთან ერთად საბოლოოდ ერთგანზომილებიანი ხდება სამზე მეტი განზომილების მქონე სისტემებშიც კი. ბოლო შენიშვნა იმის მაჩვენებელია, რომ ჩვენი ანალიზი ზოგადად და სამი განზომილებით არ შემოიფარგლება.

ერთგანზომილებიანი ქმედების გასააზრებლად ჩავწეროთ რომელიმე ცვლადის, მაგალითად u -ს მნიშვნელობები დროის თანმიმდევრულ ინტერვალებში და შემდეგ u_{n+1} -ს u_n ფუნქციის სახით გამოვსახავთ. თუ მიღებული გრაფიკი გვიჩვენებს ცალსახა ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას

$$u_{n+1} = f_A(u_n) \quad (5.2-3)$$

მაშინ ვამბობთ, რომ ევოლუცია არსებითად ერთგანზომილებიანია.

5.3 ნახაზზე მოყვანილია პირველ თავში აღწერილი დიოდის წრედის ზოგიერთი მონაცემი. დიოდში გამავალი დენის ძალის მნიშვნელობა აღებულია ფაზის ფიქსირებული წერტილისათვის სინუსოიდური ძაბვის პირობებში.



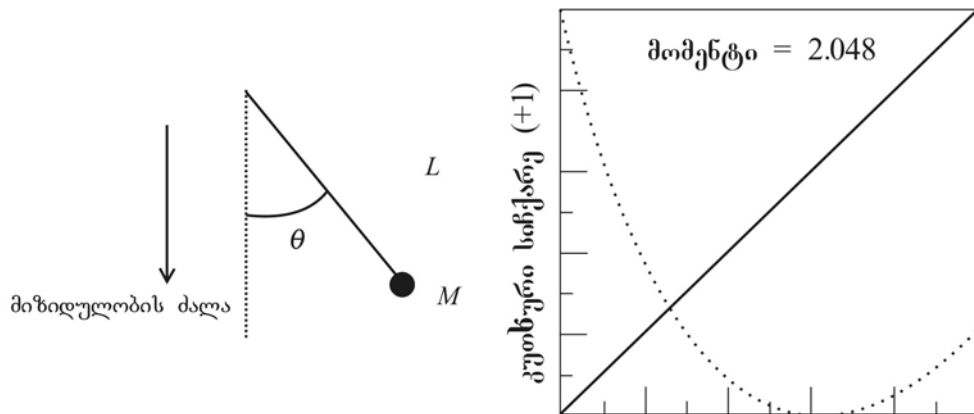
ნახ. 5.3. პირველ თავში აღწერილი დიოდის წრედი. დენის I ძალის $n+1$ -ე გაზომვის მნიშვნელობა, როგორც n -ური გაზომვის ფუნქცია. მარცხენა სქემის დისიპაცია შედარებით მაღალია და ევოლუცია არსებითად ერთგანზომილებიანია. მარჯვნივ დისიპაცია შედარებით მცირეა და კუთხეში გამოსახული გაორმაგება (მარყუჟი) უფრო მაღალი განზომილების შესაბამისი ქმედების მანიშნებელია (ტექნიკური შენიშვნა: წრედის ფარდობითი დისიპაციის ცვალებადობა ხდებოდა ემპ სიხშირის ზრდის გზით. მარცხნივ ასეთი სიხშირეა 30 კჰც, ხოლო მარჯვნივ - 50 კჰც. Q („მქკ“) წრედისთვის მარცხნივ უფრო მცირეა, ხოლო მარჯვნივ შედარებით მეტია. მცირე Q შედარებით მეტ ფარდობით დისიპაციას შეესაბამება.)

მრუდზე I_{n+1} გამოვსახეთ I_n -ის ფუნქციის სახით. მარცხნივ წრედში დისიპაციის სიდიდე შედარებით მაღალია და გამოსახული წერტილები გვიჩვენებენ, რომ თუ ცნობილია I_n , მაშინ გვეძლევა I_{n+1} -ის პროგნოზირების საშუალება. ამგვარად ვამბობთ, რომ ქმედება ერთგანზომილებიანია. მარჯვნივ დისიპაციის სიდიდე შედარებით მცირეა და დიაგრამის შორეული მარჯვენა მიმართულებით შექმნილია მარყუჟი, რაც იმას ნიშნავს, რომ I_n მნიშვნელობების გარკვეული დიაპაზონისათვის I_{n+1} -ის ორი შესაძლო მნიშვნელობა არსებობს. ამ არეში ქმედება არ არის ერთგანზომილებიანი.

რა თქმა უნდა, ერთი ცვლადის თვალის გადავებით დანარჩენი ცვლადების ქმედების დეტალებს ვერ შევიტყობთ. თუ ერთი ცვლადისთვის პერიოდის გაორმაგება ხდება, მაშინ იგი

დანარჩენი ცვლადების მიმართაც ვლინდება. ერთი ცვლადის ქმედებაზე დაკვირვება სისტემის მთლიანი პერიოდულობისა და ბიფურკაციების განსაზღვრის საშუალებას გვაძლევს.

ზოგიერთ შემთხვევაში რეალური ერთგანზომილებიანი ქმედება დემონსტრირებული იქნა დიფერენციალურ განტოლებებზე დამყარებული მოდელებისათვის. ფიზიკაში კარგად ცნობილი მაგალითია გარე კუთხური მომენტის მიერ პერიოდულად მართული ქანქარა. ქანქარა შედგება M მასისგან, რომელიც მიმაგრებულია L სიგრძის მქონე არადრეკადი ღერძის ბოლოზე, როგორც ეს 5.4 ნახაზზეა ნაჩვენები (ვგულისხმობთ, რომ ღერძის მასა ნულის ტოლია). ღერძის მეორე ბოლო დაფიქსირებულია მობრუნების წერტილში. როგორც წესი, ვერტიკალური მიმართულებიდან კუთხური გადახრა θ სიმბოლოთა აღნიშნული. ამ მოდელისთვის დინამიკურ განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:



ნახ. 5.4. მარცხნივ ქანქარას სქემატური დიაგრამაა. მარჯვნივ გამოსახულია კუთხური სიჩქარის $(n+1)$ -ე გაზომვის შედეგი, როგორც n - ური გაზომვის ფუნქცია მიღებული ქანქარისათვის. კუთხური სიჩქარე აღებულია იმ მომენტისათვის, როდესაც გარე კუთხური მომენტის ფაზა ნულის ტოლია. კუთხური მომენტის ამპლიტუდაა $2.048 MgL$; სიხშირეთა ფარდობაა $2/3$, ხოლო მიღების კოეფიციენტი 1.0 . აღსანიშნავია, რომ ფუნქციონალური დამოკიდებულება არსებითად ერთგანზომილებიანია.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \theta - \gamma \frac{d\theta}{dt} + K \cos(\omega t) \quad (5.2-4)$$

განტოლების მარჯვენა ნაწილში მყოფი პირველი წევრი წარმოადგენს გრავიტაციით გამოწვეულ კუთხურ მომენტს. მეორე წევრი გვიჩვენებს ხახუნით გამოწვეულ მიღევას, ხოლო მესამე წევრი კუთხური მომენტია, რომელიც დროში პერიოდულად იცვლება.

თუ შემოვიყვანო უგანზომილებო ცვლადებს, მაშინ განტოლებები უფრო მოხერხებულ სახეს მიიღებენ რიცხვითი ინტეგრების თვალსაზრისით. მიღებისა და გარე კუთხური მომენტების არარსებობის შემთხვევაში ქანქარას თავისუფალი რხევის სიხშირე იქნებოდა $\omega_0 = \sqrt{g/L}$ მცირე ამპლიტუდებისთვის, ამიტომ დროის ათვლას $1/\omega_0$ -ის ერთეულებში ვამჯობინებთ. მიღევა პროპორციულია $1/Q$ -სადმი. Q -ის მცირე მნიშვნელობა ნიშნავს მიღევის მაღალ მნიშვნელობას ერთი რხევის განმავლობაში (Q განიმარტება, როგორც სისტემის სრული კინეტიკური ენერჯის E ფარდობა რხევის ერთი ციკლის განმავლობაში დისიპაციით გამოწვეული მიღევის შედეგად დაკარგულ ენერჯისთან.) კუთხური მომენტი გაზომილია MgL ნამრავლის (რომელიც წონასწორული მდგომარეობიდან 90° -ით გადახრილი ქანქარის გასაჩერებლად საჭირო მუშაობაა) ერთეულებში. ამ ცვლადების გამოყენების შედეგად დინამიკური განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = -\sin\theta - b \frac{d\theta}{ds} + F \cos(Ds) \quad (5.2-5)$$

აქ b მიღევის შესაბამისი კოეფიციენტია, s უგანზომილებო არმქონე დროითი ცვლადია, F გამოხატავს კუთხურ მომენტს, ხოლო D კი წარმოადგენს რხევის სიხშირეთა ფარდობას გარეშე ძალის ზემოქმედებისა და მისი არარსებობის შემთხვევაში. სტანდარტული პროცედურები გვიჩვენებს, რომ ამ სისტემას მდგომარეობათა სამგანზომილებიანი სივრცე გააჩნია, სადაც ცვლადებადი კუთხური წანაცვლება, კუთხური სიჩქარე და გარე კუთხური მომენტის ფაზა შეგვიძლია შევარჩიოთ.

ნახ. 5.4 გვიჩვენებს უკუასახვას მიღევადი ქანქარის კუთხური სიხშირისთვის, როდესაც $D = 2/3$, $b = 1.0$ და $F = 2.048$, რაც პერიოდის გაორმაგების ბიფურკაციათა მიმდევრობის შედეგად მიღებულ ქაოტურ ქმედებას გვაძლევს (მნიშვნელობები მაშინაა აღებული, როდესაც გარე კუთხური მომენტის ფაზა ნულის ტოლია). უკუასახვა გვიჩვენებს, რომ პარამეტრის მნიშვნელობების მოცემული სიმრავლისათვის კუთხური სიჩქარის მოდელირება შესაძლებელია ერთგანზომილებიანი იტერაციული ასახვის მეშვეობით.

უდიდესი თეორიული სამუშაო ჩატარდა ლორენცის მოდელისთვის ჰუანკარეს ასახვის ფუნქციების ერთგანზომილებიანი იტერაციულ ასახვამდე დაყვანის ანალიზის მხრივ. დამატებითი ინფორმაციისთვის იხილეთ მოცემული თავის ბოლოში მოყვანილი ლიტერატურა.

5.3 ერთგანზომილებიანი იტერაციული ასახვები

წინა პარაგრაფში მოყვანილმა დისკუსიამ გვიჩვენა, რომ მდგომარეობათა სამი ან მეტი განზომილების მქონე სივრცეში ერთგანზომილებიანი იტერაციული ასახვების გამოყენება მიზანშეწონილია. ამჯერად ასახვის ასეთ ფუნქციებს თავისუფლად მოქმედი დინამიკური სისტემების შემთხვევებზე დაყრდნობით განვიხილავთ. მოგვიანებით დავუბრუნდებით კითხვას, თუ რა ხერხები უნდა გამოვიყენოთ სისტემის სრული დინამიკის შესწავლისთვის.

ერთგანზომილებიანი იტერაციული ასახვების შესახებ დიდი რაოდენობით და საკმაოდ რთული მათემატიკური ლიტერატურა არსებობს. ამ წიგნში სრულად ვერ განვიხილავთ ყველა მათემატიკურ ასპექტს, მაგრამ იმედი გვაქვს, რომ სურვილის შემთხვევაში მკითხველი მიმართავს თავის ბოლოში მოყვანილ დამატებით ლიტერატურას.

თავდაპირველად პირველ თავში მოყვანილ ზოგიერთ ცნებას განვიხილავთ. ამიერიდან დამოუკიდებელ ცვლადს x -ით აღვნიშნავთ, ხოლო იტერაციული ასახვის ფუნქცია $f(x)$ იქნება. ასახვის ფუნქცია რაღაც p პარამეტრზეა დამოკიდებული, რომელიც ცხადი სახით არ ჩანს. როდესაც პარამეტრის მიმართ დამოკიდებულებას გამოვყოფთ, მაშინ p პარამეტრს ინდექსის $f_p(x)$ სახით წარმოვადგენთ.

იტერაციული სქემა x –ის საწყისი მნიშვნელობით იწყება. ამ მნიშვნელობას x_0 -ით აღვნიშნავთ და ასახვის ფუნქციის მეშვეობით შემდეგ ტრაექტორიას (ან ორბიტას) ვკმნით:

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \dots \quad (5.3-1)$$

და ა.შ.

უნდა აღინიშნოს, რომ ერთგანზომილებიანი იტერაციული ასახვები ერთგანზომილებიან დიფერენციალური განტოლებების სისტემებთან შედარებით დინამიკური ქმედების გაცილებით ფართო დიაპაზონს წარმოგვიდგენს, რადგან იტერაციული ასახვები უწყვეტობის შეზღუდვისაგან თავისუფალნი არიან. აქ იგულისხმება, რომ იტერაციული ასახვისთვის შუალედური x მნიშვნელობების გავლის გარეშე ერთი მნიშვნელობიდან მეორეზე „ხტება“. როგორც მე-3 თავში ვნახეთ, ერთგანზომილებიანი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნისას უწყვეტობა მკაცრად ზღუდავს პოტენციურად აღძვრადი ქმედებების ტიპებს.

ჩვენთვის სასარგებლო იქნება განსაკუთრებული შემთხვევის განხილვა. პირველ თავში მოყვანილი ლოჯისტიკური ასახვა შაბლონად შეგვიძლია გამოვიყენოთ (მომავალში არაერთ

სხვადასხვა ასახვის ფუნქციებს გავეცნობით.) გავიხსენოთ, რომ ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქცია მოიცემა შემდეგნაირად:

$$x_{n+1} = Ax_n(1-x_n) \quad (5.3-2)$$

სადაც A მაკონტროლებელი პარამეტრია, თანაც დადებითი ნამდვილი რიცხვი.

ჩვენ განსაკუთრებულ ინტერესს ვიჩენთ იმ ასახვების მიმართ, რომლებიც x ღერძის გასწვრივ აღებულ რაიმე სასრული ინტერვალის ფარგლებში ინარჩუნებენ x -ის მნიშვნელობებს, ანუ, $f(x)$ ფუნქცია x -ს ყოველ მომდევნო მნიშვნელობას იმავე ინტერვალში წარმოქმნის რომელსაც მიეკუთვნება საწყისი x_0 . ასეთ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ f ფუნქცია მოცემულ ინტერვალს „საკუთარ თავში ასახავს“. (ტრადიციულად, x მნიშვნელობების ნორმირება ისე ხდება, რომ საკვლევი ინტერვალია $0 \leq x \leq 1$ ან $-1 \leq x \leq +1$.) მაგალითად, ლოჯისტიკური ასახვის შემთხვევაში შესაბამისი ინტერვალი 0 -სა და 1 -ს შორისაა.

შევეხოთ ფიქსირებული წერტილების საკითხსაც. დიფერენციალური განტოლებების მიერ აღწერილი დინამიკური სისტემების მსგავსად, ჩვენ გვინტერესებს ასახვის ფუნქციის ფიქსირებული წერტილები. x^* არის $f(x)$ ასახვის ფუნქციის ფიქსირებული წერტილი, თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$x^* = f(x^*) \quad (5.3-3)$$

თუ (5.3-3) სრულდება, მაშინ x^* -ის მიმართ f ფუნქციის ხელმეორედ გამოყენება იგივე მნიშვნელობას მოგვცემს. აღსანიშნავია, რომ მოცემულ ასახვის ფუნქციას მოცემული მაკონტროლებელი პარამეტრის ერთი და იმევე მნიშვნელობისთვის სხვადასხვა ფიქსირებული წერტილები შეიძლება გააჩნდეს. მაგალითად, ლოჯისტიკურ ასახვას ფიქსირებული წერტილები აქვს $x^*=0$ -სა და $x^*=1-1/A$ -ზე.

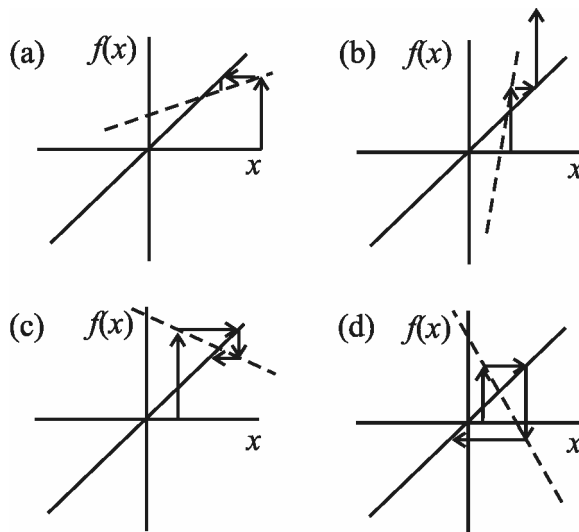
რა მოსდის იმ ტრაექტორიებს, რომლებიც ფიქსირებული წერტილის ახლოს იღებენ სათავეს ანუ, რა არის ფიქსირებული წერტილის *სტაბილურობა*? თუ იტერაციის პროცესში (ეს ტრაექტორიები მიისწრაფვიან x^* -ისაკენ, როდესაც $n \rightarrow \infty$, მაშინ ვიტყვით რომ x^* *მიზიდულობის ფიქსირებული წერტილი* ან *სტაბილური ფიქსირებული წერტილია* (ტერმინი *ასიმპტოტურად სტაბილური* აგრეთვე გამოიყენება.) თუ ტრაექტორიები x^* -ს შორდება,

მაშინ ვამბობთ, რომ x^* **განმზიდველი ფიქსირებული წერტილი** ან **არასტაბილური ფიქსირებული წერტილი**.

როგორც უკვე ვნახეთ, ფიქსირებული წერტილის გამოკვლევა მასში განსაზღვრული ასახვის ფუნქციის წარმოებულის პოვნის გზით შეიძლება. გეომეტრიული თვალსაზრისით ვპოულობთ ასახვის ფუნქციის კუთხურ კოეფიციენტს ფიქსირებულ წერტილში. 5.5 ნახაზზე მოყვანილია პირველ თავში წარმოდგენილი იტერაციული პროცესის გრაფიკული სქემა. ფიქსირებული წერტილის მიდამოში შესაძლებელია მოცემული ფუნქციის წრფით აპროქსიმაცია.

ამ გრაფიკებიდან ცხადია, რომ არსებობს ფიქსირებული წერტილის სტაბილურობის შემდეგი კრიტერიუმი (ქვედა ინდექსი წარმოებულებზე კიდევ ერთხელ გვახსენებს, რომ წარმოებულს ფიქსირებულ წერტილში ვსაზღვრავთ):

x^* სტაბილური ფიქსირებული წერტილია, თუ $|df/dx| < 1$
 x^* არასტაბილური ფიქსირებული წერტილია, თუ $|df/dx| > 1$



ნახ.5.5 ასახვის $f(x)$ ფუნქციის იტერაციული გამოყენების ეფექტის გრაფიკული გამოსახულება. ასახვის ფუნქცია წყვეტილი ხაზითაა გამოსახული. $f(x)=x$ უწყვეტი წრფეა. (a) $0 < df/dx < 1$ შემთხვევა სტაბილურ ფიქსირებულ წერტილს გვაძლევს. (b) $df/dx > 1$ კი - არასტაბილურ ფიქსირებულ წერტილს გვაძლევს. (c) $-1 < df/dx < 0$ - სტაბილურ ფიქსირებულ წერტილს გვაძლევს. (d) $df/dx < -1$ - არასტაბილურ ფიქსირებულ წერტილს გვაძლევს. აღსანიშნავია, რომ როდესაც $df/dx < 0$, იტერაციის თანმიმდევრული წერტილები ფიქსირებული წერტილების ხან ერთ ხან მეორე მხარეს მდებარეობენ.

მე-3 თავში, x^* -ის მიდამოში ტეილორის მწკრივები გამოვიყენოთ იგივე შედეგების ანალიტიკური გზით მისაღებად. x_0 -ში საწყისის მქონე ტრაექტორიისთვის, x^* -ის მიდამოში შეგვიძლია დავწეროთ

$$\begin{aligned} x_1 = f(x_0) &= f(x^*) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x^*} (x_0 - x^*) + \dots \\ &= x^* + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x^*} (x_0 - x^*) + \dots \end{aligned} \quad (5.3-4)$$

მწკრივში მხოლოდ პირველი რიგის წარმოებულის შემცველ წევრს ვინარჩუნებთ და შედეგს x_n -ისა და x^* -ს შორის სხვაობის მეშვეობით გამოვსახავთ:

$$(x_n - x^*) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x^*} (x_{n-1} - x^*) \quad (5.3-5)$$

თუ ფიქსირებულ წერტილში განსაზღვრული წარმოებულის მნიშვნელობა ერთზე ნაკლებია, მაშინ იტერაციული მიმდევრობის წევრებს შორის მანძილი იკლებს და ტრაექტორია ფიქსირებულ წერტილს უახლოვდება. თუ წარმოებულის სიდიდე ერთზე მეტია, მაშინ მანძილი მატულობს და ტრაექტორიაც ფიქსირებულ წერტილს შორდება. აღსანიშნავია, რომ თუ წარმოებული უარყოფითი სიდიდეა, მაშინ სხვაობის ნიშანი ყოველ იტერაციაზე იცვლება და ტრაექტორიის წერტილები ფიქსირებულ წერტილის ორივე მხარეს მონაცვლეობს.

შენიშვნა ტერმინოლოგიასთან დაკავშირებით: ტეილორის მიმდევრობების გამოყენებით ჩატარებულ ამგვარ ანალიზს ხშირად „წრფივი სტაბილურობის ანალიზს“ ვუწოდებთ. თუ წარმოებულის მნიშვნელობა ერთზე ნაკლებია, ვამბობთ, რომ ფიქსირებული წერტილი „წრფივად სტაბილურია“. პრაქტიკაში ასეთი ანალიზი გვიჩვენებს, თუ რა მოსდის ტრაექტორიებს ფიქსირებული წერტილის სიახლოვეს. ფიქსირებული წერტილისაგან მოშორებით სისტემის სხვა ფიქსირებულმა წერტილებმა შეიძლება მნიშვნელოვანი როლი შეასრულოს ტრაექტორიების ქმედებაში და ტეილორის მიმდევრობები სიტუაციის პროგნოზისათვის უკვე აღარ იქნება საკმარისი.

ამოცანა 5.3-1. ქვემოთ მოყვანილი ასახვის ფუნქციებისთვის დაადგინეთ ფიქსირებული წერტილები. განსაზღვრეთ თითოეული ფიქსირებული წერტილის სტაბილურობა.

$$x_{n+1} = f(x_n) = x_n^2$$

$$x_{n+1} = f(x_n) = \sin x_n$$

ამოცანა 5.3-2. გამოიკვლიეთ $A < 0$ პარამეტრის შესაბამისი ლოჯისტიკური ასახვის მოდელი. იპოვეთ ფიქსირებული წერტილები და შეისწავლეთ მათი სტაბილურობა A -ს ცვლილებასთან დაკავშირებით.

5.4 ბიფურკაციები იტერაციულ ასახვებში: პერიოდის გაორმაგება, ქაოსი და ლიაპუნოვის ექსპონენტები

როგორც ზოგიერთი დინამიკური სისტემისათვის ვნახეთ, იტერაციული ასახვების ფიქსირებული წერტილების ბუნება სისტემის მაკონტროლებელ პარამეტრის ცვლილებასთან ერთად შეიძლება შეიცვალოს. ამ პარაგრაფში ბიფურკაციებს ერთგანზომილებიანი იტერაციული ასახვებისთვის პოტენციურად შესაძლო მოდელების მეშვეობით შევამოწმებთ. ყურადღებას გავამახვილებთ ქაოსური ქმედების გამომწვევ პერიოდის გაორმაგების მიმდევრობაზე.

თავდაპირველად შევამოწმოთ $x^* = 0$ და $x^* = 1 - 1/A$ ფიქსირებული წერტილების სტაბილურობა. ორივე ფიქსირებულ წერტილში ვსაზღვრავთ df/dx -ს:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=0} = A$$

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=1-1/A} = 2 - A$$
(5.4-1)

(5.4-1) განტოლებიდან ჩანს, რომ ფიქსირებული წერტილი $x=0$ -ზე და $A < 1$ -სთვის მიზიდვის (სტაბილური) წერტილია, ხოლო $x=1-1/A$ -ზე და $A < 1$ -სთვის განზიდვის (არასტაბილური) წერტილია. ამგვარად $A < 1$ -სთვის უნდა ველოდოთ $0 < x_0 < 1$ -საწყისის მქონე ნებისმიერი ტრაექტორიის მისწრაფებას $x=0$ -ში მყოფი ფიქსირებული წერტილისაკენ (გარდა ტრაექტორიისა, რომელიც ზუსტად $x_0=1-1/A$ წერტილში იღებს სათავეს).

ამოცანა (5.4-1). რა ემართება ლოჯისტიკური ასახვის ტრაექტორიებს, როდესაც $x_0 < 0$ და $x_0 > 1$ $A < 1$ პირობებში? შეგიძლიათ $f(x)$ ასახვის ფუნქციის ფიქსირებული წერტილების მეშვეობით ამგვარი ქმედების ახსნა?

(5.4-1) განტოლებიდან ჩანს, რომ $1 < A < 3$ -თვის სტაბილურობას ორი ფიქსირებული წერტილი იცვლის, ანუ $A > 1$ -თვის $x=0$ -ში მდებარე ფიქსირებული წერტილი არასტაბილურია. $1 < A < 3$ -სთვის, $x=1-1/A$ -ში მყოფი ფიქსირებული წერტილი სტაბილური ხდება.

ამოცანა 5.4-2. გამოიყენეთ ტრაექტორიის მნიშვნელობების გრაფიკული იტერაციის მეთოდი და კომპიუტერი, რათა შეამოწმოთ, რომ ლოჯისტიკური ასახვის შემთხვევაში $x=0$ -სა $x=1$ -ს შორის დაწყებული ყოველი ტრაექტორია $x^*=1-1/A$ -საკენ მიისწრაფვის, როდესაც $1 < A < 3$.

ტრაექტორიის ქმედება $A > 3$ შემთხვევაში კიდევ უფრო საინტერესო ხდება. როგორც პირველ თავში ვნახეთ, A -ს სამზე მეტი მნიშვნელობებისთვის ტრაექტორიები ხასიათს იცვლიან ორ წერტილს შორის, რომლებსაც ჩვენ x^*_1 -ითა და x^*_2 -ით აღვნიშნავთ. ეს მნიშვნელობები აკმაყოფილებენ შემდეგ განტოლებებს:

$$\begin{aligned} x_2^* &= f(x_1^*) \\ x_1^* &= f(x_2^*) \end{aligned} \tag{5.4-2}$$

ეს წერტილები „ორციკლიანი“ ქმედების შესაბამისი მიმზიდველი ფიქსირებული წერტილებია. ამრიგად, ვამბობთ, რომ $A=3$ -ზე ლოჯისტიკური ასახვის შესაბამისი ტრაექტორიები პერიოდის გაორმაგების ბიფურკაციას განიცდიან. $A < 3$ -თვის ტრაექტორიები იკრიბებიან ერთერთ x -წერტილში. $A > 3$ შემთხვევაში კი ტრაექტორიები x -ის ორ მნიშვნელობას შორის მონაცვლეობენ.

როდესაც $A=3$, ქმედების აღწერისათვის შემოგვაქვს ე.წ. ***f-ის მეორე რიგის იტერაცია*** რომელიც შემდეგნაირად განისაზღვრება:

$$f^{(2)}(x) \equiv f(f(x)) \tag{5.4-3}$$

ანუ f ფუნქციას ვიყენებთ ორჯერ, თავდაპირველად x -ის, ხოლო შემდეგ კი პირველი ოპერაციის შედეგის მიმართ (ინდექსს ფრჩხილებში ჩავსვამთ, რათა დავაფიქსიროთ, რომ საქმე გვაქვს მეორე რიგის იტერაციასთან და არა ფუნქციის კვადრატთან). ორციკლიანი

ქმედების შესაბამისი x^*_1 და x^*_2 წერტილები მეორე რიგის იტერაციის ფუნქციის ფიქსირებული წერტილებია:

$$\begin{aligned} x^*_1 &= f^{(2)}(x^*_1) \\ x^*_2 &= f^{(2)}(x^*_2) \end{aligned} \quad (5.4-4)$$

ამრიგად, ვასკვნით, რომ $A > 3$ -სთვის მეორე რიგის იტერაციის ფუნქციის შესაბამისი ზემოთმოყვანილი ორი ფიქსირებული წერტილი სტაბილური ხდება.

ამჯერად გავარკვიოთ, თუ როგორ იცვლება ასახვის ფუნქციის და მეორე რიგის ასახვის ფუნქციის წარმოებულები ბიფურკაციული მნიშვნელობის შემთხვევაში, როდესაც $A = A_1 = 3$. (5.4-1) განტოლება გვიჩვენებს, რომ df/dx (ასახვის ფუნქციის წარმოებული) დებულობს -1 -ს ტოლ მნიშვნელობას, როდესაც A სამზე მეტი ხდება. რა მოსდის $f^{(2)}$ -ის წარმოებულს? განმეორებითი ასახვის ფუნქციის წარმოებულის განსაზღვრას **დიფერენცირების ჯაჭური წესის** გამოყენებით შევძლებთ:

$$\begin{aligned} \frac{df^{(2)}(x)}{dx} &= \frac{df(f(x))}{dx} \\ &= \frac{df}{dx} \Big|_{f(x)} \frac{df}{dx} \Big|_x \end{aligned} \quad (5.4-5)$$

თუ წარმოებულს განვსაზღვრავთ ფიქსირებული წერტილებიდან ერთ-ერთში, მაგალითად x_1 -ში, მაშინ გვექნება:

$$\begin{aligned} \frac{df^{(2)}(x)}{dx} \Big|_{x_1} &= \frac{df}{dx} \Big|_{x_2} \frac{df}{dx} \Big|_{x_1} \\ &= \frac{df^{(2)}(x)}{dx} \Big|_{x_2} \end{aligned} \quad (5.4-6)$$

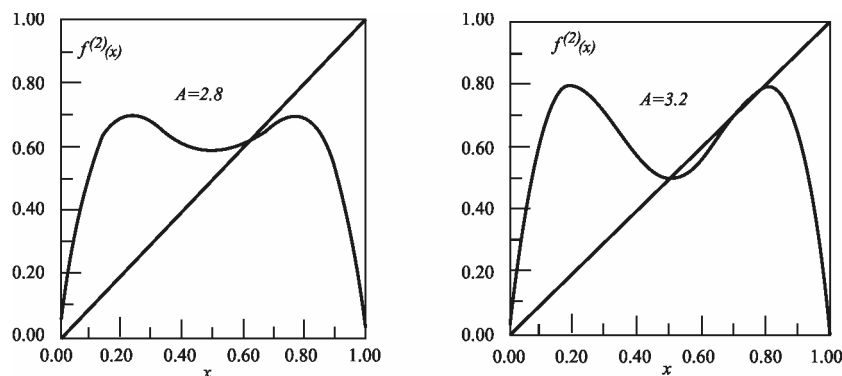
ბოლო შედეგის მისაღებად ვიყენებთ დამოკიდებულებას $x_2 = f(x_1)$ ორი ფიქსირებული წერტილისთვის. (5.4-6) განტოლება ერთი შეხედვით უჩვეულო და მნიშვნელოვან შედეგს გვაძლევს: $f^{(2)}$ -ის წარმოებულები ერთი და იგივეა ორივე ფიქსირებულ წერტილში, რომლებიც მიეკუთვნებიან ორმაგ ციკლს! მასმასადამე ორივე ფიქსირებული წერტილი ერთდროულად სტაბილური ან არასტაბილურია და მათ სტაბილურობას თუ არასტაბილურობას ერთი და იგივე „ხარისხი“ გააჩნია.

$A=3$ მნიშვნელობის შემთხვევაში მომხდარ მოვლენებს უკეთესად გავიაზრებთ, თუ გავიხსენებთ, რომ $A=3$ შემთხვევაში $f(x)$ -ის შესაბამისი ფიქსირებული $1-1/A$ წერტილი ემთხვევა $f^{(2)}$ -ის ორ ფიქსირებულ წერტილს. ვინაიდან $f(x)$ -ის წარმოებული A -ს მოცემული მნიშვნელობისთვის -1 -ის ტოლია, (5.4-6) გამოსახულების თანახმად, $f^{(2)}$ -ის წარმოებული A -ს იმავე მნიშვნელობისთვის $+1$ -ის ტოლია. A -ს ზრდასთან ერთად $f^{(2)}$ -ის წარმოებული კლებულობს და ორთავე ფიქსირებული წერტილი სტაბილური ხდება. ნახ. 5.6 გვიჩვენებს $f^{(2)}(x)$ -ის გრაფიკს, როდესაც $A < 3$ ან $A > 3$. პირველ შემთხვევაში $f^{(2)}$ -ის დახრის კუთხე ფიქსირებულ წერტილებში 1-ზე ნაკლებია და, ამრიგად, ისინი $f^{(2)}$ -ის სტაბილური ფიქსირებული წერტილებია. $f(x)$ -ის გეგმილისათვის ტრაექტორია 1, „აკეთებს ნახტომებს“ წინ და უკან ამ ორ მნიშვნელობას შორის. 5.6 ნახაზიდან ასევე აღსანიშნავია, რომ $1-1/A$ -ში მდებარე $f(x)$ -ის არასტაბილური ფიქსირებული წერტილი ასევე არასტაბილური ფიქსირებული წერტილი იქნება $f^{(2)}(x)$ -ისაც.

ვიდრე მსჯელობას განვაგრძობდეთ, რამდენიმე შენიშვნას მოგაწვდით ფიქსირებული წერტილების და მაღალი რიგის იტერაციების შესახებ. თავდაპირველად აღვნიშნავთ, რომ $f(x)$ -ის n რიგის იტერაცია f -ის n -ჯერ გამოყენების შედეგად მიღებული ფუნქციაა

$$f^{(n)}(x) = f(f(f(\dots f(x)))) \quad (5.4-7)$$

სადაც მარჯვენა მხარეს გვაქვს n რაოდენობის f . ერთი შეხედვითაც შეგიძლიათ დარწმუნდეთ, რომ $f(x)$ -ის ფიქსირებული წერტილი იგივე იქნება $f^{(n)}$ -ისთვისაც, მაგრამ შებრუნებული მტკიცებულება ყოველთვის სინამდვილეს არ შეესაბამება. ამასთან, თუ x^* არის $f(x)$ -ის სტაბილური ფიქსირებული წერტილი, მაშინ გი სტაბილური იქნება $f^{(n)}$ -ისთვისაც. შებრუნებული მტკიცებულება ამჯერადაც არ არის ყოველთვის სამართლიანი.



ნახ. 5.6. ლოჯისტიკური ასახვის მეორე რიგის იტერაციის ამსახველი გრაფიკი. მარცხნივ, $A=2.8$. მარჯვნივ, პერიოდის გაორმაგების პირველი ბიფურკაციის ზემოთ $A=3.2$.

აღსანიშნავია, რომ f -ის მეორე რიგის იტერაციის დახრის კუთხეები $1-1/A$ -ს მიდამოში მდებარე ორ ფიქსირებულ წერტილში ერთი და იგივეა და $A=3.2$ -სთვის 1 -ზე ნაკლებია.

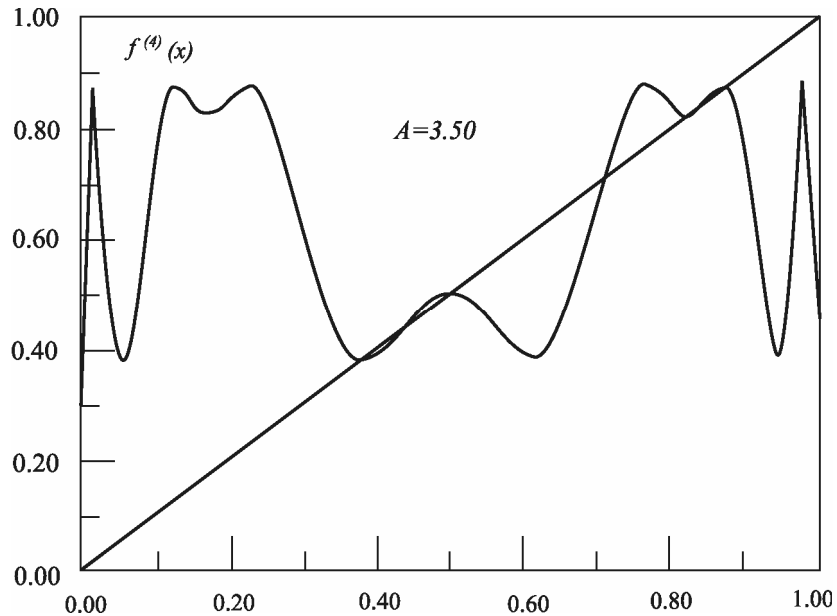
უმცირესი n ($n>0$), რომლისთვისაც x^* ფიქსირებული წერტილია, განსაზღვრავს მოცემული ფიქსირებული წერტილის *მთავარ პერიოდს*. მაგალითად, x -ის ორ განსხვავებულ მნიშვნელობას, რომლებიც (5.4-4) განტოლებას აკმაყოფილებენ, ორის ტოლი მთავარი პერიოდი გააჩნიათ. წერტილი $x=1-1/A$ აგრეთვე $f^{(2)}$ -ის ფიქსირებული წერტილიცაა, მაგრამ მისი პერიოდი ერთის ტოლია.

სავარჯიშო 5.4-3. აჩვენეთ, რომ f -ის იტერაციები ე.წ. *გამრავლების წესს* ექვემდებარება:
 $f^{(n+m)}(x) = f^{(m)}(f^{(n)}(x))$.

სავარჯიშო 5.4-4. გამოიყენეთ ჯაჭვური წესი იმის დასამტკიცებლად, რომ n -ური რიგის ნებისმიერ ფიქსირებულ წერტილში განსაზღვრულ $f^{(n)}$ -ის წარმოებულს ერთი და იგივე მნიშვნელობა აქვს.

ამჯერად უკვე მზად ვართ ლოჯისტიკური ასახვის თვისებების შესახებ მსჯელობა განვაგრძოთ, როდესაც A იზრდება. $f^{(2)}$ -ის 2-ციკლის ფიქსირებული წერტილები კვლავაც სტაბილურობისკენ მიისწრაფვიან, ვიდრე არ მივიღებთ $A=1+\sqrt{6}$. A -ს ამ მნიშვნელობაზე, რომელსაც A_2 -ს ვუწოდებთ, ორი ციკლის ფიქსირებულ წერტილებში განსაზღვრული $f^{(2)}$ -ის წარმოებული -1 -ის ტოლია, ხოლო A_2 -ზე A -ს უფრო დიდი მნიშვნელობებისთვის წარმოებული -1 -ზე მცირე სიდიდეა. $A > A_2$ -თვის მოცემული 2-ციკლის ფიქსირებული წერტილები არასტაბილურია. რა მოსდის ტრაექტორიებს? $A > A_2$ -თვის ტრაექტორიები 4-ციკლში გადადიან, ანუ ტრაექტორია ციკლურად იცვლება ოთხ მნიშვნელობას შორის, რომელთაც x^*_1 -ით, x^*_2 -ით, x^*_3 -ითა და x^*_4 -ით აღვნიშნავთ. X -ის მოცემული მნიშვნელობები მეოთხე რიგის იტერაციის შესაბამისი $f^{(4)}$ ფუნქციის ფიქსირებული წერტილებია. ამგვარად, პერიოდის გაორმაგების ბიფურკაციის განსხვავებულ შემთხვევასთან გვაქვს საქმე: სისტემა 2-ციკლი ქმედებიდან 4-ციკლიანში გადავიდა. ამგვარი ბიფურკაციის მათემატიკური დეტალები იგივეა, რაც 2-ციკლის შემთხვევაში, ვინაიდან $f^{(4)}$ წარმოადგენს $f^{(2)}$ -ის მეორე რიგის იტერაციას. ამრიგად, 4-ციკლი მაშინ წარმოიქმნება, როდესაც 2-ციკლის ფიქსირებულ წერტილებში განსაზღვრული $f^{(2)}$ -ის წარმოებული მიიღებს -1 -ის ტოლ მნიშვნელობას.

როდესაც იგი უფრო ნაკლებ მნიშვნელობებს ღებულობს, 4-ციკლის ფიქსირებულ წერტილებში $f^{(4)}$ -ის წარმოებული 1-ზე ნაკლებია.



ნახ. 5.7. ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციის მეოთხე რიგის იტერაციის გრაფიკი $A=3.50$ -სთვის რომელიც აღემატება A_4 -ის იმ მნიშვნელობას, რომლისთვისაც პერიოდი-4-ის ციკლი სტაბილური ხდება.

ნახ. 5.7. გვიჩვენებს ლოგიკური ასახვის $f^{(4)}(x)$ ფუნქციას $A > A_2$ შემთხვევაში.

ამოცანა 5.4-5. აჩვენეთ, რომ ბიფურკაციას, რომელიც იწვევს სტაბილურ პერიოდი-4 ტიპის ქმედებას, ადგილი აქვს $A=1+\sqrt{6}$ მნიშვნელობაზე. მინიშნება: როდესაც პერიოდი-4 წარმოიშობა, $df^{(2)}/dx = -1$.

როგორც პირველ თავში ვიხილეთ, ბიფურკაციების ასეთი მიმდევრობა გრძელდება რაგინდ დიდხანს, ვიდრე პარამეტრი არ მიაღწევს ისეთ მნიშვნელობას, რომლისთვისაც ტრაექტორიის პერიოდი უსასრულო ხდება. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, ტრაექტორია საკუთარ თავს არასოდეს იმეორებს და ჩვენ ქაოსის მიჯნაზე ვიმყოფებით. პირველი თავიდან ასევე გვახსოვს, რომ პარამეტრის იმ მნიშვნელობის შემდგომ, რომლის დროსაც, ქაოსი იწყება, არსებობს პერიოდული დიაპაზონები, რომელთა შესახებაც ქვემოთ დაწვრილებით ვისაუბრებთ.

აღსანიშნავია, რომ პერიოდის გაორმაგების ბიფურკაციების მიმდევრობის შედეგად ლოჯისტიკურ ასახვას არასტაბილური პერიოდული ორბიტების უსასრულო რაოდენობა გაჩნია. ისინი შეესაბამებიან 1, 2, 4, და ა.შ. პერიოდებს. ისინი ორბიტების მომდევნო თაობის წარმოქმნისას არასტაბილური ხდებიან. როგორც ირკვევა, არასტაბილური პერიოდული წერტილები სხვა ტრაექტორიების ქმედებაზე მნიშვნელოვან გავლენას ახდენს.

ამოცანა 5.4-6. გამოიყენეთ მოცემულ პარაგრაფში წარმოდგენილი მეთოდები და შეისწავლეთ ე.წ. *კვადრატული ასახვის* ქმედება, რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$x_{n+1} = 1 - Cx_n^2$$

კერძოდ, იპოვეთ მისი ფიქსირებული წერტილები და შეისწავლეთ C პარამეტრის ზრდისას წარმოშობილი პერიოდის გაორმაგების ბიფურკაცია.

ქაოსი და ლიაპუნოვის ექსპონენტები

ამგვარად, ქაოსური ქმედების რაოდენობრივი შესწავლისათვის უკვე მზად ვართ. ქაოსის არსებობის ერთ-ერთი ნიშანი ახლომდებარე ტრაექტორიების დივერგენციაა. 4.2 პარაგრაფის თანახმად, ქაოსური სისტემისთვის დივერგენცია დროში ექსპონენციალურია (ანუ იტერაციული ასახვის შემთხვევაში იგი იტერაციათა რიგის ექსპონენციალური ფუნქციაა). ამგვარად, ქაოსურობა ტრაექტორიათა ჯგუფის დამახასიათებელი თვისებაა. ჩაკეტილი სისტემის ტრაექტორია ქაოსურ მიმზიდველს ასევე უსასრულოჯერ უბრუნდება, უსასრულოჯერ ახლოს ვიდრე ტრაექტორიის რომელიმე წინა წერტილი. ამრიგად, ცალკეულ ტრაექტორიაზე ახლომდებარე (დროის სრულიად სხვადასხვა მომენტების შესაბამისი) წერტილების დივერგენციის შემოწმებაც შეგვიძლია.

როგორ გამოვსახოთ ზემოთ ნათქვამი უფრო ფორმალური სახით? დავიწყოთ ერთმანეთთან ახლომდებარე მიზიდულობის x_0 და $x_0 + \varepsilon$ წერტილების განხილვით. შემდეგ იტერაციული ასახვის ფუნქცია თითოეული მნიშვნელობისთვის n -ჯერ გამოვიყენოთ და მიღებულ შედეგებს შორის არსებული სხვაობის აბსოლუტური სიდიდე გამოვთვალოთ:

$$d_n \equiv |f^{(n)}(x_0 + \varepsilon) - f^{(n)}(x_0)| \tag{5.4-8}$$

თუ ქმედება ქაოსურია, მაშინ n -ის ზრდასთან ერთად ამ მანძილის ექსპონენციალურმატებას უნდა ველოდოთ. ამრიგად, ვწერთ:

$$\frac{d_n}{\varepsilon} = \frac{|f^{(n)}(x_0 + \varepsilon) - f^{(n)}(x_0)|}{\varepsilon} \equiv e^{\lambda n} \quad (5.4-9)$$

ანუ

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{|f^{(n)}(x_0 + \varepsilon) - f^{(n)}(x_0)|}{\varepsilon} \right) \quad (5.4-10)$$

უკანასკნელი ორი გამოსახულება განსაზღვრავს, თუ რას ვგულისხმობთ ტრაექტორიისთვის ლიაპუნოვის λ ექსპონენტში (მალე განსაზღვრებას უფრო მკაცრი სახით ჩამოვყალიბებთ).

ვთქვათ, $\varepsilon \rightarrow 0$, მაშინ ელემენტარული გამოთვლების შედეგად მივიღებთ, რომ (5.4-10) გამოსახულების მარჯვენა მხარე იძლევა $f^{(n)}$ -ის x -ის მიმართ წარმოებულის აბსოლუტურ სიდიდეს. ასევე ვიცით, რომ დიფერენცირების ჯაჭვური წესის გამოყენებით $f^{(n)}$ -ის წარმოებული შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ტრაექტორიის თანმიმდევრულ x_0, x_1, x_2 და ა.შ. წერტილებში განსაზღვრული $f(x)$ -ის n რაოდენობის წარმოებულთა ნამრავლის სახით. ამრიგად, ლიაპუნოვის ექსპონენტას განსაზღვრება შემდეგნაირია:

$$\lambda = \frac{1}{n} (|f'(x_0)| |f'(x_1)| \dots |f'(x_{n-1})|) \quad (5.4-11)$$

სადაც $f'(x) = df/dx$. (5.4-11) შეგვიძლია სხვანაირადაც ჩავწეროთ:

$$\lambda = \frac{1}{n} (1n |f'(x_0)| + 1n |f'(x_1)| + \dots + 1n |f'(x_{n-1})|) \quad (5.4-12)$$

(5.4-12) გვიჩვენებს, რომ ლიაპუნოვის ექსპონენტა (ორი ტრაექტორიის დივერგენციის მაჩვენებელი) ტრაექტორიის წერტილებში განსაზღვრული ასახვის ფუნქციის წარმოებულების აბსოლუტური მნიშვნელობის ნატურალური ლოგარითმის საშუალო სიდიდეა. თუ ასახვის ფუნქციის ორი ახლომდებარე წერტილისთვის გამოყენება გაცილებით დაშორებულ ორ წერტილს გვაძლევს, მაშინ ასახვის ფუნქციის წარმოებულის აბსოლუტური მნიშვნელობა ტრაექტორიის ამ წერტილებში 1-ზე (ჩვენ დაგუშვით, რომ ε იმდენად მცირეა, რომ ორივე საწყის წერტილში წარმოებული პრაქტიკულად ერთი და იგივე მნიშვნელობას ღებულობს.) თუ აბსოლუტური მნიშვნელობა 1-ზე მეტია, მაშინ მისი

ლოგარითმი დადებითია. თუ ტრაექტორიის წერტილები ერთიმეორის მიმართ დივერგენციას საშუალოდ კვლავ განაგრძობს, მაშინ წარმოებულებთა (აბსოლუტური სიდიდეების) ლოგარითმების საშუალო მნიშვნელობა დადებითია.

შეკთხვა პრაქტიკული გამოთვლებისათვის: რამდენად დიდი უნდა იყოს n , რომ მივიღოთ n -ის ზუსტი მნიშვნელობა? იმისათვის, რომ რეალურთან ახლოს მყოფი საშუალო მნიშვნელობა მოგვცეს, n საკმარისად დიდი უნდა იყოს. მაგრამ თუ n ძალიან დიდი იქნება, მაშინ დივერგენცია უკვე ექსპონენციალური აღარ იქნება, რადგან x მნიშვნელობათა დიაპაზონი სასრულია. ცხადია, რაც უფრო მცირე იქნება ϵ , მით მეტი იქნება შესაბამისი n და კვლავ ექსპონენციალურ დივერგენციას მივიღებთ. ოპტიმალური ვარიანტი ასეთია: n -ის ისეთი მნიშვნელობა უნდა შევარჩიოთ, რომელიც d_n -ს x მნიშვნელობათა მთლიანი დიაპაზონის დაახლოებით ნახევარს გახდის. ამ საკითხებს უფრო დაწვრილებით მე-9 თავში განვიხილავთ.

აქამდე ლიაპუნოვის ექსპონენტას მხოლოდ ერთი საწყისი x_0 წერტილისთვის ვითვლიდით. თუ ლიაპუნოვის ექსპონენტს საწყისი წერტილების გარკვეული სიმრავლისათვის გამოვთვლით და საშუალო შედეგს ავიღებთ, მაშინ სისტემის შესაბამის **ლიაპუნოვის საშუალო ექსპონენტასაც** განვსაზღვრავთ (ავტორთა უმრავლესობა მას უბრალოდ ლიაპუნოვის ექსპონენტას უწოდებს.) ქაოსური ქმედების რაოდენობრივი განმარტება ასეთია:

ერთგანზომილებიანი იტერაციული ასახვის ფუნქციას პარამეტრის კონკრეტული მნიშვნელობისათვის გააჩნია ქაოსური ტრაექტორიები, თუ შესაბამისი ლიაპუნოვის საშუალო ექსპონენტა დადებითი სიდიდეა.

უმეტეს შემთხვევაში ეს ექსპონენტა რიცხვითი სახით უნდა გამოვთვალოთ. ამ საკითხს მე-9 თავში დავუბრუნდებით.

ამოცანა 5.4-7. მე-3 თავში ჩვენ განვსაზღვრეთ ლიაპუნოვის საშუალო ექსპონენტები ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების მიერ აღწერილი სისტემებისთვის და ვნახეთ, რომ ისინი დაკავშირებულნი არიან დინამიკური ფუნქციების წარმოებულებთან. მოცემულ პარაგრაფში ვნახეთ, რომ იტერაციული ასახვის ფუნქციებისთვის ლიაპუნოვის საშუალო ექსპონენტა ასახვის ფუნქციის წარმოებულის აბსოლუტური მნიშვნელობის ლოგარითმით არის მოცემული. (a) ახსენით რატომ განსხვავდება ამ ორი შემთხვევის შესაბამისი განსაზღვრებები ერთმანეთისგან. (b) ორი განსაზღვრების შედარებისთვის გამოიყენეთ I დამატების (1-26) განტოლება, ვან დერ პოლის ოსცილატორის მოდელის წრფივი ფორმა და (1-28) განტოლებაში მოცემული პუნკარეს მიახლოებითი ასახვის ფუნქცია.

5.5 თვისებრივად უნივერსალური ქმედება: U – მიმდევრობები

ამჯერად წინა პარაგრაფში ლოჯისტიკური ასახვის კერძო შემთხვევისთვის აღმოჩენილი ბიფურკაციებისა და პერიოდების გაორმაგების ტიპების უნივერსალობაზე ვისაუბრებთ. სწორედ ბიფურკაციათა უნივერსალობა აძლიერებს ერთგანზომილებიანი ბიფურკაციების კვლევის მათემატიკურ „ჟინს“. ყურადღებას გავამახვილებთ თვისობრივ უნივერსალობაზე, რაც ნიშნავს იმას, რომ ქმედებათა გარკვეული ტიპები თავს იჩენენ ამა თუ იმ უნივერსალურ მიმდევრობებში, მაგრამ არ გვანტერესებს პარამეტრის ის რიცხობრივი მნიშვნელობები, რომელთა შემთხვევაშიც ბიფურკაციები დაიკვირვება.

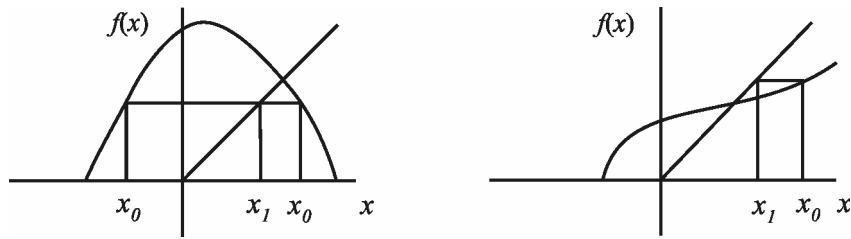
დავიწყოთ უნივერსალობის ყველაზე ზოგადი ფორმებით და შემდეგ გადავიდეთ სხვებზე, რომლებიც იტერაციული ასახვის ფუნქციების მიმართ მეტ შეზღუდვას აწესებენ. თავდაპირველად შემოვიფარგლებით ასახვათა ისეთი ფუნქციებით, რომლებიც x ღერძის რაიმე ინტერვალს (მაგალითად $x = 0$ და $x = 1$ შორის, ე.წ. **ერთეულოვანი ინტერვალი**) ასახავენ მეორე ინტერვალში და პირიქით. მოგვიანებით კი გადავალთ ე.წ. **უნიმოდალური** ასახვის ფუნქციებზე.

უნიმოდალური ასახვის ფუნქცია (ერთეული ინტერვალისთვის) არის გლუვი (ანუ უწყვეტი და დიფერენცირებადი) ფუნქცია ერთადერთი მაქსიმუმით მოცემულ ინტერვალში. შეთანხმების თანახმად ავიღებთ, რომ $f(0)=f(1)=0$. x -ის იმ მნიშვნელობას (აღვნიშნოთ x_c -ით), რომლისთვისაც მაქსიმუმს აქვს ადგილი, **კრიტიკული წერტილი** ეწოდება.

$f(x)$ -ის მაქსიმუმის არსებობა $[0,1]$ ინტერვალში მნიშვნელოვანია, რადგანაც იგი იძლევა იმის შესაძლებლობას, რომ ორი საწყისი წერტილი, მაგალითად, x_0 და x_1 5.8 ნახაზზე, ფუნქციის ერთი იტერაციის შედეგად აისახოს ერთსადაიმაცე x_1 წერტილში. როგორც ქმემოთ ვნახავთ, ამგვარი არაცალსახობა x_1 -ის „წინაისტორიაში“ ნიშნავს, რომ საწყისი წერტილების სიმრავლე ასახვის პროცედურის შედეგად გაიწელება და იკეცება. შედეგად, სათანადო პირობების შემთხვევაში, მივდივართ ქაოსურ ქმედებამდე.

1973 წელს მეტროპოლისმა, შტაინმა და შტაინმა (MSS73) დაადგინეს, რომ უნიმოდალურ ასახვებს მაკონტროლებელი პარამეტრის ცვლილებასთან ერთად პერიოდული ტრაექტორიების ზუსტად განსაზღვრული და აშკარად უნივერსალური მიმდევრობა გააჩნია. MSS აქცენტს აკეთებდა ისეთ პერიოდულ ტრაექტორიებზე, რომელთა ერთ-ერთი წევრი

შეესაბამება იმ მნიშვნელობას, რომელსაც ასახვის ფუნქციის მაქსიმუმი (ანუ კრიტიკული მნიშვნელობა) გააჩნია.



ნახ. 5.8. მარცხნივ მოყვანილია უნიმოდალური ასახვის ფუნქცია. ორი განსხვავებული x_0 და x_1 წერტილი შეესაბამება ტრაექტორიის ერთსა და იმავე x_1 წერტილს. მარჯვნივ ისეთი ასახვის ფუნქციაა, რომელიც არ არის რელევანტური ინტერვალი. x ღერძის მასშტაბის შეცვლით და წანაცვლებით, x ღერძის ჩვენთვის საინტერესო შეგვიძლია შევუთავსოთ ერთეულოვან $[0,1]$ ინტერვალს.

MSS პროცედურა შემდეგნაირია: ვპოულობთ პარამეტრის ისეთ მნიშვნელობას, რომლისთვისაც x_c წერტილი რაღაც n სიგრძის მქონე პერიოდული ტრაექტორიის წარმომადგენელია და ჩავწერთ x მნიშვნელობათა შესაბამის მიმდევრობას:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= f(x_c) & x_2 &= f(x_1) \\
 x_3 &= f(x_2) & \dots & \\
 \dots & & x_c &= f(x_{n-1})
 \end{aligned}
 \tag{5.5-1}$$

უკანასაკნელი დამოკიდებულება გამომდინარეობს ჩვენი დაშვებიდან n პერიოდის მქონე პერიოდული ტრაექტორიის არსებობის შესახებ. ამრიგად, f -ის n -ჯერ გამოყენების შემდეგ x -ის საწყის მნიშვნელობას ვუბრუნდებით. შემდეგ x მნიშვნელობების ნაცვლად ვიყენებთ R ან L სიმბოლოებს შემდეგი წესის თანახმად: თუ $x_i > x_c$, მაშინ ავიღებთ R -ს, ხოლო თუ $x_i < x_c$, მაშინ L -ს. ამ პროცედურის გამოყენებით n პერიოდის მქონე ტრაექტორიები გამოსახულია $n-1$ რაოდენობის $RLLRRL$ სიმბოლოთა სიმრავლით და ა.შ. (x_c მიმდევრობის n -ური წევრია.) ასეთ გამოსახულებას ზოგჯერ **შერევილ მიმდევრობას** უწოდებენ, რომელიც **სიმბოლური დინამიკის** მაგალითს წარმოადგენს. ამ საკითხს ჩვენ მომავალში დავუბრუნდებით.

x_c -ის შემცველ ციკლებს ზოგჯერ **სუპერციკლებსაც** უწოდებენ, რადგან ამ ციკლებისთვის ასახვის ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლია. ეს ნიშნავს, რომ ამგვარ ციკლებს გააჩნიათ „უმაღლესი“ სტაბილურობა, რადგან ისინი წარმოადგენენ შუალედურ

რგოლებს მათ „დაბადებასა“ (წარმოებული $=+1$) და “სიკვდილს” (წარმოებული $=-1$) შორის. სუპერციკლებისთვის პარამეტრის მნიშვნელობათა გამოთვლა საკმაოდ ადვილია $f^{(n)}(x_c)=x_c$ დამოკიდებულებების გამოყენებით. თუ ავიღებთ სუპერციკლურ მნიშვნელობასთან მიახლოებულ A -ს, შეგვიძლია იოლად დავწეროთ კომპიუტერული პროგრამა, რომელიც იტერაციული პროცესის მეშვეობით სუპერციკლური მნიშვნელობის მაღალი სიზუსტით გამოთვლის საშუალებას მოგვცემს (მიახლოებითი მნიშვნელობების გამოთვლა (2.4-1) განტოლების მეშვეობითაც შეიძლება)

ამოცანა 5.5-1. გამოიყენეთ იტერაციული პროცესის გრაფიკული წარმოდგენა და დაამტკიცეთ, რომ MSS მიმდევრობის პირველი სიმბოლო R უნდა იყოს, თუ $f(x)$ -ს მაქსიმუმი x_c წერტილში აქვს.

MSS-მა უჩვენა, რომ ნებისმიერი უნიმოდალური ფუნქციისთვის, RL მიმდევრობები მაკონტროლებელი პარამეტრის ცვლილებასთან ერთად ყოველთვის ვლინდება ერთი და იგივე განსაზღვრული სახით. აქედან გამომდინარე, მეცნიერებმა ამ მიმდევრობას U (უნივერსალობის გამო) მიმდევრობა უწოდეს. MSS-ის მიერ მიღებულმა რიცხობრივმა შედეგებმა უფრო ზუსტი სახე GUC81-ში მიიღო. 5.1 ცხრილში თავმოყრილია პერიოდ n -მდე U მიმდევრობების ნუსხა. ასევე მოყვანილია პარამეტრის ის მნიშვნელობები, რომელთა შემთხვევაშიც ეს მიმდევრობები ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციის სუპერციკლებია.

აღსანიშნავია, რომ ცხრილში მონაცემები მხოლოდ პერიოდი n -მდეა მოყვანილი. ამგვარად, პერიოდი-8, -16 და ა.შ., რომლებიც მოსდევნ პერიოდი-2-ს და პერიოდი-4-ს პერიოდის გარმაგების მიმდევრობაში და გადადიან ქაოსში დაახლოებით $A = 3.5699...$ სთვის, ცხრილში არ არის მოყვანილი. ასევე შენიშნეთ, რომ 3-ზე მეტი ნებისმიერი პერიოდის შემთხვევაში რამდენიმე შესაძლო RL მიმდევრობა არსებობს. მაგალითად, სამი განსხვავებული პერიოდი-5 ტიპის U -მიმდევრობა არსებობს და ისინი დაიკვირვებიან პარამეტრის სამი განსხვავებული მნიშვნელობის შემთხვევაში. გარდა ამისა, ეს მიმდევრობები სტაბილურ პერიოდულ ორბიტებს წარმოადგენენ, ვინაიდან x_c მათ წევრს წარმოადგენს. ამრიგად, ნებისმიერი n -ური რიგის იტერაციული $f^{(n)}$ ფუნქციის წარმოებული x_c წერტილში ნულის ტოლია. ამგვარად ვასკვნით, რომ როდესაც ორმაგი პერიოდის დაგროვების წერტილისგან (შეესაბამება $A = 3.5699...$ -ს ლოჯისტიკური ასახვის შემთხვევაში) „შორს ვიმყოფებით“, პერიოდული ორბიტები წარმოადგენენ იმ პერიოდული დიაპაზონების ნაწილს, რომლებიც ქაოსური რეჟიმის პირობებში დაიკვირვებიან. პერიოდი-6 და პერიოდი-5 ქმედებების შესაბამისი დიაპაზონების ნახვა შევიძლიათ 5.9 ნახაზზე.

არსებობს ორი მნიშვნელოვანი თვალსაზრისი ცხრილში მოყვანილ მონაცემებთან დაკავშირებით. პირველ რიგში ვასკვნით, რომ თუ სისტემა ერთგანზომილებიანი იტერაციული ასახვის ფუნქციითაა აღწერილი და თუ ის პარამეტრის ზოგიერთი მნიშვნელობის შემთხვევაში პერიოდი-4-ის შესაბამის RLR მიმდევრობას გვიჩვენებს, მაშინ პარამეტრის უფრო მცირე მნიშვნელობისთვის მას პერიოდი-2-ისთვის დამახასიათებელი R ციკლი უნდა გააჩნდეს. გარდა ამისა, მიმდევრობა, რომლის შემთხვევაშიც სხვადასხვა პერიოდები და შესაბამისი U მიმდევრობები დაიკვირვებიან, ასახვის ფუნქციის დეტალებზე დამოკიდებული არ არის. პარამეტრების ის რიცხვითი მნიშვნელობები, რომელთა შემთხვევაშიც სახეზეა პერიოდები, ასახვის ფუნქციაზე დამოკიდებული, თუმცა ქმედება თვისობრივად ერთი და იგივეა ყველა უნიმოდალური ასახვის ფუნქციისთვის.

ცხრილი 5.1

მიმდევრობები პერიოდი- n -ის ჩათვლით (MSS73-დან)

პერიოდი	U მიმდევრობა	ლოჯისტიკური ასახვის პარამეტრი
2	R	3.2361
4	RLR	3.4986
6	RLRRR	3.6275
5	RLRR	3.7389
3	RL	3.8319
6	RLLRL	3.8446
5	RLLR	3.9057
6	RLLRR	3.9375
4	RLL	3.9603
6	RLLLR	3.9778
5	RLLL	3.9903
6	RLLLL	3.9976

რა შეიძლება ითქვას რეალური ფიზიკური სისტემების ქმედებაზე, რომელთა დინამიკაც შესაძლებელია უნიმოდალური ასახვის ფუნქციებით იქნას მოდელირებული? გამოსახვენ ისინი U -მიმდევრობების იგივე სიმრავლეს? ბოლო შეკითხვის პასუხია დიახ. პასუხი დამაჯერებელი უნდა იყოს, რადგან ექსპერიმენტთა მხოლოდ მცირე რაოდენობის შემთხვევაში არსებობს სათანადო გარჩევისუნარიანობა მიმდევრობის დასაკვირვებლად (მიმდევრობათა უმრავლესობა პარამეტრის მხოლოდ ძალიან მცირე დიაპაზონისათვის იჩენს თავს). ექსპერიმენტი შესაძლოა გვაძლევდეს პერიოდი-2, -4 და -5 ტიპის ქმედებათა შესაბამის მიმდევრობებათა დაფიქსირების საშუალებას, მაგრამ სირთულეებს წავაწყდებით პერიოდი-7-ის შუალედურ სტადიებზე. თუმცა შესაძლოა ითქვას, რომ დაკვირვებულ მიმდევრობებს ადგილი უნდა ჰქონდეთ MSS U -მიმდევრობის წესით. მაგალითად, 1.5 ნახაზზე

მოყვანილ დიოდის წრედში თავდაპირველად აღძრული პერიოდი-4 ტიპის ქმედება გვიჩვენებს ნავარაუდევ RLR სტრუქტურას (იხ. ამოცანა 5.5-2). U მიმდევრობების უფრო დეტალური გამოკვლევა რხევითი ქიმიური რეაქციებისა (SWS82) და ვარაქტორის წრედის (TPJ82) კვლევაშია გადმოცემული. U -მიმდევრობიდან გადახრები რხევით ქიმიურ რეაქციებში (CMS86) მაშინ შეინიშნება, როდესაც სისტემის ამსახველი ერთგანზომილებიანი ფუნქცია ყოველთვის არ არის ჩაზნექილი ქვემოთ (იხ. 5.9. პარაგრაფი, მაგალითად გაუსის ასახვა.)

ამოცანა 5.5-2. თუ სისტემა 1.5 ნახაზზე გამოსახული პერიოდი-4 ტიპის ქმედებას გვიჩვენებს, როგორ დავადგენთ RL სტრუქტურას, როდესაც არ ვიცით x_c -ს შესაბამისი მნიშვნელობა? მინიშნებები: თავდაპირველად x_n -ის შესაბამისი პიკების (ან მინიმუმების) იდენტიფიკაციას ვახდენთ. შემდეგ ვპოულობთ, რომ პარამეტრის მოცემული მნიშვნელობის შემთხვევაში $f(x_c)$ გვაძლევს x -ის მიმდევრობათა უდიდეს მნიშვნელობას. როდესაც ტრაექტორია ცხადი სახით არ შეიცავს x_c -ს, კვლავ შევადგენთ RL მიმდევრობას, თუკი გამოვიყენებთ L-ისა და R-ის განმაცალკეველები პიკის იმ მნიშვნელობას, რომელიც წინ უსწრებს პარამეტრის მნიშვნელობათა მიმდევრობაში არსებულ უდიდეს პიკს. დააკვირდით, რომ ეს პროცედურა MSS ნიმუშთან სრულ თანხმობაში მყოფ RLR მიმდევრობას გვაძლევს.

მომდევნო პარაგრაფებში ერთგანზომილებიან იტერაციულ ფუნქციებთან დაკავშირებულ ზოგიერთ მნიშვნელოვან მათემატიკურ შედეგს წარმოგიდგენთ. ამ პარაგრაფიდან მკითხველმა მთავარია გაიგოს, რომ პერიოდულ დიაპაზონთა სტრუქტურის დიდი ნაწილისა და სხვადასხვა პერიოდების მქონე ორბიტების არსებობა საკმაოდ ზოგადი შემთხვევაა. ბევრი ასეთი ნიშან-თვისება იტერაციული ასახვის ფუნქციის დეტალებზე დამოკიდებული არ არის. დაწვრილებითი ინფორმაციისათვის მიმართეთ თავის ბოლოში მითითებულ ლიტერატურას.

ზოგიერთი მათემატიკური ასპექტი

უნდა აღინიშნოს, რომ ასახვის ფუნქციებში ჩვენს მიერ დაწესებული ზოგიერთი შეზღუდვა წმინდა მათემატიკური მიზეზებით არის გამოწვეული. ამ პარაგრაფში ვნახავთ, თუ როგორ შეიძლება ზოგიერთი მათემატიკის შერბილება.

ჩვენ დავუშვით, რომ საკვლევ ინტერვალში ასახვის ფუნქციას ერთადერთი მაქსიმუმი გააჩნია. შედეგების უმრავლესობა იგივე იქნება, თუ მოცემულ ინტერვალში ფუნქციას ერთადერთი მინიმუმი გააჩნია. მაგალითად, განვიხილოთ ასახვის ფუნქცია $f(x) = 1 - Ax(1-x)$.

ეს ფუნქცია ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციის შებრუნებულია. მას აქვს *მინიმუმი* $x=1/2$ წერტილში. შეგიძლიათ დარწმუნდეთ, რომ ეს ფუნქცია $[0,1]$ ინტერვალს თავის თავში ასახავს და როდესაც A პარამეტრი იზრდება, (5.5-2) ამოცანის შესაბამისი იტერაციები, ლოჯისტიკური ასახვის ანალოგიურად, ქაოსში პერიოდის გაორმაგების მიმდევრობის გავლით გადადის. თუმცა, იტერაციათა სიდიდეები განსხვავებულია. მაგალითად, $A<2$ -თვის $x=1$ წერტილი, რომელიც სისტემისთვის სტაბილური ფიქსირებული მიზიდულობის წერტილია, ხოლო $2<A<3$ შემთხვევაში კი სტაბილური ფიქსირებული მიზიდულობის წერტილი $x=1/A$ -ში გვხვდება.

ამოცანა 5.5-3. დაამტკიცეთ წინა პარაგრაფში მოყვანილი შედეგების სამართლიანობა.

$[0,1]$ ინტერვალის მიმართ შეზღუდვის დაწესება საერთოდ არცაა აუცილებელი. მაგალითად, განვიხილოთ ასახვის შემდეგი ფუნქცია:

$$f(x) = Bx(b-x) \tag{5.5-3}$$

ამ ფუნქციას მაქსიმუმი $x = b/2$ წერტილში აქვს და იგი ნულისაკენ მიისწრაფვის, როდესაც $x=0$ და $x=b$. ახალი ცვლადის (ეთქვათ $u=x/b$) შემოტანით ასახვის ფუნქცია შეიძლება ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციად გარდაიქმნას. ამრიგად, დამოუკიდებელი ცვლადის გარდაქმნით შეგვიძლია საკვლევი ინტერვალის $[0,1]$ ინტერვალისათვის შეთანადება.

ამოცანა 5.5-4. მრავალ ექსპერიმენტში სხვადასხვა გარდამქმნელი საკვლევ ფიზიკურ სიგნალს ელექტრულად გარდაქმნის (უმეტესწილად ძაბვად). ელექტრული მოწყობილობა ხშირად სიგნალს გარკვეულწილად აძლიერებს. სიგნალს შესაძლოა შეეცვალოს ნიშანი და ნულისკენაც მიისწრაფოდეს. თუ საკვლევი სისტემის დინამიკას ერთგანზომილებიანი ასახვის ფუნქცია აღწერს, აჩვენეთ, რომ ამგვარი გარდაქმნები იტერაციული ასახვის მოდელის დინამიკაზე არსებით გავლენას არ ახდენს.

სტაბილური პერიოდების ერთადერთობა და შეარცის წარმოებული

ადრე წარმოდგენილი MSS U -მიმდევრობა პერიოდული ციკლების ერთადერთობის შესახებ არაფერს გვეუბნება. ზოგადად, პარამეტრის მოცემული მნიშვნელობისთვის სხვადასხვა პერიოდული ციკლები არსებობს (რა თქმა უნდა, მხოლოდ ერთ-ერთი მათგანი

შეიცავს x_c -ს.) 1978 წელს დ. სინგერმა (SIN78) დაამტკიცა, რომ პარამეტრის მოცემული მნიშვნელობისათვის ე.წ. **შვარცის წარმოებულის** უარყოფითი მნიშვნელობის მქონე უნიმოდალური ასახვის ფუნქციებს მაქსიმუმ სამი სტაბილური პერიოდული ციკლი შეიძლება გააჩნდეს და უმეტეს შემთხვევაში სულ ცოტა ერთი სტაბილური პერიოდული ციკლი მაინც გვაქვს [Devaney, 1986, გვ. 70]. ამრიგად, თუ პარამეტრის გარკვეული მნიშვნელობისთვის არსებობს სტაბილური პერიოდული ციკლი, მაშინ იგი ერთადერთია. ამ შემთხვევაში x_c -ში დაწყებული ტრაექტორია მოცემული პერიოდული ციკლისაკენ მიისწრაფვის (x_c ციკლის ნაწილია მხოლოდ პარამეტრის სუპერციკლური მნიშვნელობებისთვის).

რა არის შვარცის წარმოებული და ერთადერთობის შესანარჩუნებლად რატომ უნდა იყოს იგი უარყოფითი ნიშნის? შვარცის წარმოებული (ჰ.ა. შვარცი (1869)) ანალიზის სხვადასხვა სფეროებში გამოიყენება (იხ. მაგალითად [Hille, 1969]). სინგერის 1978 წლის ნაშრომამდე ერთგანზომილებიან განმეორებად ასახვის ფუნქციებთან დაკავშირებით შვარცის წარმოებულის დანიშნულება შეუძნეველი იყო. $f(x)$ ფუნქციის $SD(f(x))$ -ით აღნიშნული შვარცის წარმოებულის განსაზღვრება შემდეგნაირია:

$$SD(f(x)) \equiv \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 \quad (5.5-4)$$

სადაც f' ნიშნავს f -ის პირველი რიგის წარმოებულს x -ის მიმართ; f'' მეორე რიგის წარმოებულია, ხოლო f''' - მესამე რიგისა. სინგერის თეორემა ძალაშია, თუ $SD(f(x))$ მთელ $[0,1]$ ინტერვალზე უარყოფითია.

ამოცანა 5.5-5. დაამტკიცეთ, რომ ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციას $[0,1]$ ინტერვალში უარყოფითი შვარცის წარმოებული გააჩნია. არსებობს თუ არა რაიმე შეზღუდვა A პარამეტრის თვალსაზრისით? დაამტკიცეთ, რომ სინუსოიდურ ფუნქციას [იხ. განტ. (2.2-2)] $[0,1]$ ინტერვალში შვარცის წარმოებული უარყოფითი აქვს.

სინგერის თეორემის დამტკიცება ძალიან შორს წაგვიყვანს. დაინტერესებული მკითხველი უნდა გაეცნოს [Devaney, 1986], [Gulick, 1992] და [Davies, 1999]. $SD(f(x))$ -ის მნიშვნელობის შესახებ გარკვეულ წარმოდგენას შეგვიქმნის შემდეგი ლემა [Devaney, 1986, გვ.70]: თუ $SD(f(x)) < 0$, მაშინ $f'(x)$ -ს ვერ ექნება ლოკალური მინიმუმი იქ, სადაც იგი დადებითია ან სადაც ლოკალური მაქსიმუმი უარყოფითია. შენიშვნა: გახსოვდეთ, რომ იმ

წერტილს, სადაც $f'(x)$ -ს მაქსიმუმი ან მინიმუმი გააჩნია, *გალუნვის წერტილი* ეწოდება. ლემა გვამცნობს, რომ $f'(x)$ -სთვის გალუნვის წერტილების გარკვეული ტიპები არ გვხვდება იმ ინტერვალში, სადაც $SD(f(x)) < 0$.

ამოცანა 5.5-6. ააგეთ იმ ფუნქციის გრაფიკი, რომელსაც გალუნვის წერტილში შვარცის დადებითი წარმოებული აქვს ან პირიქით. გამოიყენეთ იტერაციათა გრაფიკული მეთოდი და აჩვენეთ, თუ რატომ აქვს ადგილი პირველ შემთხვევაში ფუნქციისთვის ერთზე მეტი სტაბილური ფიქსირებული წერტილის არსებობას.

სარკოვსკის თეორემა

U -მიმდევრობათა შესახებ ზემოთ მოყვანილი მსჯელობისას ჩვენ შევეხეთ მაკონტროლებელი პარამეტრის ცვლილებასთან ერთად სხვადასხვა პერიოდული ციკლების წარმოქმნის პროცესს. პარამეტრის ფიქსირებული მნიშვნელობისთვის შემთხვევაში პერიოდული (სტაბილური ან არასტაბილური) ციკლების არსებობის საკითხიც შეგვიძლია დავსვათ. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, არასტაბილური პერიოდული ციკლების არსებობას შეიძლება თან სდევდეს მნიშვნელოვანი ზეგავლენა იმ ტრაექტორიათა ქმედებაზე, რომლებიც ციკლების ნაწილი არაა. 1964 წელს რუსმა მათემატიკოსმა ა. სარკოვსკიმ დაამტკიცა შემდეგი თეორემა:

განვიხილოთ უწყვეტი ერთგანზომილებიანი $f(x)$ ასახვის ფუნქცია. თუ პარამეტრის რაიმე მნიშვნელობისთვის f -ს m საწყისი პერიოდის მქონე პერიოდული წერტილი გააჩნია, მაშინ f -ს (პარამეტრის რაიმე მნიშვნელობისთვის) n პერიოდის მქონე წერტილიც აღმოაჩნდება, სადაც n იჩენს თავს m -ის მარჯვნივ შემდეგი თანმიმდევრობით:

$$3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow \dots \rightarrow 2 \times 3 \rightarrow 2 \times 5 \rightarrow \dots \rightarrow 2^2 \times 3 \rightarrow 2^2 \times 5 \rightarrow \dots \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1.$$

როგორია ამ სიმრავლის წყობა? თავადაპირველად ზრდადობის რიგის მიხედვით ჩამოვწერთ 3-ით დაწყებულ ყველა დადებით კენტ რიცხვს 3 (3, 5, 7, . . .), ხოლო შემდეგ კვლავ ზრდადობის მიხედვით დავალაგებთ 3-ზე მეტ დადებით რიცხვებს, რომლებიც კენტი რიცხვების ორზე ნამრავლის ტოლია; შემდეგ - იმ დადებით რიცხვებს, რომლებიც კენტი რიცხვების ოთხზე ნამრავლის ტოლია და ა.შ. დაბოლოს, კლებადი რიგით ჩამოვწერთ დადებით რიცხვებს, რომლებიც აქამდე არ ჩაგვიწერია. ესენი არიან რიცხვი 2-ის ხარისხები:

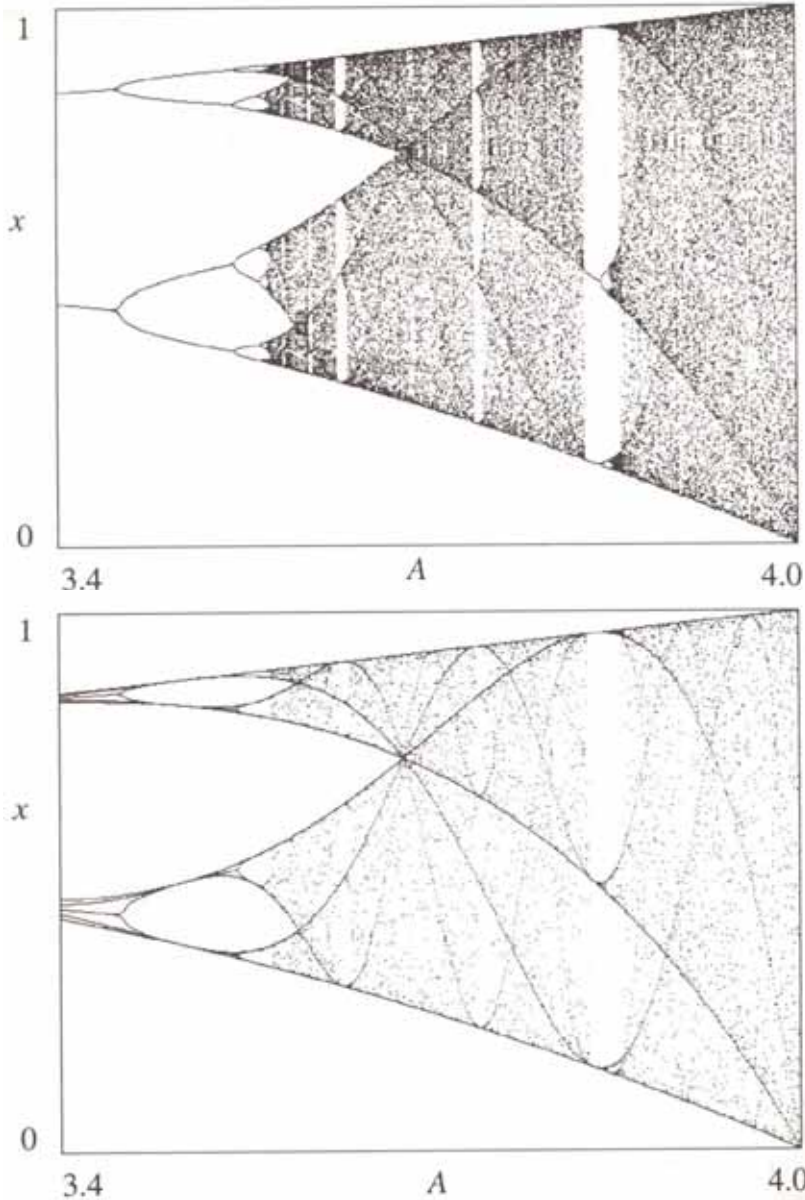
. . . $2^4, 2^3, 2^2, 2^1, 2^0$ (დარწმუნდით, რომ დადებითი რიცხვების ჩამონათვალში არაფერია განმეორებული ან გამოტოვებული).

ამ თეორემის დამტკიცებისთვის იხილეთ [Devaney, 1986] (ელემენტალურ გეომეტრიაზე დაყრდნობით განსხვავებული დამტკიცება იხ. KAP87-ში). უპირველეს ყოვლისა (რაც ძალიან მნიშვნელოვანია ქაოსისათვის), თუ პარამეტრის რომელიმე მნიშვნელობისათვის f -ს პერიოდი-3-ის შესაბამისი წერტილი გააჩნია, მაშინ პარამეტრის იმავე მნიშვნელობისთვის ნებისმიერი სიგრძის მქონე უსასრულო რაოდენობის პერიოდული ტრაექტორიები ექნება! როგორც უკვე აღვნიშნეთ, უსასრულო პერიოდი აპერიოდული ტრაექტორიის ექვივალენტურია. ეს კი ქაოსის ერთ-ერთი გამოხატულებაა, მაგრამ ეს არ არის ჩვენს მიერ საძიებელი ქაოსური ტრაექტორია. მაგალითად ლოჯისტიკური ასახვისათვის, როდესაც $A=3.8319\dots$, სტაბილური პერიოდი-3 ტიპის ტრაექტორია დაიკვირვება. სარკოვსკის თეორემის მიხედვით, პარამეტრის მოცემული მნიშვნელობისთვის ლოჯისტიკურ ასახვას უსასრულოდ ბევრი პერიოდული ციკლი გააჩნია. სინგერის თეორემის ძალით, ყოველი მათგანი არასტაბილურია. ამრიგად, ტრაექტორიების კომპიუტერული გამოთვლის შედეგად ვპოულობთ, რომ სტაბილური მხოლოდ პერიოდი-3 ტიპის ტრაექტორიაა.

სარკოვსკის თეორემამ უდიდესი ზეგავლენა მოახდინა ლისა და იორკის ცნობილ სტატიასზე, სადაც სიტყვა ქაოსი მეცნიერული დანიშნულებით პირველად არის გამოყენებული (LIY75). ხშირად ავიწყდებათ, რომ სარკოვსკის თეორემის ანალოგიურად, ლისა და იორკის კვლევის შედეგი კონკრეტული ფიქსირებული პარამეტრის მნიშვნელობის მიმართ გამოიყენება. მიუხედავად იმისა, რომ უსასრულო პერიოდების მქონე ტრაექტორიების არსებობა საეჭვოა, შედეგები პირდაპირ არ გვამცნობს, რომ ქაოსურ ქმედებას პარამეტრის სხვა მნიშვნელობებისთვისაც ექნება ადგილი.

მიუხედავად იმისა, რომ სარკოვსკის თეორემა პარამეტრის მხოლოდ ცალკეული მნიშვნელობისთვის გამოიყენება, ზოგიერთ შემთხვევაში იგი ასევე მიესადაგება ისეთ მდგომარეობას, როდესაც პერიოდული ორბიტები მათი სტაბილური ფორმით ანუ პარამეტრის ფუნქციის სახით არიან წარმოდგენილი. მაგალითად, A პარამეტრის მცირე საწყისი მნიშვნელობების მქონე ლოჯისტიკური ასახვისთვის A -ს ზრდასთან ერთად თავდაპირველად პერიოდი-1, ხოლო შემდეგ პერიოდი-2, პერიოდი-4 და ა.შ. გვაქვს. ორმაგი პერიოდის ზღვრული წერტილისაგან მოშორებით, ქაოსურ არეებში დაიკვირვებიან ქაოსური დიაპაზონები. მათ თავდაპირველად ძალიან დიდი (კენტი) პერიოდები გააჩნიათ, რომლებიც სარკოვსკის მიმდევრობის გასწვრივ თანდათანობით სიგრძეში კლებულობენ და საბოლოოდ, $A=3.7$ და $A=3.83$ მნიშვნელობებს შორის გვაქვს ჯერ პერიოდი-7, შემდეგ პერიოდი-5 დაბოლოს პერიოდი-3 (იხ. ნახ. 5.9).

აღსანიშნავია, რომ სარკოვსკის მიმდევრობა ტრაექტორიების მრავალგზის განმეორებას მათი პერიოდულობის და განსხვავებული U -მიმდევრობების მიხედვით არ აღწერს. იგი მხოლოდ იმ მიმდევრობას აღწერს, რა სახითაც პერიოდული ტრაექტორიები თავდაპირველად ჩნდებიან.



ნახ. 5.9. ბიფურკაციული დიაგრამა ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციისთვის. სურათის ზედა ნაწილში A -ს თითოეული მნიშვნელობისთვის ტრაექტორიის 100 წერტილია გამოსახული (გარდამავალი სტადიების დასრულების შემდეგ). ქვედა ნაწილში გამოსახულ დიაგრამაზე $x=0.5$ წერტილიდან წამოსული რვა ტრაექტორიაა მოყვანილი. აღსანიშნავია, რომ ეს წერტილები მიზიდულობის წერტილებს ემთხვევა მხოლოდ A -ს სუპერციკლური მნიშვნელობებისათვის. ნებისმიერ შემთხვევაში ისინი მიმზიდველისა და მისი ქვეარეების ზედა და ქვედა საზღვრებს გვაძლევენ.

ქაოსური ქმედების ორგანიზება

განვიხილოთ ერთგანზომილებიანი იტერაციული ასახვების შესაბამისი ბიფურკაციული დიაგრამების ზოგიერთ დეტალი. 5.9 ნახაზის ზედა ნაწილში გამოსახულია ლოჯისტიკური ასახვის ბიფურკაციული დიაგრამა $3.4 < A < 4$ შემთხვევაში. გასაოცარია, მაგრამ დიაგრამის ქაოტური რეჟიმის შესაბამის ნაწილში კი საოცარი წესრიგია.

თავდაპირველად ყურადღებას ქაოსურ ქმედებაში მონაწილე წერტილების „მრუდების“ მიმართ ვამახვილებთ. წერტილების ამგვარი შთამბეჭდავი კონცენტრაცია იტერაციული ასახვის ფუნქციის კრიტიკული წერტილის (ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციისათვის $x=0.5$) მიდამოში გამავალ ტრაექტორიებს შეესაბამება. ნებისმიერი ასეთი ტრაექტორია ერთიმეორეს გასდევს რამდენიმე თანმიმდევრული იტერაციის განმავლობაში, რადგან ფუნქციის (და მისი ყოველი მაღალი რიგის იტერაციების) გრაფიკთა კუთხური კოეფიციენტი კრიტიკულ წერტილში ნულის ტოლია. ამრიგად, ტრაექტორიები გაცილებით ნელა განიცდიან დივერგენციას და ბიფურკაციულ დიაგრამაზე წერტილების კონცენტრაციას იწვევენ.

ზუსტად x_c კრიტიკული წერტილიდან გამომდინარე ტრაექტორიის წერტილები ბიფურკაციული დიაგრამის არაერთ მახასიათებელს განსაზღვრავს (ამ წერტილებს კრიტიკული წერტილის **ანასახებს** უწოდებენ.) მაგალითად, პარამეტრის ამ გარკვეული მნიშვნელობისთვის, $x_{\max} = f'(x_c)$ მიმზიდველში შემოსული ტრაექტორიებით მიღებული x -ის მაქსიმალური მნიშვნელობაა. $x_{\min} = f'(x_{\max}) = f''(x_c)$ პარამეტრის გარკვეული მნიშვნელობისთვის, მიმზიდველში შემოსული ტრაექტორიებით მიღებული x -ის მინიმალური მნიშვნელობაა, ანუ x_c საწყისის მქონე f -ის პირველი ორი რიგის იტერაცია მიზიდულობის არის ზედა და ქვედა საზღვრებს გვაძლევს (აქ უნდა დაუშვათ, რომ კრიტიკული წერტილი მიზიდულობის არეში მდებარეობს. გარდამავალი ტრაექტორიები სათავეს შეიძლება ამ არის მიღმა იღებდეს, ხოლო პერიოდული ტრაექტორიები შესაძლოა მიმზიდველის საზღვრებთან კონტაქტის გარეშე მთლიანად ამ საზღვრებს შორის არსებობდეს). შემდგომი იტერაციები, რომლებიც კრიტიკული წერტილის უფრო მაღალი რიგის ანასახებს გვაძლევენ, იძლევიან იმ არეების შიდა საზღვრებს, სადაც “იმყოფებოდნენ” ტრაექტორიები პარამეტრის მოცემული მნიშვნელობისთვის.

5.9 ნახაზის ქვედა ნაწილი ბიფურკაციულ დიაგრამაზე დატანილი კრიტიკული წერტილის პირველ რვა ანასახს გვიჩვენებს. აღსანიშნავია, რომ პერიოდული მიმზიდველის წერტილებს, გარდა A პარამეტრის სუპერციკლური მნიშვნელობებისა, ტრაექტორიის წერტილები არ ემთხვევა. როდესაც $A > 3.569\dots$, კრიტიკული წერტილის მოცემული

ანასახები ტრაექტორიებით განსაზღვრული ქაოსური „არეების“ საზღვრებს „ანადგურებს“. A –ს ზრდასთან ერთად ადგილი აქვს ქაოსური დიაპაზონების გადაფარვას.

ამოცანა 5.5-7. ახსენით, რა ხდება $A = 3.68$ მნიშვნელობის სიახლოვეს, სადაც ორი ქაოსური დიაპაზონი ერთმანეთს გადაფარავს და ადგილი აქვს ანასახების მრუდების ერთ წერტილში შეკრებას. ამ გამორჩეულ წერტილს მისიურევიჩის წერტილი (MIS81) ეწოდება. დააკვირდით, რომ შეკრების ანალოგიურ შემთხვევას აქვს ადგილი, როდესაც $A = 3.6$ მნიშვნელობის სიახლოვეს ოთხი ქაოსური არე ორს წარმოქმნის. დავალება: განიხილეთ $f^{(3)}(x_c)$.

5.9 ნახაზის ქვედა ნაწილში კარგად ჩანს, რომ პერიოდული დიაპაზონები მაშინ დაიკვირვება, როდესაც კრიტიკული წერტილის ზოგიერთი ანასახი ერთმანეთს ემთხვევა. მაგალითად, $A = 3.83$ მნიშვნელობის სიახლოვეს ზოგიერთ ანასახთა მრუდი პერიოდი-3-ის შესაბამის დიაპაზონში შედის და ერთმანეთს გადაფარავს სუპერციკლურ მნიშვნელობაზე. $A = 3.74$ მნიშვნელობის სიახლოვეს ზოგიერთი ანასახი პერიოდი-5-ის შესაბამის დიაპაზონში გადაფარავს ერთმანეთს. იგივე ეფექტი $A = 3.7$ მნიშვნელობის სიახლოვეს, პერიოდი -7-ის შესაბამის ვიწრო დიაპაზონშიც შეიმჩნევა.

ამგვარი გადაფარვა ყოველ პერიოდულ დიაპაზონს იმიტომ ახასიათებს, რომ არსებობს პარამეტრის რაღაც სუპერციკლური მნიშვნელობა, რომლისთვისაც კრიტიკული წერტილი პერიოდული ტრაექტორიის ნაწილია. როდესაც ტრაექტორია პერიოდულია, კრიტიკული წერტილის ზოგიერთი ანასახი კრიტიკული წერტილის შესაბამის მნიშვნელობას უბრუნდება.

ამრიგად, პერიოდული დიაპაზონების წარმოქმნის მიზეზი უკვე ვიცით. დიაპაზონები ამგვარად იმიტომ არიან განლაგებული, რომ მრუდთა მაღალი რიგის ანასახები ქმნიან ისეთ მრუდებს, რომლებიც $A = 3.68$ სიახლოვეს მყოფი კრებადობის წერტილიდან განიცდიან მკვეთრ ზრდას. ამრიგად, მაღალი რიგის ანასახი პირველი გადაფარავს თავდაპირველ ანასახს; ასეთი გადაფარვა პერიოდული დიაპაზონის არსებობაზე მიანიშნებს. ამასთან, მაღალი რიგის ანასახები უფრო სწრაფად აღწევენ მაქსიმუმს A -ს იმ მნიშვნელობების მიდამოში, რომლის შემთხვევაშიც ისინი პირველი ანასახის შესაბამის მრუდს გადაფარავენ. მაქსიმუმის „სივიწროვე“ კორელაციაშია A ღერძის გასწვრივ არსებული პერიოდული დიაპაზონის სიდიდესთან: ვიწრო პიკებს ასევე ვიწრო დიაპაზონები შეესაბამება. ადვილი სანახავია, რომ პერიოდი-5-ის დიაპაზონთან შედარებით პერიოდი-7-ის დიაპაზონი უფრო ვიწროა, რომელიც, თავის მხრივ, პერიოდი-3-ისაზე ვიწროა.

ანასახების გადაფარვისა და პერიოდული დიაპაზონების თვალსაზრისით იგივე მდგომარეობაა $A = 3.569\dots$ და $A = 3.68$ მნიშვნელობებს შორის, სადაც მრავალრიცხოვანი ქაოსური დიაპაზონები იმყოფებიან. აქ პერიოდული დიაპაზონები ყოველ არეში გვხვდებიან; პერიოდი-3 პერიოდი-5-ის მარჯვნივ (A –ს უფრო დიდი მნიშვნელობისათვის) დაიკვირვება, რომელიც თავის მხრივ, პერიოდი-7-ის მარჯვნივაა და ა.შ. რადგან არსებობენ მრავალრიცხოვანი ქაოსური არეები, მთლიანობაში ვლემულობთ უფრო მაღალი რიგის პერიოდულობის დიაპაზონებს. მაგალითად, $A = 3.62$ მნიშვნელობის ახლოს, სადაც ორი ქაოსური არე მდებარეობს, თითოეული ქვე-არე პერიოდი-3-ის შესაბამის დიაპაზონს მოიცავს და ეს ქვე-არეები ერთობლიობაში პერიოდი-6-ის დიაპაზონს ქმნის.

თუ სარკოვსკის პერიოდების მიმდევრობას მოვანდენთ შევადარებთ, დავრწმუნდებით, რომ ეს წესი ზუსტად შეესაბამება კრიტიკული წერტილების ანასახთა მრუდების გადაფარვის შედეგად მიღებული პერიოდული დიაპაზონების განლაგებას. ეს მრუდები კრიტიკულ წერტილში დაწყებული ასახვის ფუნქციის იტერაციით განსაზღვრული გრაფიკებია (A პარამეტრის მრავალცვლადის ფუნქციები ლოჯისტიკური ასახვის შემთხვევაში). ამ ფუნქციათა გეომეტრიული მახასიათებლები ტრაექტორიების ქმედებას აკონტროლებს. მაგალითად, ლოჯისტიკური ასახვისათვის $f'(x_c) = A/4$; ამგვარად, ქაოსური არეების ზედა საზღვარი წრფეა ($A > 3.59$ –თვის), რომელიც კვეთს $x=1$ -ს $A=4$ –ზე. $f^{(2)}(x_c)$ მოცემულია $(A^2/4)(1-A/4)$ გამოსახულებით. ამრიგად, ქაოსური კვანძების ქვედა საზღვარი მესამე რიგის მრუდია, რომელიც $x=0$ -ს, $A=4$ –ზე კვეთს. მოცემული ანალიზი შეგვიძლია განვაგრძოთ ანასახთა თითოეული მრუდის ქმედების შესწავლის მიზნით.

A –ს ზრდასთან ერთად, პერიოდი- n -ით დაწყებული კონკრეტული პერიოდული დიაპაზონი, პერიოდის გაორმაგებათა მიმდევრობის გავლის შედეგად ქრება. ამ დროს ქაოსური არეების n რაოდენობის სიმრავლე წარმოიქმნება. საბოლოოდ ქაოსური არეები ერთმანეთს გადაფარავენ **კრიზისად** წოდებული მოვლენის შემთხვევაში (იხ. მე-7 თავი). პერიოდული ორბიტები კვლავ იარსებებენ, მაგრამ ისინი არასტაბილური იქნებიან. სარკოვსკის მეთოდიკა გვაძლევს სქემას, რომლის მიხედვითაც პერიოდული დიაპაზონები წარმოიქმნება. ამრიგად, თუ პარამეტრის რომელიმე მნიშვნელობისთვის პერიოდი-3-ის შესაბამისი დიაპაზონი დაიკვირვება, მაშინ გვეცოდინება 3-მდე მყოფი ყველა რიცხვის შესაბამისი დიაპაზონებიც. მათი ნარჩენი არასტაბილური პერიოდული ორბიტები „თანაარსებობენ“ პერიოდი-3-თან დაკავშირებულ ორბიტებთან ერთად.

ამოცანა 5.5-8. სარკოვსკის მეთოდის შემოწმებისთვის გამოიყენეთ ბოლო არგუმენტის დეტალები.

ამოცანა 5.5-9. თითოეულ ქაოსურ არეს საკუთარი მისიურევიჩის წერტილი გააჩნია. ჩამოაყალიბეთ პირობა, რომელიც განსაზღვრავს ამ წერტილის მდებარეობას A პარამეტრის ფუნქციის სახით.

5.6. ფეიგენბაუმის უნივერსალობა

მე-2 თავში განვიხილეთ ერთგანზომილებიანი იტერაციულ ასახვათა რამდენიმე რიცხვითი მახასიათებელი. მათგან ყველაზე აღსანიშნავი ფეიგენბაუმის α და δ რიცხვებია. ამ პარაგრაფში COP99-ზე დაყრდნობით ფეიგენბაუმის α -ს გამოყვანის პროცესს წარმოგიდგენთ. α -ს და δ -ს გამოყვანის დეტალური პროცესი I დანართშია მოყვანილი. დანარჩენი რაოდენობრივი უნივერსალური მახასიათებლების შესახებ H დანართში ვისაუბრებთ.

მე-2 თავიდან გავიხსენოთ, რომ ფეიგენბაუმის α განსაზღვრულია მასშტაბის კოეფიციენტის სახით. იგი მიმდევრობითი ბიფურკაციებისთვის ლოჯიკური ასახვის ფუნქციის ბიფურკაციულ დიაგრამაზე მოცემულ „ვერტიკალურ“ მანძილებს პარამეტრის (ლოჯისტიკური ასახვისათვის – A) ცვლილებასთან აკავშირებს (იხ. ნახ. 2.3 და განტ. (2.5-1).) კერძოდ, ყურადღებას ვამახვილებთ ქაოსური ქმედების გამომწვევი პერიოდის გაორმაგების კასკადის შესაბამის სუპერციკლებზე, რომლებიც შეიცავენ $x_c = 1/2$ კრიტიკულ მნიშვნელობას. მნიშვნელოვანია მანძილი $1/2$ –სა და ციკლის ნახევრის შესაბამის x -ის მნიშვნელობას შორის. 2^n პერიოდის მქონე ციკლისათვის ეს მანძილი იქნება:

$$d_n = \frac{1}{2} - f_{A_n^S}^{(2^{n-1})}(x = \frac{1}{2}) \quad (5.6-1)$$

ანუ ტრაექტორიას ვიწყებთ $x = 1/2$ წერტილით, ვახდენთ იტერაციას 2^{n-1} – ჯერ, 2^n პერიოდის მქონე ციკლის ნახევრამდე. A_n^S სიდიდის ქვედა ინდექსი გვამცნობს, რომ ჩვენს წინაშეა 2^n - პერიოდის მქონე სუპერციკლი.

ფეიგენბაუმის α არის რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$-a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} - f_{A_n^S}^{(2^{n-1})}(x = \frac{1}{2})}{\frac{1}{2} - f_{A_{n+1}^S}^{(2^n)}(x = \frac{1}{2})} \quad (5.6-2)$$

α –ს რიცხვითი მნიშვნელობის გამოთვლისათვის გვესაჭიროება უნივერსალური $g(y)$ ფუნქციის შემოტანა, რომელიც შემდეგ პირობებს აკმაყოფილებს

$$g(y) = -\alpha g(g(-y/a)) \quad (5.6-3)$$

ეს გამოსახულება გვამცნობს, რომ არსებობს ისეთი სპეციალური g ფუნქცია და α რიცხვი, რომ ფუნქციის ერთგზის იტერაციისას იგივე შედეგი მიიღება, რაც დამოუკიდებელი ცვლადის შესაბამისი ღერძის მასშტაბის $-\alpha$ -ჯერ შეცვლის, ორგზის იტერაციისა შემდეგ მიღებული შედეგის α –ზე გამრავლების შემთხვევაში. ახლა უკვე ვხედავთ კავშირს (5.6-2) განტოლებას და (5.6-3) გამოსახულებით განსაზღვრულ ფუნქციას შორის.

შემოვიტანოთ ახალი $y=1/2-x$ ცვლადი და (5.6-2) განტოლება გარდაექმნათ. შემდეგ დამოუკიდებელი ცვლადის შესაბამისი ღერძი ისე წავანაცვლოთ, რომ იტერაციული ასახვის ფუნქციის მაქსიმუმი $y=0$ წერტილში მოხვდეს. შემდეგ შემოგვაქვს აღნიშვნა:

$$y_{[n]} = d_n = \frac{1}{2} - f_{A_n^s}^{(2^{n-1})} \left(x = \frac{1}{2} \right) \quad (5.6-4)$$

(5.6-2) განტოლებაში ზღვრის გადავდებითა და იმის დაშვებით, რომ ფარდობა კვლავ იგივე რჩება $y=0$ -ის მიდამოში, შეგვიძლია დავწეროთ

$$-\alpha y_{[2n]} = y_{[n]} \quad (5.6-5)$$

COP99 ამ დაშვების სასარგებლოდ გარკვეულ რიცხვით და გრაფიკულ მონაცემებს გვაძლევს. რადგან ვამტკიცებთ, რომ (5.6-5) განტოლება n -ის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის ძალაშია, ასევე შეგვიძლია დავწეროთ:

$$-\alpha y_{[2(n+1)]} = y_{[n+1]} \quad (5.6-6)$$

ჩვენ ვეძებთ ასახვის ისეთ g ფუნქციას, რომელიც ქმნის y მნიშვნელობათა შემდეგ მიმდევრობას:

$$y_{[n+1]} = g(y_{[n]}) \quad (5.6-7)$$

ამ განსაზღვრების გამოყენებით (5.6-6) განტოლება შემდეგი სახით შეიძლება გადავწეროთ

$$-\alpha g(g(y_{[2n]})) = g(y_{[n]}) \quad (5.6-8)$$

საბოლოოდ ვსარგებლობთ (5.6-5) განტოლებით და ვვარაუდობთ, რომ შედეგი n -ის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის ძალაშია. ამის შემდეგ y -ს შეგვიძლია ქვედა ინდექსები მოვაშოროთ და მიღებული შედეგი ასე ჩავწეროთ:

$$-\alpha g(g(-y/\alpha)) = g(y) \quad (5.6-9)$$

თუ დავუშვებთ, რომ მისი მაქსიმალური მნიშვნელობის სიახლოვეს ფუნქცია კვადრატულია, მაშინ

$$g(y) = 1 - by^2 \quad (5.6-10)$$

სადაც ჩვენ უნივერსალობის დარღვევის გარეშე ვუშვებთ, რომ ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა 1-ის ტოლია. შემდეგ (5.6-10) განტოლებას (5.6-9)-ში ჩავსვათ და ვღებულობთ:

$$1 - cy_2 = -\alpha(1 - c) - 2c^2y^2/\alpha + c^3y^4/\alpha^3 \quad (5.6-11)$$

როდესაც y -ის მცირე მნიშვნელობების გაგება გვსურს, უგულვებელყოფთ y^4 წევრს. მიღებული განტოლება y -ის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის ძალაში დარჩეს, უნდა შესრულდეს შემდეგი პირობა:

$$1 = -\alpha(1 - c) \text{ and } c = \alpha/2 \quad (5.6-12)$$

(5.6-12) განტოლება გვაძლევს α -ს მიმართ კვადრატულ განტოლებას

$$\alpha^2 - 2\alpha - 2 = 0 \quad (5.6-13)$$

რომლის $\alpha = 2.73$ ამონახსნი ფეიგენბაუმის 2.502... მაჩვენებლის მიმართ 10%-იანი ცდომილების ფარგლებში მდებარეობს.

F დანართში მოყვანილია, თუ როგორ უნდა დავაზუსტოთ ეს პარამეტრი α -სა და თავად $g(y)$ ფუნქციის უფრო ზუსტი მნიშვნელობის დასადგენად. ასევე ნაჩვენებია, თუ როგორ მივიღოთ ფეიგენბაუმის δ რიცხვი. არსებითია, რომ α -სა და δ -ს მნიშვნელობები იტერაციული ასახვის ფუნქციის მხოლოდ ზოგად მახასიათებლებზე, კერძოდ კი კრიტიკული წერტილის მიდამოში მის მათემატიკურ სახეზეა დამოკიდებული. ამრიგად, ჩვენ ვვარაუდობთ, რომ იტერაციული ასახვის ფუნქციების ფართო კლასისა და ფიზიკური სისტემებისთვის, რომელთა დინამიკაც ამგვარი ასახვის ფუნქციების მიერ კარგად არის მოდელირებული, α -სა და δ -ს იგივე მნიშვნელობებს მივიღებთ.

5.7 კარვის ასახვა

ამ პარაგრაფში სხვა ერთგანზომილებიანი ასახვის ფუნქციის იტერაციის პროცესს გავეცნობით. ამ ფუნქციას **კარვის ასახვა** ეწოდება, რადგან მისი ერთ-ერთი გრაფიკის ფორმა კარავს გვაგონებს. (ფორმის გამო, მას **სამკუთხედის ასახვასაც** უწოდებენ.) კარვის ასახვა, ასახვის ფუნქციების იმ კლასს წარმოადგენს, რომელსაც **უბან-უბან წრფივს** უწოდებენ. ტერმინოლოგია ნიშნავს, რომ ასახვის ფუნქციის გრაფიკი წრფის მონაკვეთებისგან შედგება. კარვის ასახვის ფუნქცია უწყვეტია, მაგრამ მას არ გააჩნია წარმოებული იმ წერტილში, სადაც სხვადასხვა დახრის კოეფიციენტის მქონე მონაკვეთები ერთიმეორეს უერთდებიან. წარმოებულს ერთი მნიშვნელობა აქვს შეერთების წერტილის მარცხნივ და სხვა მნიშვნელობაზე წყვეტით გადადის შეერთების წერტილიდან მარჯვნივ. მომავალში ვნახავთ, რომ ასახვის ფუნქციის წარმოებულში უწყვეტობის დეფიციტი აქამდე განხილული უნიმოდალური ასახვის გლუვი იტერაციული ქმედებისაგან საკმაოდ განსხვავებული იტერაციულ ქმედებას იძლევა.

კარვის ასახვის ფუნქცია განისაზღვრება შენდევნაირად:

$$x_{n+1} = f(x_n) = r \left(1 - 2 \left| x_n - \frac{1}{2} \right| \right) \quad (5.7-1)$$

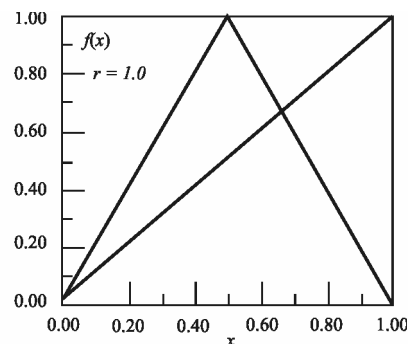
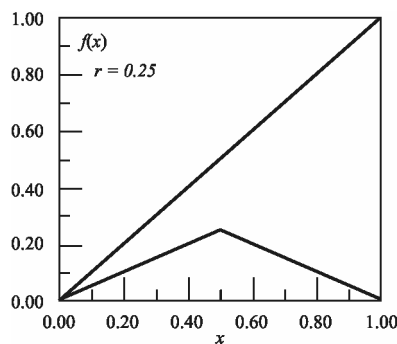
სადაც r მაკონტროლებელი პარამეტრია, x მნიშვნელობები კი $[0,1]$ ინტერვალში იყრიან თავს. 5.14 ნახაზი გვიჩვენებს კარვის ასახვის ფუნქციის გრაფიკს r -ის ორი განსხვავებული მნიშვნელობისთვის: როდესაც $r < 1/2$ და როდესაც $r > 1/2$. ფიქსირებული წერტილი

კოორდინატა სათავეში მდებარეობს. როდესაც ასახვის ფუნქციის კუთხური კოეფიციენტი ($r < 1/2$ -სთვის) ერთზე ნაკლებია, მაშინ ფიქსირებული წერტილი სტაბილურია, ანუ $[0,1]$ ინტერვალის ნებისმიერ წერტილში დაწყებული ტრაექტორია $x=0$ -საკენ მიისწრაფვის $r < 1/2$ შემთხვევაში.

ამოცანა 5.7-1. გამოიყენეთ გრაფიკული იტერაციის მეთოდი და დაადგინეთ, რომ 0-სა და 1-ს შორის დაწყებული ტრაექტორიები $x=0$ -საკენ მიისწრაფვის $r < 1/2$ შემთხვევაში. რა ხდება, როდესაც $x_0=1$? რა ხდება, როდესაც $x_0 \in [0,1]$ ინტერვალის მიღმა?

$r > 1/2$ -სთვის არსებობს ორი ფიქსირებული წერტილი – ერთი $x=0$ –ში; ხოლო მეორისათვის:

$$x = \frac{2r}{1+2r} \tag{5.7-2}$$



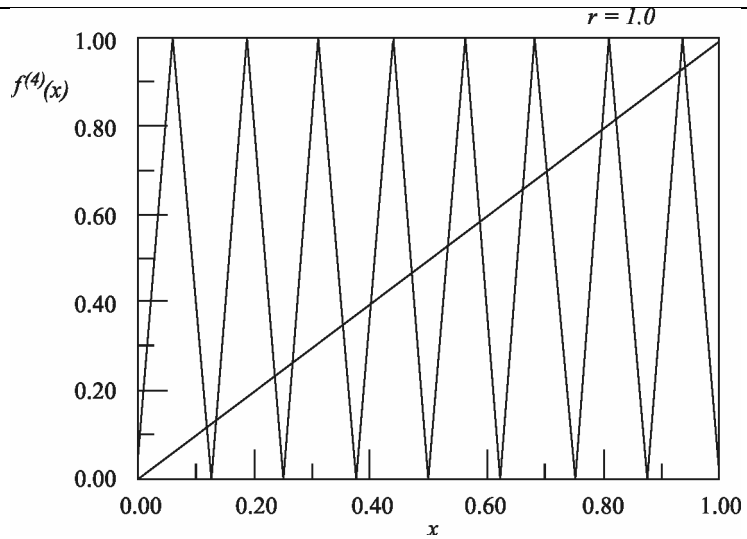
ნახაზი 5.10. კარვის ასახვა, როგორც x ცვლადის ფუნქცია. მარცხნივ მაკონტროლებელი პარამეტრი $r=1/4$, ხოლო მარჯვნივ – $r=1$.

5.10 ნახაზიდან კარგად ჩანს, რომ ასახვის ფუნქციის კუთხური კოეფიციენტი ორთავე ფიქსირებულ წერტილში 1-ზე მეტია. ამრიგად, ვასკვნით, რომ ორივე ფიქსირებული წერტილი არასტაბილურია. ტრაექტორიები განიზიდება ორივე ფიქსირებული წერტილისაგან.

ამოცანა 5.7-2. (a) აჩვენეთ, რომ კარვის ასახვისთვის (5.7-2) განტოლება მეორე ფიქსირებული წერტილის მდებარეობას გვაძლევს $r > 1/2$ შემთხვევაში. (b) აჩვენეთ, რომ კარვის ასახვის ფუნქციის კუთხური კოეფიციენტი $r > 1/2$ -სთვის 1-ზე მეტია (კარვის ასახვის ფუნქციის დახრის კუთხე ყველგან ერთი და იგივეა, გარდა $x=1/2$ წერტილისა, სადაც იგი არ არის განსაზღვრული). (c) რა მოსდის ტრაექტორიას, რომელიც $r=1$ შემთხვევაში $x=1/2$ წერტილს აღწევს? ელოდებით თუ არა ამგვარი ქმედებიდან გამომდინარე ტრაექტორიების გრაფიკულ წარმოდგენასთან ან გამოთვლებთან დაკავშირებულ სირთულეებს?

რა მოსდის ტრაექტორიებს, როდესაც $r > 1/2$? შეგიძლიათ დარწმუნდეთ, რომ გრაფიკული იტერაციის მეთოდის, თუ კომპიუტერული პროგრამის გამოყენებით, 0-სა და 1-ს შორის დაწყებული ტრაექტორიები $[0,1]$ ინტერვალში ($r \leq 1$ -სთვის) შემოსაზღვრული დარჩება. კიდევ უფრო მნიშვნელოვანია, რომ ახლომდებარე საწყისების მქონე ტრაექტორიები (ვთქვათ $x=1/2$ წერტილიდან მარცხნივ), ვიდრე „უკან გაბრუნდებოდნენ“, მარჯვენა მხარეს არსებული ასახვისას დივერგენციას განიცდიან. თავდაპირველად ახლომდებარე ტრაექტორიები განიცდიან ექსპონენციალურ დივერგენციას, რომელიც იტერაციის რიგის ფუნქციას წარმოადგენს. ასეთი ტრაექტორიები კი ქაოსურია. კარვის ასახვის კუთხური კოეფიციენტის მუდმივობის გამო დივერგენციის მაჩვენებლის პოვნა მარტივია (ამოცანა 5.7-3). აუცილებლად უნდა აღინიშნოს, რომ კარვის ასახვის შემთხვევაში იტერაციული ქმედება სტაბილური ფიქსირებული წერტილის ქმედებიდან ($r < 1/2$) პირდაპირ ქაოსურ ქმედებაში ($r > 1/2$) გადადის. იტერაციები ქაოსში პერიოდის გაორმაგების მიმდევრობას არ გაივლიან.

ამოცანა 5.7-3. გამოიყენეთ (5.4-12) და კარვის ასახვისთვის ლიაპუნოვის საშუალო ექსპონენტა გამოთვალეთ. აჩვენეთ, რომ იგი დადებითია $r > 1/2$ -სთვის. მინიშნება: კარვის ასახვის ფუნქციის კუთხური კოეფიციენტის აბსოლუტური მნიშვნელობა ტრაექტორიის ყოველ წერტილში ერთი და იგივეა.



ნახ. 5.11. კარვის ასახვის ფუნქციის მეოთხე რიგის იტერაცია, როდესაც $r=1.0$. ნახაზზე ასევე დატანილია $y=x$ წრფე.

უკვე ნაწილობრივ გვესმის, თუ რატომ არის უგულვებელყოფილი ზოგიერთი მაღალი რიგის იტერაცია (მაგალითად, $f^{(4)}(x)$, როგორც ეს ნაჩვენებია 5.11 ნახაზზე) კარვის ასახვის ფუნქციის გრაფიკზე. როგორც ვხედავთ, $f^{(n)}(x)$ -ის კუთხური კოეფიციენტი უფრო მეტია, ვიდრე $f'(x)$ -ისა (გარდა პიკებსა და მინიმუმებში მდებარე წერტილებისა, სადაც კუთხური კოეფიციენტი არ არის განსაზღვრული). f ფუნქციის n -ური რიგის იტერაციის კუთხური კოეფიციენტი n რიგის ხარისხი, f -ის დახრის კუთხის სიდიდის ტოლია.

$$\left| \frac{df^{(n)}(x)}{dx} \right| = \left| \frac{df(x)}{dx} \right|^n \quad (5.7-3)$$

მიღებული შედეგის დემონსტრირება მარტივია: დააკვირდით კარვის ასახვის საწყისი ფუნქციის პირველ სეგმენტს, ანუ სეგმენტს 0-დან 1/2-მდე. n -ური რიგის იტერაციისათვის პირველი სეგმენტი იწყება $x=0$ წერტილიდან და გრძელდება $x=(1/2)^n$ -მდე, აღწევს იმავე ორდინატას, სამაგიეროდ ჰორიზონტალური მანძილი უფრო მცირეა. ამრიგად, მისმა კუთხურმა კოეფიციენტმა უნდა დააკმაყოფილოს (5.7-3).

წინამდებარე ანალიზიდან გამომდინარე ვასკვნით, რომ $f'(x)$ -ის ფიქსირებული წერტილების არასტაბილურობის შემთხვევაში კარვის ასახვის ფუნქციის მაღალი რიგის იტერაციების ყოველი ფიქსირებული წერტილი არასტაბილურია. განსხვავების დასაწახად უნდა გავიხსენოთ პერიოდის გაორმაგებების ქმედება ლოჯისტიკური ასახვის შემთხვაში: $f^2(x)$ -ის ზოგიერთი ფიქსირებული წერტილი სტაბილურია, მაშინ როცა $f(x)$ -ის ფიქსირებული წერტილები არასტაბილური ხდება. ამრიგად ვხედავთ, რომ ასახვის ფუნქციის სიგლუვე (უწყვეტი დიფერენცირებადობა) გადამწყვეტი ფაქტორია ქაოსის დაწყების მომასწავებელი პერიოდის გაორმაგების მიმდევრობის არსებობისათვის. თუ რომელიმე სისტემის დინამიკის მოდელირებისთვის უბან-უბან წრფივ ასახვის ფუნქციას ვიყენებთ, მაშინ ამ სისტემის მიმართ პერიოდის გაორმაგებების მიმდევრობას არ უნდა ველოდოთ.

სავარჯიშო 5.7-4. რა მოსდის კარვის ასახვის იტერაციებს $r > 1$ შემთხვევაში?

5.8 წანაცვლების ასახვები და სიმბოლური დინამიკა

ამგვარად წარმოგედგენთ ზოგიერთ უბან-უბან წრფივ ასახვის ფუნქციას, რომლისთვისაც ადგილი აქვს წყვეტას ანუ, ფუნქცია ერთი მნიშვნელობიდან მეორეზე ნახტომისებურად „გადადის“. როგორც ქვემოთ ვნახავთ, ამგვარი ასახვის ფუნქციათა ზოგიერთი კლასი ქაოსური ქმედების დახასიათების ძალიან ძლიერი, მაგრამ აბსტრაქტული გზაა.

ჩვენ მსჯელობას 5.12 ნახაზზე ნაჩვენები ასახვის ფუნქციის გრაფიკით ვიწყებთ (ეს მაგალითი [Stewart, 1989]-დან უკვე შესწავლილი გვაქვს.) მას ჩვენ **ათწილადური წანაცვლების ასახვას** ვუწოდებთ. ასახვის ფუნქციისთვის შემდეგი ტიპის გამოსახულება შეგვიძლია დავწეროთ:

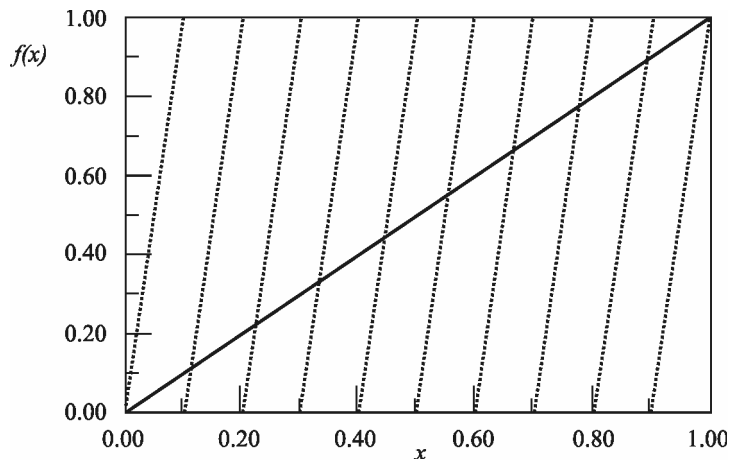
$$x_{n+1} = 10x_n \quad \text{mod}[1] \quad (5.8-1)$$

იტერციული პროცედურა შემდეგნაირია: ვიწყებთ 0-სა და 1-ს შორის რიცხვით, ამ რიცხვს ვამრავლებთ 10-ზე და ათწილადის წერტილის მარცხნივ მდებარე ციფრს გადავადებთ (ამგვარი „დაყვანა“ იგივეა, რაც იგულისხმება „Mod [1]-ში.“) მაგალითად, თუ ვიწყებთ $x_0=0.89763428$ რიცხვით, მაშინ 10-ზე გამრავლების შედეგად 8.97634280-ს მივიღებთ, შემდეგ ათწილადის წერტილის მარცხნიდან გადავადებთ 8-ს და დავალოთ $x_1=0.97634280$ რიცხვზე. მომდევნო პროცედურას მოჰყვება რიცხვი $x_2=0.76342800$. როგორც ვხედავთ, პროცედურა თითოეულ იტერაციასზე ათწილადის ციფრებს ერთით მარცხნივ გადაადგილებს და ათწილადის წერტილიდან მარცხნივ მდგომ ციფრს „ანადგურებს“ (ჩვენ წანაცვლების შედეგად განთავისუფლებულ ადგილებზე ნულები ჩავსვით; ანუ დავუშვით, რომ საწყისი რიცხვი სინამდვილეში 0.897634280000000... იყო.)

რა მოსდის x_0 -ის სხვადასხვა მნიშვნელობებზე დაწყებულ ტრაექტორიებს? წინა პარაგრაფში მოყვანილი მაგალითის მიხედვით ცხადია, რომ n ციფრით წარმოდგენილი x_0 n იტერაციის შემდეგ $x=0$ წერტილში დასრულებულ ტრაექტორიას იწვევს. შეგვიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ $x=0$ სისტემისთვის მიზიდულობის წერტილია? ამ შეკითხვაზე პასუხი $x_0=1/7=0.142857142857142...$ -ში დაწყებულ ტრაექტორიაზე დაკვირვების შემდეგ გავცეთ. ცხადია, რადგან $1/7$ -ის ათწილადურ გამოსახულებაში ერთი და იგივე შვიდი ციფრი მეორდება, ტრაექტორია გაშუდმებულ ციკლს ჩაატარებს x -ის შვიდ მნიშვნელობას შორის. ფაქტობრივად ნებისმიერი რაციონალური რიცხვი ანუ ორი მთელი რიცხვის ფარდობა (ვთქვათ m და n), ერთი და იმავე ციფრების განმეორებით შეიძლება დაბოლოვდეს

(შეიძლება ნულითაც, მაგალითად, $3/8$ -სა და $1/10$ -ის შემთხვევაში) და ათწილადი გამოიწვიოს. ამრიგად, ვასკვნით, რომ ნებისმიერი საწყისი x_0 , რომელიც რაციონალური რიცხვია, ათწილადური წანაცვლების ასახვის შედეგად გვაძლევს პერიოდულ ტრაექტორიებს ($x=0$ წერტილისაკენ კრებადობა პერიოდული ტრაექტორიის განსაკუთრებული შემთხვევაა).

რა მოსდით x -ის ირაციონალურ რიცხვით მნიშვნელობებზე დაწყებულ ტრაექტორიებს? მაგალითად, რა ხდება, როდესაც $x_0=\pi/10$? როდესაც π ირაციონალური რიცხვია, იგი შედეგა იმ ციფრების მიმდევრობისგან, რომლებიც არასოდეს მეორდებიან. ამრიგად x_0 -ზე საწყისის მქონე ტრაექტორია არასოდეს განმეორდება. როგორც მომავალში ვიხილავთ, 0 -სა და 1 -ს შორის ინტერვალში იგი არაპროგნოზირებადი სახით გადაადგილდება.



ნახ. 5.12. წყვეტილი წრფე ათწილადი წანაცვლების ასახვის ფუნქციის მრუდია. ფუნქცია წყვეტილია $x=0.1, 0.2$ და ა.შ. წერტილებში.

რა მოსდით ახლომდებარე ტრაექტორიებს? დაუშვათ, ერთ ტრაექტორიას $x_0=\pi/10$, ხოლო მეორეს – $x_0=22/70$ წერტილებში ვიწყებთ. რაციონალური რიცხვი ახლოსაა $\pi/10$ ირაციონალურ რიცხვთან. ადრე მოყვანილი არგუმენტების მიხედვით ვიცით, რომ მეორე ტრაექტორია საბოლოოდ პერიოდულ ციკლზე აღმოჩნდება, ხოლო პირველი მთელი ინტერვალის ფარგლებში არაკანონზომიერად და მოუწესრიგებლად იმოძრაავს. ამრიგად ვასკვნით, რომ ეს სისტემა საწყისი პირობების მიმართ მგრძობიარე დამოკიდებულებას ამჟღავნებს. ახლომდებარე საწყისი წერტილები ხანგრძლივი, სრულიად განსხვავებული ტიპის ქმედების საწყისი შეიძლება იყოს.

ქაოსურია თუ არა ეს ტრაექტორიები? ეს ძალზე დელიკატური შეკითხვაა, რადგან x -ის რაციონალურ მნიშვნელობებზე დაწყებული ტრაექტორიები პერიოდულია, ხოლო

ირაციონალური მნიშვნელობის შემთხვევაში კი ტრაექტორიები მთელ ინტერვალში მოუწესრიგებლად და გაურკვეველად გადაადგილდება, თანაც არასოდეს მეორდება. ამავე დროს ჩვენ 5.5 პარაგრაფში ქაოსის განსაზღვრება გვაქვს მიღებული, ანუ ლიაპუნოვის საშუალო ექსპონენტა დადებითი უნდა იყოს. ამრიგად ვხედავთ, რომ ათწილადი წანაცვლების ასახვას ქაოსური ტრაექტორიები გააჩნია, რადგან ასახვის ფუნქციის კუთხური კოეფიციენტი ყოველთვის 1-ზე მეტია. გამონაკლისია წყვეტის ის დისკრეტული წერტილები, რომლებშიც წარმოებული არ არის განსაზღვრული.

კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი შეკითხვა: x_0 საწყისი მნიშვნელობების უმრავლესობა პერიოდულ ტრაექტორიებს შეესაბამება თუ არაპერიოდულს? x_0 საწყისი მნიშვნელობების უმრავლესობა აპერიოდული ტრაექტორიებს აძლევს დასაბამს. რას ვგულისხმობთ „უმრავლესობაში“? ამ საკითხის გასაგებად მათემატიკაში რიცხვების თეორიიდან მიღებულ ზოგიერთ შედეგს უნდა დავეყრდნობ (დაინტერესებული მკითხველი უნდა გაეცნოს [Wright and Hardy, 1980] და [Zuckerman, Montgomery, Niven, and Niven, 1991]). შენიშნეთ, რომ 0-სა და 1-ს შორის, x -ის რაციონალური მნიშვნელობების უსასრულო რაოდენობაა. ამრიგად, ერთი შეხედვით ირაციონალური რიცხვებისთვის თავისუფალი „სივრცე“ საერთოდ აღარ რჩება. მიუხედავად ამისა, შეგვიძლია ინტერვალში რაციონალური რიცხვების მიერ დაკავებული ადგილი „გავზომოთ“, კერძოდ რაციონალურ რიცხვებსა და დადებით მთელ რიცხვებს შორის ურთიერთცალსახა შესაბამისობა დავამყაროთ.

ამრიგად ჩვენ ვამბობთ რომ რაციონალური რიცხვები **თვლადი უსასრულობაა**, რადგან მათი დათვლა ამ ურთიერთცალსახა შესაბამისობით შესაძლებელია. საბოლოოდ უნდა ვიცოდეთ, რომ წერტილების თვლადი სიმრავლის მიერ დაკავებული ინტერვალის სიგრძე ნულის ტოლია. ამრიგად, თუ 0-სა და 1-შორის რიცხვებს „ალალებზე“ ავირჩევთ, აუცილებლად შეგვხვდება აპერიოდული ტრაექტორიის გამომწვევი ირაციონალური რიცხვები.

ათწილადური წანაცვლების ასახვა ტრაექტორიების რიცხვითი გამოთვლის შესახებ რამდენიმე მნიშვნელოვან კითხვას ბადებს. ნებისმიერ კომპიუტერში რიცხვი გამოსახულია ათწილადი თანრიგების სასრული რაოდენობით (რეალურად, კომპიუტერების უმრავლესობა ორობით წარმოდგენას იყენებს „ბიტების“ განსაზღვრული რაოდენობით, მაგრამ აზრი იგივეა). პროგრამირების ენა BASIC-ში რიცხვების უმეტესობა გამოსახულია ათწილადის შვიდი ან რვა თანრიგის სიზუსტით. BASIC-ის სხვა ვერსიებს და ისეთ კომპიუტერულ ენებს, როგორცაა FORTRAN, PASCAL ან C „ორმაგი სიზუსტით“ წარმოდგენა შეუძლიათ, რომელიც ათწილადის 15 ან 16 თანრიგს იყენებს. მთავარი კი ის არის, რომ განურჩევლად იმისა, თუ რომელ სიზუსტეს იყენებთ, ნებისმიერ რიცხვს (ირაციონალურსა თუ რაციონალურს) ციფრების სასრული მიმდევრობით გამოსახავთ. ამრიგად, როდესაც

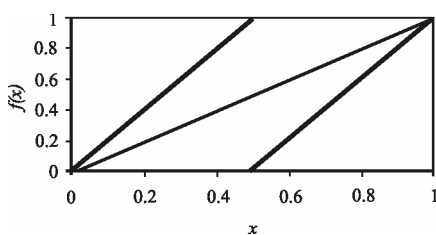
კომპიუტერზე რიცხვის მიმართ ათწილადური წანაცვლების ასახვას იყენებთ, მაგალითად BASIC-ში 7 ან 8 წანაცვლების შემდეგ თავიდან არსებული ყველა რიცხვი გაქრება. რა ხდება იმ დროს, როდესაც ყოველივე კომპიუტერულ ენაზეა დამოკიდებული? ენათა უმრავლესობა (მაგრამ არა ყველა) ნულებით ივსება და ყველა ტრაექტორია, მათ შორის ირაციონალური რიცხვებით საწყისის მქონე, $x=0$ წერტილში დასრულდება.

ახლა ორობით სქემაზე აგებულ წანაცვლების ასახვას წარმოვიდგინოთ.

$$x_{n+1} = 2x_n \quad \text{mod}[1] \quad (5.8-2)$$

ასახვის ასეთ ფუნქციას **ბერნულის გადაადგილების ასახვა** ეწოდება (შვეიცარიელი მათემატიკოსების – იაკობ და იოჰან ბერნულების მიხედვით, რომლებიც მე-17 საუკუნის ბოლოს მოღვაწეობდნენ). ბერნულის წანაცვლების ასახვის ფუნქციის გრაფიკი 5.13 ნახაზზეა ნაჩვენები.

ბერნულის წანაცვლების ასახვის მიხედვით საწყისი რიცხვი 2-ზე უნდა გავამრავლოთ და შემდეგ გადავადგოთ ათწილადი წერტილიდან მარცხნივ მდებარე ციფრები. თუ x_0 -ის ათწილადურ წარმოდგენას ვიყენებთ, მაშინ წანაცვლების პროცესის მიმდინარეობა გარკვევით არ ჩანს. თუ x -ის ორობით რიცხვით გამოსახულებას ვიყენებთ, სადაც შესაძლო სიმბოლოები 0 და 1-ია და „ორობითი წერტილის“ მარჯვნივ მდებარე მნიშვნელობებია $1/2$, $1/2^2$, $1/2^3$, და ა.შ., მაშინ საწყისი მნიშვნელობის 2-ზე გამრავლება მიმდევრობის 1-ისა და 0-ის ერთით მარცხნივ გადაადგილების ექვივალენტურია, ხოლო Mod[1] კი ბინარული წერტილის მარცხნივ ყველაფრის გაბათილების ექვივალენტურია.



ნახ. 5.13. ბერნულის წანაცვლების ასახვის გრაფიკი.

მაგალითად, თუ $x_0=0.111000$ რიცხვით (იგი ექვივალენტურია ათწილადის $0.875000=7/8$) დავიწყებთ, მაშინ 2-ზე გამრავლება გვაძლევს 1.110000-ს, ხოლო მისი მოდული [1] კი 0.110000-ს მოგვცემს. მთლიანი პროცესი 1-ისა და 0-ის ერთი თანრიგით მარცხნივ გადაადგილების ექვივალენტურია.

x_0 -ის რა მნიშვნელობისათვის წარმოიქმნება ასეთი ტიპის ტრაექტორიები? შეკითხვაზე პასუხის გასაცემად ზუსტად ისევე უნდა ვიმსჯელოთ, როგორც ამას ათწილადური წანაცვლების ასახვის შემთხვევაში ვაკეთებდით: ნებისმიერი რაციონალური რიცხვი 1-ისა და

0-ის განმეორებითი მიმდევრობითაა გამოსახული და ამგვარად პერიოდულ ტრაექტორიას იწვევს. ამავე დროს, ნებისმიერი ირაციონალური რიცხვი 1-ისა და 0-ის არაგანმეორებითი მიმდევრობითაა გამოსახული და ამგვარად აპერიოდულ ტრაექტორიასთან გვექნება საქმე. როდესაც რაციონალური რიცხვი ირაციონალურთან ახლოსაა (და პირიქით), ასახვა საწყისი პირობებისადმი მგრძობიარეა. კვლავ პერიოდული და აპერიოდული ტრაექტორიების გამომწვევი საწყისი წერტილების უსასრულო რაოდენობა გვაქვს. თუ x_0 -ს მაინც ალაღბებზე ვირჩევთ, მაშინ მეტი შანსი გვაქვს მივიღოთ აპერიოდული ტრაექტორია.

ამოცანა 5.8-1. აჩვენეთ, რომ ბერნულის წანაცვლების ასახვისთვის ლიაპუნოვის ექსპონენტი 2-ის ტოლია.

ბერნულის წანაცვლების ასახვა მჭიდრო კავშირშია შემთხვევით პროცესებთან. ვთქვათ, მონეტას ვაგდებთ მრავალჯერ და დაცემის შემდეგ მონეტის წინა და უკანა მხარეთა მიმდევრობას H T T H H H T H T H T T H H (Head (წინა) Tail (უკანა)) სიმბოლოებით აღვნიშნავთ. შემდეგ H-ს 1-ით, ხოლო T-ს კი 0-ით ვცვლით. ეს პროცესი 1-ისა და 0-ის ისეთ მიმდევრობას იწვევს, რომელიც ირაციონალური რიცხვის ორობითი გამოსახულებიდან (ვთქვათ $\sqrt{2}-1$) მიღებული 1-ისა და 0-ის მიმდევრობის ანალოგიურია. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, თუ 1-ისა და 0-ის „შემთხვევით“ მიმდევრობას შემოვთავაზებთ, მაშინ თქვენ ვერ გვიპასუხებთ, გამომდინარეობს იგი მონეტის დაგდების პროცესიდან თუ ბერნულის წანაცვლების ასახვიდან. ირაციონალურ რიცხვთან დაკავშირებით გამოყენებული ბერნულის ასახვით წარმოქმნილი 1-ისა და 0-ის მიმდევრობა ისეთივე შემთხვევითი პროცესია, როგორც მონეტის აგდება.

ბერნულის წანაცვლების ასახვა **სიმბოლური დინამიკის** მაგალითია, რასაც ჩვენი ყურადღება სიმბოლოების სასრული რაოდენობის მიმდევრობაზე გადააქვს. ცხადია, ფიზიკურ სამყაროსთან პირდაპირი კავშირისგან შორს ვართ, მაგრამ სიმბოლური დინამიკა ქაოსურობისა თუ პერიოდულობის შესახებ გარკვეული აზრის ჩამოყალიბების საშუალებას გვაძლევს. ერთგანზომილებიანი ასახვებისთვის, U -მიმდევრობის დახასიათებისთვის გამოყენებული მიმდევრობათა $RLRR$ ტიპი სიმბოლური დინამიკის კიდევ ერთი მაგალითია. როგორც ვნახეთ, სიმბოლური მიმდევრობის ბუნება რაციონალური და ირაციონალური რიცხვების გამოსახვისთვის გამოყენებული სიმბოლოების მიმდევრობის საფუძველზე შეიძლება გავაანალიზოთ. ამრიგად, მიმდევრობათა სახეობების დახასიათებისთვის შეგვიძლია რიცხვთა თეორიის შედეგები დავიხმაროთ. სიმბოლური დინამიკისა და ქაოსის თეორიაში მისი

გამოყენების შესახებ მეტი ინფორმაციის მისაღებად მკითხველი უნდა გაეცნოს [Devaney, 1986]

ლოჯისტიკური ასახვის განსაკუთრებული შემთხვევა

ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციისათვის მეტად სპეციფიკურ შემთხვევას აქვს ადგილი, როდესაც $A=4$: ცვლადების სათანადო ცვლილების შედეგად ირკვევა, რომ A -ს მოცემული მნიშვნელობისთვის ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქცია ბერნულის წანაცვლების ასახვის ექვივალენტურია! კავშირის სიცხადისთვის შემოგვაქვს ახალი θ ცვლადი, რომელიც ლოჯისტიკური ასახვის ცვლადთან შემდეგ დამოკიდებულებაშია

$$x = \frac{1 - \cos(\pi\theta)}{2} \tag{5.8-3}$$

სადაც θ ცვლადი 0-სა და 1-ს შორის იმყოფება. თუ (5.8-3) გამოსახულებას $A=4$ შემთხვევაში ლოჯისტიკური ასახვის (5.3-2) განტოლებაში გამოვიყენებთ, მაშინ სათანადო ალგებრული ოპერაციების ჩატარების შედეგად მივიღებთ:

$$\cos(\pi\theta_{n+1}) = \cos(2\pi\theta_n) \tag{5.8-4}$$

ეს დამოკიდებულება ძალაშია, თუ

$$\theta_{n+1} = 2\theta_n \pmod{1} \tag{5.8-5}$$

მიღებული შედეგი ბერნულის წანაცვლების ასახვის ფუნქციაა. ამრიგად ვასკვნით, რომ $A=4$ მნიშვნელობისათვის ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქცია ბერნულის წანაცვლების ასახვის ფუნქციის ექვივალენტურია.

(5.8-5) განტოლებიდან მიღებული θ -მიმდევრობიდან და (5.8-3) ჩასმის გამოყენებით შეგვიძლია ლოჯისტიკური ასახვის შესაბამისი x მიმდევრობის დადგენა. ასევე მიიღება, რომ $A=4$ შემთხვევაში ლოჯისტიკური ასახვის ლიაპუნოვის ექსპონენტა ბერნულის წანაცვლების ასახვის ლიაპუნოვის ექსპონენტას ზუსტად $\ln 2$ -თვის გაუტოლდება. ამასთან, ბერნულის ასახვით მიღებული მნიშვნელობების მიმდევრობების შემთხვევითი ხასიათის შესახებ ზემოთ მოყვანილი მსჯელობა უშუალოდ ლოჯისტიკური ასახვით მიღებული x მნიშვნელობების

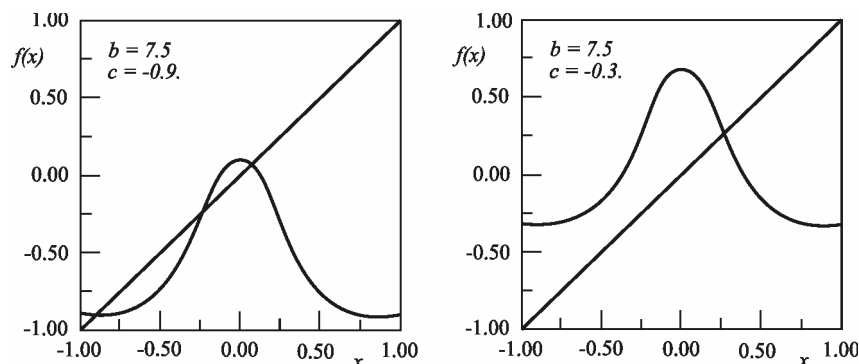
მიმდევრობებთან დაკავშირებით. ფაქტიურად, ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციის იტერაცია კომპიუტერებისთვის შემთხვევითი რიცხვის გენერაციისათვის შეგვიძლია გამოვიყენოთ [CFH92].

5.9 გაუსის ასახვა

იწვევს თუ არა ერთი მაქსიმუმის მქონე ნებისმიერი ერთგანზომილებიანი გლუვი ასახვის ფუნქცია პერიოდის გაორმაგებას, ქაოსს, ქაოსურ არეებსა თუ პერიოდულ დიაპაზონებს? ამ შემთხვევის პასუხია არა. მოცემულ პარაგრაფში შევისწავლით შედარებით მარტივ ასახვის ფუნქციას, რომლის იტერაციათა მახასიათებლები პარამეტრის მნიშვნელობების გარკვეულ დიაპაზონში ლოჯისტიკური თუ სინუსოიდური ასახვის იტერაციებისგან მკვეთრად განსხვავდება. აგრეთვე ვნახავთ, რომ ამგვარ განსხვავებებს მარტივი გეომეტრიული მიზეზები აქვს.

რადგანაც მოცემულ ასახვას საფუძვლად გაუსის ფუნქციად წოდებული ექსპონენციალური ფუნქცია უდევს, ჩვენს მიერ განხილულ ფუნქციას „გაუსის ასახვას“ ვუწოდებთ. მოცემულ ფუნქციას ორი მაკონტროლებელი პარამეტრი გააჩნია, რომლებსაც b -ით და c -ით აღვნიშნავთ:

$$x_{n+1} = e^{-bx_n^2} + c \tag{5.9-1}$$



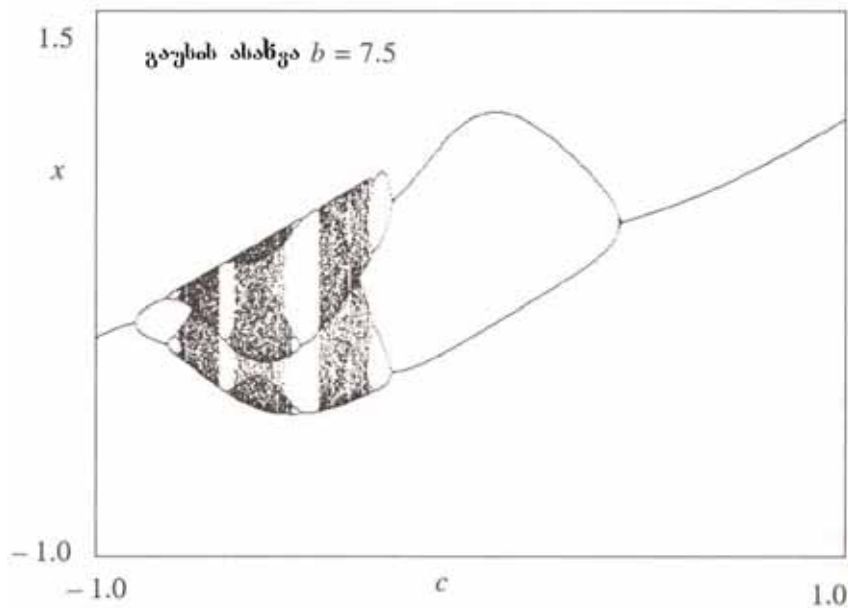
ნახ. 5.14. მარცხნივ გამოსახულია გაუსის ასახვის ფუნქცია, როდესაც $b=7.5$ და $c=-0.9$. შენიშნეთ, რომ არსებობს სამი ფიქსირებული წერტილი. მარჯვნივ გამოსახულია $b=7.5$ და $c=-0.3$ შემთხვევა. ამ შემთხვევაში მხოლოდ ერთი ფიქსირებული წერტილი არსებობს.

ფეიგენბაუმის მასშტაბის სკალაზე დაყრდნობით, ასახვის ფუნქციების მაქსიმალურ მნიშვნელობებთან დაახლოვებისას, მოცემული ასახვის ფუნქციის თვისებები ლოგიკური ასახვის ფუნქციისას უნდა წააგავდეს (ორივე მათგანი კვადრატულია). მიუხედავად ამისა, როგორც შემდგომში დავრწმუნდებით, ასახვის ფუნქციის გლობალური სტრუქტურაც მეტად მნიშვნელოვანია. ორი მაკონტროლებელი პარამეტრის არსებობის პირობებში, მოცემული ასახვის ფუნქციის იტერაციათა ქმედება ლოჯისტიკური ასახვის შემთხვევასთან შედარებით ბევრად რთულია.

უპირველეს ყოვლისა, განვიხილოთ მოცემული ფუნქციის თვისებები. 5.14 ნახაზი გვიჩვენებს გაუსის ასახვის ფუნქციას $b=7.5$ და c -ს განსხვავებული მნიშვნელობების შემთხვევაში. b პარამეტრი გაუსის ფუნქციის გრაფიკის მიერ დაკავებულ „ფართობს“ აკონტროლებს და მაქსიმალური მნიშვნელობა $c+1$ გააჩნია $x=0$ შემთხვევაში. $|x|$ -ის ყოველი დიდი მნიშვნელობისთვის ფუნქციის მნიშვნელობა დაახლოებით c - მდე ეცემა. როდესაც $x=1/\sqrt{b}$, ფუნქციის სიდიდე e -ჯერ ეცემა თავის მაქსიმალურ მნიშვნელობასთან შედარებით. ამრიგად, ფუნქციის მრუდის „სიგანის“ უხეშად შეფასება შეიძლება $2/\sqrt{b}$ სიდიდის მეშვეობით. უნდა აღინიშნოს, რომ გაუსის ფუნქციას ორი **გალუნვის წერტილი** გააჩნია და ამ წერტილებში ასახვის ფუნქციის კუთხური კოეფიციენტს მაქსიმალური დადებითი და უარყოფითი მნიშვნელობები გააჩნია. x -ის დიდი მნიშვნელობებისათვის კუთხური კოეფიციენტი მცირეა. როდესაც x 0-ს უახლოვდება (არა აქვს მნიშვნელობა მარცხნიდან, თუ მარჯვნიდან), კუთხური კოეფიციენტი მატულობს, გალუნვის წერტილებში მაქსიმუმს აღწევს და x -ის ნულთან შემდგომი მიახლოებისას კლებულობს.

ამოცანა 5.9-1. აჩვენეთ, რომ გაუსის ასახვისათვის გალუნვის წერტილებია $x= \pm 1/\sqrt{2b}$. მინიშნება: გალუნვის წერტილში ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული ნულის ტოლია. განსაზღვრეთ ასახვის ფუნქციის კუთხური კოეფიციენტი გალუნვის წერტილში b პარამეტრზე დაყრდნობით.

გაუსის ასახვის ზოგიერთი იტერაციული თავისებურების საილუსტრაციოდ მოყვანილის რამდენიმე ბიფურკაციული დიაგრამა, სადაც არგუმენტის სახით c პარამეტრია გამოყენებული. მოგვიანებით ვნახავთ, თუ რა მოსდის ბიფურკაციულ დიაგრამებს b პარამეტრის სხვადასხვა მნიშვნელობების შემთხვევაში. თავდაპირველად პარამეტრის მნიშვნელობათა ისეთი სიმრავლით დავიწყებთ, რომელთა შემთხვევაშიც ბიფურკაციული დიაგრამა თავისი ფორმით ლოგიკური ასახვის ფუნქციის დიაგრამას მოგვაგონებს.

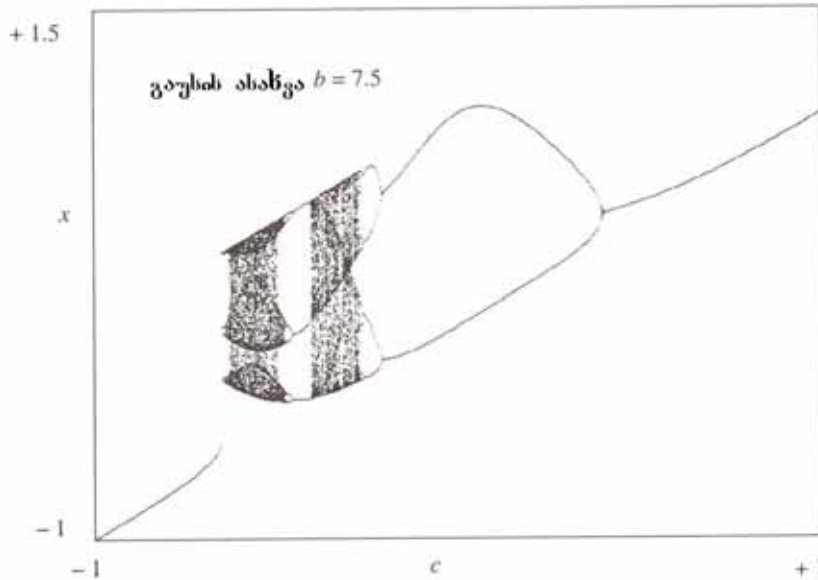


ნახ. 5.15. ბიფურკაციული დიაგრამა გაუსის ასახვისთვის, როდესაც $b=7.5$ და $x_0=0$.

5.15 ნახაზზე გამოსახულია b -ს ასეთი მნიშვნელობის შესაბამისი ბიფურკაციული დიაგრამა. თუ ამ დიაგრამას 1.14 ნახაზზე მოყვანილი ლოჯისტიკური ასახვის დიაგრამას შეადარებთ, ნახავთ, რომ ლოჯისტიკური ასახვის მსგავსად, მარცხენა მხარეს დაწყებული გაუსის ასახვის დიაგრამა ქაოსის, ქაოსური არეებისა და პერიოდული დიაპაზონების (პერიოდი -3 აშკარად გამორჩეულია) გამომწვევ პერიოდის გაორმაგებების მიმდევრობას გვიჩვენებს. c -ს შედარებით დიდი მნიშვნელობებისათვის დიაგრამები საკმაოდ განსხვავებულად გამოიყურება. ლოჯისტიკური ასახვისათვის დიაგრამა $A=4$ წერტილში წყვეტას განიცდის. (გაიხსენეთ, რომ $A>4$ -სთვის ლოჯისტიკური ასახვის შესაბამის ტრაექტორიათა უმრავლესობა $x \rightarrow \infty$ ტენდენციას გვიჩვენებს). გაუსის ასახვის შემთხვევაში დიაგრამა ქაოსური არეების შეერთებების ადგილებისა და პერიოდის გაორმაგებების გავლით მიემართება და საბოლოოდ კვლავ პერიოდი-1 ტიპის ქმედებით სრულდება.

ასახვის ფუნქციის ფიქსირებული წერტილების ძებნაზე დაკვირვებით შეგვიძლია გავარკვიოთ, თუ რატომ უბრუნდება დიაგრამა კვლავ პერიოდ-1-ს. 5.14 განტოლების მიხედვით ცხადია, რომ c -ს ექსტრემალური მნიშვნელობებისთვის ფიქსირებული წერტილები გაუსის ფუნქციის „ფრთებზე“ (სადაც დახრის კუთხე ძალზე მცირეა) ჩნდება. ეს ნიშნავს, რომ ფიქსირებული წერტილები სტაბილურია და პერიოდი-1 ტიპის ქმედებას შეესაბამება. ამის საპირისპიროდ, A პარამეტრის ზრდასთან ერთად ფიქსირებულ წერტილში ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციის დახრილობის მაგნიტუდა კვლავ განაგრძობს ზრდას,

ამიტომ პერიოდი-1 ტიპის ქმედება პარამეტრის მნიშვნელობების მხოლოდ გარკვეული დიაპაზონის შემთხვევაში ვლინდება. ამრიგად, გაუსის ასახვის ფუნქციისთვის გალუნვის წერტილის არსებობა მნიშვნელოვანია იმ თვალსაზრისითაც, რომ იგი ხელს უწყობს მაკონტროლებელი პარამეტრის მნიშვნელობების ორი დიაპაზონის შემთხვევაში პერიოდი-1 ტიპის ქმედების აღძვრას.



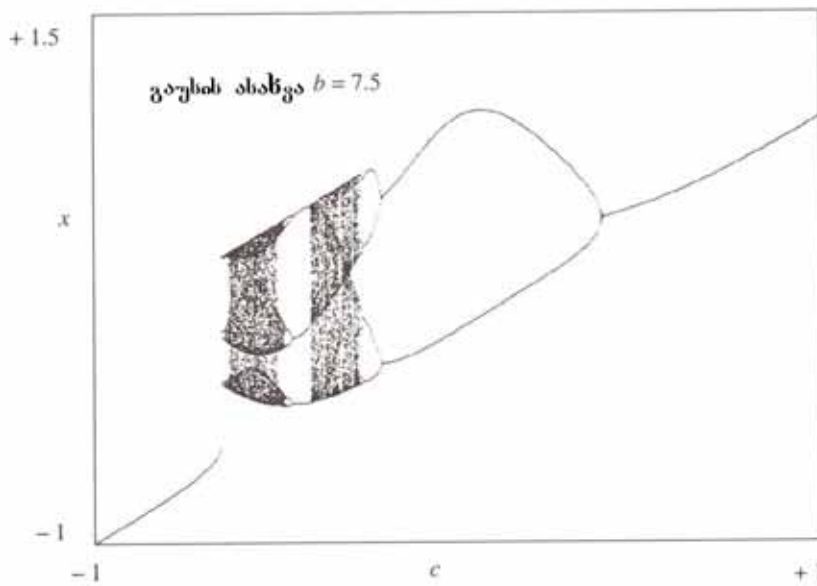
ნახ. 5.16. ბიფურკაციული დიაგრამა გაუსის ასახვისთვის, როდესაც $b=4$. იტერაციის საწყისი მნიშვნელობაა $x_0=0$.

ამჯერად შევისწავლოთ ბიფურკაციული დიაგრამა b -ს უფრო მცირე მნიშვნელობისთვის (კონკრეტულად, $b=4$). გავიხსენოთ, რომ b -ს შედარებით მცირე მნიშვნელობები ნიშნავს, რომ გაუსის ფუნქციის გრაფიკი შედარებით ფართოა. ამიტომ კუთხური კოეფიციენტის მაქსიმალური მნიშვნელობა შედარებით მცირეა. საბოლოო ბიფურკაციულ დიაგრამა 5.16 ნახაზზეა მოყვანილი. სახეზეა პერიოდის გაორმაგების ბიფურკაცია ჯერ პერიოდი-1-დან პერიოდი-2-ში, შემდეგ კი პერიოდი-2-დან პერიოდი-4-ში. ქაოსში გადასვლის ნაცვლად სისტემა კვლავ პერიოდი-2-ს, ხოლო შემდეგ კი პერიოდი-1-ს უბრუნდება. ამ მოვლენას „ბუშტიანობის პერიოდი“ შეგვიძლია ვუწოდოთ (BIB84).

სავარჯიშო 5.9-2. აღწერეთ, თუ რა მოსდის გაუსის ასახვის ფუნქციის ფიქსირებულ წერტილსა და კუთხურ კოეფიციენტს ფიქსირებულ წერტილში c -ს მნიშვნელობათა 5.16 ნახაზზე მოყვანილი დიაპაზონის შემთხვევაში.

გაუსის ასახვას გაცილებით მეტი სიურპრიზის შემოთავაზება შეუძლია. 5.17 ნახაზზე მოყვანილია ბიფურკაციული დიაგრამა, როდესაც $b=7.5$. პარამეტრის იგივე მნიშვნელობა 5.15 ნახაზზეც გამოიყენება, მაგრამ დიაგრამები განსხვავებულია! -1 -თან ახლოს მყოფი x -ის მნიშვნელობებისთვის ქმდება პერიოდი-1-ს შესაბამება, მაგრამ მას 5.15 ნახაზისგან განსხვავებული მნიშვნელობა გააჩნია. შემდეგ დიაგრამის უეცარი ცვლილება ხდება და ის 5.15 ნახაზზე ნაჩვენებ დიაგრამას ემსგავსება. რა განსხვავებაა ამ ორ ნახაზს შორის? 5.17 ნახაზზე იტერაციების საწყისი მნიშვნელობაა $x_0=0.7$, ხოლო 5.15 ნახაზზე კი $x_0=0$ მნიშვნელობას ვიყენებთ.

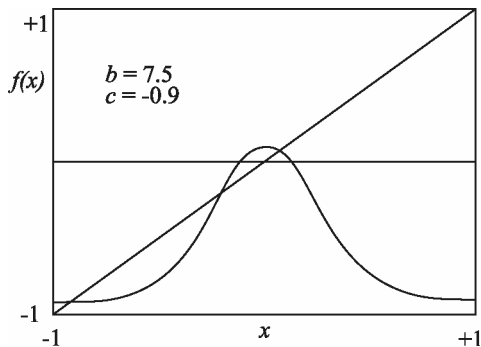
თუ 5.14 ნახაზს გავეცნობით, ვნახავთ, რომ -1 -თან ახლოს მყოფი c -ს მნიშვნელობებისა და $b=7.5$ თვის გაუსის ასახვას სამი ფიქსირებული წერტილი გააჩნია, რომელთაგან ორი სტაბილურია. x -ის ზოგიერთი საწყისი მნიშვნელობა სტაბილური წერტილებიდან ერთ-ერთზე დასრულებულ ტრაექტორიებს გვაძლევს; სხვებს კი მეორე სტაბილური ფიქსირებული წერტილისაკენ მიმართულ ტრაექტორიებთან აქვთ კავშირი.



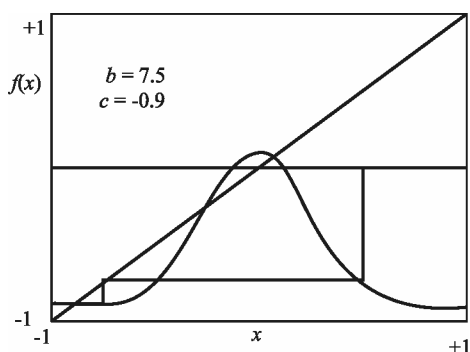
ნახაზი. 5.17. ბიფურკაციული დიაგრამა გაუსის ასახვის ფუნქციისთვის, როდესაც $b=7.5$ და ტრაექტორიების საწყისი წერტილია $x_0=0.7$.

5.18 ნახაზი გვიჩვენებს $x_0=0$ საწყისი მნიშვნელობისთვის გამოყენებული გრაფიკული იტერაციის პროცედურას. ტრაექტორია აშკარად მიისწრაფვის დადებითი x მნიშვნელობების შესაბამისი ფიქსირებული წერტილისაკენ. ნახ. 5.19. გვიჩვენებს $x_0=0.5$ წერტილში დაწყებული ტრაექტორიის მიმართ გამოყენებულ გრაფიკულ პროცედურას. ეს ტრაექტორია მეორე სტაბილური ფიქსირებული წერტილისაკენ მიისწრაფვის. ამრიგად, b -ს და c -ს

მოცემული მნიშვნელობებისათვის გაუსის ასახვას ორი სტაბილური ფიქსირებული წერტილი გააჩნია და თითოეულს მიზიდულობის საკუთარი არე გააჩნია. c -ს უფრო დიდი მნიშვნელობებისთვის (მაგალითად, $c = -0.3$) 5.14 ნახაზის მარჯვენა ნაწილი გვიჩვენებს, რომ ამ შემთხვევაში მხოლოდ ერთი ფიქსირებული წერტილი არსებობს. ამიტომ ყოველ საწყის წერტილს ერთი და იგივე მიზიდულობის წერტილი შეესაბამება.



ნახაზი. 5.18. $x_0=0$ წერტილში დაწყებული გაუსის ასახვის შესაბამისი ტრაექტორიის გრაფიკული იტერაცია. ტრაექტორია მიისწრაფვის ფიქსირებული წერტილისაკენ, ამჯერად $x=0$ წერტილის მიმართ მარჯვნიდან.



ნახ. 5.19. $x_0=0$ წერტილში დაწყებული გაუსის ასახვის შესაბამისი ტრაექტორიის გრაფიკული იტერაცია. ტრაექტორია დიაგრამის მარცხენა ნაწილში ფიქსირებული წერტილისაკენ მიისწრაფვის.

სავარჯიშო 5.9-3. დაწერეთ კომპიუტერული პროგრამა 5.14 ნახაზის მარცხენა ნაწილში მოყვანილი თითოეული ფიქსირებული წერტილის მიზიდულობის არის საპოვნელად. ბიფურკაციის რომელი ტიპი უჩვენებს x -ის უარყოფითი მნიშვნელობების შესაბამისი ფიქსირებული წერტილის გაქრობას?

შეგვეძლო თუ არა გაუსის ასახვისათვის დამახასიათებელი არაორდინალური ქმედების პროგნოზირება? აქ ძირითადი თავისებურება x -ის დიდი მნიშვნელობებისას ფუნქციის კუთხური კოეფიციენტის შემცირებაში მდგომარეობს. ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციების კუთხური კოეფიციენტი $x=1/2$ წერტილში მდებარე მაქსიმუმიდან დაშორებასთან ერთად მონოტონურად იზრდება. ამრიგად, ლოჯისტიკური ასახვა პერიოდის გაორმაგებას არ უჩვენებს. მოსალოდნელია, რომ ისეთი ფიზიკური სისტემისათვის, როგორც პირველ თავში განხილული დიოდის წრედია (რომელიც პერიოდის გაორმაგებას ამჟღავნებს (იხ. ნახაზი 1.8 და 1.9)), გალუნვის წერტილის თვისების მქონე იტერაციული ასახვის ფუნქციით

მოდელირება შესაძლებელია. დიოდის წრედის სქემა (ნახ. 5.3) ასეთ გალუნვის წერტილს წარმოგვიდგენს.

ამგვარი გეომეტრიული თვისებების მქონე გაუსისა და სხვა ტიპის ასახვები MSS U -მიმდევრობის წესს არ ექვემდებარება. ზოგიერთი U -მიმდევრობა პარამეტრის მნიშვნელობების ერთი დიაპაზონის ფარგლებში ვრცელდება. საპირისპირო ბიფურკაციების სიმრავლე (პერიოდის-გაუორმაგებლობა) ქმედების ასეთ ტიპზე მიუთითებს. გარდა დიოდური წრედისა, ქმედების ასეთი ტიპი რხევით ქიმიურ რეაქციებშიცაა დაკვირვებული (CMS86).

ქმედების მსგავს სახეობას *ანტიმონოტონურობა* ეწოდება, რადგან არაა აუცილებელი, რომ მონოტონურ მიმდევრობას აუცილებლად ბიფურკაციათა მიმდევრობები მოსდევდეს, როგორც ეს ლოჯისტიკური ასახვის მოდელის შემთხვევაში გვექნა. ასეთ შემთხვევას მაშინ აქვს ადგილი, როდესაც მდგომარეობათა სივრცის მიზიდულობის არეში ერთზე მეტი კრიტიკული წერტილი არსებობს. ანტიმონოტონურობის ნიშანი კრიტიკული წერტილის მიდამოში „ღრმულის“ წარმოქმნაა. NKG96 განიხილავს ასეთ ეფექტებს დიოდ-ინდუქტორის წრედისათვის.

5.10 ორგანზომილებიანი იტერაციული ასახვები

ამ პარაგრაფში იტერაციული ასახვების შესახებ მსჯელობას განვაგრძობთ და ორი ცვლადის (ვთქვათ, x და y) ასახვის ფუნქციებზე გადავალთ. როგორც დიფერენციალური განტოლებებით აღწერილი სისტემებისათვის ვნახეთ, იტერაციული ასახვებისათვის განზომილების (ცვლადების) რაოდენობის ზრდა პოტენციურად შესაძლო ქმედებების დიაპაზონს საგრძნობლად ზრდის. დეტალებისთვის გაეცანით [Devaney, 1986, თავი 2].

ორგანზომილებიანი ასახვების თვისებების გამოკვლევისთვის ასახვის ისეთ ფუნქციას განვიხილავთ, რომელიც არაწრფივი დინამიკის ლიტერატურაში კლასიკად ითვლება – ე.წ. ჰენონის ასახვა (HEN76). ჰენონმა შეიმუშავა ჰუნკარეს ასახვის გამარტივებული მოდელი ლორენცის მოდელისთვის. ჰენონის ასახვის ფუნქცია ერთგანზომილებიანი კვადრატული ასახვის ორგანზომილებიანი განვრცობაა (ამოცანა 5.4-6):

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 + y_n - Cx_n^2 \\ y_{n+1} &= Bx_n \end{aligned} \tag{5.10-1}$$

სადაც C დადებითი პარამეტრია. როდესაც $B=0$, ჰენონის ასახვის ფუნქცია კვადრატული ასახვის ფუნქციამდე დაიყვანება. ასახვის ფუნქცია მთელ xy სიბრტყეზე ვრცელდება. B და C

პარამეტრების მნიშვნელობებზე დამოკიდებულებიდან გამომდინარე, მდგომარეობათა სივრცის ზოგიერთი უბანი ჩაკეტილი ტრაექტორიების წარმოქმნას უწყობს ხელს. სხვა საწყისმა წერტილებმა უსასრულობაში მიმავალი ტრაექტორიები შეიძლება მოგვცეს; იხ. ამოცანა 5.10-2.

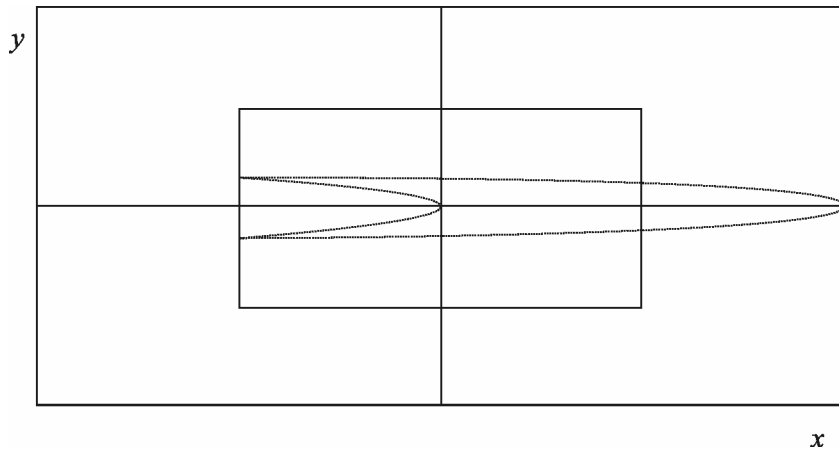
ჰენონის ასახვა შექცევადი ასახვის ფუნქციაა ანუ თუ მოცემული გვაქვს x_n და y_n , შეგვიძლია მნიშვნელობათა ერთადერთი x_{n-1} და y_{n-1} წყვილის პოვნა. ამრიგად, შეგვიძლია ჰენონის ასახვის როგორც პირდაპირ, ასევე უკუ-იტერაციებს გავადევნოთ თვალი. ლოჯისტიკური, კვადრატული და გაუსის ასახვების შემთხვევაში კი თითოეული x_n -სთვის არსებობს ორი შესაძლო x_{n-1} მნიშვნელობა.

ამოცანა 5.10-1. ჰენონის ასახვისათვის გამოიყვანეთ ძირითადი ფორმულა, რომელიც x_n -სა და y_n -ზე დაყრდნობით, x_{n-1} -სა და y_{n-1} -ს მოგვცემს.

შემოვიფარგლოთ $0 < |B| < 1$ მნიშვნელობებით; ამრიგად, როდესაც ჰენონის ასახვის იტერაციები xy სიბრტყეში არსებული საწყისი პირობების სიმრავლის მიმართ გამოიყენება, ეს სიმრავლე y მიმართულებით კოლაფსს განიცდის. $B=0.3$ შემთხვევა ლიტერატურაში კარგად არის შესწავლილი და ჩვენც ამით ვისარგებლებთ. 5.20 ნახაზი გვიჩვენებს ჰენონის ასახვის გამოყენებას საწყისი წერტილების მართკუთხა კრებულის მიმართ. შენიშნეთ, რომ ჰენონის ასახვა საწყისი წერტილების სიმრავლის გაწელებასა და მოკეცვას იწვევს.

ამოცანა 5.10-2. ([Strogatz, 1995] მიხედვით). B და C პარამეტრების ფიქსირებული მნიშვნელობებისათვის, ჰენონის ასახვა მდგომარეობათა სივრცის ზოგიერთ არეში “ხაფანგს” ქმნის, რადგან ამ არეში დაწყებული ტრაექტორიები იქვე რჩება. ვთქვათ, $B=0.3$ და $C=1.4$. აჩვენეთ, რომ ოთხკუთხედის წვეროები $(-1.33, 0.42)$, $(1.32, 0.133)$, $(1.245, -0.14)$, $(-1.06, -0.5)$ ისეთ არეში აისახება, რომელსაც საწყისი ოთხკუთხედი მთლიანად მოიცავს. მინიშნება: შეადგინეთ განტოლება ოთხკუთხედის წიბოებისათვის და მათ მიმართ ჰენონის ასახვა გამოიყენეთ. სხვა ტრაექტორიები შეიძლება უსასრულობისკენ მიისწრაფოდეს. იპოვეთ ჰენონის ასახვის ისეთი საწყისი წერტილი, რომელიც უსასრულობისკენ მიმავალ ტრაექტორიას იწვევს.

B -ს ფიქსირებული მნიშვნელობისთვის და ჰენონის ასახვისთვის ბიფურკაციული დიაგრამის აგებას შევძლებთ, თუ x_n -ს C პარამეტრის მეშვეობით გამოვსახავთ.



ნახაზი. 5.20. მართკუთხედის შიგნით მყოფი არის მიმართ ჰენონის ასახვის ფუნქციის გამოყენების შედეგი xy სიბრტყეში. კოორდინატთა სათავე დიაგრამის ცენტრშია. აქ $B=0.3$ და $C=1$. საწყისი მართკუთხა არე ასახვის ფუნქციის მოქმედების შედეგად გაწეული და მოკეცილია. ახალი საზღვარი წყვეტილი წრფით არის აღნიშნული.

ნახაზი 5.21. გვიჩვენებს გაორების ამგვარ დიაგრამას. 1.08-თან აზლოს მოფი C -ს მნიშვნელობებისათვის არსებობს ორი ქაოსური მიმზიდველი. ერთი მიმზიდველი ოთხი, ხოლო მეორე კი ექვსი ქაოტური არისაგან შედგება.

ზოგიერთი საწყისი პირობა შეესაბამება ერთ მიმზიდველს, ხოლო სხვები კი - მეორეს. პარამეტრის მოცემული მნიშვნელობისათვის რამდენიმე მიმზიდველის თანაარსებობისას, სისტემა **ფაზაში ჩამორჩენას** განიცდის, ანუ ქმდება სისტემის წარსულზე და მოკიდებული.

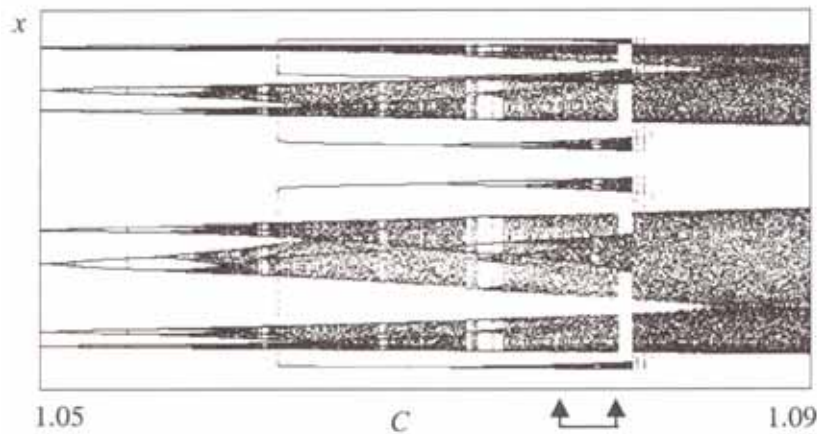
ალბათ შენიშნეთ, რომ $C = 1.08$ -ის მიდამოში ერთ-ერთი ქაოსური მიმზიდველი უეცრად ქრება. ამ მოვლენას **კრიზისი** ეწოდება. ჩვენ მას დაწვრილებით მე-7 თავში განვიხილავთ.

5.21. ნახაზი რამდენიმე პერიოდულ დიაპაზონს გვიჩვენებს. საინტერესოა, B და C პარამეტრების რომელი მნიშვნელობებისათვის აღიძვრება ასეთი პერიოდული დიაპაზონები. ეს საკითხი დაწვრილებით BHG97- ში განიხილება.

5.11 სპეილის ნალის ასახვა

მე-4 თავში აღვწერეთ, თუ როგორ უჩვენებენ ჰომოკლინიკური და ჰეტეროკლინიკური ორბიტები პუანკარეს შესაბამის კვეთებში „ცხენის ნალის დინამიკას“. ამჯერად განვიხილავთ ორგანზომილებიან ასახვას, რომელიც თვალნათლივ უჩვენებს ამგვარ გაწეულას, შეკუმშვასა

და მოკეცვას. **სმეილის ნალის ასახვა** იმგვარადაა განსაზღვრული, რომ ასახვის იტერაციული ტრაექტორიების აღწერისათვის სიმბოლური დინამიკის მეთოდები შეგვიძლია გამოვიყენოთ. ამგვარი ასახვისას უარს ვამბობთ მიმზიდველის ცნებაზე ანუ სმეილის ნალის ასახვის პირობებში xy სიბრტყეში მდებარე საწყისი პირობების შესაბამისი არე მიზიდულობის რაიმე სხვა არეში არ განიცდის კოლაფსს. ასეთ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ სმეილის ნალის ასახვა „არეს იცავს“. ასე რომ, ეს ასახვა დისიპაციური სისტემის მოდელირებისათვის არ გამოდგება. მეორეს მხრივ, ტრაექტორიების საბოლოო დახასიათება იმდენად საფუძვლიანი და დამაჯერებელია, რომ ნალის ასახვის მოქმედების პრინციპის სიღრმისეულად შესწავლის სურვილი გვეუფლება (იგი შესაძლებელია გამოყენებული იქნას არადისიპაციური სისტემის მოდელირებისათვის).



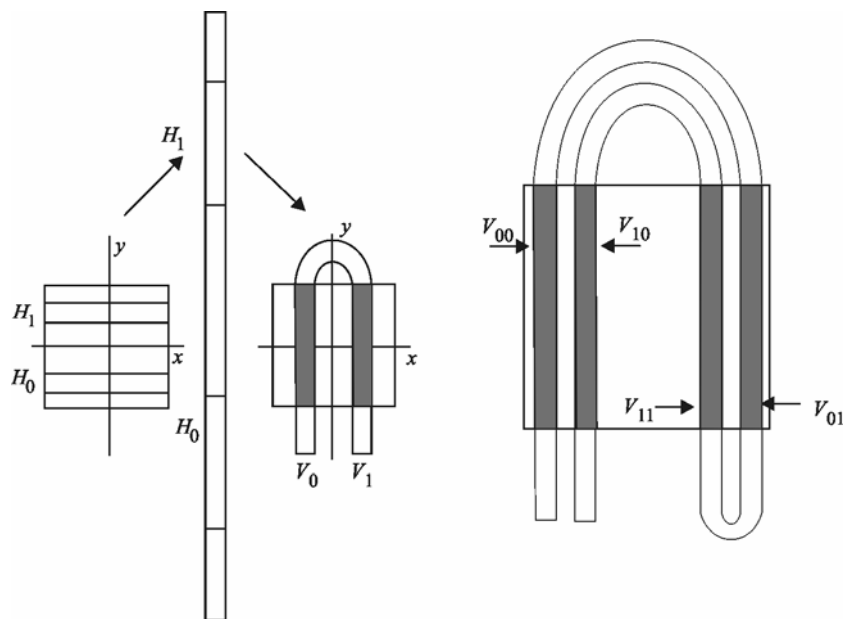
ნახაზი. 5.21. ბიფურკაციული დიაგრამა ჰენონის ასახვის ფუნქციისთვის, როდესაც $B=0.3$. C მაკონტროლებელი პარამეტრია. შენიშნეთ, რომ C –ს მნიშვნელობების გარკვეულ დიაპაზონში ორი მიმზიდველის თანაარსებობა ისრებითაა აღნიშნული. განსხვავებული საწყისი პირობები ამ ორი მიმზიდველისაკენ მიმართულ ტრაექტორიებს წარმოქმნის.

უნდა აღინიშნოს, რომ ნალის ასახვა გეომეტრიულად განსაზღვრულია. ჩვენ ასახვის ფუნქციებისთვის რაიმე ფორმულა არ გამოგვყავს და ვიწყებთ xy სიბრტყეზე საწყისი პირობების N კვადრატის განხილვით. ნალის ასახვის ოპერაცია პირობითად ორ ნაწილად შეიძლება დაიყოს: საწყისი კვადრატი s კოეფიციენტით y მიმართულებით იწელება და ამასთან $1/s$ კოეფიციენტით x მიმართულებით იკუმშება (შეგვიძლია გაწელებისა და შეკუმშვის სხვადასხვა კოეფიციენტების გამოყენება, პარამეტრის შეცვლის გარეშე). ახლადწარმოქმნილი გრძელი და ვიწრო მართკუთხედი, რომლის ფართობი საწყისი კვადრატის ფართობის ტოლია, შემდგომში მოიკეცება და უკუმშმართულებით გადაადგილდება. ეს თანმიმდევრობა 5.22 ნახაზზეა ნაჩვენები (საწყისი კვადრატის გარეთ გაწელები მართკუთხედის ნაწილის მისაღებად გვჭირდება $s > 2$). განვიხილოთ ნალის ის ნაწილები, რომლებიც საწყისი

კვადრატის ფარგლებში იმყოფებიან. ამ „ვერტიკალურ“ მართკუთხედებს V_0 -თა და V_1 -ით აღვნიშნავთ. სად იწყება ეს არეები? 5.22 ნახაზი გვიჩვენებს, რომ V_0 -ისა და V_1 -ს წერტილები H_0 -ითა და H_1 -ით აღნიშნული ჰორიზონტული არეებიდან „მოემართებიან“ H_0 -ის წერტილები V_0 -ში, ხოლო H_1 -ისა კი – V_1 -ში აისახება.

მხედველობაში უნდა მივიღოთ ნალის ასახვის შექცევადობა, რასაც $h^{(-1)}$ -ით აღვნიშნავთ. კერძოდ, შევისწავლოთ, თუ რა ხდება, როდესაც $h^{(-1)}$ -ს საწყისი S კვადრატისთვის ვიყენებთ. ამის მიზნით $h^{(-1)}$ იმ ვერტიკალური უბნებისთვის უნდა გამოვიყენოთ, რომლებიც საწყისი კვადრატის მიმართ h -ის გამოყენების შედეგად მივიღეთ. თუ სიმრავლეთა თეორიის \cap სიმბოლოს გამოვიყენებთ ორი სიმრავლის გადაკვეთისა თუ გადაფარვის აღნიშვნელად, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$h^{(-1)}(S \cap h(S)) = h^{(-1)}(S) \cap S \tag{5.11-1}$$



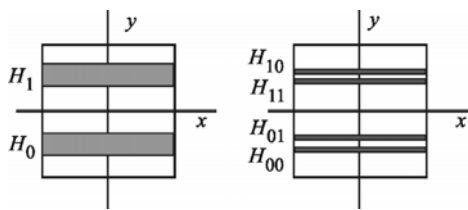
ნახაზი 5.22. მარცხნივ, ნალის ასახვის შეკუმშვა-გაწელვისა და მოკეცვა-წანაცვლების პროცესებია მოყვანილი. მარჯვნივ ნაჩვენებია ასახვის განმეორების შედეგები. სურათი გარჩევის თვალსაზრისით გადიდებულია. მარცხნივ და მარჯვნივ მოყვანილი ქვედა სიმბოლოები ტექსტში მოყვანილი ჰორიზონტალური უბნის „წარსულს“ აღნიშნავს. ყურადღებას გამახვილებთ ნალის იმ არეებზე, რომლებიც საწყის კვადრატს გადაფარავენ. ისინი აღნიშნულია გამუქებული მართკუთხედებით.

განტოლება გვამცნობს, რომ ორი ვერტიკალური მართკუთხედისთვის [რომლებიც S -სა და $h(S)$ -ს გადაფარავენ] $h^{(-1)}$ -ის გამოყენება S -ის გადაფარვას მოგვცემს, რომელსაც $h^{(-1)}$ -ის

S -ისთვის გამოყენების შედეგად ვიღებთ. ამ ოპერაციის შედეგი 5.23 ნახაზის მარცხენა ნაწილში გამოსახული ორი ჰორიზონტალური H_0 და H_1 მართკუთხედია. თუ ამ ორი მართკუთხედისთვის შებრუნებულ ასახვას გამოვიყენებთ, 5.23 ნახაზზე ნაჩვენებ ოთხ ვიწრო ჰორიზონტალურ მართკუთხედს მივიღებთ. მაგალითად, H_{01} იმ წერტილთა სიმრავლეა, რომელიც $h^{(-1)}$ -ის პირველი გამოყენების შემდეგ H_1 -ში მიიღებოდა, მაგრამ $h^{(-1)}$ -ის მეორედ გამოყენების შედეგად H_0 -ში აღმოჩნდა.

ნალის ასახვის მეორე პირდაპირი იტერაციას 5.22 ნახაზის მარჯვენა მხარეს გამოსახულ შედეგებამდე მივყავართ. ქვედა სიმბოლოების აზრი შემდეგია: მაგალითად V_{01} აღნიშნავს $h^{(2)}$ -ის H_{01} -ის მიმართ გამოყენების შედეგად მიღებულ არეს. ფორმალურად ეს ასე ჩაწეროთ: $V_{ij}=h^{(2)}(H_{ij})$. ამრიგად, ნალის ასახვის პირდაპირი იტერაციას ვიწრო და ვერტიკალური მართკუთხა არეების რთულ მიმდევრობამდე მივყავართ. n იტერაციის შემდეგ თითოეული მართკუთხედის ფართობი $(1/S)n$ -ის ტოლი იქნება. ნალის ასახვა ისეა აგებული, რომ გადაფარვის არეებში ასახვის ფუნქცია წრფივია. ამრიგად, ასახვის თითოეული იტერაციის განმეორების შემთხვევაში გაწელვისა და შეკუმშვის ერთსა და იმავე კოეფიციენტებს ვიღებთ. ამასთან, $h^{(-1)}$ -ის განმეორებით გამოყენება ვიწრო და ჰორიზონტალური მართკუთხედების რთულ მიმდევრობას გვაძლევს.

ამრიგად, ნალის ასახვის შესახებ გარკვეული წარმოდგენა უკვე გვაქვს. ახლა კი გვსურს h -ის პირდაპირი და შებრუნებული გამოყენების (ანუ ყოველი $h^{(n)}$ -ისა და $h^{(-n)}$ -ის) პირობებში S კვადრატში დარჩენილი წერტილების გამოკვლევა.



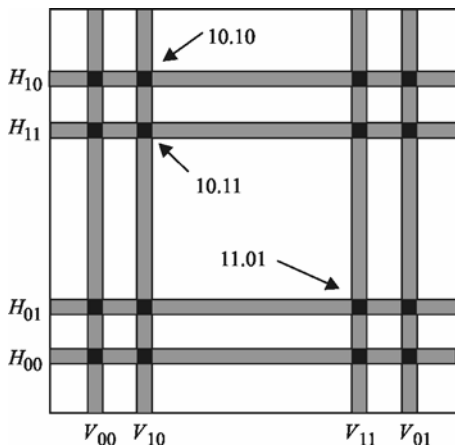
ნახაზი 5.23. მარცხნივ მოყვანილი ჰორიზონტალური მართკუთხედები ნალის ასახვის შედეგად 5.22 ნახაზზე ნაჩვენებ მართკუთხედის ფორმას მიიღებს. მარცხნივ გამოსახული ორი ჰორიზონტალური მართკუთხედისთვის

$h^{(-1)}$ -ის გამოყენება მარჯვნივ გამოსახულ ოთხ მართკუთხედს გვაძლევს.

ქვედა სიმბოლოების მნიშვნელობა ახსნილია ტექსტში. აშკარაა, რომ წერტილების მოცემული სიმრავლე, რომელსაც მუდმივობის გამო IN -ით (Invariant) აღვნიშნავთ, შედის იმ არეებში, რომლებიც ადრე წარმოქმნილი ჰორიზონტალური და ვერტიკალური მართკუთხედების გადაფარვის შედეგია. გადაფარვის ეფექტის საილუსტრაციოდ 5.24 ნახაზზე მოყვანილია $h^{(2)}$ -ისა და $h^{(-2)}$ -ის ქმედების შედეგად მიღებული გადაფარვის არეები (გადაფარვის მართკუთხედების ყველა წერტილი საწყის კვადრატში არ რჩება, მაგრამ ყველა დარჩენილი წერტილი გადაფარვის მართკუთხედების ფარგლებში).

გადაფარვის ყოველი არე ერთიანებისა და ნულების მიმდევრობებითაა აღნიშნული: a_{-2} , a_{-1} , a_0 , a_1 . სიმბოლო a_0 მაშინ არის 0-ის ტოლი, როდესაც გადაფარვის არე არის H_0 , ხოლო 1-ის ტოლია, თუ შედეგად მიღებული არე არის H_1 . $a_1=0$, თუ გადაფარვის არის მიმართ გამოყენებული h გავლენას ახდენს H_1 არეზე და 1-ის ტოლია, როდესაც შედეგად მიღებული არე არის H_1 . a_{-1} და ა.შ. სიმბოლოები $h^{(-1)}$ -ის გამოყენების მიხედვით არის განსაზღვრული. ამრიგად, 5.24 ნახაზის ზედა ნაწილში გადაფარვის ყველა არეს შეესაბამება xx.10 აღნიშვნა, ხოლო xx.11 კი მეორე სტრიქონის აღნიშვნებია.

ამოცანა. 5.11-1. შეამოწმეთ, რომ გადაფარვის არეების აღნიშვნები სწორად ასახავს h -ისა და $h^{(-1)}$ -ის ქმედებას ამ არეებში. შეამოწმეთ, რომ აღნიშვნები H და V არეების ქველა სიმბოლოების შეკრებით მიიღება. მაგალითად, გადაფარვის არე 01.00 მიიღება V_{01} -ისა და H_{00} -ის გადაკვეთით.



ნახ. 5.24. გადაფარვის არეები $h^{(2)}$ -სა და $h^{(-2)}$ -სთვის. ნებისმიერი n -სთვის, $h^{(n)}$ -ისა და $h^{(-n)}$ -ის გამოყენების შედეგად S კვადრატში დარჩენილი წერტილები გადაფარვის ამ არეებში იყრიან თავს. არეების აღნიშვნები ახსნილია ტექსტში.

თუ IN სიმრავლეს პირდაპირი და შებრუნებული იტერაციების რიგის ზრდასთან ერთად განვაგრძობთ, მაშინ IN -ის წერტილების შემცველი გადაფარვის არეების აღნიშვნა ზუსტად ზემოთ განხილულის მსგავსად მოხდება. ამრიგად, IN -ის ნებისმიერი წერტილი ერთიანებისა და ნულების ორმხრივი უსასრულო მიმდევრობით შეიძლება აღინიშნოს. ასეთი აღნიშვნა ნალის ასახვისა და სიმბოლური დინამიკის მოქმედების ქვეშ მყოფი წერტილების დინამიკას შორის მნიშვნელოვან კავშირს იწვევს. ნალის ასახვის ზემოქმედების ქვეშ მყოფი, S კვადრატში დარჩენილი ერთ-ერთი წერტილის ტრაექტორია შეიძლება აღნიშვნების მიმდევრობის სახით იყოს მოცემული ... a_{-2} , a_{-1} , a_0 , a_1 , a_2 ,... რაც გულისხმობს, რომ (x,y) წერტილი $h^{(i)}(x,y)$ -სთვის H_i რეგიონშია.

აღსანიშნავია, რომ გადაფარვის განხილული სქემის შემთხვევაში 0 და 1 სიმბოლოების ყველა შესაძლო მიმდევრობა იჩენს თავს [5.24 ნახაზზე გამოსახული არეებისათვის 16 შესაძლო კომბინაცია არსებობს. შენიშნეთ ასევე, რომ იდენტური პერიოდის მქონე

სიმბოლოთა მიმდევრობები დიაგრამაზე ერთიმეორის მახლობლად აისახებიან. მაგალითად, 5.24 ნახაზის მარცხენა ზედა კუთხეში გადაკვეთის ოთხივე არის აღნიშვნაა $_{0.1.}$ ბოლოს კი ყურადღება მიაქციეთ, რომ ნალის ასახვის გამოყენება სიმბოლური მიმდევრობის ერთი ერთეულით მარცხნივ წანაცვლების ტოლფასია და ამიტომ, ნალის ასახვა სიმბოლური წანაცვლების ექვივალენტად არის მიჩნეული.

ამოცანა 5.11-2. შეამოწმეთ, რომ ნალის ასახვა სიმბოლური მიმდევრობის ერთი პოზიციით მარცხნივ წანაცვლების ტოლფასია.

რადგანაც 0-ისა და 1-ის მიმდევრობებს რიცხვების ორობითი სახით წარმოსადგენად ვიყენებთ, შემდეგი მტკიცებულებების მისაღებად შეგვიძლია რიცხვთა თეორიას დავეყრდნობთ:

1. \mathbb{N} სიმრავლე პერიოდული წერტილების უსასრულო რეაოდენობას შეიცავს. A წერტილი პერიოდულია, თუ h –ის განმეორებით გამოყენება იმავე წერტილში გვაბრუნებს. ამ მოვლენას მაშინ აქვს ადგილი, როდესაც სიმბოლოთა მიმდევრობა 0-ისა და 1-ის გარკვეულ კომბინაციას განმეორებითი სახით შეიცავს (ფორმალურად რომ ვთქვათ, წერტილს გააჩნია n სიდიდის პერიოდი თუ $a_i = a_{i+n}$, ნებისმიერი i -სთვის. პერიოდს იმ შემთხვევაში უწოდებენ ძირითადად, თუ n –ის ნებისმიერი უფრო მცირე მნიშვნელობისთვის წინა დამოკიდებულება არ სრულდება). რიცხვთა თეორიიდან ვიცით, რომ ასეთი განმეორებითი მიმდევრობები მაშინ დაიკვირვება, როდესაც საქმე რაციონალურ რიცხვთან გვაქვს. ვინაიდან რაციონალური რიცხვების რაოდენობა უსასრულოა, ამიტომ \mathbb{N} სიმრავლე პერიოდული წერტილების უსასრულობას შეიცავს. აღსანიშნავია, რომ გვხვდება არასტაბილური პერიოდული წერტილებიც იმის გამო, რომ ახლომდებარე წერტილები h –ის განმეორებით იტერაციების შედეგად ან ტოვებენ კვადრატს ან საკმაოდ განსხვავებული (და ზოგადად არაპერიოდული) ტრაექტორიებით მოძრაობენ.
2. \mathbb{N} სიმრავლე შეიცავს აპერიოდული წერტილების უსასრულო რაოდენობას. A წერტილი აპერიოდულია, თუ h –ის განმეორებით გამოყენება არასოდეს დაგვაბრუნებს უკან, ზუსტად იმავე წერტილში. შესაბამის სიმბოლურ მიმდევრობას ირაციონალური რიცხვი გამოხატავს. ვინაიდან ირაციონალური რიცხვების რაოდენობა უსასრულოა, ამიტომ \mathbb{N} სიმრავლე არაპერიოდული წერტილების უსასრულობას შეიცავს.
3. \mathbb{N} სიმრავლეში სულ მცირე ერთი წერტილი მაინც არსებობს, რომლის ტრაექტორიაც \mathbb{N} სიმრავლის თითოეულ წერტილთან რაგინდ ახლოს გაივლის (ამ ტრაექტორიას

მკვრივი ტრაექტორია ეწოდება.) ჩვენ მას აგების გზით ვპოულობთ, ანუ „სიახლოვეს“ განვსაზღვრავთ შესაბამისი ორობითი სიმბოლოების რაოდენობის შერჩევით.

შემდეგ ვქმნით და ვაერთიანებთ 0-ისა და 1-ის ყველა შესაძლო მიმდევრობას. ეს ოპერაცია მოგვცემს იმ წერტილს, რომლის ტრაექტორიაც h -ის გამოყენებით სიმბოლოების მარცხნივ წანაცვლებისას IN -ის ყოველ წერტილთან „ახლოს“ გადის.

რა არის ნალის ასახვის დინამიკური მნიშვნელობა? ნალის ასახვის მიერ (მიახლოებით მაინც) აღწერილ დინამიკაში ტრაექტორიები არასტაბილური პერიოდული და აპერიოდული წერტილების გავლენის შედეგად მეტად რთულ სახეს ღებულობს. როდესაც ახლომდებარე ტრაექტორიების ქმედება მეტად განსხვავებული ხდება, ეს უკვე „ქაოსური ქმედების“ ტოლფასია.

5.12 დასკვნა

მოცემულ თავში იტერაციული ასახვის ფუნქციების რამდენიმე ტიპი აღვწერეთ და დინამიკური სისტემების თვალსაზრისით განვიხილეთ. ერთგანზომილებიანი იტერაციული ასახვის ფუნქციათა თეორია კარგადაა შესწავლილი. ანალიზის გეომეტრიული მეთოდები და რიცხვთა თეორია ასახვის ფუნქციების შესაბამისი მიმზიდველებისა და ბიფურკაციების შესახებ ბევრი ზოგადი დასკვნის გაკეთების საშუალებას გვაძლევს. ორი ან მეტი განზომილების შემთხვევაში კვლავ ბევრი რამ არის შეუსწავლელი. მომდევნო თავებში დინამიკური სისტემების მოდელების თვალსაზრისით იტერაციული ასახვის კიდევ უფრო მეტ ფუნქციას წარმოგიდგინებ. ამასთან ერთად, ხშირად დაგუბრუნდებით მოცემულ თავში განხილულ ასახვის ფუნქციებს. მათზე დაყრდნობით ვეცდებით ახალი იდეების დანერგვას არაწრფივი დინამიკის დახასიათების მიზნით.

5.13 დამატებითი ლიტერატურა

იტერაციული ასახვის ფუნქციების ზოგადი გამოძვევა

პირველი თავის ბოლოს ჩამოთვლილ ნაშრომთა უმრავლესობაში მნიშვნელოვანი ნაწილი აქვს დათმობილი იტერაციულ ასახვებს. განსაკუთრებით გამოყოფილი შემდეგ ნაშრომებს: [Devaney, 1986] და [Gulick, 1992].

P. Collet and J. P. Eckmann, იტერაციული ასახვების *on the Interval as Dynamical Systems* (Birkhauser, Cambridge, MA, 1980). საინტერესო შესავალი კურსი იტერაციული ასახვების შესახებ.

[Schuster, 1995] მოცემულია საფეხურა წრფივი ასახვები და კვადრატული ასახვების შედარებით რთული დეტალური განხილვა.

[Jackson, 1989, Chapter 4] მოიცავს ერთგანზომილებიან იტერაციული ასახვების ("difference equations"). დანართი E გვიჩვენებს, როგორ შეიძლება დიგრადის მეთოდის გამოყენება სარკოვსკის თეორემის დასამტკიცებლად.

R. M. May, "Simple mathematical models with very complicated dynamics," *Nature* **261**, 459-67 (1976) (reprinted in [Cvitanovic, 1984] and [Hao, 1984]).

J. Guckenheimer, "One-dimensional Dynamics," *Ann. N. Y. Acad. Sci.* **357**, 343-347 (1981). იტერაციული ასახვების ფუნქციებისა და მათი ტრაექტორიების მრავალი თავისებურების დამტკიცება.

იტერაციული ასახვების დინამიკის დაყვანა

LOR63 რიცხვითი სახით გვიჩვენებს, რომ ლორენცის მოდელის დინამიკა შესაძლებელია დაყვანილი იქნას ერთგანზომილებიანი იტერაციული ასახვის ფუნქციამდე.

5.2 ნაწილში ნახსენები მიღწევალი ქანქარის შესახებ ვრცელ მსჯელობას შეხვდებით [Baker and Gollub, 1996]. See also E. G. Gwinn and R. M. Westervelt, "Horseshoes in the driven, damped pendulum," *Physica D* **23**, 396-401 (1986).

იტერაციული ასახვების უნივერსალურობა

N. Metropolis, M. L. Stein, and P. R. Stein, "On Finite Limit Sets for Transformations of the Unit Interval," *J. Combinatorial Theory (A)* **15**, 25-44 (1973) (reprinted in [Cvitanovic, 1984]).

T.-Y. Li and J. A. Yorke, "Period Three Implies Chaos," *Amer. Math. Monthly* **82**, 985-992 (1975)

M. Feigenbaum, "The Universal Metric Properties of Nonlinear Transformations," *J. Stat. Phys.* **21**, 669-706 (1979) (reprinted in [Hao, 1984]). გვთავაზობს α -სა და δ -ს უნივერსალურობის მტკიცებულებას.

M. J. Feigenbaum, "Universal Behavior in Nonlinear Systems," *Los Alamos Science* **1**, 4-27 (1980) (reprinted in [Cvitanovic, 1984]). ერთგანზომილებიანი იტერაციული ასახვების უნივერსალურ თავისებურებათა საინტერესო შესავალი.

O. E. Lanford III, "A Computer-Assisted Proof of the Feigenbaum Conjectures," *Bull. Am. Math. Soc.* **6**, 427-34 (1982) (reprinted in [Cvitanovic, 1984]). უნივერსალური $g(y)$ ფუნქციის რეპრეზენტაციათა სერია.

H. Kaplan, "A Cartoon-Assisted Proof of Sarkovskii's Theorem," *Am. J. Phys.* **55**, 1023-32 (1987). ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციისა და სარკოვსკის თეორემის საინტერესო შესავალი.

K. T. Alligood, E. D. Yorke, and J. A. Yorke, "Why Period-Doubling Cascades Occur: Periodic Orbit Creation Followed by Stability Shedding," *Physica D* **28**, 197-203 (1987).

E. Hille, *Lectures on Ordinary Differential Equations* (Addison-Wesley, Reading, Mass. 1969). გვიჩვენებს, როგორ გამოიყენება შვარცის წარმოებულის კლასიკური ანალიზის სხვადასხვა კონტექტში.

D. Singer, "Stable Orbits and Bifurcations of Maps of the Interval," *SIAM J. Appl. Math.* **35**, 260-7 (1978).

R. Delbourgo, W. Hart, and B. G. Kenny, "Dependence of Universal Constants upon Multiplication Period in Nonlinear Maps," *Phys. Rev. A* **31**, 514-6 (1985).

იტერაციული ასახვების უნივერსალური თავისებურებების მაჩვენებელი ექსპერიმენტები

M. Giglio, S. Musazzi, and U. Perini, "Transition to Chaotic Behavior Via a Reproducible Sequence of Period-Doubling Bifurcations," *Phys. Rev. Lett.* **47**, 243-46 (1981).

R. H. Simoyi, A. Wolf, and H. L. Swinney, "One-dimensional Dynamics in a Multicomponent Chemical Reaction," *Phys. Rev. Lett.* **49**, 245-48 (1982).

J. Testa, J. Perez, and C. Jeffries, "Evidence for Universal Chaotic Behavior of a Driven Nonlinear Oscillator," *Phys. Rev. Lett.* **48**, 714-17 (1982).

W. J. Yeh and Y. H. Kao, "Universal Scaling and Chaotic Behavior of a Josephson-Junction Analog," *Phys. Rev. Lett.* 49,1888-91 (1982).

K. Coffman, W. D. McCormick, and H. L. Swinney, "Multiplicity in a Chemical Reaction with One-dimensional Dynamics," *Phys. Rev. Lett.* 56, 999-1002 (1986).

კრიტიკული წერტილების ანასხები და სხვა მონათესავე საკითხები

M. Misiurewicz, *Publ. Math. I.H.E.S.* 53, 17 (1981).

R. V. Jensen and C. R. Myers, "Images of the Critical Points of Nonlinear Maps," *Phys. Rev. A* 32, 1222-24 (1985).

J. A. Yorke, C. Grebogi, E. Ott, and L. Tedeschini-Lalli, "Scaling Behavior of Windows in Dissipative Dynamical Systems," *Phys. Rev. Lett.* 54, 1095-98 (1985).

ფეიგენბაუმის უნივერსალურობა

S. N. Coppersmith, "A simpler derivation of Feigenbaum's renormalization group equation for the period-doubling bifurcation sequence," *Am. J. Phys.* 67,52-54 (1999).

იხილე ლიტერატურის სია დანართ F-ის ბოლოს.

ასახვათა სხვა ფუნქციები

J. Heidel, "The Existence of Periodic Orbits of the Tent Map," *Phys. Lett. A* 43, 195-201 (1990). The Henon map was introduced by M. Henon "A Two-Dimensional Mapping with a Strange Attractor," *Comm. Math. Phys.* 50, 69-77 (1976).

M. Bier and T. C. Bountis, "Remerging Feigenbaum Trees in Dynamical Systems," *Phys. Lett. A* 104, 239-44 (1984)..

სმაილის ნაილს ასახვა დეტალურად განხილულია [Guckenheimer and Holmes, 1990]-სა და [Ott, 1993] -ში.

I. Proccacia, S. Thomae, and C. Tresser, "First-Return Maps as a Unified Renormalization Scheme for Dynamical Systems," *Phys. Rev. A* 35, 1884-90 (1987). გვაწვდის ძალზე ზოგადი ერთგანზომილებიანი იტერაციული ასახვების ერთიან, მაგრამ აბსტრაქტულ განხილვას, რომელიც მოიცავს უნიმოდალურ და წრიულ ასახვებს, როგორც სპეციალურ შემთხვევებს. ამ ზოგადი ასახვების დინამიკური ქცევა უფრო მდიდარია, ვიდრე მე-6 თავში წარმოდგენილი უნიმოდალურ და წრიულ ასახვებისა და მოიცავს ისეთ თვისებებს, როგორცაა პერიოდის გასამზავება.

თუ ორგანოზომილებიანი ასახვა მოქმედებს კომპლექსური რიცხვის ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებზე, შედეგად ძალზე რთულ და ლამაზ სტრუქტურებს ვღებულობთ. იხ. [Devaney, 1986], [Devaney, 1990] და ფრაქტალის შესახებ მოყვანილი ლიტერატურის სია მე-9 თავის ბოლოს.

T. C. Newell, V. Kovanis, and A. Gavrielides, "Experimental Demonstration of Antimonotonicity: The Concurrent Creation and Destruction of Periodic Orbits in a Driven Nonlinear Electronic Resonator," *Phys. Rev. Lett.* 77, 1747-50 (1996).

E. Barreto, B. R. Hunt, C. Grebogi, and J. A. Yorke, "From High Dimensional Chaos to Stable Periodic Orbits: The Structure of Parameter Space," *Phys. Rev. Lett.* 78, 4561-64 (1997).

რიცხვთა თეორია

E. M. Wright and G. H. Hardy, *An Introduction to Xhe Theory of Numbers* (Oxford University Press, Oxford, New York, 1980). მოცემულ თავში გამოყენებული რიცხვთა თეორიის ზოგიერთი შედეგის საინტერესო შესავალი.

H. S. Zuckerman, H. L. Montgomery, I. M. Niven, and A. Niven, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5* ed. (John Wiley, New York, 1991).

სიმბოლური დინამიკა

C. Robinson, *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos* (CRC Press, Boca Raton, 1995).

5.14 კომპიუტერული ამოცანები

CE5-1. დაწერეთ კომპიუტერული პროგრამა ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციისთვის და დაადგინეთ ლიაპუნოვის საშუალო ექსპონენტი. აჩვენეთ, რომ $A=4$ მნიშვნელობისთვის, როგორც 5.8 პარაგრაფში ვთქვით, ექსპონენტი $\ln 2$ -ის ტოლია.

CE5-2. დაწერეთ კომპიუტერული პროგრამა ლოჯისტიკური ასახვისთვის და კრიტიკული წერტილის პირველი რვა ანასახის A პარამეტრზე დამოკიდებულის ფუნქციის დიაგრამა ააგეთ. თუ შესაძლებელია, ერთმანეთის მომდევნო ანასახების გარჩევის მიზნით განსხვავებული შეფერილობა გამოიყენეთ. შეამოწმეთ, რომ ანასახები მიზიდულობის არეების საზღვრებს ქმნიან და ისინი პერიოდულ დიაპაზონებში ერწყმიან ერთმანეთს. ახსენით რა ხდება მისიურევიჩის წერტილებში.

CE5-3. დაწერეთ 5.9 პარაგრაფში წარმოდგენილი გაუსის ასახვის ბიფურკაციული დიაგრამების ამგები კომპიუტერული პროგრამა.

CE5-4. გამოიყენეთ პროგრამა Bifur E დამატებიდან, ან *Chaos for Java* და ლოჯისტიკური ასახვის ქაოსური არეები გადიდებული სახით გამოიტანეთ. შეამოწმეთ, რომ არეების შერწყმის შესაბამის პარამეტრის მნიშვნელობებს ფეიგენბაუმის δ . მიახლოებით მაინც აღწერს. არის თუ არა ერთი და იგივე δ -ისა და α -ს მნიშვნელობები, როდესაც მათ „მთავარი“ პერიოდის იტერაციული მიმდევრობისთვის ვიყენებთ?

CE5-5. მოახდინეთ პროგრამის Bifur მოდიფიკაცია ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციის შესაბამისი ტრაექტორიის მნიშვნელობაზე გარკვეული „ხმაურის“ დამატების გზით. ამის გაკეთება შეგიძლიათ BASIC-ის ერთ-ერთ ფუნქციის RDN-ის (შემთხვევითი რიცხვის გენერატორი) მეშვეობით. შემდეგ ააგეთ ბიფურკაციული დიაგრამა და შეისწავლეთ სხვადასხვა საშუალო მნიშვნელობის ხმაურის დამატებით მიღებული ეფექტი. მოსალოდნელი შედეგების შესახებ იხ. დანართი H.

CE5-6. დაწერეთ კომპიუტერული პროგრამა და 5.7 პარაგრაფში აღწერილი კარვის ასახვისთვის ააგეთ ბიფურკაციული დიაგრამა. ახსენით, თუ რატომ და რით განსხვავდება იგი ლოჯისტიკური ასახვის ბიფურკაციული დიაგრამისგან.

CE5-7. გამოიყენეთ *Chaos Demonstrations* პაკეტის ჰენონის ასახვასთან დაკავშირებული ნაწილი და გამოიკვლიეთ ქაოსური მიზიდულობის წერტილი ორი მაკონტროლებელი პარამეტრის სხვადასხვა მნიშვნელობის შემთხვევაში. ზოგიერთი ფაქიზი სტრუქტურის სანახავად მოახდინეთ მათი გადიდება.

CE5-8. დაწერეთ კომპიუტერული პროგრამა ე.წ. ბეიკერის გარდაქმნის განსახორციელებლად, რომელიც შემდეგნაირად განსაზღვრული ორგანზომილებიანი ასახვის ფუნქციაა:

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= 2y_n \pmod{1} \\
 x_{n+1} &= bx \quad \text{for } 0 \leq y_n \leq 1/2 \\
 &= 1/2 + bx_n \quad \text{for } 1/2 < y_n \leq 1
 \end{aligned}$$

სადაც $b \leq 1/2$. თავდაპირველად გამოსახეთ, თუ რა მოსდის ერთი იტერაციის შედეგად ერთეული სიგრძის მქონე კვადრატს, რომლის მარცხენა ქვედა წვერო? $b \leq 1/2$ შემთხვევაში კოორდინატთა სათავეში მდებარეობს. შემდეგ დარწმუნდით, რომ იტერაციის პროცედურა სმეილის ნაღის ასახვის მსგავსია. დაბოლოს აჩვენეთ, რომ $\lambda_y = \ln 2$ და $\lambda_x = \ln b$ მნიშვნელობებისათვის ასახვას ლიაპუნოვის ორი ექსპონენტა გააჩნია – ერთი x -, ხოლო მეორე კი y -მიმართულებით. [Moon, 1992. გვ. 317-19] ბეიკერის გარდაქმნის უფრო აბსტრაქტულ ვერსიას განიხილავს.

FOY83 ასევე იყენებს მოცემულ გარდაქმნას ფრაქტალური განზომილებების გამოთვლისათვის.

CE5-9. გამოიყენეთ *Chaotic Dynamics Workbench* რომ შევისწავლოთ გარეშე ძალის ზეგავლენით მოქმედი მილევალი ქანქარის შესაბამისი პუანკარეს კვეთების შესწავლისათვის. აჩვენეთ, რომ ბრუნვის $F=2.048$ მომენტის მიდამოში, როდესაც სინშირის თანაფარდობა $2/3$ -ის, ხოლო მილევის კოეფიციენტი ერთის ტოლია, პუანკარეს ასახვა ერთგანზომილებიანი უნიმოდალური ასახვის ექვივალენტურია. უფრო რთული დინამიკის შესწავლის მიზნით ბრუნვის მომენტის სხვა მნიშვნელობებიც განიხილეთ.

CE5-10. ცხრ. 2.1-ში მოყვანილი პარამეტრის სუპერციკლური მნიშვნელობების გამოყენებით დაწერეთ კომპიუტერული პროგრამა ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციისათვის

(5.6-1)-ით განსაზღვრული d_n -ის გამოსათვლელად. შემდეგ კი გამოიყენეთ მიღებული მნიშვნელობები ფეიგენბაუმის α -ს მნიშვნელობის დასადგენად, როგორც ეს (5.6-2)-ითაა განსაზღვრული.

CE5-11. დაწერეთ ლოჯისტიკური ასახვის მოდელისთვის ბიფურკაციული დიაგრამის ამგები კომპიუტერული პროგრამა, როდესაც $A < 0$. გამოიკვლიეთ $0 > A > -2$ უბანი. შეადარეთ ეს დიაგრამა ლოჯისტიკური ასახვის ბიფურკაციულ დიაგრამას, როდესაც $A > 0$. გამოიკვლიეთ ორ დიაგრამას შორის არსებული მსგავსებები და განსხვავებები.

კვაზიპერიოდულობა და ქაოსი

ქაოსი პარტიტურაა, რომელზედაც რეალობაა ჩაწერილი. ჰენრი მილერი, *ჩრდილოეთის ტროპიკი*

6.1 შესავალი

ამ თავში, რეგულარული (პერიოდული) ქმედებიდან ქაოსურში გადასვლის გამომწვევი ბიფურკაციების კიდევ ერთ მნიშვნელოვან სცენარს განვიხილავთ. ამ სცენარს, რომელიც სხვადასხვა ძირითადი სიხშირეების მიერ აღწერილ მოძრაობას მოიცავს, ქაოსისკენ მიმავალ კვაზიპერიოდულ მეთოდს უწოდებენ. იგი განსხვავებული ტიპის სისტემებზეა გამოცდილი და გამოკვლეული. ზოგიერთ მათგანს ჩვენ მოკლედ მიმოვიხილავთ. თეორიის დიდი ნაწილი სწორედ ქაოსისკენ მიმავალ გზას ეხება. როგორც პერიოდის გაორმაგების გზით ქაოსისკენ მიმავალი გზის შემთხვევაში, მოცემული თეორია გვამცნობს, რომ არსებობს ამ სცენარის შესაბამისი უნივერსალური რაოდენობრივი მახასიათებლები. სამწუხაროდ, პერიოდების გაორმაგების შემთხვევის ანალოგიურად, ეს თეორია ვერ გვიხსნის, თუ კონკრეტულ სისტემაში როდის აქვს ადგილი ასეთ სცენარს. მომავალში არაერთი „სუსტი“ თეორიული განცხადება შეგვხვდება, რომელიც გვამცნობს, თუ როდის იჩენს მოცემული სცენარი თავს. კვაზიპერიოდული სისტემები რთული ქმედების სხვადასხვა სახეობებს ავლენენ, რომელთაგან ზოგიერთი ქაოსურია, ხოლო ზოგიერთი კი – არა. ამგვარი რთული სახის ქმედება ჩვენთვის ბოლომდე გასაგები არ არის.

უხეშად რომ ვთქვათ, კვაზიპერიოდული სცენარი სისტემის დინამიკის მახასიათებელ ორ ან მეტ დამოუკიდებელ სიხშირეს შორის კონკურენციას გულისხმობს. ამგვარი სცენარი სისტემების ორი ტიპისათვის მაინც იჩენს თავს:

1. გარეშე პერიოდული „ძალის“ მიერ მართული არაწრფივი სისტემა რხევის „ბუნებრივი“ სიხშირით. რადგან სისტემა არაწრფივია, ბუნებრივი რხევის სიხშირე რხევათა ამპლიტუდაზეა დამოკიდებული. ამ შემთხვევაში მაიძულებელ სიხშირესა და ბუნებრივი რხევის სიხშირეს შორის კონკურენციას აქვს ადგილი.

2. არაწრფივი სისტემები, რომლებიც სისტემის რომელიმე პარამეტრის ცვლილებასთან ერთად რხევებს ორ (ან მეტ) სიხშირეზე „სპონტანურად“ ავითარებს. ასეთ შემთხვევაში სისტემაში სიხშირეების განსხვავებულ ტიპებს შორის კონკურენცია იჩენს თავს.

ორივე შემთხვევაში მოცემული სისტემის მახასიათებელი ორი (ან ზოგჯერ მეტი) სიხშირე არსებობს. მათმა „ჭიდილმა“ კი შესაძლოა ქაოსამდე მიგვიყვანოს.

ჩვენს მსჯელობაში ორი (ან მეტი) სიხშირის „დამოუკიდებლობას“ განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს. ქვემოთ მოყვანილი ტერმინოლოგია, რომელიც თავდაპირველად მეოთხე თავში იქნა შემოყვანილი, ორი სიხშირის (ვთქვათ f_1 და f_2) ფარდობას აღწერს. p და q (დადებითი) მთელი რიცხვების შემთხვევაში, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობას

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{p}{q} \quad (6.1-1)$$

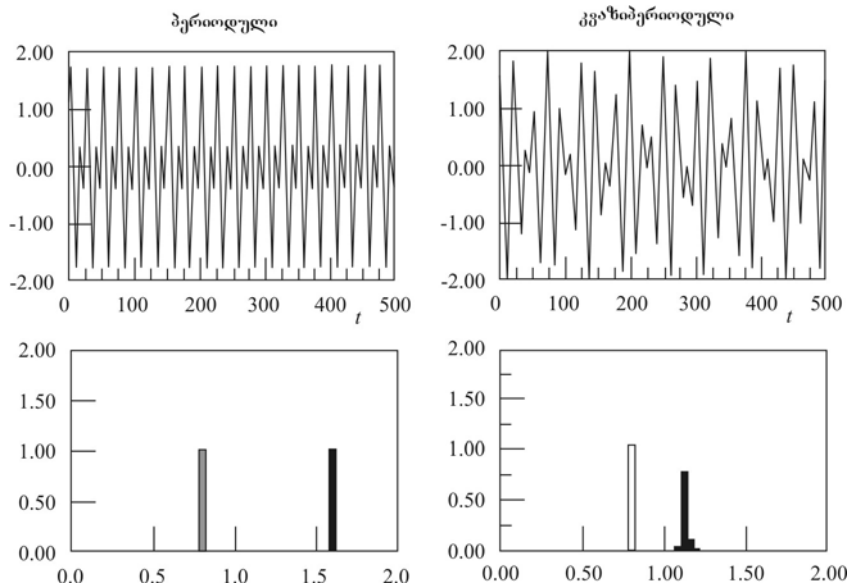
ვამბობთ, რომ სიხშირეები *თანაზომადია*, ანუ სიხშირეთა ფარდობა *რაციონალურია*. თუ არ არსებობს (6.1-1) პირობის დამაკმაყოფილებელი მთელი რიცხვები, მაშინ ვამბობთ, რომ სიხშირეები *არათანაზომადია*, ანუ სიხშირეთა ფარდობა *ირაციონალურია*. მეოთხე თავის თანახმად, თუ ფარდობა რაციონალურია, მაშინ ვამბობთ, რომ სისტემის ქმედება *პერიოდულია*. თუ ფარდობა ირაციონალურია, მაშინ ვამბობთ, რომ სისტემის ქმედება *კვაზიპერიოდულია* (კვაზიპერიოდულის ნაცვლად ზოგჯერ გამოიყენება ტერმინები – *პირობითად პერიოდული*, ან *თითქმის პერიოდული*).

შენიშვნა: ზოგადად ვუშვებთ, p/q ფარდობა უმარტივეს ფორმამდეა დაყვანილი, ანუ ფარდობაში ნებისმიერი საერთო გამყოფი გამორიცხულია. ამიტომ, თუ $f_2/f_1 = 4/6$, 2-ის საერთო გამყოფი უნდა გამოვრიცხოთ და დავწეროთ $f_2/f_1 = 2/3$. ჩვენ p/q ფარდობის სახით ზოგჯერ $p:q$ აღნიშვნასაც გამოვიყენებთ.

ქმედების მიმართ ტერმინი კვაზიპერიოდული მაშინ გამოიყენება, როდესაც ორი სიხშირე არათანაზომადია. ამ შემთხვევაში სისტემის ქმედება ზუსტად არასოდეს მეორდება. კვაზიპერიოდული სისტემის ქმედება, როგორც დროის ფუნქცია, საკმაოდ არარეგულარულად

გამოიყურება. 6.1 ნახაზი გვიჩვენებს ორი სიხშირის მიერ აღწერილი სისტემის ევოლუციას. მარცხენა მხარეს სიხშირეები თანაზომადია და ქმედება პერიოდულია, ხოლო მარჯვნივ კი - არათანაზომადია და სისტემის ქმედება საკმაოდ არარეგულარულია. თუმცა, კვაზიპერიოდული ქმედების ენერგეტიკული სპექტრი ცხადად გვიჩვენებს მხოლოდ ორი სიხშირის არსებობას. მარჯვენა მხარეს გამოსახული ქმედება რომ ქაოსური ყოფილიყო, მაშინ ენერგეტიკულ სპექტრს სიხშირეთა კონტინუუმის ფორმა ექნებოდა. იხ. H დანართი, ნახაზი H.2.

ქვემოთ ვნახავთ, ასრულებს თუ არა როგორც თანაზომადობა, ისე არათანაზომადობა მნიშვნელოვან როლს სისტემის ქმედებაში. ამიტომ უნდა გავარკვიოთ, თუ როგორ უნდა განვსაზღვროთ პრაქტიკულად f_1 და f_2 სიხშირეების თანაზომიერება-არათანაზომიერების საკითხი. პრობლემა იმაში მდგომარეობს, რომ სიხშირეთა ნებისმიერ გაზომვას გააჩნია სასრული სიზუსტე. ანალოგიურად, ნებისმიერი რიცხვითი (მაგალითად, კომპიუტერული) გამოთვლის პროცესს მხოლოდ სასრული არითმეტიკული სიზუსტე აქვს: კომპიუტერის მიერ გამოყენებული ნებისმიერი რიცხვი ფაქტიურად რაციონალურია. გაზომვებისა თუ რიცხვითი გამოთვლის მოცემული სიზუსტის პირობებში, სიხშირეთა ფარდობა ტოლია კონკრეტული ირაციონალური ან რაციონალური რიცხვისა, რომელიც ახლოსაა ამ ირაციონალურ რიცხვთან. ამის გარდა ჩვენ მეტს ვერაფერს ვიტყვით ფარდობების „რეალური“ რაციონალურობისა თუ ირაციონალურობის შესახებ.



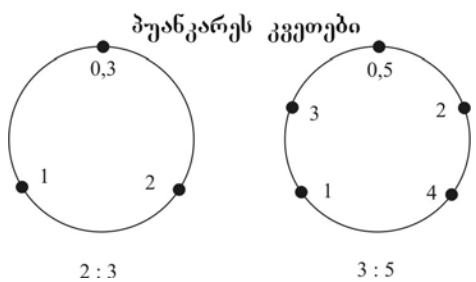
ნახაზი 6.1. მარცხნივ მოცემულია ორი სიხშირის მქონე სისტემის ევოლუცია. აქ $f_1=2 f_2$. მარჯვნივ გამოსახულია ისეთი სისტემის ევოლუცია, როდესაც ორი სიხშირე არათანაზომადია და $f_2=\sqrt{2}f_1$. მეორე ქმედება საკმაოდ არარეგულარულად გამოიყურება, მაგრამ ნახაზის ქვედა ნაწილში წარმოდგენილი ენერგეტიკული სპექტრი მიანიშნებს, რომ ქმედებას მხოლოდ (სხვადასხვა ამპლიტუდის მქონე) ორი სიხშირე განსაზღვრავს.

არსებითაა, რომ ნახაზის მარჯვენა ნაწილში ვლინდება ორი არათანაზომადი სიხშირე-ენერგეტიკული სპექტრის „მაქსიმუმების“ სიგანე გამოწვეულია იმით, რომ ანალიზისათვის გამოყენებული მონაცემები დროის შედარებით ვიწრო ინტერვალს შეესაბამება.

განვიხილოთ თავების მსგავსად, აქაც შეგვიძლია ვიკითხოთ: სისტემის ქმედება მართლაც ქაოსურია, თუ მას უბრალოდ ისეთი ხანგრძლივი პერიოდულობა ახასიათებს, რომელიც ექსპერიმენტის ჩატარების ხანგრძლივობაზე გრძელია? თუ გაზომვის, ან კომპიუტერული მოდელირების მოცემული სიზუსტის პირობებში ქმედება არარაპერიოდულია და ახლომდებარე ტრაექტორიები დივერგენციას უჩვენებენ, მაშინ მოცემული სიზუსტის პირობებში სისტემის ქმედება ქაოსურია. ანალოგიურად, თუ გაზომვის ან კომპიუტერული გამოთვლების კონკრეტული სიზუსტისათვის სიხშირეები არათანაზომადია, მაშინ შესაბამის ქმედებას იმავე სიზუსტის პირობებში უნდა ველოდოდ.

6.2 კვანძპერიოდულობა და პუანკარეს კვეთები

როგორც უკვე ვნახეთ, პუანკარეს კვეთების გამოყენება მნიშვნელოვნად ამცირებს სისტემის მდგომარეობათა სივრცის ქმედების გეომეტრიულ წარმოდგენას. გავარკვიოთ, თუ როგორ მიყვავართ თანაზომად და არათანაზომად სიხშირეების მეტად განსხვავებულ პუანკარეს მონაკვეთებამდე.



ნახაზი 6.2. მარცხნივ მოყვანილია პუანკარეს კვეთა სიხშირეთა 2:3 ფარდობის შესაბამისი ტრაექტორიისთვის. ტრაექტორია იწყება 0 წერტილში, შემდეგ გაივლის 1-ს, 2-ს და საბოლოოდ უბრუნდება საწყის 3 წერტილს. მარჯვნივ გამოსახულია პუანკარეს კვეთა სიხშირეთა 3:5 ფარდობის შესაბამისი ტრაექტორიისთვის.

როგორც მე-4 თავში ვნახეთ, ორი სიხშირის მიერ განსაზღვრული ქმედება თორის ზედაპირზე შემოსაზღვრული ტრაექტორიებით შეიძლება აღიწეროს. ერთი სიხშირე (ვთქვათ, f_1) თორის დიდი განივკვეთის გასწვრივ მოძრაობს. როდესაც ერთ-ერთი სიხშირე, სისტემის მიმართ ჩვენ მიერ გამოყენებული გარკვეული მოდულაციის ან შემფოთების შესაბამისი სიხშირეა, მაშინ იგი კონტროლირებადია. ჩვენ ამ სიხშირეს ვაიგივებთ f_1 -თან, რადგანაც

პუნკარეს კვებები ყველაზე მარტივად აიგება გარედან კონტროლირებადი სიხშირის ფიქსირებული ფაზისათვის, სისტემის ქმედების შერჩევის გზით აიგება.

თუ ავირჩევთ პუნკარეს კვებას, როგორც ეს 4.9 ნახაზზე ნაჩვენებია თორისათვის, მაშინ p/q ფარდობითი სიხშირის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის პუნკარეს კვების წერტილების შემდეგ მნიშვნელობებს მივიღებთ: ვთქვათ, $T_1=1/f_1$ თორის გარე განიკვების გარშემოვლის პერიოდია; $T_2=1/f_2$ იქნება იგივე დრო მცირე წრის შემთხვევაში. ვინაიდან ფარდობითი სიხშირე არის p/q , მაშინ პერიოდების ფარდობა იქნება

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{q} \quad (6.2-1)$$

მაგალითად, თუ $p/q=2/3$, მაშინ მცირე წრის გარშემო შემოვლისთვის საჭირო დრო იქნება დიდი წრის შესაბამისი დროის $3/2$.

როგორ იჩენს თავს ეს ფარდობა პუნკარეს კვებაში? ნახაზი 6.2 სიხშირეთა ორი სხვადასხვა ფარდობის შესაბამის პუნკარეს კვების წერტილებს გვიჩვენებს. ტრაექტორიები 0-ით აღნიშნულ წერტილში იწყება. თორის დიდი განიკვების გარშემო ერთი შემოვლის შემდეგ ტრაექტორიის წერტილი კვლავ პუნკარეს სიბრტყეში ბრუნდება. 6.2 ნახაზის მარჯვენა ნაწილში მოყვანილი გრაფიკის მიხედვით, ამ დროის განმავლობაში ტრაექტორიამ მცირე წრის გასწვრივ გზის $2/3$ განვლო. ამგვარად, იგი დიაგრამაზე 1-ით აღნიშნულ წერტილს მიაღწევს. თორის გარშემო კიდევ ერთი შემოვლის შემდეგ ტრაექტორია უკვე გზის $4/3$ -ს „გაივლის“ და წერტილ 2-ს მიაღწევს. საბოლოოდ, გარე წრის მესამედ შემოვლის შემდეგ ტრაექტორია კვლავ საწყის წერტილს დაუბრუნდება. პუნკარეს კვების წერტილების მიმდევრობა სიხშირეთა $3/5$ -ის ტოლი ფარდობის შემთხვევაში 6.2 ნახაზის მარჯვენა მხარესაა გამოსახული. თუ f_1 -ს თორის დიდი განიკვების გასწვრივ მოძრაობას შევუსაბამებთ, ხოლო f_2 -ს - მცირე განიკვების გასწვრივ მოძრაობას და შევარჩევთ პუნკარეს ისეთ სიბრტყეს, რომელიც თორის დიდი განიკვებისადმი პერპენდიკულარულად კვეთს, მაშინ $f_2/f_1=p/q$ ფარდობითი სიხშირის შემთხვევაში პუნკარეს კვება მოიცავს q წერტილებს. ტრაექტორია „გამოტოვებს“ სიბრტყესთან ორ მიმდევრობით გადაკვეთას შორის არსებულ $p-1$ რაოდენობის წერტილის.

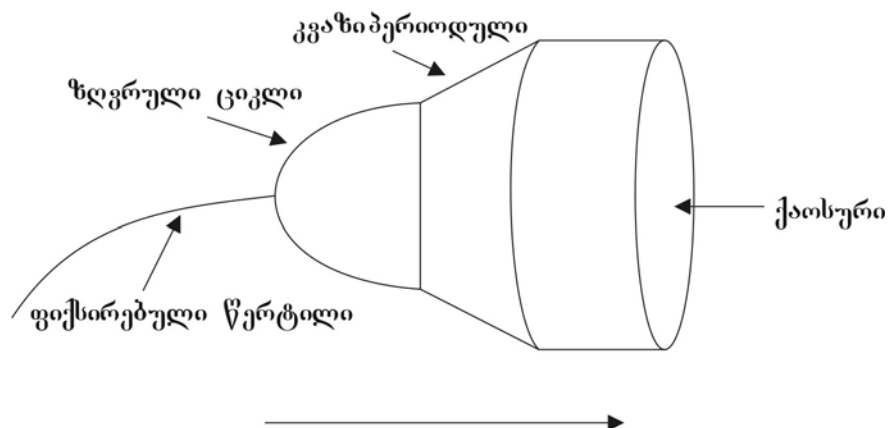
ამოცანა 6.2-1. გამოსახეთ პუნკარეს კვეთის წერტილები თორის ზედაპირზე მოძრაობისას, როდესაც ფარდობითი სიხშირე $f_2/f_1=2/7$. როგორ განასხვავებთ პუნკარეს ამ კვეთას განსხვავებული სიხშირის ($3/7$ –ის ტოლი ფარდობის) შესაბამის კვეთისაგან? გააკეთეთ იგივე $f_2/f_1=9/7$ -ის შემთხვევაში.

თუ ორი სიხშირე არათანაზომადია, მაშინ პუნკარეს კვეთები არასოდეს განმეორდება. პუნკარეს წერტილები საბოლოო ჯამში შეავსებენ 4.9 ნახაზზე გამოსახული პუნკარეს სიბრტყის მრუდს. კვეთის წერტილები მრუდის გარშემო დრეიფობენ და ე.წ. **მოდრეიფე რგოლს** ქმნიან.

კიდევ ერთხელ დავუბრუნდეთ პერიოდული და კვაზიპერიოდული მოძრაობის განსხვავების პრობლემას. დავუშვათ, ჩვენი ექსპერიმენტული ანალიზი ისეთია, რომ მდგომარეობათა სივრცის თორის პუნკარეს სიბრტყესთან გადაკვეთით მიღებული მრუდის 79 წერტილი შეგვიძლია განვასხვავოთ. თუ მოძრაობა 67/79 ფარდობითი სიხშირის მქონე ორი არათანაზომადი სიხშირისგან შედგება, მაშინ შეგვიძლია იგი წარმოვადგინოთ სიხშირეთა რაციონალური ფარდობის შესაბამის მოძრაობად. მაგრამ, თუ ფარდობითი სიხშირე არის 82/93, მაშინ პუნკარეს კვეთის საფუძველზე მარტივად ვერ შევძლებთ მოცემული მოძრაობის განსხვავებას სიხშირეთა ირაციონალური ფარდობის შესაბამისი კვაზიპერიოდული მოძრაობისაგან. მოცემული გარჩევის პირობებში ორთავე მოძრაობა მოდრეიფე რგოლს ავსებს.

6.3 კვაზიპერიოდული გზა ქაოსისაკენ

ჩვენ უკვე მზად ვართ ქაოსისკენ მიმავალი კვაზიპერიოდული გზის აღწერისთვის. ამგვარი სცენარი ნაჩვენებია 6.3 ნახაზზე, სადაც მდგომარეობათა სივრცეში არსებული სისტემის მიმზიდველებია გამოსახული.



ნახაზი 6.3. მდგომარეობათა სივრცეში მიმზიდველების ეკოლუციის სქემატური გამოსახულება ქაოსში კვაზიპერიოდული გზით გადასვლის შემთხვევაში. გარეშე ძალის მიერ პერიოდული სახით მართულ სისტემას ფიქსირებული წერტილი არ გააჩნია, მაგრამ იგი ეკოლუციას ზღვრული ციკლის მეშვეობით იწყებს. სისტემის პარამეტრის ცვლილებასთან ერთად შესაძლოა მეორე სინშირემ იჩინოს თავი. თუ ეს სინშირე პირველ სინშირესთან მიმართებაში არათანაზომადია, მაშინ შედეგად ვლუბულობთ კვაზიპერიოდულ ქმედებას. პარამეტრის შემდგომ ცვლილებასთან ერთად ქმედებამ შესაძლოა ქაოსური სახე მიიღოს.

თუ სისტემა გარე პერიოდული ძალის მიერ არ იმართება, შესაძლოა იგი ფიქსირებულ წერტილში მდებარე მიმზიდველით დაიწყოს (ანუ გვაქვს დროის მიმართ დამოუკიდებელი მდგომარეობა). მაკონტროლებელი პარამეტრის ცვლილებასთან ერთად სისტემამ შეიძლება განიცადოს ჰოპფის ბიფურკაცია, რასაც თან სდევს პერიოდული ქმედების განვითარება მისთვის დამახასიათებელი ზღვრული ციკლით მდგომარეობათა სივრცეში. პარამეტრის შემდგომ ცვლილებასთან ერთად მეორე სინშირემაც შეიძლება იჩინოს თავი. ამ შემთხვევაში მდგომარეობათა სივრცის ტრაექტორიები თორის ზედაპირზე განთავსდებიან. თუ მეორე სინშირე პირველთან მიმართებაში არათანაზომადია, მაშინ ტრაექტორია საბოლოო ჯამში თორის ზედაპირს გადაფარავს. ამ შემთხვევაში მაკონტროლებელი პარამეტრის შემდგომი ცვლილება ზოგიერთი სისტემისთვის შესაძლოა სინშირის წარმოქმნას იწვევს. მდგომარეობათა სივრცეში ტრაექტორიები სამგანზომილებიან თორის ზედაპირზე არსებობენ (რისი ვიზუალიზაცია ადვილი არ არის). პარამეტრის შემდგომ ცვლილებასთან ერთად სისტემის ქმედება შეიძლება ქაოსურში გადაიზარდოს (ზოგიერთი სისტემა ორსინშირიანი ქმედებიდან შეიძლება პირდაპირ ქაოსურში გადავიდეს. ამ საკითხზე შემდეგ პარაგრაფში ვიმსჯელებთ).

აღწერილ სცენარს გარკვეული გეომეტრიული მოთხოვნები აქვს. კერძოდ ქაოსისთვის მდგომარეობათა სივრცის სამი განზომილება მაინცაა საჭირო. თუ ტრაექტორიები თორის ზედაპირის ორი განზომილების ფარგლებში მდებარეობს, მაშინ სისტემის ქმედება ქაოსური ვერ იქნება. გვესაჭიროება შესაძლოა განზომილება, რომელსაც გამოსახავს შესაძლოა სინშირე ან ორგანზომილებიანი თორის ზედაპირის „რღვევა“ მას შემდეგ, რაც ტრაექტორიები სცილდებიან ზედაპირს და უჩვენებენ სამგანზომილებიან ქმედებას.

ამ სცენარის მნიშვნელობის გასააზრებლად სისტემებში ქაოსური (ტურბულენტური) ქმედების განვითარების ასახსნელად შემუშავებული შედარებით ძველი სქემის შესწავლას უნდა შევუდგეთ. ეს სქემა თავდაპირველად ცნობილმა საბჭოთა ფიზიკოსმა – ლ. ლანდაუიმ

1944 წელს შემოგვთავაზა და მისი დანიშნულება ხსნართა სისტემებში წონასწორული მდგომარეობიდან გადახრით გამოწვეული ტურბულენტობის ახსნა იყო (LAN44) [Landau and Lifshitz, 1959]. მოცემული სქემის თანახმად, მაკონტროლებელი პარამეტრის ცვლილებასთან ერთად სისტემის ქმედება შესაძლებელია დახასიათებული იქნას ჰოპფის ბიფურკაციების უსასრულო მიმდევრობის მეშვეობით, რომელთაგან თითოეული მათგანი სხვა სინხშირების მიმართ არათანაზომად სინშირეს წარმოქმნის. არათანაზომადი სინშირების უსასრულო რაოდენობის მეშვეობით ლანდაუ ტურბულენტური ხსნარების კომპლექსური ქმედების აღწერას ცდილობდა. ამის საპირისპიროდ, კვაზიპერიოდულ სცენარს ქაოსისაკენ (რომელიც სრულად განვითარებული ტურბულენტობისგან განსხვავდება) მხოლოდ ორი (ან შესაძლოა სამი) არათანაზომადი სინშირის წარმოქმნის გზით მივყავართ. ქვემოთ აღწერილი ზოგიერთი ექსპერიმენტი გვიჩვენებს, რომ ბუნება ქაოსისკენ მიმავალ კვაზიპერიოდულ გზას „ირჩევს“ მიუხედავად ამისა, სხვა ექსპერიმენტები გვიჩვენებს, რომ სივრცულად განვრცობილ სისტემებში სამზე მეტი არათანაზომადი სინშირის შესაბამისი არაქაოსური ქმედება შეიძლება გამოვლინდეს.

6.4 ქაოსისკენ მიმავალი კვაზიპერიოდული გზის უნივერსალობა

როგორც უკვე ვახსენეთ, ქაოსისკენ მიმავალი კვაზიპერიოდული გზის თეორია გვამცნობს, რომ ეს სცენარი ქაოსური ქმედების გამომწვევია, მაგრამ ეს იმას არ ნიშნავს, რომ ეს შედეგი გარდაუვალია. 1971 წელს რუელმა და თეიქენსმა (RUT71) პირველებმა შემოგვთავაზეს კვაზიპერიოდული სცენარი. 1978 წელს ნიუჰაუსმა, რუელმა და თეიქენსმა (NRT78) უფრო დამაჯერებლად უჩვენეს, რომ თუ სისტემის ტრაექტორიები მდგომარეობათა სივრცეში სამგანზომილებიან თორზეა თავმოყრილი (რომელიც შეესაბამება სამსინშირიან კვაზიპერიოდულ ქმედებას ოთხი ან მეტი განზომილების მქონე მდგომარეობათა სივრცეში), მაშინ მოძრაობის მცირე შეშფოთებაც კი (მაგალითად, გარეშე ხმაური) „დაარღვევს“ მოძრაობას თორის ზედაპირზე და მიგვიყვანს ქაოსამდე და უცნაური ფორმის მიმზიდველამდე.

ჩვენ არ შევუდგებით იმის დეტალურ განხილვას, თუ რა იწვევს შესაბამის მცირე შეშფოთებას, მაგრამ უბრალოდ ვიტყვით, რომ პრაქტიკაში ნაკლებად სავარაუდო ჩანს ქაოსში გადასვლა ზემოთ აღწერილი სცენარის მიხედვით. იმ შემთხვევაში, როდესაც ქაოსს წინ უძღვის მხოლოდ ორი სინშირე, სამგანზომილებიანი თორი ირღვევა უაღრესად მცირე შეშფოთებების შემთხვევაშიც კი. სინუსოიდური წყაროს მიერ მართული, ერთმანეთთან დაკავშირებული არაწრფივი ოსცილატორების მეშვეობით ჩატარებული ექსპერიმენტით ქამინგმა და ლინსმა (CUL88 and LIC89) უჩვენეს, რომ ოსცილატორებს შორის სუსტი

კონტაქტის შემთხვევაში ორი და სამი სიხშირის მქონე კვაზიპერიოდულობა ადვილად დაიკვირვება, ხოლო ქაოსი პარამეტრის მნიშვნელობების განსაზღვრულ დიაპაზონებისთვისაც კი აღიძვრება.

სხვა ექსპერიმენტები, რომლებიც ორსიხშირიანი კვაზიპერიოდულობიდან პირდაპირ ქაოსში გადასვლის გარდამავალ სტადიებს უჩვენებენ, ოსცილატორებს შორის უფრო მჭიდრო კავშირსა და მათ ქაოსურ რეჟიმში გადაყვანი პარამეტრის მნიშვნელობების სიმრავლის არსებობაზე მიგვითითებს. ამ არეებში არსებული ქაოტური ქმედებისა და კვაზიპერიოდულობის შესაბამისი დიაპაზონები ურთიერთმონაცვლებენ. ამიტომაც ვამბობთ, რომ ხმაურით გამოწვეული უმცირესი შემფოთებაც კი არღვევს სისტემის სამსიხშირიან კვაზიპერიოდულობას და დაიკვირვება ქაოსური ქმედება. სისტემა მყისიერად გადაიქცევა ქაოტურ მიმზიდველად. ამგვარი სცენარი დომინირებს მაშინ, როდესაც ოსცილატორებს შორის კავშირი საკმარისად ძლიერია, ხოლო სუსტი კავშირის შემთხვევაში სამსიხშირიანი კვაზიპერიოდულობა უფრო შესამჩნევია. საზოგადოდ, უნდა არსებობდეს კომპლექსური ურთიერთკავშირი თითოეული ოსცილატორის ამპლიტუდასა და შეერთების სიმძლავრეს შორის, რომელიც განსაზღვრავს დაკვირვებული სცენარის დეტალებს.

1982 წელს, რიცხვითი გამოთვლების საფუძველზე შენკერმა (SHE82) ივარაუდა, რომ ქაოსისკენ მიმავალი კვაზიპერიოდული გზა ერთგანზომილებიანი იტერაციული ასახვებისთვის დამახასიათებელ ფეიგენბაუმის უნივერსალობის მსგავს რაოდენობრივ თვისებებს ავლენს. ცოტა ხნის შემდეგ, ორმა ჯგუფმა (ROS82 და FKS82) რენორმალიზაციის თეორიის გამოყენებით დაადგინა, რომ ქაოსისკენ მიმავალი კვაზიპერიოდული გზის უნივერსალურ თვისებებს მაშინ ვაძგენთ, თუ ქაოსში გადასვლა ფარდობითი სიხშირის მნიშვნელობის კონკრეტულ ირაციონალურ რიცხვთან მიახლოებისას მოხდება (6.10 პარაგრაფში ამ საკითხს უფრო დაწვრილებით განვიხილავთ). აქ ტერმინი *უნივერსალური* ნიშნავს, რომ სანამ სხვადასხვა სისტემის შემთხვევაში ერთსა და იმავე რიცხვებთან უნდა გვქონდეს საქმე, რამდენადაც ფარდობითი სიხშირეები ერთი და იმავე მნიშვნელობებთან იყრიან თავს. როგორც შემდგომში ვნახავთ, სისტემები ქაოსში *სიხშირეთა სინქრონიზაციის* გზით შეიძლება აღმოჩნდნენ და რომ ამ გზის განსხვავებული მახასიათებლები არსებობს. ვიდრე უნივერსალური თვისებების მნიშვნელობას გავიაზრებდეთ, პირველ რიგში სიხშირეთა სინქრონიზაციის საკითხი უნდა განვიხილოთ.

6.5 სიხშირეთა სინქრონიზაცია

სიხშირის სინქრონიზაცია ზოგადი შემთხვევაა ყველგან, სადაც ორი ან მეტი „ოსცილატორი“ არაწრფივად ურთიერთქმედებს ერთმანეთთან. № 1-ს გარკვეული f_1 სიხშირე, ხოლო ოსცილატორი № 2-ს f_2 სიხშირე ახასიათებს (ოსცილატორები შეიძლება ფიზიკურად ერთმანეთისგან განსხვავდებოდეს, მაგალითად, ორი განსხვავებული ქანქარიანი საათი, რომლებიც ერთი და იმავე ფიზიკური სისტემის ფარგლებში ასრულებდნენ სხვადასხვა სახის რხევებს). თუ მაკონტროლებელი პარამეტრის გარკვეულ დიაპაზონში ორი სიხშირე თანაზომადია, ანუ $f_2/f_1 = p/q$ (p, q მთელი რიცხვებია), მაშინ ვიტყვით, რომ ოსცილატორები **სინქრონულსიხშირიანია** (იგივეა, რაც **სინქრონულფაზიანი**). რაციონალურ რიცხვზე გამრავლებული ერთი სიხშირე მეორე სიხშირის ტოლია. მაგალითად, სიხშირის სინქრონიზაციის მეშვეობით აიხსნება კავშირი ღერძის ირგვლივ ბრუნვისა და ორბიტულ სიხშირეებს შორის დედამიწის გარშემო მთვარისა და მზის ირგვლივ მერკურის მოძრაობებისათვის. ორივე შემთხვევაში მიმოქცევითი ძალები ღერძის ირგვლივ ბრუნვასა და ორბიტულ მოძრაობას შორის ურთიერთქმედებას იწვევს. შედეგად მოძრაობები სინქრონული ხდება.

სიხშირის სინქრონიზაციის ფიზიკური მნიშვნელობის გასაცნობიერებლად არაწრფივი სისტემებისთვის დამახასიათებელი ორი ფაქტორი უნდა გვახსოვდეს:

1) არაწრფივ ოსცილატორში რხევის რეალური სიხშირე ოსცილატორის მოძრაობის ამპლიტუდაზეა დამოკიდებული. ამრიგად, ნორმალურ პირობებში სისტემის რომელიმე პარამეტრის ცვლილებასთან ერთად არაწრფივი ოსცილატორის სიხშირის ცვლილებასაც უნდა ველოდოთ, რადგან პარამეტრის ცვლილება რხევის ამპლიტუდის შეცვლასაც იწვევს. კონკრეტული ფარდობითი სიხშირის (ვთქვათ p/q) დასადგენად აუცილებელია პარამეტრის მნიშვნელობათა ძალზე ზუსტი სიმრავლე. სიხშირის სინქრონიზაციის შემთხვევაში p/q ერთსა და იმავე მნიშვნელობას პარამეტრის მნიშვნელობათა გარკვეულ დიაპაზონში ინარჩუნებს.

2) პარამეტრის მნიშვნელობათა ფიქსირებული სიმრავლისთვის ოსცილატორის ქმედების დრო შეგვიძლია სინუსოიდური რხევების ფურიეს მწკრივების მეშვეობით დავახასიათოთ. მაგალითად, №1 ოსცილატორისათვის შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$x_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(2\pi k f_1 t + \phi_k) \quad (6.5-1)$$

სადაც k დადებითი მთელი რიცხვია. B_k წარმოადგენს kf_1 ჰარმონიკის შესაბამის ამპლიტუდას, ხოლო Φ_k მოცემული სიხშირის შესაბამისი ფაზაა. აქ მთავარი მომენტი მდგომარეობს იმის დაშვებაში, რომ გადაადგილება შედგება $f_1, 2f_1, 3f_1, \dots$ სიხშირეებისა და B_1, B_2, B_3, \dots ამპლიტუდების მქონე პერიოდული მოძრაობებისაგან. ოსცილატორი № 2 ასე შეგვიძლია გამოვსახოთ:

$$x_2(t) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j \sin(2\pi j f_2 t + \psi_j) \quad (6.5-2)$$

თუ f_1 და f_2 სიხშირეები ფარდობითი $f_2/f_1 = p/q$ სიხშირის თანაზომადია, მაშინ f_1 -ის p რიგის ჰარმონიკა (ანუ pf_1) იგივეა, რაც f_2 -ის q რიგის ($pf_1 = qf_2$) ჰარმონიკა. ვინაიდან ოსცილატორები ერთიმეორესთან ურთიერთქმედებენ, ტოლობა ნიშნავს, რომ f_2 -ის q რიგისა და f_1 -ის p რიგის ჰარმონიკებმა შესაძლოა რეზონანსული ეფექტი გამოიწვიონ.

(შენიშნეთ, რომ თუ $qf_2 = pf_1$, მაშინ იარსებებს გადაფარვადი სიხშირეების უსასრულო რაოდენობა, რომელთათვისაც $nqf_2 = npf_1$ როდესაც $n=1, 2, 3, \dots$ თუ სიხშირეები არათანაზომადია, მაშინ არც ერთი ჰარმონიკა ერთმანეთს არ დაემთხვევა და შესაბამისი რეზონანსიც არ მოხდება).

ამრიგად, სიხშირეთა სინქრონიზაციას ადგილი აქვს ყოველთვის, როდესაც ჰარმონიკების რეზონანსული ურთიერთქმედება სჭარბობს ოსცილატორების ტენდენციას სიხშირეების ცვლილებისაკენ (ასევე ააწრფივობით გამოწვეულს). ასეთ სიტუაციაში უნდა ველოდოთ, რომ როდესაც ერთ-ერთი სიხშირე (ვთქვათ, სისტემაზე მოქმედი ოსცილატორის f_1 სიხშირე) იცვლება არაწრფივობის მუდმივი მაჩვენებლის პირობებში, მაშინ f_1 -ის მნიშვნელობების გარკვეული დიაპაზონისათვის სიხშირეების სინქრონიზაციას ადგილი ექნება, ხოლო შემდეგ ისინი ან არასინქრონიზებული (არათანაზომადი) ხდებიან, ან ადგილი ექნება „გადახტომას“ f_1 -ის ახალი მნიშვნელობის შესაბამის მთელი რიცხვთა ფარდობაზე. ასევე უნდა ვივარაუდოთ, რომ თუ p/q წილადში p და q მცირეა, მაგალითად $1/2$ ან $2/3$, მაგრამ არა $17/19$, მაშინ სიხშირეთა სინქრონიზაციის ალბერისათვის f_1 -ის შესაბამისი დიაპაზონი უფრო დიდი იქნება, ვიდრე ეს p –სა და q –ს (კვლავ ვუშვებთ, რომ ყველა საერთო გამყოფი შეკვეცილი გვაქვს) დიდი მნიშვნელობების შემთხვევაში გვექნებოდა. ამის მიზეზი იმაში მდგომარეობს, რომ დაბალი ჰარმონიკების შესაბამის მოძრაობათა ამპლიტუდები (k –სა და j –ს მცირე მნიშვნელობები 6.5-1 და 6.5-2 გამოსახულებებში) მეტია უფრო მაღალი ჰარმონიკების შესაბამის ამპლიტუდებთან შედარებით (მაგრამ არა ყოველთვის). ამრიგად, თუ f_1 -ის პირველი რიგის ჰარმონიკა იგივეა, რაც f_2 -ის მეორე რიგის ჰარმონიკა ანუ თუ

$f_1=2f_2$, მაშინ ოსცილტორებს შორის უფრო ძლიერ ურთიერთქმედებას უნდა ველოდოთ, ვიდრე $17f_1=19f_2$ -ის შემთხვევაში (როდესაც, მხოლოდ მე-17, და მე-19 და უფრო მაღალი ჰარმონიკებს შორის ურთიერთქმედებას აქვს ადგილი). მიუხედავად იმისა, რომ ეს არგუმენტი მაინცდამაინც მყარი არ გახლავთ, იგი ბევრ სისტემაში მაინც რეალობას შეესაბამება.

6.6 ნახვევთა რიცხვი

წინა პარაგრაფში აღვნიშნეთ, რომ პერიოდული თუ კვაზიპერიოდული ქმედების შესაბამისი ფარდობითი სიხშირე ქმედების მთავარი განმსაზღვრელი ფაქტორია. ჩვენ შემდგომში გამოვიყენებთ ორ განსხვავებულ ფარდობით სიხშირეს. პირველი მათგანი ტრადიციულად Ω -თი აღინიშნება და მას *სიხშირეთა ფარდობის პარამეტრს* ვუწოდებთ, რადგან იგი განსაზღვრავს ორი ისეთი f_1 და f_2 სიხშირის ფარდობას, რომლებიც თავს იჩენენ უსასრულოდ მცირე არაწრფივობებისა და ორი ოსცილატორს შორის უსასრულოდ მცირე ურთიერთკავშირის პირობებშიც კი. კონკრეტული მაგალითია მილევადი ქანქარა სინუსოიდური გარეშე ძალის შემთხვევაში. ქანქარა მართულია გარეშე კუთხური მომენტის მიერ, რომელიც დროში იცვლება სინუსოიდურად f_1 სიხშირით. f_2 იყოს ქანქარას მცირე ამპლიტუდიანი რხევის სიხშირე, $f_2=(1/2\pi)\sqrt{g/L}$.

გამოსახულება

$$\Omega = \frac{f_2}{f_1} \quad (6.6-1)$$

გვაძლევს ამ ორი სიხშირის ფარდობას

ქანქარას რხევების ამპლიტუდის ზრდასთან ერთად მისი რხევის სიხშირე იკლებს, რაც ტიპური არაწრფივი ოსცილატორის შემთხვევაა. პირველი რიგის ჰარმონიკა აღვნიშნოთ f_2' -ით. f_2' -ისა შეფარდებას f_1' -თან *ნახვევთა რიცხვი* (ან *ბრუნვის რიცხვი*) ეწოდება.

$$w = \frac{f_2'}{f_1} \quad (6.6-2)$$

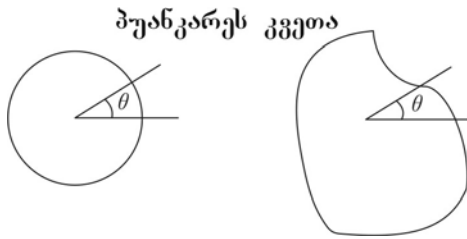
ტერმინი *ნახვევთა რიცხვი* გამოიყენება მდგომარეობათა სივრცეში მიღებულ სურათზე დაყრდნობით, როდესაც სახეზეა ტრაექტორიების დახვევა თორის გარშემო. თუ w

რაციონალური რიცხვია, მივიღებთ პერიოდულ მოძრაობას და ტრაექტორია საკუთარ თავში იქნება ჩაკეტილი. თუ ω ირაციონალური რიცხვია, მოძრაობა კვაზიპერიოდულია და ტრაექტორია თორის მთელ ზედაპირზე, საკუთარი თავის ზუსტი გამეორების გარეშე გადაადგილდება.

თუ ყურადღებას გავამახვილებთ პუანკარეს კვებებზე, ნახვევთა რიცხვები და ფარდობითი სიხშირეები, რომლებიც ერთმანეთისაგან მთელი რიცხვით განსხვავდებიან, პუანკარეს ერთსა და იმავე კვებას მოგვცემენ. ამრიგად, Ω -სა და ω -ს ნებისმიერი მთელი ნაწილის გადაგდება ზოგჯერ სასარგებლოა, ანუ ჩვენ რიცხვის წილადურ ნაწილს ვიღებთ. მათემატიკური ტერმინოლოგიის მიხედვით, ჩვენ Ω -სა და ω -ს modulo 1-ით გამოვსახავთ. მაგალითად, $2.3 \text{ modulo } [1] = 0.3$, ხოლო $16.77 \text{ modulo } [1] = 0.77$. ზოგადად, $a[b] = N - a/b$, სადაც N , $Nb \geq a$ -ის პირობის დამაკმაყოფილებელი უმცირესი მთელი რიცხვია. მთელი ნაწილის გადაგდებას (დამრგვალებას) იმიტომ ვანხორციელებთ, რომ პუანკარეს საბოლოო კვება ერთნაირად გამოიყურება, როდესაც ნახვევთა რიცხვი 0.3, 4.3, ან 1731.3 მნიშვნელობებს ღებულობს. მას შემდეგ, რაც განსაკუთრებულ ყურადღებას პუანკარეს კვებებს დავუთმობთ, ნახვევთა რიცხვს modulo 1-ს შევუსაბამებთ.

6.7 წრიული ასახვა

ამჯერად წინა პარაგრაფში გამოყენებულ მეთოდიკას სიხშირის სინქრონიზაციის მოვლენის აღმწერ მათემატიკურ მოდელზე დაკვირვებით უფრო დავაკონკრეტებთ. ეს მოდელი ქაოსისკენ მიმავალი კვაზიპერიოდული გზის გამოკვლევის სტანდარტული საშუალებაა. იგი იყენებს ერთგანზომილებიანი იტერაციული ასახვების ანალოგიური სქემას. თუმცა, ამჯერად იტერაციული ცვლადი წრეზე ტრაექტორიის მდებარეობის განმსაზღვრელი კუთხის საზომია. თუ მდგომარეობათა სივრცის ცვლადთა მასშტაბები გონივრულადაა შერჩეული, მაშინ თორის შემთხვევაში კვების წერტილები პუანკარეს სიბრტყეზე წრეწირზე განლაგდება. რა თქმა უნდა, ფიზიკური სისტემისა და დიფერენციალურ განტოლებებზე აგებული ბევრი მოდელისთვის თორის განიკვეთა წრიული ფორმისა ვერ იქნება. თუმცა ამ შემთხვევაშიც კი შეგვიძლია განიკვეთოთ ტრაექტორიის მდებარეობის განსაზღვრისთვის კუთხის გამოყენება (იხ. ნახაზი 6.4). სრულფასოვანი მსჯელობისთვის თორის განიკვეთის ფორმის დეტალები არ არის მნიშვნელოვანი. ამიტომ მაქსიმალურად მარტივი გზით ვივლით და წრიულ განიკვეთს გამოვიყენებთ.



ნახაზი 6.4. პუნკარეს ორი სახის კვება თორის ზედაპირზე მოძრაობის შემთხვევაში. მარცხნივ კვება (თითქმის) წრიულია, მარჯვნივ - არა. ორივე შემთხვევაში განიკვეთზე ტრაექტორიის მდებარეობის დასადგენად ცვლადი კუთხის გამოყენება შეგვიძლია.

ასეთი ტიპის იტერაციული ასახვა შემდეგნაირად შეგვიძლია გამოვსახოთ

$$\theta_{n+1} = f(\theta_n) \quad (6.7-1)$$

სადაც $f(\theta)$ ფუნქცია θ კუთხის მიმართ პერიოდულია. ტრაექტორიას (ან ორბიტას) ზუსტად ერთგანზომილებიანი იტერაციული ასახვების შემთხვევის ანალოგიურად ვსაზღვრავთ, როდესაც გვაქვს კუთხეების $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ მიმდევრობა.

θ კუთხის გაზომვა, როგორც წესი, ხდება ისე, რომ $\theta=1$ წრეწირის გარშემო ერთ მთლიან შემოვლას შეესაბამება. (6.7-1) განტოლებაში ასახვის θ ცვლადი modulo 1 სახითაა გამოყენებული. კუთხეები $\theta=0.7$ და $\theta=1.7$ წრეწირის ერთსა და იმავე წერტილს შეესაბამება.

ვიდრე ქაოსისკენ მიმავალი კვაზიპერიოდული გზის შესწავლისთვის საჭირო ასახვის ფუნქციას განვმარტავთ, განვიხილოთ მარტივი შემთხვევა, როდესაც ასახვის $f(\theta)$ ფუნქციაა წრფივია:

$$\theta_{n+1} = f(\theta_n) = \theta_n + \Omega \pmod{1} \quad (6.7-2)$$

ასახვის ოპერაცია მდგომარეობს უბრალოდ კუთხის წინა მნიშვნელობაზე Ω სიდიდის დამატებაში. ამრიგად, ასახვის ოპერაცია ტრაექტორიას წრის გარშემო Ω ბიჯით გადაადგილებს. 6.5 ნახაზი ასეთი წრფივი ასახვის ორ ნიმუშს გვიჩვენებს.

ასახვის ფუნქციებისთვის ნახვევთა რიცხვის დასადგენად ვითვლით შემდეგ სიდიდეს:

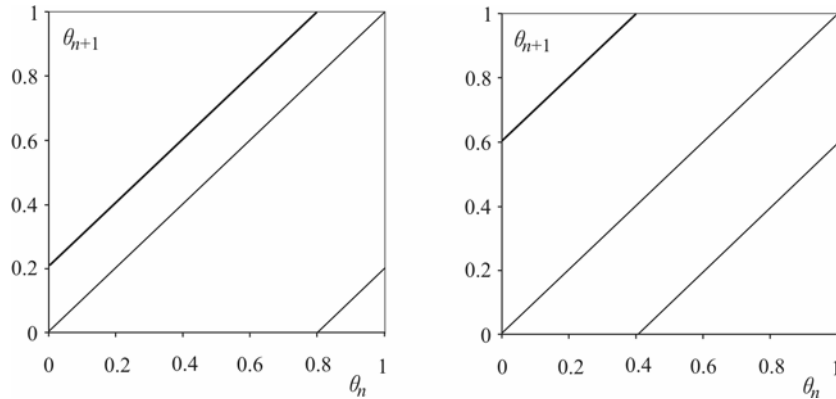
$$f^{(n)}(\theta_0) - \theta_0 \quad (6.7-3)$$

აქ θ ცვლადს modulo 1-ის გარეშე ვიყენებთ ანუ ვითვლით კუთხურ დაშორებას n იტერაციის შემდეგ. ასახვისთვის ნახვევთა რიცხვი განისაზღვრება როგორც შემდეგი შეფარდების ზღვარი:

$$w = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n)}(\theta_0) - \theta_0}{n} \quad (6.7-4)$$

აქ ზღვარი შემოღებულია იმისათვის, რომ გამოირიცხოს ნებისმიერი გარდამავალი სტადია (თუკი ასეთი რამ არსებობს). (6.7-2) განტოლებით მოცემული წრფივი ასახვისთვის გარდამავალი სტადიები არ არსებობს.

ადვილად საჩვენებელია, რომ (6.7-2)-ით განსაზღვრული წრფივი ასახვისთვის w და Ω ერთი და იგივე სიდიდეებია:



ნახაზი 6.5. (6.7-2) წრფივი ასახვის შესაბამისი ორი გრაფიკი. θ_{n+1} გამოსახულია როგორც θ_n -ის ფუნქცია. აქ და მომდევნო სამ ნახაზზე $\theta_{n+1} = \theta_n$ მონაკვეთი ნაჩვენებია ათვლის ორიენტირისთვის. მარცხნივ $\Omega = 0.2$, მარჯვნივ კი $\Omega = 0.6$. $f(\theta) = 1$ -დან უეცარი ნახტომი 0-ზე $\theta \pmod{1}$ -ის შედეგია. ტრაექტორიის მდებარეობის თვალსაზრისით კი ფიზიკური ნახტომი არ გვაქვს.

$$w = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\Omega + \theta_0 - \theta_n}{n} = \Omega \quad (6.7-5)$$

როგორც ქვემოთ ვნახავთ, არაწრფივი ასახვის შემთხვევაში w და Ω განსხვავებულია. 6.6 პარაგრაფში მოყვანილი მიზეზების გამო, 0-სა და 1-ს შორის არსებული Ω –ს მნიშვნელობების დიაპაზონით უნდა შემოვიფარგლოთ. თუ Ω რაციონალური რიცხვია, მაშინ w -ც რაციონალური იქნება, ხოლო ტრაექტორია – პერიოდული. თუ Ω ირაციონალური რიცხვია, მაშინ ტრაექტორია კვაზიპერიოდულ სახეს მიიღებს.

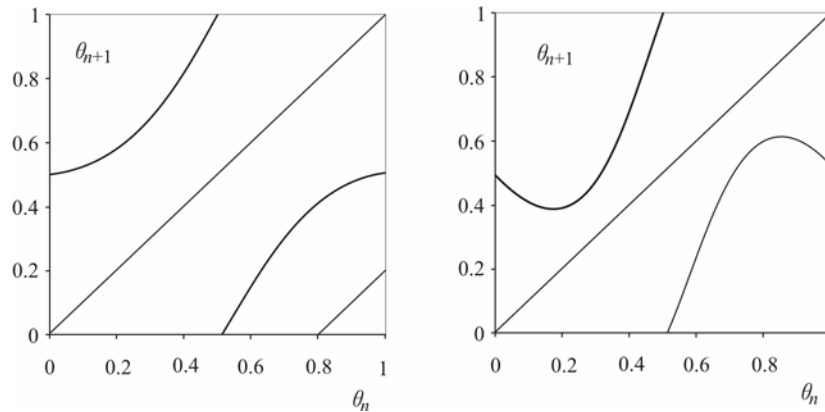
ჩვენ უკვე მზად ვართ ზოგჯერ უბრალოდ წრიულ ასახვად წოდებული სინუსოიდურ-წრიული ასახვის შესწავლისათვის. სინუსოიდურ-წრიული ასახვა არაწრფივია. იგი სინუსის ფუნქციისთვის დამახასიათებელი არაწრფივობით გამოირჩევა.

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\theta_n) \pmod{1} \quad (6.7-6)$$

K პარამეტრი (როდესაც $K > 0$) არაწრფივობის სიდიდის საზომია. როდესაც $K = 0$, წრიული ასახვა (6.7-2) წრფივ ასახვამდე დაიყვანება. 2π მნიშვნელი კუთხეების $[0, 1]$ დიაპაზონში ნორმირებისათვისაა შემოყვანილი.

შენიშნეთ, რომ (6.7-6)-ის მიხედვით, სინუსოიდურ-წრიული ასახვა მე-5 თავში განხილული ორი მაკონტროლებელი პარამეტრის მქონე ერთგანზომილებიანი იტერაციული ასახვების უმრავლესობისგან განსხვავებულია: როდესაც $K = 0$, Ω წარმოადგენს ნახვევთა რიცხვს. მას ასევე შეიძლება **სიხშირეთა ფარდობის პარამეტრიც** ვუწოდოთ.

$K = 1$ შეესაბამება საინტერესო ცვლილებას ასახვის ფუნქციისა და მისი იტერაციების ქმედებაში. $K > 1$ შემთხვევაში θ_{n+1} -ის ზოგიერთ მნიშვნელობას ერთზე მეტი θ_n წინასახე გააჩნია. (ვამბობთ, რომ $K > 1$ შემთხვევაში სინუსოიდურ-წრიული ასახვა შექცევადი არ არის).



ნახაზი 6.6. მარცხნივ გამოსახულია სინუსოიდურ-წრიული ასახვის ფუნქცია $K = 0.8$ მნიშვნელობისთვის, მარჯვნივ კი – როდესაც $K = 2.0$. θ_{n+1} წარმოადგენს θ_n ცვლადის ფუნქციას, ხოლო $\Omega = 0.5$. შენიშნეთ, რომ $K > 1$ შემთხვევაში $f(\theta)$ -ის ზოგიერთი მნიშვნელობისათვის არსებობს ორი შესაძლო θ . ასე რომ, $K > 1$ შემთხვევაში სინუსოიდურ-წრიული ასახვა არ არის შებრუნებადი.

ამრიგად, ერთგანზომილებიანი იტერაციული ასახვების შესახებ ჩვენი წარმოდგენიდან გამომდინარე შეგვიძლია ვთქვათ, რომ იტერაციული ასახვის ფუნქციამ შესაძლოა ქაოსური ქმედება გამოიწვიოს. 6.6 ნახაზის მიხედვით ფუნქციის წყვეტა მხოლოდ მოჩვენებითია. როდესაც კუთხის სიდიდე 1-ს აღემატება, მას 1-ს გამოვაკლებთ და ნახაზზე გამოსახულ უფრო დაბალ შტოს ვუბრუნდებით.

მე-5 თავში განხილულ იტერაციულ ასახვებთან დაკავშირებით იბადება კითხვა: რას წარმოადგენენ სინუსოიდურ-წრიული ასახვის ფიქსირებული წერტილები? ფიქსირებული წერტილის მნიშვნელობები აკმაყოფილებენ შემდეგ განტოლებას:

$$\theta = \theta + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\theta) \quad (6.7-7)$$

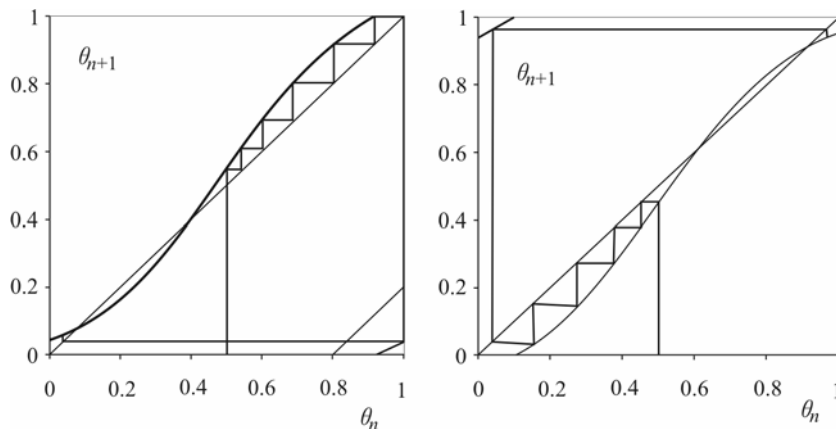
ანუ, რაც იგივეა,

$$\frac{2\pi\Omega}{K} = \sin 2\pi\theta \quad (6.7-8)$$

ამრიგად, თუ

$$K \geq 2\pi\Omega \quad (6.7-9)$$

მაშინ წრიული ასახვისთვის ერთი ფიქსირებული წერტილი მაინც იარსებებს. მნიშვნელოვანი შედეგი კი ისაა, რომ ფიქსირებული წერტილები K -სა და Ω -ს მხოლოდ გარკვეული კომბინაციების შემთხვევაში დაიკვირვებიან. თუ ფიქსირებული წერტილები არსებობენ, მაშინ მათში განსაზღვრული ასახვის ფუნქციის წარმოებულის (ანუ მათ მიდამოში ტრაექტორიების ქმედების) შესწავლით მათი სტაბილურობის საკითხსაც გავარკვევთ:



ნახაზი 6.7. მარცხნივ გამოსახულია სინუსოიდურ-წრიული ასახვის ფუნქცია $K=0.5$ და $\Omega=0.04$ მნიშვნელობების შემთხვევაში. გრაფიკული იტერაციის მეთოდი გვიჩვენებს, რომ ტრაექტორიები დაახლოებით $\theta=0.1$ მნიშვნელობის მქონე სტაბილური წერტილისაკენ მიისწრაფვიან. $\theta=0.4$ მნიშვნელობის მახლობლად ფიქსირებული წერტილი არასტაბილურია. მარჯვენა მხარეს $K=0.5$ და $\Omega=0.95$. ამ შემთხვევაში ასახვას სტაბილური ფიქსირებული წერტილი $\theta=0.9$ მნიშვნელობაზე, ხოლო არასტაბილური – $\theta=0.6$ მნიშვნელობის მახლობლად გააჩნია.

$$\frac{df}{d\theta} = 1 - K \cos 2\pi\theta \quad (6.7-10)$$

ამრიგად, თუ K იმდენად დიდი ხდება, რომ წარმოებულის მნიშვნელობა 1-ს აღემატება, მაშინ ფიქსირებული წერტილი (თუკი იგი არსებობს) შესაძლოა არასტაბილური იყოს. სინუსოიდურ-წრიული ასახვის θ^* ფიქსირებული წერტილი სტაბილური იქნება, თუ $0 < K \cos 2\pi\theta^* < 2$. სხვა შემთხვევაში ფიქსირებული წერტილი არასტაბილურია.

სინუსოიდურ-წრიული ასახვის თვისებების კარგად გააზრების მიზნით შევისწავლოთ მისი ფიქსირებულ წერტილები $K < 1$ შემთხვევაში. ირკვევა, რომ სინუსოიდურ-წრიული ასახვის ფიქსირებული წერტილები Ω -ს გარკვეულ დიაპაზონისათვის გვაძლევენ 0:1, 1:1, 2:1 ფარდობის შესაბამის სინქრონიზებულ სიხშირებს. (6.7-9) პირობის თანახმად, K -ს კონკრეტული მნიშვნელობისათვის ასახვის ფუნქციას გააჩნია სტაბილური ფიქსირებული წერტილი Ω -ს მცირე აბსოლუტურ მნიშვნელობათა $0 \leq \Omega \leq K/2\pi$ დიაპაზონისათვის. ამ დიაპაზონის ფარგლებში ნახვევთა რიცხვი 0-ის ტოლია და ტრაექტორიის საწყის θ მნიშვნელობაზე დამოკიდებული არ არის.

სიღრმისეული ანალიზისათვის გამოვიყენოთ გრაფიკული იტერაციის მეთოდი. 6.7 ნახაზზე მარცხნივ მოყვანილია სინუსოიდურ-წრიული ასახვის გრაფიკი $K=0.5$ და $\Omega=0.04$ მნიშვნელობებისთვის. ასახვის გრაფიკული იტერაცია $\theta=0.55$ მნიშვნელობიდან იწყება. როგორც ვხედავთ, ტრაექტორიები დაახლოებით $\theta=0.1$ მნიშვნელობის შესაბამის ფიქსირებული წერტილში იყრიან თავს. აგრეთვე ვხედავთ, რომ $\theta \approx 0.4$ -სთვის კიდევ ერთი ფიქსირებული წერტილი არსებობს, რომელიც მიიღება 0.5-დან პირველი ფიქსირებული წერტილის მნიშვნელობის გამოკლებით. აღსანიშნავია, რომ მეორე ფიქსირებული წერტილი არასტაბილურია.

Ω -ს მნიშვნელობების განსხვავებული დიაპაზონის შემთხვევაში სიხშირების 1:1 სინქრონიზაციას მივიღებთ. $\Omega \approx 1$ აუცილებლად უნდა გავითვალისწინოთ, რომ კუთხეებს modulo 1 პრინციპით ვზომავთ. ამრიგად, შესაძლოა გაჩნდეს ფიქსირებული წერტილი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:

$$\theta + 1 = \theta + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\theta) \quad (6.7-11)$$

აქედან მივიღებთ:

$$1 - \frac{K}{2\pi} \leq \Omega \quad (6.7-12)$$

შენიშნეთ, რომ ამ შემთხვევაში $2\pi\theta$ უარყოფითია, რადგან $\theta \in]1$.

შევაჯამოთ მიღებული შედეგები: K -ს ფიქსირებული მნიშვნელობისთვის არსებობს Ω -ს მნიშვნელობათა ორი დიაპაზონი, რომელსაც შეესაბამება სინუსოიდურ-წრიული ასახვის ფიქსირებული წერტილების. პირველი დიაპაზონია $0 \leq \Omega \leq K/2\pi$, შესაბამისად 0:1 სინშირეთა სინქრონიზაციით, ხოლო მეორე დიაპაზონი კი $1 - K/2\pi \leq \Omega \leq 1$ - 1:1 სინქრონიზაციით. ამრიგად, როდესაც $K \rightarrow 1$ -ს, მაშინ Ω მნიშვნელობათა ის დიაპაზონი, რომლისთვისაც ადგილი აქვს სინშირის სინქრონიზაციას, იზრდება. Ω მნიშვნელობების შედარებით მცირე დიაპაზონის შემთხვევაში გარდამავალი სტადიების დასრულებასთან ერთად, θ -ს მნიშვნელობა ფიქსირებულია. Ω -ს უფრო მაღალი მნიშვნელობების შემთხვევაში კი იტერაციის რიგთან ერთად θ -ც მატულობს. ორთავე დიაპაზონს შეესაბამება ერთი ფიქსირებული წერტილი პუანკარეს კვეთაში. თუ დაუშვებთ, რომ წრიული ასახვა წარმოგვიდგენს ტრაექტორიის მოძრაობის პუანკარეს კვეთას მდგომარეობათა სამგანზომილებიან სივრცეში მდებარე თორის ზედაპირზე, მაშინ შედარებით მცირე დიაპაზონი შეესაბამება ტრაექტორიებს, რომლებიც თორის მცირე განივკვეთის ირგვლივ საერთოდ არ მოძრაობენ. უფრო მაღალი დიაპაზონი შეესაბამება იმ ტრაექტორიებს, რომლებიც თორის დიდ განივკვეთში თითოეული ციკლის შემთხვევაში მცირე განივკვეთს ერთხელ შემოუვლიან.

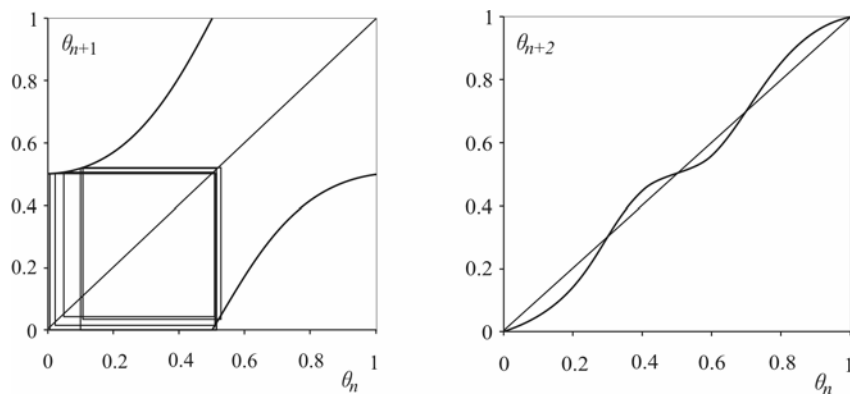
ამოცანა 6.7-1. აჩვენეთ, რომ აქამდე სტაბილურ ფიქსირებულ წერტილებად მიჩნეული ორი ფიქსირებულ წერტილი მართლაც სტაბილურია. აგრეთვე დარწმუნდით, რომ დანარჩენი ორი ფიქსირებული წერტილი არასტაბილურია.

სავარჯიშო 6.7-2. დაადგინეთ K -ს ის დიაპაზონები, რომლებისთვისაც ადგილი აქვს სინშირეთა 2:1 და 2:2 სინქრონიზაციას, როდესაც $\Omega > 1$ -ზე.

ამჯერად გავამახვილოთ ყურადღება სინშირეთა 1:2 სინქრონიზაციაზე. 6.8 ნახაზის მარცხენა ნაწილი წარმოგვიდგენს სინუსოიდურ-წრიული ასახვის იტერაციებს, როდესაც $K=0.8$ და $\Omega=0.5$. აღსანიშნავია, რომ ტრაექტორიები სინშირეთა 1:2 სინქრონიზაციის შესაბამისი ორი მნიშვნელობის ციკლში მოიყრიან თავს. 6.8 ნახაზის მარჯვენა ნაწილი კი გვიჩვენებს, რომ ამ ორი ციკლის მნიშვნელობები სინუსოიდურ-წრიული ასახვის ფუნქციის მეორე რიგის იტერაციის (სტაბილურ) ფიქსირებულ წერტილებს შეესაბამება. ადვილი შესამჩნევია, რომ K -ს ზრდასთან ერთად Ω მნიშვნელობების ის დიაპაზონი, რომლებისთვისაც სინშირეთა 1:2 სინქრონიზაცია დაიკვირვება, ასევე იზრდება. მიუხედავად იმისა, რომ

სიხშირეთა 1:2 სინქრონიზაციის შესაბამის დიაპაზონს ანალიზურად ვერ ვპოულობთ, სასურველია, K -ს მოცემული მნიშვნელობისთვის მისი რიცხვითი სახით დადგენა. ამ შემთხვევაში უბრალოდ ვადგენთ Ω მნიშვნელობების ისეთ დიაპაზონს, რომელიც $f^{(2)}$ -სთვის ფიქსირებულ წერტილებს გვაძლევს. მაგალითად $K=0.5$ მნიშვნელობისთვის, დიაპაზონი დაახლოებით 0.491-დან 0.509-მდე, ხოლო $K=1.0$ მნიშვნელობისთვის დიაპაზონი დაახლოებით 0.464-დან 0.562-მდეა (± 0.0005 სიზუსტით).

იმ დიაპაზონის ილუსტრაციის მიზნით, სადაც სიხშირეთა სინქრონიზაციის სხვადასხვა ფარდობა ვლინდება, K - Ω სიბრტყეზე ავებენ დიაგრამას და იმ უბნებს მონიშნავენ, რომლებიც სიხშირეთა სინქრონიზაციას შეესაბამება.

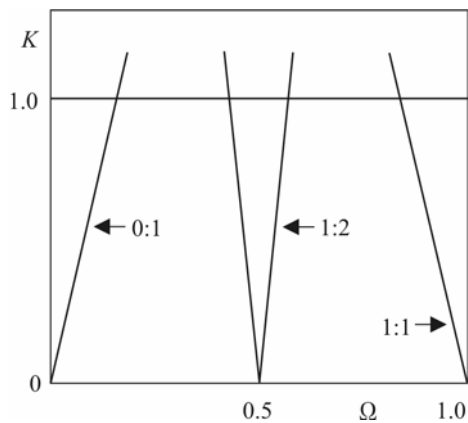


ნახაზი 6.8. მარცხნივ გამოსახულია სინუსოიდურ-წრიული ასახვის ფუნქცია, როდესაც $K=0.8$ და $\Omega=0.5$. გრაფიკული იტერაციის მეთოდი გვიჩვენებს, რომ ეს მნიშვნელობა სიხშირეთა 1:2 სინქრონიზაციის შესაბამის ტრაექტორიას იძლევა. θ -ს საწყისი მნიშვნელობა 0.1-ია. მარჯვნივ, მოყვანილია სინუსოიდურ-წრიული ასახვის ფუნქციის მეორე რიგის იტერაცია, რომელიც გვიჩვენებს, რომ $\theta=0$ და $\theta=0.5$ მნიშვნელობების სიახლოვეს მდებარეობს სტაბილური ფიქსირებული წერტილების შესაბამისი ორი ციკლური მნიშვნელობა.

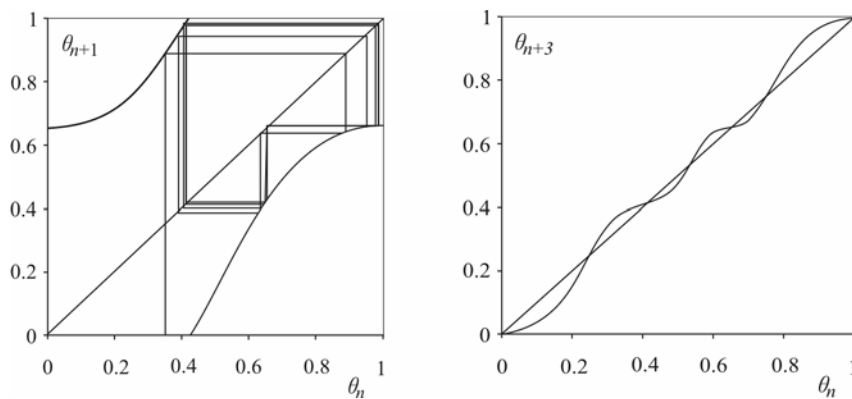
6.9 ნახაზი გვიჩვენებს სიხშირეთა 0:1, 1:2 და 1:1 სინქრონიზაციის შესაბამის დიაპაზონებს. K -ს ზრდასთან ერთად Ω ღერძის გასწვრივ სიხშირეთა სინქრონიზაციის დიაპაზონები ფართოვდებიან, რათა შეავსონ ზღვრული ინტერვალები. ამ დიაპაზონებს რუსი მათემატიკოსის – არნოლდის საპატივცემულოდ *არნოლდის ენებს* უწოდებენ [Arnold, 1983].

მომდევნო მაგალითის სახით განვიხილოთ იტერაციები, როდესაც $K=0.9$ და $\Omega=0.65$. 6.10 ნახაზზე ვხედავთ, რომ იტერაციათა შედეგად მივიღებთ სამი წერტილის ციკლს, რომელიც ამ შემთხვევაში სიხშირეთა 2:3 სინქრონიზაციას წარმოადგენს. ნახაზის მარჯვენა ნაწილში ვხედავთ, რომ ციკლის წერტილები $f^{(3)}$ -ის სტაბილურ ფიქსირებულ წერტილებს შეესაბამება.

6.10 და 6.8 ნახაზების შედარების შედეგად ვხედავთ, თუ რატომ მცირდება q -ს ზრდასთან ერთად Ω -ს მნიშვნელობათა ის დიაპაზონი, რომლისთვისაც სინშირეთა $p:q$ სინქრონიზაციას აქვს ადგილი. Ω -ს ცვლილება გრაფიკის ვერტიკალური მიმართულებით წანაცვლებას შეესაბამება. სინშირეთა $p:q$ სინქრონიზაციას მაშინ ვაღწევთ, როდესაც ასახვის ფუნქციის q რიგის იტერაცია 45° -იანი კუთხის მქონე მონაკვეთს ზედ ედება. q -ს შედარებით დიდი მნიშვნელობებისათვის ფუნქციის რხევითი ნაწილის ამპლიტუდა კლებულობს; ამრიგად, Ω -ს ის დიაპაზონი, რომელშიც მოცემული იტერაციის შესაბამისი ფიქსირებული წერტილები არსებობს, შემცირებულია.



ნახაზი 6.9. სინუსოიდურ-წრიული ასახვისთვის სინშირეთა 0:1, 1:2 და 1:1 სინქრონიზაციის დიაპაზონების სქემა. არნოლდის ენებად წოდებული დაშტრიხულ დიაპაზონებში ადგილი აქვს სინშირეთა სინქრონიზაციას. ყოველი მთელი დადებითი $p:q$ ფარდობისთვის იარსებებს სინშირეთა სინქრონიზაციის დიაპაზონები. $K=0$ შემთხვევაში, Ω ღერძის უმეტესი ნაწილი კვაზიპერიოდული ქმედებით აღინიშნება. K -ს ზრდასთან ერთად სინშირეთა სინქრონიზაციის დიაპაზონები ფართოვდება. $K=1$ მონაკვეთის ზემოთ სინშირეთა სინქრონიზაციის დიაპაზონები ერთმანეთის გადაფარვას იწყებს, რამაც შესაძლოა ქაოსი გამოიწვიოს.



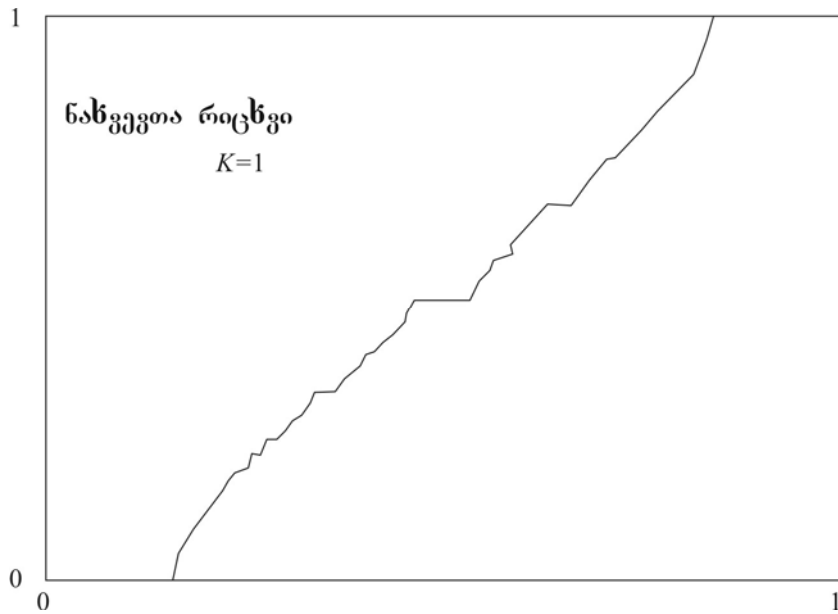
ნახაზი 6.10. მარცხნივ მოყვანილია სინუსოიდურ-წრიული ასახვა, როდესაც $K=0.9$ და $\Omega=0.65$. θ -ს საწყისი მნიშვნელობაა 0.35. ტრაექტორია სინშირეთა 2:3 სინქრონიზაციას შეესაბამება. მარჯვნივ ასახვის ფუნქციის მესამე რიგის იტერაცია გვიჩვენებს, რომ ციკლური

მნიშვნელობები 0.4-ის, 0.65-ისა და 0.98-ის სიახლოვეს მდებარე სამ სტაბილურ ფიქსირებულ წერტილს შეესაბამება.

გავარკვიოთ, თუ სიხშირეთა სინქრონიზაციის დიაპაზონები რატომ ფართოვდებიან K -ს ზრდასთან ერთად. როდესაც $K \rightarrow 1$, ასახვის ფუნქციის შესაბამისი იტერაციის გრაფიკი უფრო დიდ რხევებს უჩვენებს, რაც იმას ნიშნავს, რომ ასახვის ფუნქციის გრაფიკი 45^0 -იანი მონაკვეთის გადაფარავი რხევებისთვის Ω მნიშვნელობების უფრო დიდი დიაპაზონი არსებობს. ამრიგად, არსებობს Ω მნიშვნელობების უფრო დიდი დიაპაზონი, რომელშიც ფიქსირებული წერტილები მდებარეობს. ფიზიკური თვალსაზრისით, K -ს უფრო დიდი მნიშვნელობით გამოწვეული არაწრფივობის ზრდა ნიშნავს, რომ აღწერილი ფიზიკური სისტემის შემთხვევაში რხევის სხვადასხვა ტიპებს შორის უფრო ძლიერი კავშირი არსებობს. ეს კი პარამეტრის მნიშვნელობის იმ დიაპაზონის გაფართოებას იწვევს, რომლისთვისაც სიხშირეთა სინქრონიზაციას აქვს ადგილი.

ამოცანა 6.7-3. განიხილეთ სიხშირის სინქრონიზაციის შესახებ 6.2 პარაგრაფში მოყვანილი არგუმენტები და დაამტკიცეთ, რომ 6.10 ნახაზზე გამოსახული ციკლი მართლაც სიხშირეთა 2:3 სინქრონიზაციას შეესაბამება და არა 1:3-ს. შეადგინეთ სინუსოიდურ-წრიული ასახვის გრაფიკული იტერაცია $K=0.9$ და $\Omega=0.34$ მნიშვნელობებისთვის და დარწმუნდით, რომ პარამეტრის ამ მნიშვნელობებისთვის სიხშირეთა 1:3 სინქრონიზაციას აქვს ადგილი.

სინუსოიდურ-წრიულ ასახვასთან დაკავშირებულ ქმედებათა ტიპების შესახებ წარმოდგენის გაფართოებისთვის 6.11 ნახაზზე გამოვსახეთ (6.7-3)-ის საშუალებით გამოთვლილი ნახვევთა რიცხვი, როგორც Ω პარამეტრის ფუნქცია, როდესაც $K=1.0$. აქ ადვილი შესამჩნევია „პლატოები“ (მაგალითად $\Omega=1/2$ -ის მახლობლად), სადაც Ω –ს საგრძნობლად დიდ დიაპაზონისათვის w არ იცვლება. შეგიძლიათ აჩვენოთ, რომ K -ს ზრდასთან ერთად ეს პლატოები ფართოვდებიან, ვიდრე ისინი არ შეავსებენ $\Omega=0$ და $\Omega=1$ მნიშვნელობებს შორის არსებულ ინტერვალს. მათ სიხშირეთა სინქრონიზაციის საფეხურები ეწოდება, რადგან ამ შემთხვევებში ნახვევთა რიცხვი რაციონალური წილადია (მაგალითად, $1/3$ ან $2/7$). ვამბობთ, რომ „რეაქციის სიხშირე“ (f_2) „მამოძრავებელ სიხშირესთან“ (f_1) რაციონალურად არის დაკავშირებული.



ნახაზი 6.11. (6.7-3) განტოლების მიხედვით განსაზღვრული სინუსოიდურ-წრიული ასახვის შესაბამისი ნახვევთა რიცხვი, როგორც Ω პარამეტრის ფუნქცია $K=1.0$ მნიშვნელობისათვის. აღსანიშნავია, რომ სიხშირეთა სინქრონიზაციის პლატოები არ იცვლებიან Ω -ს საკმაოდ დიდი ღიაპაზონისათვის. ეს პლატოები ქმნიან ე.წ. ეშმაკის კიბეს.

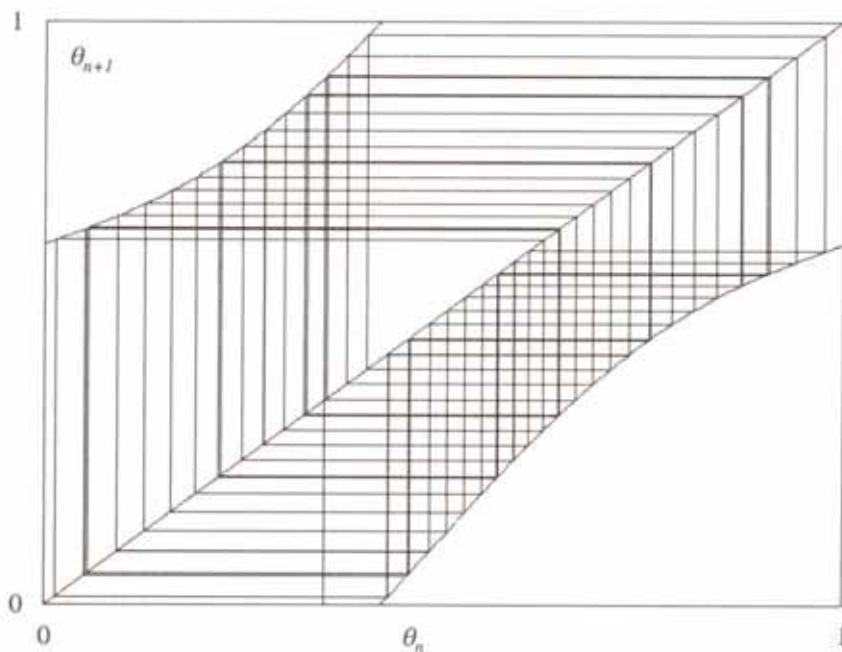
სიხშირეთა სინქრონიზაციის რამდენი პლატო არსებობს $\Omega=0$ და $\Omega=1$ მნიშვნელობებს შორის? აღმოჩნდა, რომ ასეთი პლატოების უსასრულო რაოდენობა გვაქვს! 0-სა და 1-ს შორის არსებული ყოველი $p:q$ რაციონალური წილადისთვის არსებობს ერთი პლატო. როდესაც ასეთი რაციონალური წილადების უსასრულო სიმრავლე გვაქვს, შესაბამისად იარსებებს პლატოების თუ საფეხურების უსასრულო რაოდენობა. თუ წარმოვიდგენთ პატარა არსებას, რომელიც ცდილობს $w=0$ მნიშვნელობიდან და $w=1$ მნიშვნელობამდე მოცემული „კიბის“ საფეხურების მეშვეობით აძვრეს, ვნახავთ, რომ მას საფეხურების უსასრულო რაოდენობის გავლა მოუწევს. საფეხურების მოცემულ სიმრავლეს ხშირად *ეშმაკის კიბეს* უწოდებენ.

როგორ უნდა განვსაზღვროთ, სიხშირეთა სინქრონიზაციის ცენტრალურ პლატოზე w ზუსტად რაციონალური წილადის (მაგალითად $1/2$ -ის) ტოლია თუ არა? ამის შემოწმებას საბოლოო ტრაექტორიის წერტილების (გარდამავალი სტადიების დასრულების შემდეგ) გრაფიკულად გამოსახვის მეშვეობით შევძლებთ. მაგალითად, Ω -ს ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის ცენტრალურ საფეხურზე ტრაექტორიის ზუსტად ორი წერტილი უნდა არსებობდეს, რადგანაც $2f_2=f_1$. Ω -ს იმ მნიშვნელობებისთვის, რომლებიც არ შეესაბამება სინქრონიზაციის პლატოს, ტრაექტორიის მნიშვნელობები საბოლოოდ შეავსებს სრულ მრუდს

(მოდრეიფე რგოლს) θ_{n+1} -ისა და θ_n -ის დამოკიდებულების გრაფიკზე. 6.12 ნახაზი გვიჩვენებს სინუსოიდურ-წრიული ასახვის გრაფიკული იტერაციის შედეგებს პარამეტრთა იმ მნიშვნელობებისათვის, როდესაც ადგილი აქვს კვაზიპერიოდულ ქმედებას.

6.8 ეშპაკის საფეხურები და ფეირის ხე

ამ პარაგრაფში განვიხილავთ სინუსოიდურ-წრიულ ასახვასა და რიცხვთა თეორიის შორის არსებულ ზოგიერთ დამაინტრიგებელ კავშირს. ერთი შეხედვით შესაძლოა უცნაურად მოგვეჩვენოს, თუ რა წვლილი უნდა შეიტანოს რიცხვთა თეორიამ დინამიკის განვითარებაში.



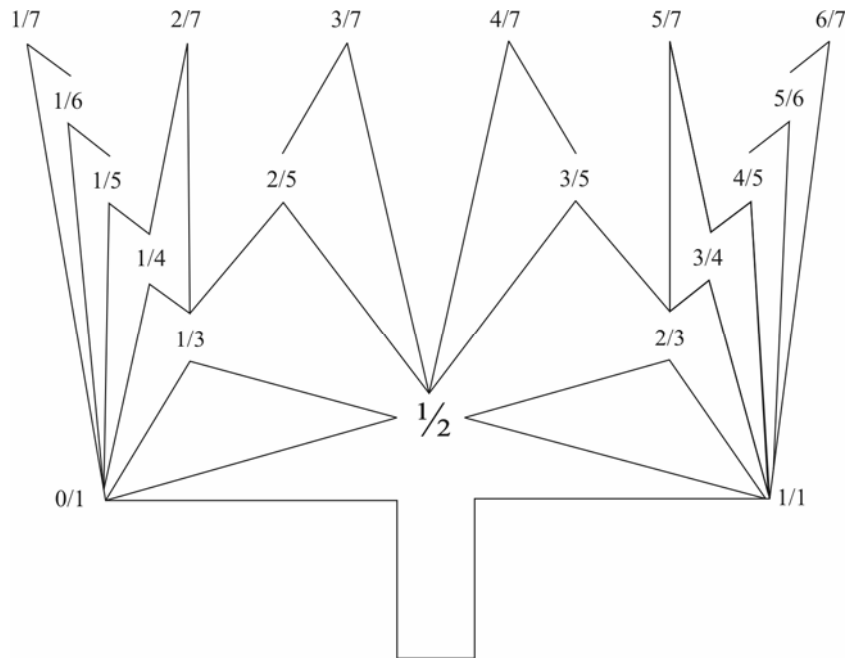
ნახაზი 6.12. სინუსოიდურ-წრიული ასახვის გრაფიკული იტერაცია, როდესაც $K=0.5$ და $\Omega=0.6180339$, $\theta_0=0.35$. ქმედება კვაზიპერიოდულია (არ გვაქვს სიხშირეთა სინქრონიზაცია). ტრაექტორია საბოლოო ჯამში θ -ს მნიშვნელობათა მთელ დიაპაზონს შეავსებს.

სიმბოლური დინამიკის შესახებ მსჯელობისას ამგვარ კავშირზე უკვე მივანიშნეთ, ხოლო ამჯერად სხვა შედეგებსაც განვიხილავთ.

წინა პარაგრაფში მოყვანილი არგუმენტის თანახმად, p -სა და q -ს შედარებით მცირე მთელი მნიშვნელობების შემთხვევაში სიხშირეთა სინქრონიზაციის უფრო ფართო პლატოებს უნდა ველოდეთ. 6.11 ნახაზი ამ არგუმენტის ჭეშმარიტებას ცხადყოფს. კარგი იქნება ვიცოდეთ, თუ როგორ ახდენს ასეთ შედეგთა ინტერპრეტაციას რიცხვთა თეორია.

დაიმახსოვრეთ, რომ ეს შედეგები ვერ ხსნის (ფიზიკური თვალსაზრისით), თუ რატომ აღიძვრება სინშირეთა სინქრონიზაცია (ახსნა მდგომარეობს რეზონანსსა და სინშირეთა არაწრფივ წანაცვლებას შორის „კონკურენციაში“), მაგრამ ისინი იმ მდგომარეობის შეცნობის საშუალებას გვაძლევს, რომელიც სინშირეთა სინქრონიზაციისას თითქმის ყოველ სისტემაში დაიკვირება.

აუცილებლად გაითვალისწინეთ, რომ p/q წილადის მნიშვნელის ზრდასთან ერთად სინშირეთა სინქრონიზაციის პალტოების სიგრძე (Ω ლერძის გასწვრივ) კლებულობს. მაგალითად, $w=1/4$ შემთხვევაში $w=1/3$ მნიშვნელობასთან შედარებით პლატო უფრო მოკლეა (სინუსოიდურ-წრიული ასახვისას მოცემული q -თვის, მაგრამ განსხვავებულ p -ებზე ნებისმიერ პალტოს ერთი და იგივე სიგრძე გააჩნია).



ნახაზი 6.13. „ფერიის ხის“ კონსტრუქცია, რომელიც ალაგებს რაციონალურ რიცხვებს 0-სა და 1-ს შორის.

რიცხვთა თეორიიდან ვიცით, რომ რაციონალურ წილადს, რომელიც იმყოფება ორ რაციონალურ p/q და p'/q' წილადებს შორის, უმცირესი მნიშვნელი ექნება. (მაგალითად, იხილეთ Wright & Hardy, 1980):

$$\frac{p+p'}{q+q'}$$

ვინაიდან მნიშვნელი სიხშირეთა სინქრონიზაციის პლატოს ზომას აკონტროლებს, უნდა ველოდოთ, რომ ამ წილადის შესაბამისი პლატო ჩვენს მიერ აღმოჩენილ p/q და p'/q' შორის მდებარე პლატოებს შორის უდიდესი იქნება.

როგორც ვიცით, ნებისმიერ ორ რაციონალურ წილადს შორის სხვა რაციონალური წილადების უსასრულო რაოდენობაა. ამგვარად, სიხშირეთა სინქრონიზაციის ნებისმიერ ორ პლატოს შორის სინქრონიზაციის სხვა პლატოების უსასრულო რაოდენობა იარსებებს. უფრო დიდი მნიშვნელების შემთხვევაში კი სიხშირეთა სინქრონიზაციის პლატოები Ω ღერძის გასწვრივ იმდენად მცირე სიდიდისაა, რომ მათზე დაკვირვება შეუძლებელია.

დავალაგოთ 0-სა და 1-ს შორის არსებული ყველა რაციონალური წილადი მზარდი მნიშვნელების მიხედვით. შედეგად 6.13 ნახაზზე ნაჩვენებ ე.წ. ფეირის ხის სქემას მივიღებთ. თუ ფეირის ხეს „შევუყვებით“, შევნიშნავთ, რომ ყოველი ახალი წილადი მიღებულია იმ რაციონალური წილადების მრიცხველებისა და მნიშვნელების შეკრების შედეგად, რომლებსაც შესაბამისი „შტო“ უერთდება. თითოეულ პორიზონტალურ ფენაში წილადებს ტოლი მნიშვნელები აქვთ და სინუსოიდურ-წრიული ასახვის შემთხვევაში ერთი და იგივე ზომის მქონე სიხშირეთა სინქრონიზაციის პლატოებს შეესაბამებიან. ხეზე თანდათან ზემოთ „აცოცებასთან ერთად პლატოს ზომა კლებულობს.

ამ დიაგრამიდან გარკვევით ჩანს წესი, რომლის მიხედვითაც პლატოები Ω -ს ფუნქციის სახით გვევლინებიან. მაგალითად, $w=1/4$ და $w=1/2$ პლატოებს შორის $w = 2/7, 1/3, 3/8, 2/5$ და $3/7$ პლატოებს ვხვდებით. პლატოები ზომების მიხედვით შემდეგნაირად არიან განლაგებული: $1/3, 2/5, 2/7$ და $3/7, 3/8$. შენიშნეთ, რომ ფეირის ხე პლატოების განლაგების წესსა და ფარდობით ზომებს გვიჩვენებს, მაგრამ საფეხურების ზომის შესახებ ვერაფერს გვეუბნება. ეს ზომა არაწრფივობის K მაჩვენებლის მნიშვნელობაზეა დამოკიდებული. ფეირის ხის უნივერსალობა სიხშირეთა სინქრონიზაციის მომცველი ქმედების უნივერსალობაზე მიგვანიშნებს. ასეთ უნივერსალობას ჩვენ 6.10 პარაგრაფში შევხვდებით.

ამოცანა 6.8-1. გამოიყენეთ 6.11 ნახაზზე წარმოდგენილი სიხშირეთა სინქრონიზაციის საფეხურები და შეამოწმეთ წინა პარაგრაფში მოყვანილი მტკიცებულებები.

ანალიზური მიდგომა სიხშირეთა სინქრონიზაციასა და ფეირის ხეს შორის კავშირის მიმართ

მოვიყვანოთ ისეთი არგუმენტი, რომელიც უფრო ცხადი სახით გვაჩვენებს ფეირის ხესა და სიხშირეთა სინქრონიზაციის პლატოებს შორის კავშირს ([Schuster, 1995] მიხედვით). ვთქვათ, ზოგიერთი $\Omega = \Omega_1$ მნიშვნელობისას არსებობს $w=p/q$ სიხშირეთა

სინქრონიზაცია (კვლავ ვუშვებთ, რომ წილადი უმარტივეს ფორმამდე დაყვანილი). სიხშირეთა სინქრონიზაციის კიდევ ერთი მეთოდი ასეთია: წრიული ასახვის f_{Ω_1} ფუნქციის q -რიგის იტერაციის შედეგი აღვნიშნოთ შემდეგნაირად:

$$f_{\Omega_1}^{(q)}(\theta) = p + \theta \quad (6.8-1)$$

ანუ ასახვის ფუნქციის q -იტერაციის შესაბამის კუთხეს კუთხის საწყის მნიშვნელობაზე p -ს დამატებით ვღებულობთ. Ω -ზე ცხადი სახით დამოკიდებულების გამოხატვის მიზნით f ფუნქციას ქვედა ინდექსი დავუმატეთ. ვთქვათ, Ω -ს რაიმე უფრო დიდი მნიშვნელობისათვის არსებობს $w = p'/q'$ წილადის შესაბამისი სიხშირეთა სინქრონიზაცია ანუ

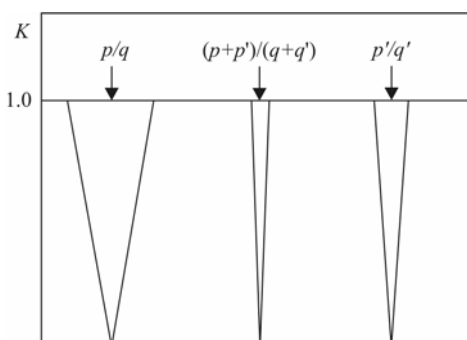
$$f_{\Omega_2}^{(q')}(\theta) = p' + \theta \quad (6.8-2)$$

ფორმალურად შევკრიბოთ ზემოთ მოყვანილი ორი იტერაცია. გვექნება:

$$f_{\Omega_1}^{(q)}\left(f_{\Omega_2}^{(q')}(\theta)\right) = p + p' + \theta \quad (6.8-3)$$

(შენიშნეთ, რომ ორი სხვადასხვა რიგის იტერაცია Ω -ს განსხვავებულ მნიშვნელობებს იყენებს). შევეცადოთ, რომ მიღებული შედეგი ცალკეული $\Omega = \Omega_3$ მნიშვნელობის შესაბამისი $q+q'$ -რიგის ერთჯერადი იტერაციით გამოვსახოთ. უნდა აღინიშნოს, რომ თუ ამ მნიშვნელობის საპოვნელად Ω_1 -ს გავზრდით, მიღებული შედეგი $p+p'+\theta$ -ზე მეტი იქნება, რადგან Ω -სთან მიმართებაში $f(\theta)$ ფუნქცია მონოტონურად იზრდება. ამ პრობლემის გადაწყვეტა შესაძლებელია Ω_2 -ის შემცირების გზით. ამრიგად Ω_1 -ის ზრდა და Ω_2 -ის შემცირება საბოლოოდ ერთადერთ Ω_3 მნიშვნელობამდე მიგვიყვანს, რომლისთვისაც გვექნება:

$$f_{\Omega_3}^{(q+q')}(\theta) = p + p' + \theta \quad (6.8-4)$$



ნახაზი 6.14. რაციონალური წილადებისა და ფერის ხის განაწილების მიხედვით აგებული არნოლდის ენების (სიხშირეთა სინქრონიზაციის არეების) ესკიზი.

შუალედური არე Ω -ს უფრო მცირე დიაპაზონს ფარავს, რადგან მისი მნიშვნელი უფრო დიდია.

მიღებული გამოსახულების მიხედვით, არსებობს Ω_1 -სა და Ω_2 -ს (სადაც p'/q' -ს შესაბამის სინქრონიზაციას აქვს ადგილი) შორის მდებარე Ω_3 მნიშვნელობა, რომელიც $(p+p'/q+q')$ სინქრონიზაციას შეესაბამება. უნდა აღინიშნოს, რომ ეს არის ფეირის ხის მეშვეობით მიღებული რაციონალური რიცხვების დალაგების წესი. 6.14 ნახაზი წარმოგვიდგენს ასეთ დალაგებას არნოლდის ენებისათვის.

6.9 უსასრულო წილადები და ფიბანაჩის რიცხვები

ჩვენ ქვემოთ განვიხილავთ ისეთ შემთხვევებს, როდესაც ნახვევთა რიცხვი ირაციონალურია (ანუ სისტემა არ უჩვენებს სინქრონიზაციას). კარგი იქნება, თუ ვიპოვით რაიმე გზას იმისათვის, რომ განისაზღვროს მიახლოებითი მნიშვნელობა მოცემული ირაციონალური რიცხვისა, წარმოდგენილი როგორც რაციონალური მიმდევრობა. ერთ-ერთი ასეთი გზაა უსასრულო წილადების მეთოდი. განვიხილოთ კონკრეტული შემთხვევა. ირაციონალური რიცხვი

$$G = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.6180339... \quad (6.9-1)$$

(ხშირად „ოქროს კვეთად“ წოდებული. თუ რატომ, ამას მომავალში განვიხილავთ) შეგვიძლია შემდეგნაირად ჩავწეროთ:

$$G = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}} \quad (6.9-2)$$

აქ მრავალწერტილი ნიშნავს, რომ ჩვენ უსასრულოდ ვაგრძელებთ მნიშვნელში წილადების შეყვანას. თუ n რაოდენობის მნიშვნელებით შემოვიფარგლებით (ანუ n რაოდენობის წილადის ხაზი გვაქვს), მაშინ G -ს n -რივის მიახლოება გვექნება, რამდენიმე საწყისი მიახლოებაა:

$$G_1 = \frac{1}{1} = 1$$

$$G_2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{1}{2}$$

$$G_3 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = \frac{2}{3} \tag{6.9-3}$$

$$G_4 = \frac{3}{5}$$

$$G_5 = \frac{5}{8}$$

ვიტყვი, რომ რაციონალური რიცხვების G_n მიმდევრობა კრებადია G -ში, როდესაც $n \rightarrow \infty$. G_n -ს G -ს n რიგის *კონვერგენტი* ეწოდება.

შემოვიღოთ უსასრულო წილადის შემდეგი ორი კომპაქტური აღნიშვნა:

$$\begin{aligned} G &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} \\ &= a_0 + (a_1, a_2, a_3, \dots) \end{aligned} \tag{6.9-4}$$

G -სთვის $a_0=0$ და $a_n=1$ ნებისმიერი $n>0$ -თვის.

ზემოთ მოყვანილი სქემის მიხედვით ვადგენთ, რომ

$$G_n = \frac{1}{1 + G_{n-1}} \tag{6.9-5}$$

როდესაც $n \rightarrow \infty$, G_n -ის მნიშვნელობათა მიმდევრობა მიისწრაფვის G -ს ზღვრულ მნიშვნელობისაკენ, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:

$$G = \frac{1}{1 + G} \tag{6.9-6}$$

(6.9-6)-დან ვლგებულობთ კვადრატულ განტოლებას G -ს მიმართ:

$$G^2 + G - 1 = 0 \quad (6.9-7)$$

ამრიგად G მართლაც (6.9-1)-ით მოცემული სიდიდეა.

სავარჯიშო 6.9-1. G რიცხვს ხშირად ოქროს კვეთას უწოდებენ, რადგან იგი შემდეგი გეომეტრიული მოსაზრებიდან გამომდინარე მიიღება: დავეთ L სიგრძის მქონე მონაკვეთი ორ (l_1 და l_2 სიგრძის $l_1+l_2=L$) ნაწილად ისე, რომ l_1/L და l_2/l_1 ფარდობები ერთმანეთის ტოლი იყოს. აღსანიშნავია, რომ ეს ფარდობა (6.9-1)-თ განსაზღვრული G -ს ტოლია. მართკუთხედი, რომლის გვერდების სიგრძეთა ფარდობაც ოქროს კვეთის ტოლია, ვიზუალურად საკმაოდ შთამბეჭდავია. ყურადღება მიაქციეთ, რომ ლიტერატურაში ზოგჯერ ოქროს კვეთას G -ს შებრუნებულ სიდიდეს ($1/G=1.61803\dots$) უწოდებენ.

ალბათ უკვე შეამჩნიეთ, რომ თუ უკვე მიღებული გვაქვს G_1 -ისა და G_2 -ის მნიშვნელობები, მაშინ G_3 , G_4 , $G_5\dots$ მიმდევრობის მიღება წინა ორი რიცხვის მრიცხველებისა და მნიშვნელების შეკრების გზითაც შეგვეძლოს:

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{1}{1} \\ G_2 &= \frac{1}{2} \\ G_3 &= \frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3} \\ G_4 &= \frac{1+2}{2+3} = \frac{3}{5} \\ G_5 &= \frac{2+3}{3+5} = \frac{5}{8} \end{aligned} \quad (6.9-8)$$

ამგვარი სქემა კი ფიბონაციის ხის სქემას მოჰგავს.

კიდევ ერთი მსგავს კონსტრუქცია ე.წ. **ფიბონაციის მიმდევრობას** იყენებს (ფიბონაცი, რომელიც პიზელი ლეონარდოს სახელითაცაა ცნობილი, დაახლოებით 1200 წელს, ჩრდილოეთ აფრიკაში, არაბი მეცნიერებისგან არითმეტიკას სწავლობდა. მისმა წიგნმა *Liber Abaci* ევროპული მათემატიკის განვითარებაში უდიდესი წვლილი შეიტანა). ფიბონაციის მიმდევრობა საწყისი $F_0=0$ და $F_1=1$ მნიშვნელობებისა და შემდეგი რეკურენტული ფორმულის გამოყენებით განისაზღვრება:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (6.9-9)$$

ანუ მიმდევრობის n -ური წევრი ორი წინა წევრის ჯამის ტოლია. ამრიგად, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,... 0-სა და 1-ზე დამყარებული ფიბანახის მიმდევრობაა. ადვილი საჩვენებელია, რომ ოქროს კვეთის i -ური მიახლოება შემდეგნაირად მოიცემა:

$$G_i = \frac{F_i}{F_{i+1}} \quad (6.9-10)$$

ვხედავთ, რომ G მიმდევრობის წევრთა მრიცხველები, ისევე როგორც მნიშვნელები, ფიბანახი მიმდევრობის წევრებია.

უსასრულო წილადები, როგორც ეს (6.9-4) განტოლებებია, რომლებიც უტოლდებიან მთელ რიცხვებს, საკმაოდ მარტივი წილადების მეშვეობით წარმოიდგინებიან. შემდგომ გამარტივებას მაშინ აქვს ადვილი, როდესაც a -ს განსხვავებული მნიშვნელობების მხოლოდ სასრული რაოდენობა არსებობს და როდესაც ეს მნიშვნელობები პერიოდულად მეორდებიან. უსასრულო წილადი პერიოდულად მაშინ ითვლება, როდესაც სრულდება შემდეგი პირობა

$$a_m = a_{m+k} \quad (6.9-11)$$

ზოგიერთი ფიქსირებული k -სთვის (*წილადის პერიოდად* წოდებული) და ზოგიერთ M რიცხვზე უფრო დიდი ყველა m -ისთვის უსასრულო. პერიოდული წილადი წარმოადგენს ირაციონალურ რიცხვს, რომელიც მთელი კოეფიციენტების მქონე კვადრატული განტოლების ამონახსნის გზით შეიძლება გამოისახოს [მაგალითად, განტოლება (6.9-7) G -სთვის]. სამართლიანია შებრუნებული თეორემაც: მთელი კოეფიციენტების მქონე ნებისმიერი კვადრატული განტოლების ამონახსნი პერიოდულად უსასრულო წილადის სახით შეიძლება გამოისახოს.

სავარჯიშო 6.9-2. აჩვენეთ, რომ ქვემოთ მოყვანილი უსასრულო პერიოდული წილადები მოცემული ირაციონალური რიცხვების ტოლია:

$$(a) \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}} = \sqrt{2} - 1$$

$$(b) \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}} = \sqrt{3} - 1$$

შენიშვნა: (ა)-ს ზოგჯერ *ვერცხლის შუალედსაც* უწოდებენ.

ამოცანა 6.9-3. ნებისმიერი x რიცხვის უსასრულო წილადის მეშვეობით წარმოდგენა შეგვიძლია შემდეგნაირად განვახორციელოთ: თავდაპირველად განვსაზღვროთ „უდიდესი მთელი ფუნქცია“ $y = \text{INT}(x)$, სადაც y წარმოადგენს x -ზე ნაკლებ უდიდეს მთელ რიცხვს. (6.9-4) წარმოდგენა მიიღება $a_0 = \text{INT}(x)$ პირობით. შემოვიღებთ აღნიშვნას $b_0 = x - a_0$, შემდეგ კი $a_1 = \text{INT}(1/b_0)$. შემდეგ ჩავსვამთ $b_1 = (1/b_0) - a_1$ და $a_2 = \text{INT}(1/b_1)$. საზოგადოდ, $a_n = \text{INT}(1/b_{n-1})$ და $b_n = (1/b_{n-1}) - a_n$. ალგორითმი მანამდე გაგრძელდება, ვიდრე b_n ნულის ტოლი არ გახდება. გამოიყენეთ ეს მეთოდი, ოქროს კვეთის, ვერცხლის კვეთისა და π -ს შემთხვევაში.

ამ პარაგრაფში მოყვანილი შედეგების გამოყენება მნიშვნელოვანია კვაზიპერიოდულ დინამიკაში, რადგან რაციონალური რიცხვების მიმდევრობების მეშვეობით, კვაზიპერიოდული ქმედების შესაბამისი, სინშირეთა ირაციონალური ფარდობის მიახლოებითი სახით წარმოდგენის საშუალება გვძლევს. უსასრულო წილადების მათემატიკით დაინტერესებული მკითხველი უნდა გაეცნოს [Wright და Hardy, 1980].

6.10 ქაოსისა და უნივერსალობის შესახებ

სინშირეთა სინქრონიზაციის შესახებ წარმოდგენის შექმნის შემდეგ მზად ვართ, რომ შევუდგეთ „ქაოსისაკენ მოგზაურობას“ კვაზიპერიოდული გზით. თავდაპირველად ყურადღება სინუსოიდურ-წრიულ ასახვაზე გავამახვილოთ. სინუსოიდურ-წრიული ასახვისთვის არაწრფივობის კრიტიკულ მნიშვნელობას $K=1$ შემთხვევაში ვაღწევთ. რა აქვს განსაკუთრებული ამ მნიშვნელობას? როდესაც $K < 1$, $f(\theta)$ -ს თითოეული მნიშვნელობისთვის არსებობს ერთადერთი θ . ამ დროს ვამბობთ, რომ ასახვა შებრუნებადია ანუ θ_{n+1} მოცემული მნიშვნელობის მეშვეობით მისი ერთადერთი θ_n წინასახის პოვნა შეგვიძლია. $K > 1$ შემთხვევაში შებრუნებადობა უკვე აღარ არსებობს. ამ დროს θ_{n+1} -ის ერთი და იგივე მნიშვნელობის შესაბამისი ორი ან მეტი θ_n შესაძლოა არსებობდეს. ეს ფაქტი ქაოტური ქმედების შესაძლებლობასთან არის დაკავშირებული, რადგან იგი ქაოსისთვის აუცილებელ წიპირობას – ტრაექტორიების მოკეცვას იწვევს.

$K < 1$ შემთხვევაში სინუსოიდურ-წრიული ასახვა გვაძლევს ნახვევთა რაციონალური რაოდენობით განსაზღვრულ პერიოდულ ქმედებას (სინშირეთა სინქრონიზაცია) ან საკმე გვაქვს კვაზიპერიოდული ქმედებასთან, რომელსაც ნახვევთა ირაციონალური რაოდენობა

შეესაბამება. როდესაც $K \rightarrow 0$, მაშინ Ω ღერძის ის ნაწილი, რომელიც სიხშირეთა სინქრონიზაციის საფეხურებს შეესაბამება, ასევე მიისწრაფვის ნულისაკენ, ანუ Ω -ს თითქმის ყველა მნიშვნელობა კვაზიპერიოდულ ქმედებასთან იქნება დაკავშირებული. K -ს 1-თან მიახლოებისას სიხშირეთა სინქრონიზაციის საფეხურები მატულობს, ხოლო $K=1$ -თვის, როდესაც შესაძლებელია ქაოსურ ქმედებას ჰქონდეს ადგილი, ზემოთ ხსენებული საფეხურები Ω ღერძს მთლიანად იკავებს.

$K=1$ შემთხვევაში კვაზიპერიოდული ტრაექტორიების არსებობა კვლავ შესაძლებელია, ოღონდ ღერძის უმცირეს ნაწილში (კვაზიპერიოდული ქმედების მიერ ღერძზე დაკავებული ადგილის გარკვევა მე-9 თავში მოყვანილი ფრაქტალური განზომილების ცნებას მოითხოვს. ღერძის ეს ნაწილი კონკრეტული წრიული ასახვისგან დამოუკიდებელია და მე-5 თავში აღწერილი ერთგანზომილებიანი უნიმოდალური იტერაციული ასახვის ფუნქციების ფეიგენბაუმის უნივერსალობის ანალოგიური წრიული ასახვის შესაბამის უნივერსალურ ქმედებასთან გვაქვს საქმე. ღერძის ამ ნაწილს გლობალური უნივერსალური მახასიათებელი ეწოდება, რადგან იგი Ω ღერძს მთლიანად მოიცავს. K -ს 0-თან მიახლოებისას Ω ღერძის კვაზიპერიოდული ქმედების შესაბამისი ნაწილი, (JBB84)-ში მოყვანილი გამოსახულების თანახმად, 1-ს უახლოვდება.

$$f_q = c(1 - K)^\beta \quad (6.10-1)$$

სადაც c მუდმივაა, ხოლო $\beta \approx 0.34$ კი უნივერსალური ექსპონენტია წრიული ასახვების ფართო კლასისთვის (როგორც ქვემოთ ვნახავთ, ასახვათა კლასები ასახვის ფუნქციების გეომეტრიული მახასიათებლების საფუძველზე განისაზღვრება).

$K > 1$ შემთხვევაში Ω -ს ზოგიერთი მნიშვნელობა შეესაბამება ქაოსს. ამ დროს (6.7-3)-ის მეშვეობით განსაზღვრული ნახვევთა რიცხვი, განმარტებაში გამოყენებული ზღვრის არარსებობის გამო, ვერ განისაზღვრება. Ω -ს სხვა მნიშვნელობები სინქრონიზებულ სიხშირეთა მომცველ ქმედებას შეესაბამება. არეები, სადაც ქმედების ეს ორი ტიპი ვლინდება, $K - \Omega$ დიაგრამაზე ერთიმეორეშია „გადახლართული“. თუ კვაზიპერიოდული ქმედებისას K ერთზე მეტი გახდა, მაშინ მოსალოდნელია ქაოსში გადასვლა. თუ Ω ისეთია, რომ $K=1$ მნიშვნელობისათვის ქმედება სიხშირეთა სინქრონიზაციას მოიცავს, მაშინ $K > 1$ -სთვის ქმედება K -ს გამუდმებული ზრდის პირობებში, საზოგადოდ, პერიოდულ სახეს შეინარჩუნებს.

გლობალურ ნიშნებთან ერთად, გარკვეული ლოკალური უნივერსალური თვისებებიც არსებობს (მაგალითად, ის თვისებები, რომლებიც Ω -ს მნიშვნელობების მცირე დიაპაზონში ვლინდებიან). მოცემული თვისებებიდან ყველაზე საინტერესოა Ω -ს ის მნიშვნელობები,

რომლებიც ნახვევთა რიცხვების გარკვეულ მიმდევრობას ქმნიან ($K \leq 1$ -სთვის). ყველაზე მეტად შესწავლილია ნახვევთა რიცხვების ის მიმდევრობა, რომელიც (6.9-10)-ით მოცემული ფიბონაჩის რიცხვების ფარდობების მიმდევრობების ოქროს კვეთის ნახვევთა რიცხვისაკენ მიისწრაფვის. იმის საჩვენებლად, თუ როგორ განისაზღვრება ეს უნივერსალობა, შემოვიტანოთ $\Omega_n(K)$ -ს ისეთი მნიშვნელობა, რომელიც ოქროს კვეთასთან n რივის მიახლოების ტოლ ნახვევთა რიცხვს იძლევა და ტრაექტორიაზე $\theta=0$ -ის შესაბამის წერტილში გადის.

$$\Omega_n(K) = \frac{F_n}{F_{n+1}} \quad (6.10-2)$$

[$\theta=0$ -ზე ყურადღება იმიტომაც განახვილებული, რომ $K=1$ მნიშვნელობისთვის $f(\theta)$ -ს კუთხური კოეფიციენტი ნულის ტოლია, რაც მე-5 თავიდან გამომდინარე, ციკლს სუპერციკლად აქცევს]. (6.10-2) განტოლებაში ფიბონაჩის რიცხვებთან დაკავშირებით წინა პარაგრაფის აღნიშნათა სისტემა გვაქვს გამოყენებული. შემოვიყვანოთ მასშტაბთან დაკავშირებული ორი ისეთი ექსპონენტა, რომლებიც მე-5 თავში განხილული იტერაციული ასახვისთვის ფეიგენბაუმის α -სა და δ -ს მსგავსად წრიული ასახვისთვის მნიშვნელოვან როლს ასრულებენ. პირველი მათგანი გვაძლევს Ω -ს მნიშვნელობათა სხვაობის ფარდობას, როდესაც ნახვევთა რიცხვი ოქროს კვეთის მნიშვნელობისაკენ მიისწრაფვის:

$$\delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Omega_n(K) - \Omega_{n-1}(K)}{\Omega_{n+1}(K) - \Omega_n(K)} \quad (6.10-3)$$

მეორე სიდიდე კი $\theta=0$ წერტილსა და ციკლის უახლოეს ელემენტს შორის d_n მანძილებს შორის ფარდობას განსაზღვრავს:

$$\alpha(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n(K)}{d_{n+1}(K)} \quad (6.10-4)$$

$\delta(K)$ -სა და $\alpha(K)$ -ს მნიშვნელობების დადგენა ფეიგენბაუმის რიცხვების (FKS82 და ROS82) განსაზღვრისას გამოყენებული პარამეტრების მეშვეობით შეიძლება. როდესაც $K=1$, სინუსოიდურ-წრიული ასახვისთვის გვექნება:

$$\begin{aligned}\delta(K) &= -2.83360 \\ \alpha(K) &= -1.28857\end{aligned}\tag{6.10-5}$$

$K < 1$ -სთვის $\alpha(K) = -G^{-1}$ და $\delta(K) = -G^{-2}$, სადაც G ოქროს კვეთაა.

სხვა ირაციონალური მნიშვნელობების შესაბამისი რაციონალური წილადების მიმდევრობათა მეშვეობით განსაზღვრულ Ω -ს მნიშვნელობათა მიმდევრობებისთვის $\delta(K)$ -სა და $\alpha(K)$ -ს მნიშვნელობები განსხვავებულია (SHE82). თუმცა, როდესაც $K=1$, ყოველი მათგანის მსგავსი ფორმით გამოსახვა შესაძლებელია. გვაქვს შემდეგი კრიტიკული მნიშვნელობები:

$$\begin{aligned}\delta(K) &= -N^{-a} \\ \alpha(K) &= -N^{-b}\end{aligned}\tag{6.10-6}$$

სადაც a და b მუდმივებია, რომლებიც ირაციონალური რიცხვის მიმართ ძალიან სუსტ დამოკიდებულებას აჩვენებენ. მაგალითად, ოქროს კვეთის $a=2.16443\dots$, და $b=0.52687\dots$, ხოლო ვერცხლის კვეთისათვის $a=2.1748\dots$, და $b=0.5239\dots$ (SHE82). N სიდიდე განისაზღვრება, როგორც ირაციონალურ რიცხვების მიახლოებითი სახით წარმოდგენისას გამოყენებული ნახვევთა რაციონალური რიცხვების სხვაობათა ფარდობა. თუ W_i წარმოადგენს მიმდევრობის i -ურ რაციონალური რიცხვს, მაშინ N -ს ექნება შემდეგი სახე:

$$N^2 = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{W_i - W_{i+1}}{W_i - W_{i-1}}\tag{6.10-7}$$

ოქროსა და ვერცხლის კვეთებისათვის იგი თავისთავად ირაციონალურ რიცხვს უტოლდება.

ამოცანა 6.10-1. აჩვენეთ, რომ $f^{(p)}(0)$ გვაძლევს სიხშირეთა $p:q$ სინქრონიზაციის შესაბამისი ტრაექტორიის იმ მნიშვნელობას, რომელიც უახლოესია $\theta=0$ -თან.

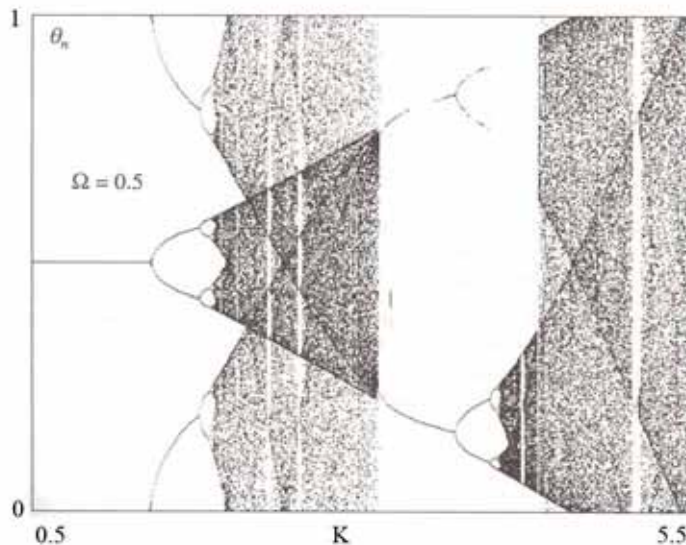
ამოცანა 6.10-2. დაამტკიცეთ, რომ $K < 1$ შემთხვევაში (6.10-2)-ით მოცემული Ω -ს მნიშვნელობათა მიმდევრობისთვის გვაქვს $\alpha = -G^{-1}$ და $\delta = -G^{-2}$.

სავარჯიშო 6.10-3. აჩვენეთ, რომ (6.10-6)ში მოყვანილი a და b მნიშვნელობები გვაძლევენ (6.10-5) შედეგებს.

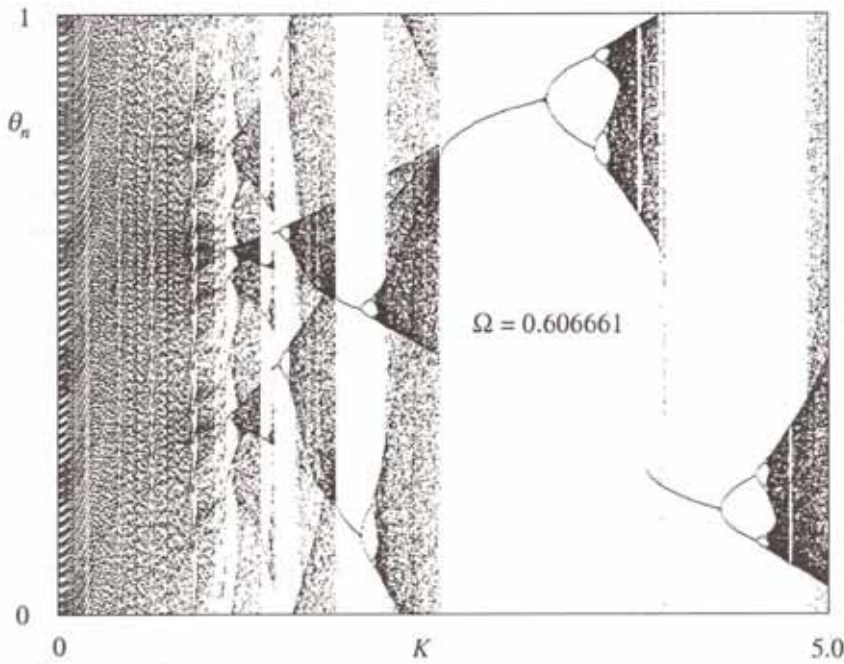
ყურადღება მიაქციეთ, რომ მე-5 თავსა და F დანართში ფეიგენბაუმის „სტანდარტული“ მნიშვნელობები მხოლოდ იმ ერთგანზომილებიანი იტერაციული ასახვის ფუნქციებისთვის გამოიყენება, რომლებიც თავიანთ მაქსიმალურ მნიშვნელობათა მიდამოებში კვადრატულ სახეს ღებულობენ. სხვა ფუნქციების შემთხვევაში, $\delta(K)$ -სა და $\alpha(K)$ -ს მნიშვნელობები განსხვავებულია. ამრიგად, მაქსიმალურ მნიშვნელობათა მიდამოებში ფუნქციათა სახის მიხედვით ასეთი ერთგანზომილებიანი ასახვები სხვადასხვა უნივერსალურობის მქონე კლასებად იყოფიან. ანალოგიური წესით შეგვიძლია წრიული ასახვების შესაბამისი უნივერსალურობის კლასების განსაზღვრა. წრიული ასახვებისთვის $\theta=0$ გალუნვის წერტილის მიდამოში ასახვის ფუნქციონალური დამოკიდებულება $K=1$ შემთხვევაში მულავნდება (გაიხსენეთ, რომ გაღალუნვის წერტილში მეორე რიგის წარმოებული ნულის ტოლია.) ჰუმ, ვალინიამ და პირომ (HVP90) $\delta(K)$ -სა და $\alpha(K)$ -ს გამოთვლის გზით ასახვათა ფუნქციებისთვის შეისწავლეს უნივერსალურობის კლასები.

$$f(\theta) = 2\pi\theta - 2^{z-1} \theta |\theta|^{z-1} \quad (6.10-8)$$

აქ θ განსაზღვრულია $[-1/2, 1/2]$ ინტერვალშია z პარამეტრი გაღალუნვის „ხარისხს“ აკონტროლებს. $z=3$ პირობებში ე.წ. კუბურ გაღალუნვასთან გვაქვს საქმე და (6.10-8)-ით განსაზღვრული ასახვის ფუნქცია სინუსოიდურ-წრიული ასახვის შესაბამისი $\delta(K)$ -სა და $\alpha(K)$ -ს მნიშვნელობებს იძლევა.



ნახაზი. 6.15. ბიფურკაციული დიაგრამა სინუსოიდურ-წრიული ასახვისთვის, როდესაც $\Omega=0.5$. θ -ს საწყისი მნიშვნელობა ნულის ტოლია. აღსანიშნავია, რომ $K=1$ კრიტიკული მნიშვნელობის შემდეგ ქაოსური ქმედება არ მქვანდება. შედარეთ პერიოდის გაორმაგებათა მიმდევრობები და ქაოსური არეების თანაკვეთები მე-5 თავში წარმოდგენილ ერთგანზომილებიანი იტერაციული ასახვების პერიოდის გაორმაგებათა მიმდევრობებსა და ქაოსურ დიაპაზონთა თანაკვეთებს.



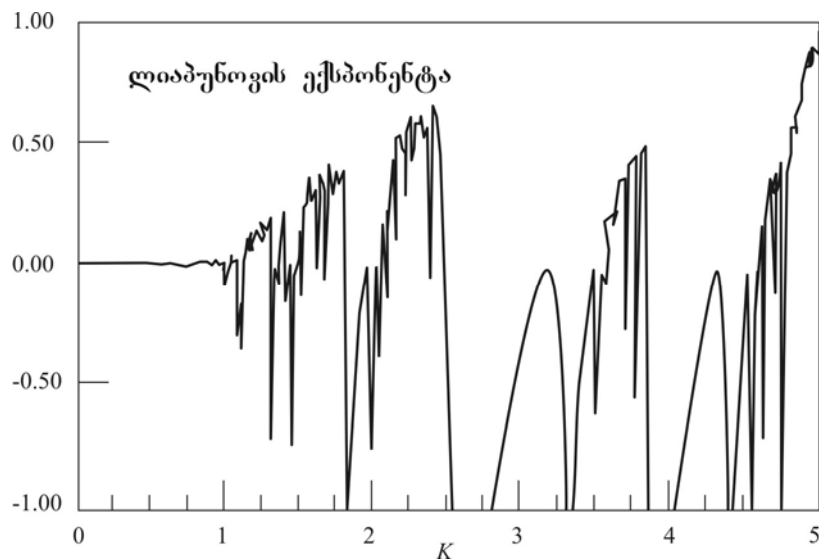
ნახაზი. 6.16. ბიფურკაციული დიაგრამა სინუსოიდურ-წრიული ასახვისთვის, როდესაც $\Omega=0.606661$. აღსანიშნავია, რომ $K=1.0$ მნიშვნელობის ქვემოთ ქმედება კვაზიპერიოდულია. $K=1$ მნიშვნელობის მიდამოში სახეზეა ქაოსური ქმედება, რომელსაც პირდაპირ პერიოდული ქმედების დიაპაზონში გადაყვავართ. $K=1$ მნიშვნელობის ზემოთ კი პერიოდის გაორმაგებები და მეტი ქაოსი ვლინდება.

HVP90 $\delta(K)$ -სა და $\alpha(K)$ -ს მნიშვნელობებს z -ის სხვადასხვა მნიშვნელობებისას ითვლის. უფრო მეტი z -ის შემთხვევაში ეს მნიშვნელობები ერთი შეხვედვით $\alpha(K) = -1.0$ და $\delta(K) = -4.11$ მნიშვნელობებს გლუვად უახლოვდება (დიდი z ნიშნავს, რომ გადალუნვის წერტილის მიდამოში ასახვის ფუნქცია ძალზე ბრტყელია.)

ამოცანა 6.10-4. (a) აჩვენეთ, რომ სინუსოიდურ-წრიულ ასახვას $K=1$ შემთხვევაში $\theta=0$ მოხრის წერტილის მიდამოში კუბური ტიპის ქმედება ახასიათებს. (b) სად მდებარეობს (6.10-8)-ით მოცემული $f(\theta)$ -ს გადალუნვის წერტილი? დარწმუნდით, რომ z მართლაც გვაძლევს გადალუნვის ხარისხს.

როგორც უკვე აღნიშნეთ, თუ სინუსოიდურ-წრიული ასახვის ნახვევთა რიცხვს ოქროს კვეთის ირაციონალურ მნიშვნელობას შევუსაბამებთ, მაშინ ქაოსი $K=1$ მნიშვნელობაზე იჩენს თავს. მეორეს მხრივ, როდესაც სინშირეთა სინქრონიზაციის არეში $K=1$ მნიშვნელობისაკენ მივიწრაფეთ, ქაოსურ ქმედებას ვერ ვამჩნევთ, ვიდრე K საგრძნობლად არ გაიზრდება. ქაოსურ ქმედებაში გადასვლა პერიოდის გაორმაგების მიმდევრობის მეშვეობით ხდება.

$K=1$ მნიშვნელობის ზემოთ სინუსოიდურ-წრიული ასახვისათვის ბიფურკაციული დიაგრამა საკმაოდ რთულდება. 6.15 6.16 ნახაზებზე დიდი K -სა და Ω -ს ორი მნიშვნელობის (0.5 და 0.606661) შესაბამისი ბიფურკაციული დიაგრამებია გამოსახული.



ნახაზი. 6.17. ლიაპუნოვის ექსპონენტის საშუალო მნიშვნელობა, როგორც K -ს ფუნქცია $\Omega=0.606661$ შემთხვევაში. 6.16 ნახაზთან შედარება გვაძლევს, რომ კვაზიპერიოდული ქმედების შემთხვევაში ლიაპუნოვის ექსპონენტი ნულის ტოლია, ხოლო ქაოსური ქმედებისათვის კი დადებითი სიდიდეა.

ამ დიაგრამებიდან სამი მნიშვნელოვანი დასკვნა გამოგვაქვს. 1) წერტილთა გადაფარვას $K < 1$ შემთხვევაში (კვაზიპერიოდულობა) სხვა ხასიათი აქვს $K > 1$ -ის შესაბამის ქაოსურ არეებში არსებულთან შედარებით. მკითხველმა შესაძლოა შეამჩნიოს კვაზიპერიოდული ქმედების ზოლური სტრუქტურა და შეადაროს იგი ქაოსური არეების „შემთხვევითი ხასიათის გაბნევას“. 2) როგორც უკვე აღნიშნეთ, $\Omega=0.5$ შემთხვევაში $K=1$ მნიშვნელობა შეესაბამება სინშირის სინქრონიზაციას. ქაოსური ქმედება უშუალოდ $K=1$ მნიშვნელობაზე კი არ აღიძვრება, არამედ მხოლოდ $K=1$ მნიშვნელობის ზემოთ; 3) დიაგრამები Ω -ს მნიშვნელობაზე შესამჩნევად არის დამოკიდებული. ქმედება ტრაექტორიის

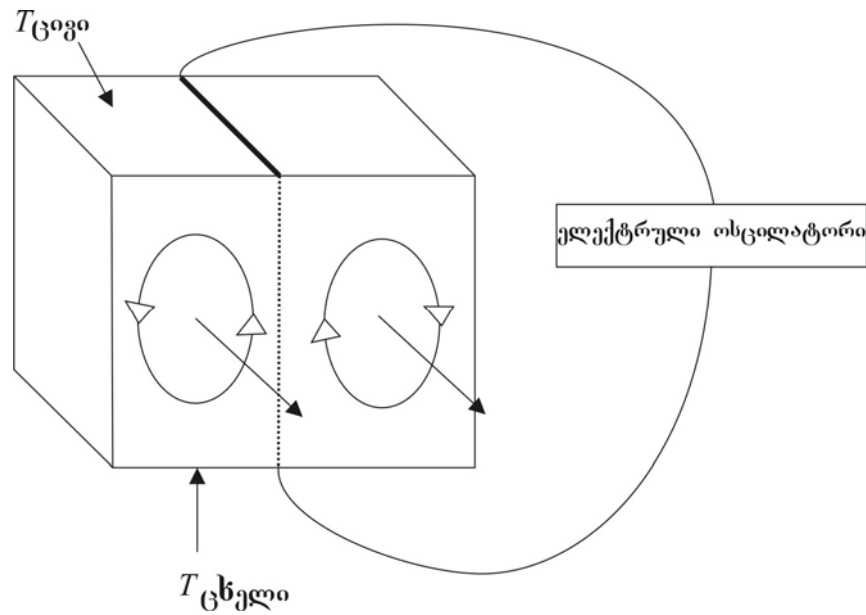
საწყის წერტილზეც არის დამოკიდებული. $K>1$ შემთხვევაში არნოლდის ენები ერთმანეთს გადაფარავს და განსხვავებულმა საწყისმა წერტილებმა შეიძლება სინშირეთა სინქრონიზაციის განსხვავებული ფარდობები მოგვცეს.

$K>1$ შემთხვევაში ტრაექტორიის წერტილთა გაბნევის არეების ქაოსურობის შემოწმების მიზნით ტრაექტორიის ლიაპუნოვის (საშუალო) ექსპონენტა უნდა გამოვთვალოთ. 6.17 ნახაზი იძლევა ასეთი შემთხვევის ილუსტრაციას. $K>1$ ქაოსური არეებში ლიაპუნოვის ექსპონენტა დადებითია, ხოლო კვაზიპერიოდული დიაპაზონები კი ნულის ტოლ მნიშვნელობას იძლევა. ამრიგად, ჩვენ შეგვიძლია ლიაპუნოვის ექსპონენტა კვაზიპერიოდულ და ქაოსურ ქმედებათა განსხვავებისთვის გამოვიყენოთ.

6.11 ზოგიერთი გამოყენება

ამ პარაგრაფში გაკვირვებით შევეხებით ზოგიერთ ფიზიკურ სისტემას, რომლებიც ჩვეულებრივიდან ქაოსურ მდგომარეობაში გადასვლისას კვაზიპერიოდული გარდამავალ სტადიებს გადიან. სინუსოიდურ-წრიული ასახვა შესანიშნავი ნიმუშია იმისა, თუ როგორია სისტემის მახასიათებლები პარამეტრის *კრიტიკულზე* ($K=1$ სინუსოიდურ-წრიული ასახვისათვის) ნაკლები მნიშვნელობების შემთხვევაში. კრიტიკულ მდგომარეობამდე შესაძლებელია ქმედების ორად ორი ტიპი – სინშირეთა სინქრონიზაცია და კვაზიპერიოდულობა. კრიტიკული მდგომარეობის შემდგომ კი შესაძლოა ქაოსი აღიძრას. ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების მიერ აღწერილი ფიზიკური სისტემისთვის ვიცით, რომ ქაოსი მდგომარეობათა სივრცის მინიმუმ სამგანზომილებიან ტრაექტორიებს საჭიროებს. $K>1$ შემთხვევაშიც კი სინუსოიდურ-წრიული ასახვა კვლავ წრეზე მოძრაობას აღწერს, რაც თავის მხრივ, ორგანზომილებიან მდგომარეობათა სივრცეში მყოფი ზედაპირის პუნკარეს სიბრტყესთან კვეთას შეესაბამება. თუ პუნკარეს კვეთა ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების მიერ აღწერილი სისტემისთვის წრეა (ან სხვა შეკრული კონტური), მაშინ მოძრაობა კვაზიპერიოდული იქნება. თუ ქაოსურ ქმედებასთან გვაქვს საქმე, მაშინ პუნკარეს კვეთა მარტივი მრუდი აღარ იქნება. ამრიგად, სინუსოიდურ-წრიული ასახვის შესაბამის ქმედებას „კრიტიკული“ მდგომარეობის შემდგომ ($K > 1$) მიმდინარე მოვლენების აღსაწერად ვერ გამოვიყენებთ. კრიტიკულობის ზღვრის მიღმა მყოფი არე ფაქტიურად გამოუკვლეველია, როგორც თეორიულად, ისე პრაქტიკული თვალსაზრისით. ქვემოთ მოყვანილი შემთხვევები უმეტესწილად, კრიტიკული ზღვრის ქვემოთ მყოფ

სიხშირეთა სინქრონიზაციას არეების და ნახვევთა ირაციონალური რიცხვის შესაბამის კვაზიპერიოდული ქმედების გავლით ქაოსში გადასვლას ემყარება.



ნახაზი 6.18. რელი-ბენარდის პერიოდულად მოდულირებული ექსპერიმენტის სქემატური დიაგრამა. სითხის სახით გამოყენებულია ვერცხლისწყალი. ისრებით აღნიშნული (B) მაგნიტური ველი კონვექციურ კამერათა ღერძების პარალელურადაა მიმართული. პერიოდულად ცვლადი ელექტრული დენი მიემართება ორი კონვექციური კოჭის გამყოფ ფენაში. პუნქტური ელექტრული დენის ძირითად მიმართულებას აღნიშნავს.

ასეთ ექსპერიმენტებში ნახვევთა სასურველი რიცხვის შესანარჩუნებლად ორი პარამეტრი მაინც უნდა რეგულირდებოდეს.

რელი-ბენარდის იძულებითი კონვექცია

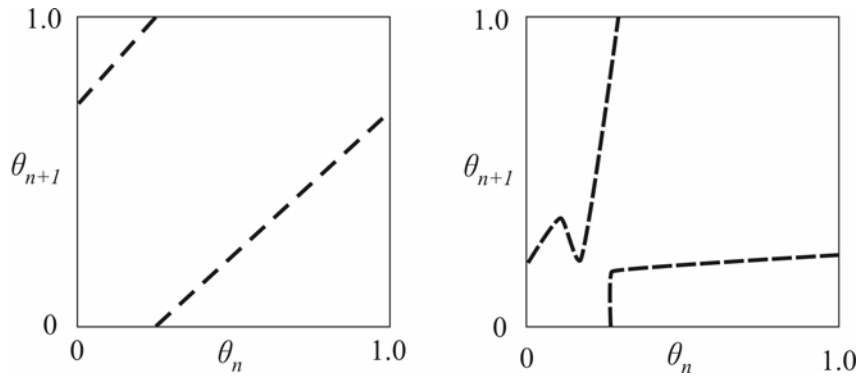
პირველ თავში, ლორენცის მოდელის განხილვისას, წარმოვადგინეთ რელი-ბენარდის ხსნარის კონვექცია. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, თუ კამერის ქვედა და ზედა ნაწილებს შორის ტემპერატურული სხვაობა საკმარისად დიდია, კონვექციური კოჭები რხევას იწყებენ. ქმედების ამგვარ ტიპს მდგომარეობათა სივრცეში ზღვრული ციკლი აღწერს. სტევანსმა, ჰესლოტმა და ლიბჰაბერმა (SHL85) რელი-ბენარდის ექსპერიმენტი ვერცხლისწყლით (ამგვარად, მხოლოდ ორი კონვექციური კოჭაა) გავსებულ პატარა კამერაში ჩაატარეს. მათ კონვექციური კამერების ღერძის პარალელური 200 გაუსი დაძაბულობის შესაბამისი მუდმივი მაგნიტური ველი გამოიყენეს (ნახაზი 6.18). ორი კონვექციური კოჭის გამყოფ ვერტიკალურ სიბრტყეში პერიოდულად ცვლადი დენის გატარების შედეგად მეცნიერებმა ხსნარის ნაკადის

პერიოდულ მოდულაციას მიაღწიეს (გაიხსენეთ, რომ დამუხტული ნაწილაკის სინქარე მაგნიტური ველის პერპენდიკულარულადაა მიმართული). შესაძლებელია პერიოდულად ცვლადი დენის სიხშირისა და ამპლიტუდის ვარიაცია. წრიული ასახვის შემთხვევაში, ხსნარის თავისუფალი რხევის სიხშირის შეფარდება პერიოდულად ცვლადი დენის სიხშირესთან Ω -ს, ხოლო ცვლადი დენის ამპლიტუდა კი K -ს შეესაბამება.

სინუსოიდურ-წრიული ასახვის მსგავსად, ცვლადი დენის ამპლიტუდათა მცირე მნიშვნელობების (10 მილიამპერზე ნაკლები) შემთხვევაში სისტემა არნოლდის ენებით გამოსახულ სიხშირეთა სინქრონიზაციასა და კვაზიპერიოდულ ქმედებას ამჟღავნებს. 6.10 პარაგრაფში აღწერილი მეთოდის მეშვეობით ფარდობით სიხშირეთა სიმრავლის ოქროს კვეთისაკენ კრებადობის მიღწევის შედეგად, SHL-მა მიიღო $|\delta(K)| = 2.8 \pm 0.3$. ეს მნიშვნელობა თანხმობაშია უნივერსალურობის პროგნოზთან. მეცნიერებმა ვერცხლის კვეთაში კრებადი ფარდობით სიხშირეთა მნიშვნელობების მიმდევრობისათვისაც განსაზღვრეს $|\delta(K)|$ -ს მნიშვნელობა და მიიღეს, რომ $|\delta(K)| = 7.0 \pm 0.7$. გარდა ამისა, მეცნიერებმა ზუსტად ქაოსის ზღვარზე მყოფი კვაზიპერიოდული არეების ე.წ. ფრაქტალური განზომილებაც გამოიკვლიეს, რომელსაც მე-9 თავში დავუბრუნდებით.

პერიოდულად შემფოთებადი გულის უჯრედები

ცოცხალ სისტემათა უმრავლესობა არსებობს რხევით ქმედებას უნდა უმაღლოდეს. ადამიანში ამკარად გამოხატული რხევითი მოვლენებია გულის განმეორებადი ფეთქვა და ფილტვების რეგულარული სუნთქვა. ამას გარდა ბევრი სხვა რხევაც არსებობს, მაგალითად ტვინში ელექტრული სიგნალების რეგულარული რხევები და დაახლოებით 24 საათის პერიოდის მქონე მრავალი ქიმიური რხევა (ამ უკანასკნელთ დღელამურ რიტმებადღე მიყვართ). სულაც არ არის გასაკვირი, რომ დაახლოებით უკანასკნელი 15 წლის განმავლობაში ბევრი მეცნიერი მერხევი სისტემების ქმედების კვლევისას არაწრფივი დინამიკის მეთოდოლოგიის გამოყენებას შეუდგა. ცოცხალ ორგანიზმში მერხევი სისტემები ერთმანეთთან და გარემოსთან ურთიერთქმედებს. ამრიგად, ჩვენ უნდა ველოდოთ სიხშირეთა სინქრონიზაციის, კვაზიპერიოდულობისა და ქაოსის ფენომენის მათთვის გამოყენებას.



ნახაზი 6.19. პერიოდულად სტიმულირებადი გულის უჯრედის დინამიკის მოდელირებისთვის გამოყენებული წრიული ასახვის გრაფიკები. მარცხნივ მოყვანილია კვაზიპერიოდული ქმედების გამომწვევი პირობები, მარჯვნივ კი – ქაოსური ქმედებისა. შენიშნეთ, რომ მარჯვნივ ასახვის ფუნქცია შებრუნებადი არ არის და ტრაექტორიების მოკეცვას იწვევს. [(GSB86, გვ. 248-249)] დაყრდნობით.

ამ სისტემების შესწავლისთვის არაწრფივი დინამიკის გამოყენების მაგალითია მაკგილის უნივერსიტეტში ჩატარებული ექსპერიმენტების სერია [Glass და Mackey, 1988] (GGB84) (GSB86). ლ. გლასმა და მისმა თანამშრომლებმა ფრინველის ჩანასახის გულის უჯრედის გამოსაყვანად პერიოდული სახის ელექტრული გარეშე სტიმულაცია გამოიყენეს. საცდელი მასალა შედგებოდა შვიდი დღის ემბრიონისგან მიღებული უჯრედების მცირე ნაწილაკებისგან (თითოეული დაახლოებით 100 μm დიამეტრით). ზრდასრული ფრინველის გულის ანალოგიურად, თითოეული ნაწილაკი დაახლოებით 0.5 წამის პერიოდის სიხშირით ფეთქავდა. ექსპერიმენტში უჯრედის შიდა ელექტროდის გავლით, ელექტრულ პულსად გამოყენებული გარე სტიმულაციის ამპლიტუდა და სიხშირე იცვლებოდა.

ექსპერიმენტის ძირითადი შედეგები თანხმობაშია სინუსოიდურ-წრიული ასახვის ქმედების შესაბამის პროგნოზთან. ზომიერი ამპლიტუდის მქონე სტიმულაციის შემთხვევაში, უჯრედები არნოლდის ენების ანალოგიურ სიხშირეთა სინქრონიზაციასა და კვაზიპერიოდულ ქმედებას უჩვენებდნენ. დიდი ამპლიტუდის მქონე სტიმულაციის პირობებში კი პერიოდის გაორმაგების გავლით მიღებული ქაოტური ქმედება იქნა დაფიქსირებული. ამ ექსპერიმენტებში ცვლადის სახით გამოყენებულია გულის უჯრედის თანმიმდევრულ ფეთქვებს შორის არსებული დროის ინტერვალი. ქაოსური ქმედება ნიშნავს, რომ დროის მოცემულ ინტერვალებს ამოუცნობი პერიოდულობა ახასიათებს. ამგვარი ქმედება თვისობრივად კვლავ დიდი K -ს მქონე სინუსოიდურ-წრიული ასახვის შესაბამისი ქმედების მსგავსია (იხ. 6.15 და 6.16 ნახაზები).

გლასმა და მისმა თანამშრომლებმა გულის უჯრედთა სისტემის დინამიკური ქმედების მოდელირება წრიულ ასახვასთან კავშირის დამყარების მეშვეობით შეძლეს: გარე შემფოთებები სპონტანური რხევის ციკლის θ კუთხური ცვლილით მოცემულ გარკვეულ ფაზაზე აღიძვრება, სადაც $0 < \theta < 1$. პულსის შემფოთების ეფექტი ოსცილატორის ახალ θ' ფაზურ მნიშვნელობაზე გადასვლაში გამოიხატება:

$$\theta' = g(\theta) \quad (6.11-1)$$

სადაც g ფუნქცია მოცემულია ე.წ. ფაზათა გარდამავალი მრუდით. ეს უკანასკნელი სისტემაზე მოქმედი θ -ს სხვადასხვა მნიშვნელობების შესაბამისი ცალკეული პულსის გამოყენებით შეიძლება გაიზომოს.

როდესაც სისტემა სტიმულის პულსების პერიოდული მიმდევრობის ზემოქმედებას განიცდის, ზუსტად n რიგის პულსამდე არსებული სპონტანური რხევების ფაზა შემდეგნაირია:

$$\theta_n = g(\theta_{n+1}) + \Omega \quad (6.11-2)$$

სადაც Ω სპონტანური რხევების სიხშირის სტიმულის სიხშირესთან ფარდობაა. ეს კი ზუსტად წრიული ასახვაა. 6.19 ნახაზის მარცხენა ნაწილში ნაჩვენებია გულის უჯრედის მონაცემების მიხედვით განსაზღვრული წრიული ასახვის გრაფიკი პარამეტრთა იმ დიაპაზონში, სადაც კვაზიპერიოდული ქმედება აღიძვრება. მარჯვნივ პარამეტრთა იმ დიაპაზონის შესაბამისი გრაფიკია გამოსახული, სადაც ქაოსური ქმედება ვლინდება. ამკარაა სინუსოიდურ-წრიულ ასახვასთან დაკავშირებული თვისობრივი მსგავსებები.

კომენტარები ბიოლოგიური მოდელების შესახებ

გულის უჯრედის შემთხვევა არაერთ მნიშვნელოვან მეთოდოლოგიურ (და ფილოსოფიურ) შეკითხვას ბადებს. რას ნიშნავს, რომ ფრინველის გულის უჯრედის დინამიკა წრიული ასახვის მიერ არის მოდელირებული? ეს ხომ არ ნიშნავს, რომ გულის უჯრედებში არსებობს კომპიუტერის ანალოგიური რაღაც, რომელიც წრიული ასახვის სწრაფ იტერაციას ახდენს და განსაზღვრავს ამ უჯრედთა ქმედებას?

ერთი მხრივ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ფიზიკურ, ქიმიურ, თუ ბიოლოგიურ მერხვე სისტემებში, ჩვენ მიერ შესწავლილი არაწრფივი დინამიკიდან გამომდინარე, ბევრ უნივერსალურ თვისებას უნდა ველოდოდ. როდესაც ასეთი თვისებები წრიული ასახვის მსგავსი, მარტივი მათემატიკური სქემებითაა აღწერილი, კვლევის გაგრძელებაში კვლავაც წრიული ასახვა დაგვეხმარება. როგორც ვნახეთ, არაწრფივი სისტემების ქმედება ძალიან რთულია და ქმედებათა სისტემატიზაციისათვის გარკვეული მეთოდოლოგია გვესაჭიროება. ამასთან, ჩვენ შევისწავლეთ, რომ პერიოდის გაორმაგებით გამოწვეული გარდამავალ სტადიათა ზოგიერთი ტიპი, რომლებიც დაიკვირვებიან სინშირეთა სინქრონიზაციას, კვაზიპერიოდულობასა და ქაოსურ ქმედებას შორის, დამახასიათებელია მოდელთა ფართო კლასისათვის. ამრიგად, „რეალურ“ სისტემასთან დაკავშირებით ნებისმიერი ასეთი მოდელით შეგვიძლია ვისარგებლოთ.

მეორე მხრივ გვსურს, რომ ჩვენი მოდელები „რეალურად“ გამოიყურებოდეს (ანუ მივიღოთ ინფორმაცია, თუ რა ხდება „სინამდვილეში“ ფრინველის გულში). ექსპერიმენტის რეალური აღწერა სავარაუდოდ გაგვაგებინებს (რასაც წრიული ასახვა ვერ მოახერხებს), თუ რა მოსდის გარე სტიმულაციის ზეგავლენის ქვეშ მყოფი უჯრედის მემბრანის ელექტრულ პოტენციალებს. წრიული ასახვა არ გვაძლევს ინფორმაციას, თუ რა ემართებათ სინამდვილეში გულის უჯრედებს და უმჯობესი იქნებოდა, თუკი მეცნიერები განავითარებდნენ უფრო რეალისტურ მეთოდებს.

სისტემათა შორის და სისტემის ფარგლებში მიმდინარე ბუნებრივი ბიოლოგიური ცვალებადობა (ე.წ. ბიოლოგიური ხმაური) ნიშნავს, რომ გულის უჯრედის ერთი ნაწილაკისთვის გამოყენებული წრიული ასახვა განსხვავებულია მეორე ნაწილაკის ან გარკვეული დროის შემდეგ იმავე ნაწილაკის შესაბამისი წრიული ასახვისგან. სისტემა ცოცხლობს, იზრდება და კვდება, ამასთან განუწყვეტლივ იცვლება.

ჩვენ არ შეგვიწინააღმდეგებთ სისტემის ქმედების რეალური სურათის მიღების მიზანს, მაგრამ ვიტყვით, რომ წრიული ასახვის მსგავსი გამარტივებული მოდელების მეშვეობით მათემატიკური მოდელირება ბიოლოგიური სისტემის შეცნობის შუალედური საფეხურია. თუ მათემატიკური მოდელი სწორედ და დიდი დოზებით მოიცავს დინამიკის თვისებებს, მაშინ ეს ქმედების შესწავლაში დიდ დახმარებას გაგვიწევს. მიუხედავად ამისა, ის ვერ შეცვლის რეალურ მოდელს, რომელიც სისტემის დეტალური ბიოლოგიური მექანიზმების შეცნობის საშუალებას გვაძლევს.

ბიოლოგიური სისტემები უამრავი ფიზიკოსისა თუ ქიმიკოსის მიერ შესწავლილ სისტემებთან შედარებით რთულია. საკვირველი იქნება, თუ ვინმე ამ სისტემების ქმედების შესახებ ამომწურავ რაოდენობრივ ინფორმაციას მოგვაწვდის. ალბათ ყველაზე მნიშვნელოვანი

აღმოჩენა ის არის, რომ ბიოლოგიური დინამიკა შედარებით მარტივი სისტემების (ბიოლოგიური საზომით) შემთხვევაში კი, შეიძლება თავისუფლების მცირე ღონეების მიხედვით აიგოს. [Glass და Mackey, 1988] და [Winfree, 1980] ბიოლოგიური რხევების ზოგიერთი ასპექტის შესწავლის მიზნით არაწრფივი დინამიკის გამოყენების შესანიშნავი მაგალითია.

პერიოდულად მართული რელაქსაციური ოსცილატორი

კვაზიპერიოდული ქმედების ბოლო ნიმუშია I დანართში წარმოდგენილი ვან დერ პოლის ოსცილატორის რხევა. ვან დერ პოლის განტოლების (I-4) ამონახსნები სპონტანურად წარმოქმნილ ზღვრულ ციკლებს აღწერს, ანუ დროისგან დამოუკიდებელი ძაბვის პირობებში ვან დერ პოლის განტოლებით აღწერილი ელექტრული წრედი ასრულებს პერიოდულ რხევებს. I დანართის თანახმად, ვან დერ პოლის მოდელის დინამიკური შესაძლებლობები შეზღუდულია. დინამიკური შესაძლებლობების დიაპაზონის ზრდას განტოლებაში კიდევ ერთი წევრის შემოტანით ვახერხებთ. ეს წევრი წრედის პერიოდულ მოდულაციას გამოხატავს. მოდულაციას შესაძლოა სხვადასხვა სახე ჰქონდეს, მაგრამ როგორც წესი განტ. (I-4)-ის მარჯვენა ნაწილში შემოჰყავთ პერიოდული „ძალის“ გამომხატველი წევრი:

$$\frac{d^2Q}{d\tau^2} - (R - Q^2) \frac{dQ}{d\tau} + Q = F \cos(2\pi f\tau) \tag{6.11-3}$$

სადაც F ძალის აბსოლუტური სიდიდეა, ხოლო f რხევის სიხშირეა.

ვან დერ პოლის ძალოვან ოსცილატორს შთაბეჭდავი ისტორია აქვს. 1928 წელს ვან დერ პოლმა და ვან დერ მარკმა (VAV28) ეს განტოლება გულისცემისა და არითმიად ცნობილი გადახრის ზოგიერთი ასპექტის მოდელირებისთვის გამოიყენეს. რადიოლოკაციის განვითარებისთვის გამოყენებული ელექტრული ოსცილატორების შესწავლის ინტენსივობის ზრდის მაგალითია მერი კარტრაიტის და ჯ. ლითლუდის მიერ 1945 წელს გამოქვეყნებული მათემატიკური თეორია ვან დერ პოლის ძალოვანი ოსცილატორის შესახებ (CAL45). აშკარაა, რომ ამ მეცნიერებმა მიაგნეს ისეთ შესაძლებლობებს, რასაც ჩვენ დღესდღეობით ქაოსურ გადაწყვეტას ვუწოდებთ (იხ. აგრეთვე CAR48). ნ. ლევენსონმა (LEV49) 1949 წელს მსგავსი შედეგები გამოაქვეყნა [ს. სმეილი ნალის ასახვაში (SMA63), ლევენსონის ნაშრომით ხელმძღვანელობდა]. ქაოსური ქმედების ცნებად ჩამოყალიბებამდე, მის შესახებ შედარებით თანამედროვე ნაშრომი [Hayashi, 1964]-ია. აღმოჩნდა, რომ მდგრადი

(გარდამავალთან შედარებით) ქაოსური მოძრაობა უფრო ადვილად დაკვირვებადია, თუ პერიოდული ძალის ნაცვლად „სიჩქარის“ (dQ/dt -ს შემცველი) წვერის პერიოდული მოდულაციით ვისარგებლებთ. ასეთი მოდელი გულდასმით შეისწავლა რ. შოუმ (SHA81). ცოტა ხნის წინ აბრაჰამმა და სიმომ გარეშე ძალის მიერ მართული ვან დერ პოლის სისტემები ასიმეტრიული ძალოვანი ელემენტების (რომლებშიც ქაოსი უფრო ადვილად ვლინდება) პირობებში შეისწავლეს.

გარეშე ძალების მიერ მართული რელაქსაციური ოსცილატორების თეორიული კვლევების მოკლე განხილვის შემდეგ, კვლავ ექსპერიმენტს დავუბრუნდეთ. ოპერატიული გამაძლიერებლის მქონე რელაქსაციურ ოსცილატორზე პერიოდული მოდულაციის მიერთებით ქამინგმა და ლინსეიმ (CUL88) ქაოსისკენ მიმავალი კვაზიპერიოდული გზა დეტალურად, რაოდენობრივად შეისწავლეს. მათ დაახლოებით არნოლდის 300 ენის მდებარეობის დადგენა შეძლეს და სინუსოიდურ-წრიული ასახვის მოსალოდნელ უნივერსალობასთან კონფლიქტში მყოფი შედეგები მიიღეს. განსაკუთრებით აღსანიშნავია, რომ ოქროს კვეთასთან მიახლოებული ნახვევთა რიცხვის მიმდევრობის მეშვეობით მიღებული $d(K)$ -ს მნიშვნელობა ერთი და იგივე კი არ აღმოჩნდა, არამედ ორ -3.3 ± 0.1 და -2.7 ± 0.2 მნიშვნელობას შორის მერყეობდა. მეტიც, ფრაქტალური განზომილება სინუსოიდურ-წრიული ასახვის მიხედვით მოსალოდნელ მნიშვნელობასთან თანხმობაში არ იმყოფებოდა.

ამგვარი გადახრების ახსნა ელსტრომმა, კრისტიანსენმა და ლევინსენმა (ACL88) შეძლეს. მათ ზოგიერთ რელაქსაციურ ოსცილატორში სინშირეთა სინქრონიზაციასა და ქაოსში გადასვლებს შორის სხვაობის საჩვენებლად „ინტეგრებისა და ცეცხლის“ მოდელი გამოიყენეს. სინუსოიდურ-წრიული ასახვის მოდელებში ქაოსი თავდაპირველად $K=1$ მნიშვნელობის შემთხვევაში აღიძვრება, როდესაც არნოლდის ენები მთელი Ω ღერძის გადაფარვის ტენდენციას აკლენს. ამრიგად, სინუსოიდურ-წრიულ ასახვას ორი იდენტური გარდამავალი სტადია გააჩნია. ACL ამტკიცებს, რომ პერიოდულად მოდულირებული ინტეგრებისა და ცეცხლის ტიპის რელაქსაციური ოსცილატორისათვის, რომელიც ოპერატიული გამაძლიერებლის მქონე რელაქსაციურ ოსცილატორზე უკეთესი ფიზიკური მოდელია, გარდამავალ სტადიათა ორი ტიპი შეიძლება განისაზღვროს და ამიტომ ის სინუსოიდურ-წრიული ასახვის რაოდენობრივი თვისებების გამოყენებას არ საჭიროებს. ისინი ასევე ამტკიცებენ, რომ რეალურ სისტემაში ინტეგრებისა და ცეცხლის მეთოდთან დაკავშირებული ხარვეზის გადაფარვა ხდება და ქაოსში გადასვლის მახასიათებლების რიცხვითი მნიშვნელობები სინუსოიდურ-წრიული ასახვის მიერ ნავარაუდევისგან დიდად განსხვავებული არ იქნება (ბიოლოგიური ოსცილატორებისა და ინტეგრებისა და ცეცხლის

მოდელის შესახებ დაწვრილებითი ინფორმაციისათვის მიმართეთ [Glass და Mackey, 1988].)

უკანასკნელი შემთხვევა გვარწმუნებს, რომ მარტივი მოდელებისგან ბევრს არაფერს უნდა ველოდოთ. სინუსოიდურ-წრიული ასახვა კვაზიპერიოდულ ქმედებასთან დაკავშირებით ძალიან გვეხმარება, მაგრამ იგი მისი ბუნების სრულ შესაძლებლობებს არ მოიცავს. არაწრფივი დინამიკის არაერთი სფეროს ანალოგიურად, ჩვენ შესაძლებლობების სრული კატეგორიზაციისა და შეცნობის დეფიციტს განვიცდით.

6.12 დამატებითი ლიტერატურა

ქაოსში გადასვლის კვაზიპერიოდული გზები განხილულია არაწრფივი სისტემების შესახებ ნაშრომთა უმრავლესობაში. იხილეთ 1-ლი თავის ბოლოს ლიტერატურის სია. განსაკუთრებით, კი [Berge, Pomeau, and Vidal, 1984] and [Schuster, 1995].

T. W. Dixon, T. Gherghetta, and B. G. Kenny, "Universality in the quasiperiodic route to chaos," *Chaos* 6, 32-42 (1996).

ადრეული კვლევები არაწრფივი ოსცილატორებისა და სიზშირეთა სინქრონიზაციის შესახებ

B. Van der Pol and J. Van der Mark, "The Heartbeat Considered as a Relaxation Oscillation and an Electrical Model of the Heart," *Phil. Mag.* 6, 763-75 (1928).

M. L. Cartwright and J. E. Littlewood, "On Nonlinear Differential Equations of the Second Order. I. The Equation $\ddot{y} - k(1 - y^2)\dot{y} + y = b\lambda k \cos(\lambda t + \alpha)$, k Large," *J. London Math. Soc.* 20, 180-89 (1945).

M. L. Cartwright, "Forced Oscillations in Nearly Sinusoidal Systems," *J. Inst. Electr. Eng.* 95, 88-96 (1948).

N. Levinson, "A Second-Order Differential Equation with Singular Solutions," *Annals of Mathematics* 50, 127-53 (1949).

C. Hayashi, *Nonlinear Oscillations in Physical Systems* (McGraw-Hill, New York, 1964; reprinted by Princeton University Press, 1985).

სიზშირეთა სინქრონიზაცია ბიოლოგიურ სისტემებში

A. T. Winfree, *The Geometry of Biological Time* (Springer-Verlag, New York, 1980).

L. Glass and M. C. Mackey, *From Clocks to Chaos* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1988).

ქაოსში გადასვლის კვაზიპერიოდული გზა

D. Ruelle and F. Takens, "On the Nature of Turbulence," *Commun. Math. Phys.* 20, 167-92 (1971). სტატიაში პირველად ვხვდებით ტერმინებს „ქაოსური“ და უცნაური მიმზიდველი არაწრფივი სისტემების დინამიკის კონტექსტში.

S. E. Newhouse, D. Ruelle, and R. Takens, "Occurrence of Strange Axiom A Attractors near Quasi-Periodic Flows on T_m ($m = 3$ or more)," *Commun. Math. Phys.* 64, 35 (1978). გვაწვდის ქაოსში გადასვლის კვაზიპერიოდული გზები მათემატიკურ საფუძველს.

L. D. Landau, "On the Problem of Turbulence," *Akad. Nauk. Doklady* 44, 339 (1944). English translation reprinted in [Hao, 1984].

R. W. Walden, P. Kolodner, A. Passner, and C. Surko, "Nonchaotic Rayleigh-Benard Convection with Four and Five Incommensurate Frequencies," *Phys. Rev. Lett.* 53, 242⁵ (1984).

წრიული ასახვები

V. I. Arnold, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations* (Springer, New York, 1983).

Universal features for circle maps at the critical point but with a focus on the Golden Mean:

S. Shenker, "Scaling Behavior in a Map of a Circle onto Itself: Empirical Results," *Physica D* 5, 405-11 (1982). (Reprinted in [Cvitanovic, 1984].)

M. J. Feigenbaum, L. P. Kadanoff, and S. J. Shenker, "Quasiperiodicity in Dissipative Systems: A Renormalization Group Analysis," *Physica D* 5, 370-86 (1982). (Reprinted in [Hao, 1984].)

D. Rand, S. Ostlund, J. Sethna, and E. Siggia, "Universal Transition from Quasiperiodicity to Chaos in Dissipative Systems," *Phys. Rev. Lett.* 49, 132-35 (1982). (Reprinted in [Hao, 1984].)

M. H. Jensen, P. Bak, and T. Bohr, "Transition to Chaos by Interaction of Resonances in Dissipative Systems I, II," *Phys. Rev. A* 30, 1960-69 and 1970-81 (1984).

სხვა ირაციონალურ რიცხვთა უნივერსალური თავისებურებების შესახებ იხ.:

P. Cvitanovic, M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, and I. Procaccia, "Renormalization, Unstable Manifolds, and the Fractal Structure of Mode Locking," *Phys. Rev. Lett.* 55, 343⁶ (1985).

S. Kim and S. Ostlund, "Universal Scaling in Circle Maps," *Physica D* 39, 365-92 (1989).

B. Hu, A. Valinai, and O. Piro, "Universality and Asymptotic Limits of the Scaling Exponents in Circle Maps," *Phys. Lett. B* 144, 7-10 (1990).

რიცხვთა თეორია და უსასრულო წილადები

H. E. Huntley, *The Divine Proportion* (Dover, New York, 1970). ოქროს კვეთის შესახებ ინფორმაციის არაჩვეულებრივი წყარო.

[Wright and Hardy, 1980]

H. S. Zuckerman, H. L. Montgomery, I. M. Niven, and A. Niven, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5th ed. (John Wiley, New York, 1991).

A. Ya Khinchin, *Continued Fractions* (The University of Chicago Press, Chicago, 1992).

ვან დერ პოლის განტოლება იძულებითი წევრით

S. Smale, "Diffeomorphisms with many periodic points," in *Differential and Combinatorial Topology*, (S. S. Cairns, ed.) (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963).

R. Shaw, "Strange Attractors, Chaotic Behavior, and Information Flow," *Z Naturf.* 36a, 80-112 (1981).

R. H. Abraham and C. Simo, "Bifurcations and Chaos in Forced van der Pol Systems," in *Dynamical Systems and Singularities* (S. Pnevmatikos, ed.) (North-Holland, Amsterdam, 1986).

ქაოსში გადასვლის კვაზიპერიოდული გზების გამოყენება

J. Stavans, F. Heslot, and A. Libchaber, "Fixed Winding Number and the Quasiperiodic Route to Chaos in a Convective Fluid," *Phys. Rev. Lett.* 55, 596-99 (1985).

M. H. Jensen, L. Kadanoff, A. Libchaber, I. Procaccia, and J. Stavans, "Global Universality at the Onset of Chaos: Results of a Forced Rayleigh-Benard Experiment," *Phys. Rev. Lett.* 55, 2798-801 (1985).

L. Glass, M. R. Guevar, J. Belair, and A. Shrier, "Global Bifurcations and Chaos in a Periodically Forced Biological Oscillator," *Phys. Rev. B* 29, 1348-57 (1984).

L. Glass, A. Shrier, and J. Belair, "Chaotic Cardiac Rhythms," in *Chaos* (A. V. Holden, ed.) (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1986).

S. Martin and W. Martienssen, "Circle Maps and Mode Locking in the Driven Electrical Conductivity of Barium Sodium Niobate Crystals," *Phys. Rev. Lett.* 56, 1522-25 (1986).

S. Martin and W. Martienssen, "Small-signal Amplification in the Electrical Conductivity of Barium Sodium Niobate Crystals," *Phys. Rev. A* 34, 4523-24 (1986).

P. Bryant and C. Jeffries, "The Dynamics of Phase Locking and Points of Resonance in a Forced Magnetic Oscillator," *Physica D* 25, 196-232 (1987).

M. Courtemanche, L. Glass, J. Belari, D. Scagliotti, and D. Gordon, "A Circle Map in a Human Heart," *Physica D* 40,299-310 (1989).

ქვემოთმოყვანილი ორი ნაშრომი გვთავაზობს ექსპერიმენტის შედეგებს რომლებიც ერთი შეხედვით არღვევენ ქაოსში გადასვლის რუელ-თაკენის კვაზიპერიოდულ სცენარს:

A. Cumming and P. S. Linsay, "Quasiperiodicity and Chaos in a System with Three Competing Frequencies," *Phys. Rev. Lett.* 60,2719-22 (1988).

P. S. Linsay and A. W. Cumming, "Three-Frequency Quasiperiodicity, Phase Locking, and the Onset of Chaos," *Physica D* 40,196-217 (1989).

ეს შედეგები ახსნილია შემდეგ ნაშრომში: P. Alstrom, B. Christiansen, and M. T. Levinsen, "Nonchaotic Transition from Quasiperiodicity to Complete Phase Locking," *Phys. Rev. Lett.* 61,1679-82 (1988).

6.13 კომპიუტერული სავარჯიშოები

CE6-1. გამოიყენეთ *Chaotic Mapper* სინუსოიდურ-წრიული ასახვის გამოკვლევისთვის. მოახდინეთ გრაფიკული იტერაცია, ააგეთ ბიფურკაციული დიაგრამაზე და შეისწავლეთ ლიაპუნოვის ექსპონენტა, როგორც K პარამეტრის არაწრფივი ფუნქცია Ω -ს სხვადასხვა მნიშვნელობის შემთხვევაში.

CE6-2. სინუსოიდურ-წრიული ასახვისთვის დაწერეთ ემმაკის საფეხურების გამომსახველი კომპიუტერული პროგრამა.

წყვეტა და კრიზისები

ქაოსი უხეში და მოუწესრიგებელი მასაა. ოვიდიუსი. *მეტამორფოზები*.

7.1 შესავალი

მოცემულ თავში განვიხილავთ დისიპაციურ სისტემებში ქაოსისკენ მიმავალ გზების კიდევ ორ შემთხვევას. ერთ-ერთი მოიცავს *წყვეტად* წოდებულ ქმედებას, რადგან სისტემა აშკარად ჩვეულებრივსა და ქაოსურ ქმედებებს შორის ნახტომისებურად „გადართვა-გადმორთვას“ უჩვენებს. მეორე ტიპის ქმედების დამახასიათებელი ნიშანი კი ე.წ. *კრიზისია*, როდესაც მდგომარეობათა სივრცეში უცნაური გეომეტრიის მქონე მიმზიდველი ზომას უეცრად იცვლის ან საერთოდ ქრება. ქაოსისკენ მიმავალი წყვეტის გზა თავდაპირველად პომიუმ და მენვილმა აღწერეს (MAP79 და POM80) და ზოგჯერ მას პომიუ-მენვილის სცენარს უწოდებენ. ცნება კრიზისი, რომლითაც ბიფურკაციული მოვლენების კიდევ ერთ მნიშვნელოვანი კლასს მოიხსენიებენ, თავდაპირველად გრებოგიმ, ოტმა და იორკმა შემოიღეს (GOY82 და GOY83).

ორივე სცენარი გამოკვლეულია სხვადასხვა ექსპერიმენტის შემთხვევაში, მაგრამ ქაოსისკენ მიმავალი პერიოდის გაორმაგებებისა თუ კვაზიპერიოდული გზის ანალოგიურად, წყვეტისა და კრიზისის თეორია, უპირველეს ყოვლისა, იტერაციული ასახვების საფუძველზე იქნა აგებული. როგორც წყვეტის, ასევე კრიზისის შემთხვევაში, წარმოგიდგენთ ქმედების ძირითად ფენომენოლოგიას და შემდეგ მოკლე თეორიულ ანალიზს შემოგთავაზებთ.

7.2 რა არის წყვეტა?

წყვეტა ვლინდება ყველგან, სადაც სისტემის ქმედება საგრძნობი გარეშე ხმაურის არარსებობისა და მაკონტროლებელი პარამეტრების მუდმივობის პირობებშიც კი ორ ხარისხობრივად განსხვავებულ ქმედებას შორის ნახტომისებურად იცვლება. გადასვლა „მოუწესრიგებლად“ ხდება იმ შემთხვევაშიც კი, როდესაც სისტემა დეტერმინისტული განტოლებებითაა აღწერილი. ყურადღებას გავამახვილებთ წყვეტის ორ ტიპზე (ასევე

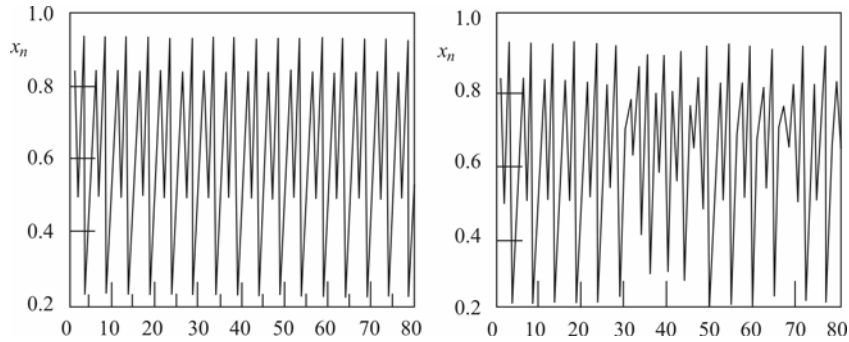
გაკვრით შევეხებით დანარჩენ ორ ტიპს). პირველი სახეობის შემთხვევაში სისტემა პერიოდულსა და ქაოსურ ქმედებას შორის მიმოიქცევა. პარამეტრის ზოგიერთი მნიშვნელობისთვის სისტემის ქმედება ძირითადად პერიოდულია, მაგრამ დროდადრო ქაოსური ქმედების „აფეთქებები“ იჩენენ თავს. პარამეტრის ცვლილებასთან ერთად ქაოსურ მდგომარეობაში ყოფნის ხანგრძლივობა მატულობს და შესაბამისად პერიოდულ მდგომარეობაში ყოფნის დრო მცირდება, ვიდრე სისტემის ქმედება მარადიულ ქაოსში არ გადაიზრდება. პარამეტრის სხვა მიმართულებით ცვლილებისას პერიოდულ მდგომარეობაში ყოფნის დრო გარკვეულ A_c მნიშვნელობამდე მატულობს და ქმედებაც საშუალოდ პერიოდულად დარჩება. წყვეტის მეორე ტიპის შემთხვევაში, სისტემა პერიოდულ და კვაზიპერიოდულ ქმედებებს შორის ცირკულირებს.

რა თქმა უნდა, პარამეტრთა ფიქსირებული მნიშვნელობების შემთხვევაში სისტემის ქმედება პრაქტიკულად არავითარ ნახტომისებრ ცვლილებას არ ავლენს, მაგრამ წყვეტის შემთხვევაში ქმედებას დიდი ხნის განმავლობაში ძირითადი მახასიათებელი (მაგალითად პერიოდულობა) გააჩნია, ხოლო შემდეგ „უეცრად“ ხარისხობრივად განსხვავებული სახეობის ქმედებაში (მაგალითად ქაოსურში) გადადის.

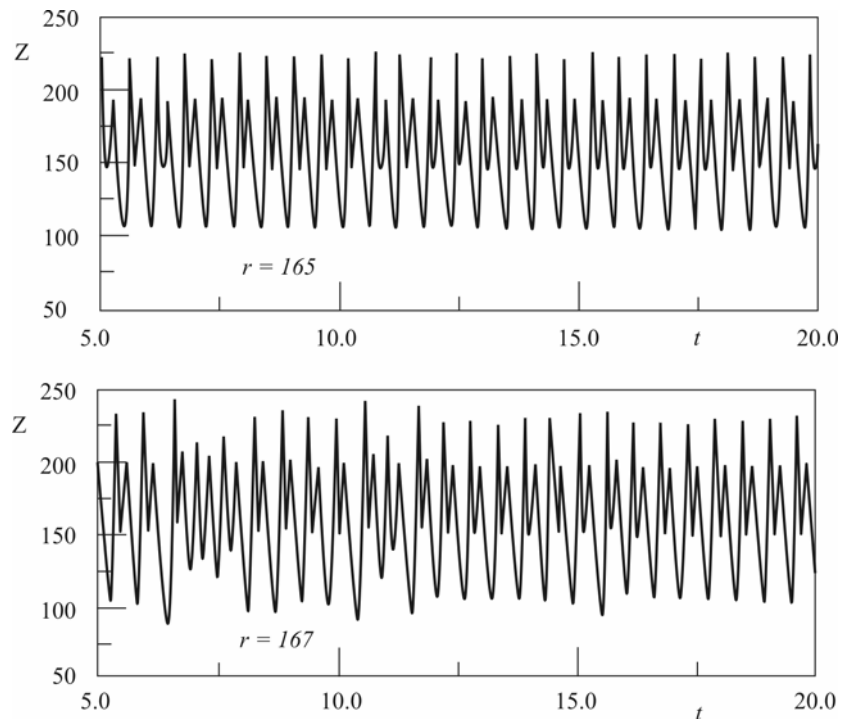
წყვეტის არსის უკეთ გასაგებად 7.1 ნახაზზე პარამეტრის ორი განსხვავებული მნიშვნელობისთვის (1.4-5) ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციის მეშვეობით გამოთვლილი „სიგნალის“ ხანგრძლივი ესკიზი გამოვსახეთ. მარცხენა ნახაზზე მოყვანილია პერიოდი-5-ის ტიპის პერიოდული ქმედება. მარჯვნივ A პარამეტრის ოდნავ მცირე მნიშვნელობის შემთხვევაშიც კი ქმედება წყვეტილია. აქ აშკარად ჩანს, რომ ტრაექტორია დროის გარკვეულ ინტერვალში პერიოდულ (პერიოდი-5), ხოლო შემდეგ არაპერიოდულ და ქაოსურ ქმედებას ამჟღავნებს. ორ ქმედებას შორის გადასვლა რაიმე წესის გარეშე ხდება. A პარამეტრის ოდნავ შემცირებასთან ერთად ქაოსური არეები ფართოვდებიან და პერიოდული არეები ზომაში შემცირებას იწყებენ.

ქმედების დახასიათებისას სიფრთხილე უნდა გამოვიჩინოთ: თუ სიგნალი ზუსტად პერიოდულია, მაშინ ქაოსურ ქმედებაში „გადასვლის“ შესაძლებლობა არ არსებობს. ამასთან „ქაოსური“ ნაწილი კი მოჰგავს ქაოსურს, მაგრამ ჩვენ არ დავვიდგენია, აქვს თუ არა მას ლიაპუნოვის დადებითი ექსპონენტა. იმის თქმა, რომ თითოეული ქაოსური სექცია საკმაოდ განსხვავებული ხასიათისა და ხანგრძლივობისაა, როდესაც პერიოდული წინაპირობები იდენტურია, საკმაოდ დამაჯერებელია, მაგრამ ეს იმას არ ნიშნავს, რომ არასტანდარტული ქმედება ქაოსურ ხასიათს ატარებს.

წყვეტა დიფერენციალური განტოლებებით აღწერილ სისტემებშიც ვლინდება. 7.2 ნახაზი გვიჩვენებს ლორენცის მოდელის Z ცვლადზე დამოკიდებულებას (იხ. განტოლებები 1.5-1) r პარამეტრის ორი განსხვავებული მნიშვნელობისთვის.



ნახაზი 7.1. მარცხნივ გამოსახულია ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციის თანმიმდევრული იტერაციების x მნიშვნელობათა მრუდი, როდესაც $A=3.74$. აშკარაა, რომ საქმე გვაქვს პერიოდი-5-ის ტიპის ქმედებასთან. მარჯვნივ $A=3.7375$ და ქმედება წყვეტილ ხასიათს ატარებს. ქმედების ცალკეული ნაწილები პერიოდი-5-ის გამომხატველია. სხვა ნაწილები კი ქაოსურობას ამჟღავნებს. ქმედებებს შორის გადასვლა რაიმე წესის გარეშე ხდება.



ნახაზი 7.2. Z ცვლადის დროზე დამოკიდებულება ლორენცის (1.5-1) განტოლებებში. ზემო ნახაზზე პარამეტრთა მნიშვნელობებია $r=165$, $b=8/3$ და $p=10$. ხანმოკლე საწყისი გარდამავალი სტადიის შემდეგ ტრაექტორია პერიოდულ ქმედებას გვიჩვენებს. ქვედა ნაწილში

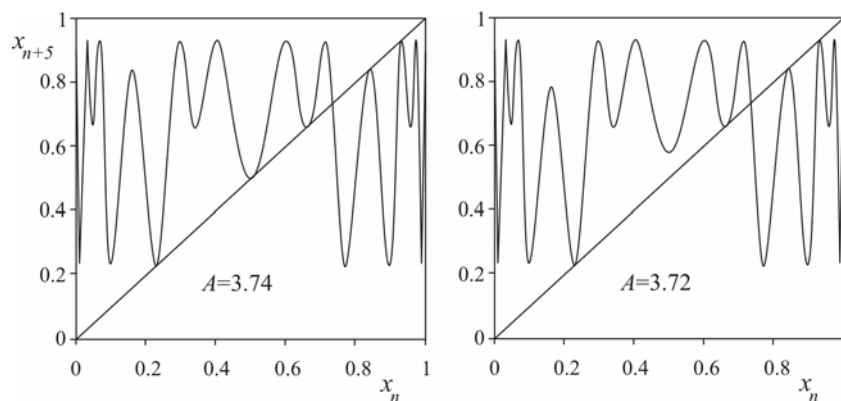
$r=167$ და ტრაექტორია პერიოდულ ქმედებასა და ქაოსური ქმედების (ძალზე) ხანმოკლე გამოვლინებებს შორის გადასვლის ფონზე წყვეტილ ქმედებას ($t=7.5$ და $t=11$ სიახლოვეს) ამჟღავნებს. წყვეტა უფრო აშკარაა ხანგრძლივი ჩანაწერის შემთხვევაში.

r პარამეტრის უფრო მცირე მნიშვნელობების შემთხვევაში ქმედება პერიოდულია, ხოლო ოდნავ დიდი მნიშვნელობებისას კი პერიოდულ და ქაოსურ ქმედებებს შორის არასტანდარტული გადასვლის მოწმენი ვხვდებით. r პარამეტრის შემდგომ ზრდასთან ერთად ქაოსური ინტერვალები თანდათანობით ფართოვდება და დროთა განმავლობაში საბოლოოდ ივსება.

როგორ დავადგინოთ წყვეტის გამოწვევი მიზეზები? არსებობს თუ არა პარამეტრის ცვლილებასთან ერთად ქაოსური ქმედების დომინირების ამსახველი რაიმე რიცხვითი მახასიათებელი? არსებობენ თუ არა წყვეტის სხვადასხვა ტიპები?

7.3 წყვეტის მიზეზები

წყვეტის გზით ქაოსურ ქმედებაში გადასვლა კონტრასტშია ქაოსში პერიოდის გაორმაგებების და კვაზიპერიოდულობის გავლით გადასვლასთან: ორთავე სცენარში სისტემის ხანგრძლივ ინტერვალზე აღებული ქმედება დამოკიდებულია პარამეტრის მნიშვნელობაზე და მთლიანად პერიოდული (ან კვაზიპერიოდული) ან ქაოსურია.

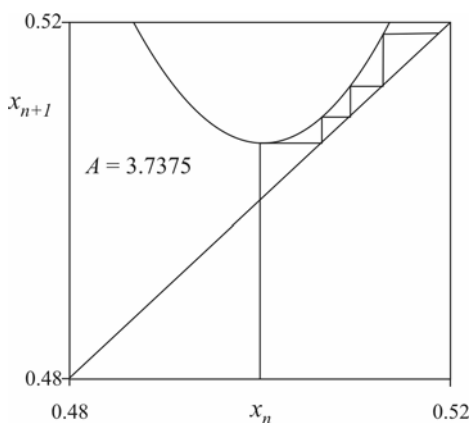


ნახ. 7.3. მარცხნივ გამოსახულია ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციის მეხუთე რიგის იტერაციის მრუდი, როდესაც $A=3.74$. მარჯვნივ ნაჩვენებია იგივე ფუნქციის მრუდი შედარებით მცირე $A=3.72$ მნიშვნელობისთვის. მარცხნივ ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციის იტერაცია პერიოდი-5 ტიპის ქმედებას გვაძლევს. მარჯვნივ გამოყენებული მნიშვნელობის შემთხვევაში წყვეტილ ქმედებას ვიღებთ. დააკვირდით ფუნქციასა და პერიოდი-5-ის ფიქსირებული წერტილების მახლობლად არსებულ მცირე „ჩაჯარღნებს“. წყვეტილი გადასვლისას მეხუთე იტერაციის ფუნქცია დიაგონალური წირის 5 წერტილს ეხება.

წყვეტის შემთხვევაში ქმედებებს შორის აშკარა ნახტომისებრი გადასვლა ხდება. ყურადღებას სიტყვა „აშკარა“-ზე ვამახვილებთ, რადგან ვნახავთ, რომ წყვეტის პირველი ტიპის შემთხვევაში ქმედება სრულიად აპერიოდული (და ქაოსურია). ჩვენ გვინდა განვმარტოთ, თუ რატომ არის ქმედების ზოგიერთი ნაწილი აშკარად პერიოდული.

ძირითადი სქემა შემდეგნაირია: პარამეტრის კრიტიკულ A_c -ზე მეტი მნიშვნელობის შემთხვევაში სისტემის ქმედება მთლიანად პერიოდულია. იტერაციული ასახვის ფუნქციის შემთხვევაში, თუ პერიოდი- n -ის ტიპის ქმედება არსებობს, ქმედება შესაბამისი n რიგის იტერაციული ფიქსირებული წერტილების მიხედვით განისაზღვრება. ლორენცის მოდელით აღწერილი სისტემისთვის გამოვიყენოთ პუნკარეს კვეთის მეთოდის და ყურადღება გავამახვილოთ პუნკარეს კვეთის n რაოდენობის წერტილებზე, რომლებიც პუნკარეს ასახვის ფუნქციის ფიქსირებულ წერტილებს წარმოადგენენ. წყვეტილი ქმედების დამახასიათებელი ნიშანთვისება პარამეტრის ცვლილებასთან ერთად ფიქსირებული წერტილების „გაუჩინარებაა“. პერიოდის გაორმაგებისგან განსხვავებით, აქამდე არსებული სტაბილური ფიქსირებული წერტილები ახალი სტაბილური ფიქსირებული წერტილებით აღარ შეიცვლება. ამრიგად, მოძრაობა არასტანდარტულ (ფაქტობრივად ქაოსურ) ხასიათს იძენს და ტრაექტორიები მდგომარეობათა სივრცის საკმაოდ დიდ არეში „ხეტიანს“ იწყებენ“.

მაშ, რაღა იწყებს აშკარა პერიოდული ქმედების შესაბამისი ეპიზოდების შექმნას? ჩვენ დაგვჭირდება კონკრეტული მაგალითის მოყვანა. 7.3 ნახაზი გვიჩვენებს ლოჯისტიკური ასახვის მეხუთე რიგის იტერაციას პარამეტრის ორი სხვადასხვა მნიშვნელობისთვის. მარცხნივ პერიოდი-5-ის გამომწვევი A -ს მნიშვნელობაა წარმოდგენილი. გარდამავალი სტადიების დასრულების შემდეგ ტრაექტორიები ხუთ სტაბილურ ფიქსირებულ წერტილს შორის განიცდის ცირკულაციას (აგრეთვე არსებობს სტაბილური ფიქსირებული წერტილების მახლობლად განლაგებული ხუთი არასტაბილური ფიქსირებული წერტილი და, გარდა ამისა, კიდევ ორი არასტაბილური ფიქსირებული წერტილი: $x=0$ და $x=1-A$. ისინი ასახვის საწყისი ფუნქციის არასტაბილურ ფიქსირებულ წერტილებს შეესაბამებიან).



ნახაზი 7.4. ლოჯისტიკური ასახვის მეხუთე რიგის მრუდის „ხარვეზი“ $x=1/2$ წერტილის მახლობლად. ამ შემთხვევაში $A=3.7375$. გრაფიკული იტერაციის მეთოდი გვიჩვენებს, რომ ტრაექტორია საკმაოდ დროს „ატარებს“ პერიოდი-5-ის ფიქსირებული წერტილების მახლობლად. ეს წერტილები კი ფუნქციის გრაფიკის დიაგონალურ

მონაკვეთთან გადაკვეთისას A -ს ოდნავ დიდი მნიშვნელობების პირობებში მიიღებინ. ნახაზზე წარმოდგენილ შემთხვევაში, „ხარვეზის“ დაძლევისთვის ტრაექტორიას დაახლოებით ოთხი საფეხური სჭირდება.

მარჯვნივ, A -ს ოდნავ მცირე მნიშვნელობისთვის ფიქსირებული წერტილები არ არსებობს და ქმედება ქაოსურია.

აშკარა პერიოდულობას უფრო დეტალურად, ასახვის ფუნქციის შესაბამის იტერაციასა და 45^0 -იან წრფეს შორის „ხარვეზებზე“ გამავალი ტრაექტორიების ქმედებაზე დაკვირვების გზით ვაფიქსირებთ. 7.4 ნახაზზე მოყვანილია ლოჯისტიკური ასახვისთვის ერთ-ერთი ასეთი ხარვეზი. გრაფიკული განმეორების მეთოდი გვიჩვენებს, რომ ტრაექტორია საკმაოდ დროის განმავლობაში ყოვნდება პერიოდი-5-ის აქამდე სტაბილური ფიქსირებული წერტილის მახლობლად. საბოლოოდ ტრაექტორია ამ არეს ტოვებს და მდგომარეობათა სივრცის სხვა არისაკენ მიემართება.

ამოცანა 7.3-1. $f^{(5)}(x)$ -სა და 45^0 -იან დიაგონალურ წრფეს შორის არსებული სხვადასხვა ზომის „ხარვეზებისათვის“ შეასრულეთ გრაფიკული იტერაციები. დარწმუნდით, რომ შედარებით მცირე ზომის ხარვეზის გავლისათვის მეტი დროა საჭირო.

ხარვეზის ზომის შემცირებასთან ერთად ტრაექტორია (საშუალოდ) უფრო დიდხანს ყოვნდება ამ არეში. ცხადია, რომ კრიტიკულ A_c მნიშვნელობასთან მიახლოებასთან ერთად, რომლისთვისაც ხარვეზი ქრება და ქმედება პერიოდული ხდება, უფრო მეტი დრო „პერიოდულ“ ქმედებაზე იხარჯება. ვინაიდან ასახვის ფუნქცია (ან მისი შესაბამისი იტერაცია) A_c -ზე 45^0 -იანი დიაგონალური წრფის მხები ხდება, წყვეტის დაწყებას ხშირად **მხებ ბიფურკაციას** უწოდებენ. რადგანაც ასეთ შემთხვევაში სტაბილური და არასტაბილური ფიქსირებული წერტილები ერთიმეორის ანიჰილაციას ახდენენ, ეს მოვლენა „უნაგირის“ წერტილი – კვანძის ტიპის ბიფურკაციას შეესაბამება.

ცხადია, „პერიოდული“ ქმედების შემთხვევაში წყვეტის განმეორებისთვის „მოხეტიალე“ ტრაექტორია კვლავ ვიწრო ხარვეზის სიახლოვეს უნდა აღმოჩნდეს. ამის საჩვენებლად გამოვიყენოთ გრაფიკული იტერაციის მეთოდი. ჩვენ გვინტერესებს, x ღერძის რომელ არეებს შეესაბამება ასეთი ტრაექტორიები. 7.3 ნახაზის მიხედვით, ლოჯისტიკური ასახვის შემთხვევაში თითოეულ ხარვეზს ორი ასეთი არე შეესაბამება (გაიხსენეთ, რომ თუ ტრაექტორიის მოცემული წერტილისთვის ერთზე მეტი წინასახე არსებობს, ვამბობთ, რომ ასახვის ფუნქცია არ არის შებრუნებადი).

თუ ტრაექტორია გავლის პოტენციური არეებიდან ერთ-ერთში აღმოჩნდება, შემდეგი ციკლის დროს მას კვლავ მცირე ხარვეზის სიახლოვეს ვიხილავთ. რამდენიმე მომდევნო იტერაცია ხარვეზის სიახლოვეს იქნება შემოსაზღვრული და ქმედება თითქმის პერიოდული გახდება, რადგან x -ის მნიშვნელობების ყოველი მომდევნო სიმრავლე თითქმის ერთი და იგივე იქნება. მიუხედავად ამისა, x -ის მნიშვნელობები ზუსტად ერთი და იგივე ვერ იქნებიან, რადგან სტაბილური ფიქსირებული წერტილი არ არსებობს და ტრაექტორია ხარვეზის გავლით „ნელ-ნელა გადის“ არიდან. ამისათვის საჭირო დრო, ტრაექტორიის ხელახალი გავლის ადგილმდებარეობაზე დამოკიდებული, ამიტომ „პერიოდული“ ინტერვალების მთელ სიგრძეზე საკმაოდ არასტანდარტულ ქმედებას უნდა ველოდოთ.

ჩვენი მსჯელობის ნაკლოვანება გამოიხატება იმის დაშვებაში, რომ „მოხეტიალე“ ტრაექტორია პოტენციური გავლის არეებიდან ერთ-ერთს „აირჩევს“. ეს შედეგი თითქოს მოსალოდნელია, მაგრამ ამის დამტკიცება საზოგადოდ ძნელია, რადგანაც დაგვჭირდება მდგომარეობათა მთელი იმ სივრცის განხილვა, სადაც ტრაექტორია „მოგზაურობს“. ჩვენეული ტერმინოლოგიის გამოყენებით ვამბობთ, რომ პერიოდული ქმედება ხარვეზების მახლობლად „ლოკალური“ ქმედების მეშვეობით განისაზღვრება, მაშინ როდესაც „მოხეტიალე“ ტრაექტორიის მისი მორიგი გამოჩენა პოტენციური გავლის არეში განისაზღვრება მისი „გლობალური“ ქმედებით მდგომარეობათა სივრცეში. ამ პროცესის უფრო დეტალური გაცნობისათვის იხილეთ [Berge, Pomeau და Vidal, 1986] და [Schuster, 1995].

წყვეტის გამომწვევი მხები ბიფურკაციები საკმაოდ ხშირად გვხვდებიან. ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციისთვის A პარამეტრის ზრდასთან ერთად მხები ბიფურკაციული მოვლენები პერიოდულ დიაპაზონებს „წარმოქმნის“. პერიოდი- n დიაპაზონისათვის გვექნება:

$$\begin{aligned} \frac{df^{(n)}(x^*)}{dx} &= 1 \\ f^{(n)}(x^*) &= x^* \end{aligned} \tag{7.3-1}$$

სადაც მეორე განტოლება გვამცნობს, რომ x^* წერტილი ასახვის ფუნქციის n რივის იტერაციის ფიქსირებული წერტილია. A პარამეტრის შემცირებასთან ერთად, x^* -ის მიდამოში $f^{(n)}$ -ის კუთხური კოეფიციენტი ფიქსირებული წერტილის გაქრობისას $+1$ -ზე მეტი ხდება (ამის საპირისპიროდ გაიხსენეთ, რომ პერიოდის გაორმაგების შემთხვევაში, ასახვის ფუნქციის შესაბამისი იტერაციის კუთხური კოეფიციენტი -1 -ზე ნაკლები გახდა).

წყვეტილი ქმედება ფაქტიურად, არასტანდარტულად აღძვრადი პერიოდული ქმედების ეპიზოდებით დახასიათებული არაპერიოდული (ქაოსური) ქმედებაა. პერიოდული ქმედების

მიზეზი არის ტრაექტორიების „მოქცევა“ დიაგონალურ ხაზსა და შესაბამის იტერაციას შორის არსებულ ხარვეზში მხები ბიფურკაციის შემდეგ.

უნდა აღინიშნოს ასევე, რომ სისტემებში, რომლებიც კვაზიპერიოდულობასა და სიხშირეთა სინქრონიზაციას ამჟღავნებენ, ოდნავ განსხვავებული სახის წყვეტა ვლინდება. მერ თავის თანახმად, სინუსოიდურ-წრიულ ასახვისათვის სიხშირეთა $p:q$ სინქრონიზაცია მაშინ დაიკვირვება, როდესაც ასახვის ფუნქციის q რიგის იტერაცია $x_{n+1}=x_n$ დიაგონალურ წრფეს გადაფარავს. ზემოთ განხილული წყვეტის ანალოგიურად, მხები ბიფურკაციების არსებობასა და პარამეტრის ცვლილებასთან ერთად სიხშირეთა სინქრონიზაცია რაიმე წინაპირობის გარეშე იწყება და სრულდება. მაგრამ სინუსოიდურ-წრიული ასახვისათვის $K < 1$ შემთხვევაში წყვეტისათვის დამახასიათებელი ქმედება სიხშირეთა სინქრონიზაციასა და კვაზიპერიოდულ ქმედებებს შორის ცირკულაციაში გამოიხატება.

აშკარად გამოკვეთილი სიხშირეთა სინქრონიზაცია მაშინ ვლინდება, როდესაც ტრაექტორია ასახვის ფუნქციის q რიგის იტერაციასა და დიაგონალურ წრფეს შორის მდებარე ვიწრო ხარვეზში დროებით მოექცევა. უნდა ითქვას, რომ ქმედება კვაზიპერიოდულია, მაგრამ შესაძლოა არსებობდეს ხანგრძლივი ინტერვალები, რომელთა შემთხვევაშიც სიხშირეთა სინქრონიზაცია ვლინდება.

წყვეტა და $1/f$ ტიპის ხმაური

უამრავი ფიზიკური სისტემა, რომლისთვისაც ხმაურს დაახლოებით იდენტური ენერგეტიკული სპექტრი გააჩნია, შემდეგი სახის ქმედებას ამჟღავნებს: სპექტრის სიხშირის შემცირებასთან ერთად ხმაურის ინტენსივობა დაახლოებით $1/f$ სახით იცვლება (იმედია, სიხშირისთვის f სიმბოლოს გამოყენება სხვა პარაგრაფებში მოცემული სიმბოლოთი ფუნქციის აღნიშვნის გამო არ დაგაბნევთ). ამ ე.წ. **$1/f$ ხმაურის** უნივერსალურობა აშკარად სერიოზულ განმარტებას საჭიროებს. მიუხედავად იმისა, რომ $1/f$ ტიპის ხმაურის სრულყოფილი ახსნა ჯერჯერობით არ არსებობს, შედარებით ბოლოდროინდელი შრომები გვამცნობენ, რომ წყვეტილი ქმედება ისეთი ნიშანთვისებაა, რომელიც ყველა ამგვარ სისტემას ერთმანეთთან აკავშირებს. მთავარი ის არის, რომ წყვეტის გამორჩეული თვისებაა აშკარა მოუწესრიგებლობის ფონზე ქმედების ორ (ან მეტ) განსხვავებულ სახეობას შორის ცირკულაცია. წყვეტასა და $1/f$ ტიპის ხმაურს შორის კავშირის უფრო დეტალური განხილვისთვის იხ. [Schuster, 1995], MAN80, PRS83 და GWW85.

7.4 წყვეტის რიცხვითი თეორია

მოცემულ პარაგრაფში გავეცნობით რამდენიმე მეთოდს, რომლებიც გამოიყენება ქაოსისკენ მიმავალი წყვეტილი გზის ზოგიერთი უნივერსალური თვისების დადგენაში. თავდაპირველად ყურადღება გავამახვილოთ ერთგანზომილებიან იტერაციულ ასახვაზე. განსაკუთრებულად მივაქციოთ ყურადღება ასახვის ფუნქციის შესაბამისი იტერაციის თვისებებს პარამეტრის იმ მნიშვნელობებისთვის, რომლებიც ახლოსაა ისეთ მნიშვნელობასთან, რომლის შემთხვევაშიც თავს იჩენს მხები ბიფურკაცია არეში არსებულ ერთ-ერთ სტაბილურ ფიქსირებულ წერტილში (რომელიც ახლოსაა გაქრობასთან). მოცემულ არეში ასახვის ფუნქციის n რიგის იტერაცია შესაძლებელია მიახლოებით შემდეგნაირად აღიწეროს:

$$f_A^{(n)}(x) = x^* + (x - x^*) + a(x - x^*)^2 + b(A_c - A) \quad (7.4-1)$$

სადაც a და b ასახვის ფუნქციაზე, იტერაციასა და ფიქსირებულ წერტილზე დამოკიდებული მუდმივებია. მათი ზუსტი მნიშვნელობები ჩვენთვის ამჯერად არაა აქტუალური. ლოჯისტიკური ასახვის პარამეტრზე დამოკიდებულება ასეთია: $A > A_c$ -თვის გვაქვს პერიოდული ქმედება, ხოლო $A < A_c$ შემთხვევაში კი წყვეტილი (ქაოსური) ქმედება ვლინდება.

ეს განტოლება დაიყვანება სტანდარტულ სახეზე შემდეგი ცვლადების შემოყვანის გზით: $y = (x - x^*)/b$, $c = ab$ და $\mu = A_c - A$. შედეგად ფიქსირებული წერტილის მდებარეობა $y = 0$ -ში გადააქვთ. μ პარამეტრი ისეა შერჩეული, რომ როდესაც $\mu = 0$, მხებ ბიფურკაციას აქვს ადგილი. როდესაც $\mu < 0$, ქმედება პერიოდულია, ხოლო $\mu > 0$ -სთვის – წყვეტილი. ამ შემთხვევაში ასახვის ფუნქციის მიახლოებითი სახე ასეთი იქნება:

$$y_{n+1} = h(y_n) = y_n + cy_n^2 + \mu \quad (7.4-2)$$

(7.4-2) მრუდი გამოსახულია 7.4 ნახაზზე.

ამოცანა 7.4-1. გაიარეთ (7.4-1)-ის (7.4-2)-ად გარდაქმნის პროცედურა.

დადებითი მნიშვნელობების შემთხვევაში პერიოდული აფეთქებების საშუალო ხანგრძლივობის μ -ზე დამოკიდებულების გასარკვევად მივმართავთ [Guckenheimer და Holmes, 1990]-ს და რენორმალიზაციის (მასშტაბის) პარამეტრს ვიყენებთ. μ -ს ზრდასთან ერთად მოსალოდნელია ხანგრძლივობის ნულისაკენ მისწრაფება, ხოლო როდესაც $\mu \rightarrow 0$

ზემოდან, მაშინ ხანგრძლივობა მიისწრაფვის უსასრულობისკენ. პირველ რიგში ირკვევა, რომ პერიოდული აფეთქებების ხანგრძლივობა განისაზღვრება იმის მიხედვით, თუ რამდენი რიგის იტერაცია სჭირდება ტრაექტორიას ასახვის ფუნქციის გრაფიკსა და დიაგონალურ წრფეს შორის არსებულ ხარვეზის გასავლელად. ეს რიცხვი აღვნიშნოთ $n(\mu)$ -ით. რა თქმა უნდა, $n(\mu)$ დამოკიდებულია ტრაექტორიის მიერ ხარვეზის გავლის ადგილზე და იმაზე, თუ რას ვგულისხმობთ ზუსტად ამ გავლაში. ამიტომ მსჯელობას საბოლოოდ საშუალო მნიშვნელობის დადგენამდე მივყავართ. უნდა აღინიშნოს, რომ თუ $h^{(2)}(y)$ -ს გამოვიყენებთ ხარვეზში ტრაექტორიის მსვლელობის გასაზომად, მაშინ ხარვეზის გასავლელად დაგვჭირდება მხოლოდ $n(\mu)/2$ რაოდენობის ბიჯი, რადგანაც $h^{(2)}(y)$ -ის თითოეული ბიჯი $h(y)$ -ის ორი ბიჯის შესაბამისია.

როგორც ვხედავთ, თუ y ღერძის მნიშვნელობების მასშტაბირებას a , ხოლო μ პარამეტრის მნიშვნელობისა – δ კოეფიციენტების მიხედვით მოვახდენთ და შემდეგ ფუნქციას a -ზე გავამრავლებთ (როგორც ეს **F danar T**ში პერიოდის გაორმაგებისთვის რენორმალიზაციის პარამეტრების შემთხვევაში გავაკეთეთ), მაშინ $h^{(2)}(y)$ -ის მეორე რიგის იტერაცია ზუსტად $h(y)$ -ის ანალოგიური იქნება. შედეგად შეგვეძლება μ -ს ცვლილებით გამოწვეული ეფექტის დაკავშირება ხარვეზის გავლისათვის საჭირო ბიჯების რაოდენობის ცვლილებასთან.

განვსაზღვროთ $h^{(2)}(y)$ შემდეგნაირად:

$$h^{(2)}(y) = \mu + (\mu + y + cy^2) + (\mu + y + cy^2)^2 \quad (7.4-3)$$

თუ უკანასკნელ წევრს გაშლილი სახით წარმოვადგენთ და მხოლოდ μ -ს წრფივ და y -ის კვადრატულ წევრებს შევინარჩუნებთ, მაშინ გვექნება

$$h^{(2)}(y) \approx 2\mu + y + 2cy^2 \quad (7.4-4)$$

ამრიგად, y -ის $Y = ay$ -ით და μ -ის $M = \delta\mu$ -ით შეცვლასთან ერთად და ფუნქციის a -ჯერ გამრავლების შედეგად (როდესაც $a=2$ და $\delta=4$), ზუსტად $h(y)$ საწყისი ფუნქციის ანალოგიურ ახალ ფუნქციაზე გადავდივართ:

$$g_M(Y) \equiv 2[h_{M/4}^{(2)}(Y/2)] = M + Y + cY^2 \quad (7.4-5)$$

ზემოთმოყვანილი მსჯელობიდან შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ მეორე რიგის იტერაციის ფუნქციის ცვლილებით მიღებული შედეგი პარამეტრის მნიშვნელობის 4-ჯერ გამრავლების ტოლფასია.

დაუბრუნდეთ ხარვეზის გასავლელად საჭირო ბიჯების რაოდენობის დადგენის საკითხს. წინა აბზაცის ბოლო წინადადება გვამცნობს, რომ $n(\mu)/2 = n(4\mu)$. უფრო ზოგადად შეგვიძლია ვთქვათ, რომ $n(\mu)/2^n = n(4^n\mu)$. ეს დამოკიდებულება ძალაში იქნება, თუ

$$n(\mu) = k \frac{1}{\sqrt{\mu}} \quad (7.4-6)$$

სადაც k მუდმივაა. (7.4-6)-ის მიხედვით, μ -ს ნულთან მიახლოებისას პერიოდული აფეთქებების საშუალო ხანგრძლივობა სულ უფრო და უფრო იზრდება μ -დან კვადრატული ფესვის შებრუნებული სიდიდის პროპორციულად. მაგალითად, თუ μ -ს შევამცირებთ ოთხჯერ და, აქედან გამომდინარე, შევამცირებთ ხარვეზის გეომეტრიულ ზომებსაც, მაშინ ხარვეზის არეში ტრაექტორია საშუალოდ 2-ჯერ მეტხანს გაჩერდება. ასეთი პროპორციულობა პირველ თავში აღწერილი ნახევარგამტარული დიოდის წრედზე ჩატარებული ექსპერიმენტების მეშვეობითაა დადგენილი (JEP82 და YEK83).

რენორმალიზაციის თეორიის გამოყენების შედეგად ამ მტკიცებულებას უფრო ძირეულად გავიაზრებთ. მასშტაბირების პარამეტრებზე დაყრდნობით შეგვიძლია განვაცხადოთ, რომ უნდა არსებობდეს უნივერსალური ფუნქცია, რომელიც შემდეგ პირობას დააკმაყოფილებს:

$$g(x) = \alpha g(g(x/\alpha)) \quad (7.4-7)$$

ეს გამოსახულება იდენტურია (5.6-3)-ისა, მაგრამ მინუს ნიშნის გარეშე. (5.6-3) გამოსახულება მას პერიოდის გაორმაგების შემდეგ არასტაბილური ფიქსირებული წერტილის სხვადასხვა მხარეს ტრაექტორიის წერტილების ხასიათის ცვალებადობის გასათვალისწინებლად იყენებდა (გაიხსენეთ, რომ ეს ცვალებადობა უკავშირდებოდა ბიფურკაციულ მნიშვნელობასთან მიახლოებული პარამეტრის მნიშვნელობების შესაბამის ფიქსირებულ წერტილში განსაზღვრული ასახვის ფუნქციის წარმოებულის უარყოფით მნიშვნელობას). აქ აღწერილი მხები ბიფურკაციისათვის ასახვის ფუნქციის წარმოებული დაახლოებით +1-ის ტოლია. ამგვარად, (7.4-7) განტოლება მინუს ნიშანს არ საჭიროებს.

(7.4-7) განტოლება ორი „სასაზღვრო პირობით“ უნდა შეივსოს: $g(0)=0$ და $g'(0)=1$. რენორმალიზაციის განტოლებას გააჩნია ზუსტი ამონახსნი:

$$g(x) = \frac{x}{1-cx} \quad (7.4-8),$$

როდესაც $\alpha=2$. x -ის მცირე მნიშვნელობების შემთხვევაში (7.4-8) (7.4-2)-ზე დაიყვანება. პარამეტრები მე-5 თავსა და F დანართში მოყვანილის მსგავსია და გვიჩვენებს, რომ $\delta=4$. ჰუმ და რუნდკმა (HUR82) აღმოაჩინეს, თუ როგორ უნდა გავრცელდეს ეს პარამეტრები მხები ბიფურკაციის მიდამოში განსხვავებული ხარისხობრივი დამოკიდებულების მქონე იტერაციული ასახვის ფუნქციებისთვის. აქ მოყვანილი შედეგები იმ შემთხვევაში გამოიყენება, როდესაც, (7.4-2)-ის ანალოგიურად, დამოკიდებულება კვადრატულია. ამრიგად, პერიოდის გაორმაგების მსგავსად, უნივერსალობის არაერთი კლასი გაგვაჩნია, მაგრამ კვადრატულ შემთხვევას ყველაზე ხშირად უნდა ველოდოთ.

ამოცანა 7.4-2. (a) შეამოწმეთ, რომ (7.4-6) გამოსახულება აკმაყოფილებს $n(\mu)$ -ს მიმართ ზემოთ მოყვანილ მოთხოვნებს; (b) შეამოწმეთ, რომ (7.4-8) აკმაყოფილებს რენორმალიზაციის (7.4-7) პირობას, როდესაც $\alpha=2$.

7.5 წყვეტის ტიპები და ექსპერიმენტული კვლევები

მე-4 თავში, ქაოსისკენ მიმავალი გზის განხილვის საწყის ეტაპზე, ჩვენ ვახსენეთ წყვეტის ოთხი განსხვავებული ტიპი. ასეთი კლასიფიცირება გავიმეორეთ 7.1 ცხრილშიც. ბრჭყალებში მოყვანილი დასახელებები წყვეტის თანმხლები იტერაციების ტიპებს აღნიშნავს.

ფლოკეს მამრავლების ან ერთგანზომილებიანი ასახვების იტერაციული ასახვის ფუნქციებისათვის კუთხური კოეფიციენტის თვისებათა შესაბამისად არსებობს წყვეტის ოთხი ტიპი პუანკარეს ასახვის ფუნქციისთვის (ბიფურკაციის შემთხვევაში). 4.6 პარაგრაფიდან გაიხსენეთ, რომ ზღვრული ციკლი არასტაბილურ მდგომარეობაში ისე გადადის, რომ მისი შესაბამისი ფლოკეს მამრავლების აბსოლუტური მნიშვნელობა ერთზე მეტია. წყვეტილ ქმედებასთან დაკავშირებით ამ მოვლენამ 7.1 ცხრილში მოყვანილი ოთხი ტიპის შესაბამისი ოთხი გზით შეიძლება იჩინოს თავი.

I ტიპის წყვეტის პირობებში, რომელიც ამ თავის საწყის პარაგრაფებში ვიხილეთ, ფლოკეს მამრავლი ერთეულოვან წრეს ნამდვილი ღერძის გასწვრივ, +1-ში გადაკვეთს(იხ. ნახ. 4.7). როგორც ვნახეთ, ეს მოვლენა პერიოდული და ქაოსური ქმედების არასტანდარტულ აფეთქებებს იწვევს. ამგვარი აფეთქებების განმავლობაში მოძრაობის (უკუსვლა მდგომარეობათა სივრცეში სრული აღწერისაკენ) ამპლიტუდები სტაბილურია (საშუალოდ). ვინაიდან ბიფურკაცია მხები ან უნაგირის წერტილი-კვანძის ტიპისაა, ჩვენ წყვეტას *სტაბილურს* ან *მხები ბიფურკაციის წყვეტას* ვუწოდებთ. წყვეტის ასეთ ტიპს არაერთი ექსპერიმენტი ავლენს. ამ მხრივ განსაკუთრებით აღსანიშნავია სისტემები, რომლებიც ქაოსში პერიოდის გაორმაგების გზით გადადიან.

თუ ფლოკეს ორი მამრავლი კომპლექსურად შეუღლებულ წყვილს ადგენს, მაშინ ინტუიცია სისტემის ქმედებაში მეორე სიხშირის არსებობის შესახებ მიგვანიშნებს (პირველი სიხშირე საწყისი ზღვრული ციკლის შესაბამისია, რომელიც ბიფურკაციისას ქრება). მეორე სიხშირის შესაბამისი ზღვრული ციკლი ბიფურკაციის შემთხვევაში არასტაბილური ხდება და შეგვიძლია დავაკვირდეთ ქაოსური ქმედების ინტერვალებთან შერეულ ორსიხშირიან ქმედებას. ამრიგად, II ტიპის წყვეტა ჰოპფის ბიფურკაციის ერთერთი სახეობაა. II ტიპის წყვეტა ექსპერიმენტულად ნაკლებად არის შესწავლილი (HUK87, SEG89).

თუ ფლოკეს მამრავლი ნაკლებია -1-ზე, მაშინ პერიოდის გაორმაგების ბიფურკაცია იჩენს თავს. ბიფურკაციის წერტილში წარმოქმნილი სუბჰარმონიკის ამპლიტუდა იზრდება მაშინ, როდესაც საწყისი პერიოდთან დაკავშირებული მოძრაობის ამპლიტუდა კლებულობს. ამგვარ პერიოდულ ქმედებას არღვევს ქაოტური ქმედების აფეთქებები. აქედან გამომდინარე, ამ მოვლენას პერიოდის გაორმაგების წყვეტას ვუწოდებთ, ვინაიდან ფლოკეს მამრავლები იცვლება ისევე იმგვარი სახით, როგორც ეს ხდებოდა პერიოდის გაორმაგებისას. მაგრამ ბიფურკაციის შემდეგ ქმედება სტაბილური აღარ არის.

ცხრილი 7.1

წყვეტის ტიპები

1. I ტიპი („მხები ბიფურკაციის წყვეტა“)
2. II ტიპი („ჰოპფის ბიფურკაციის წყვეტა“)
3. III ტიპი („პერიოდის ბიფურკაციის წყვეტა“)
4. რელეს ტიპის წყვეტა

III ტიპის წყვეტა დუბოისმა, რუბიომ და ბერგმა რელი-ბენარდის კონვექციისათვის (DRB83), ტანგმა, პუიოლმა და ვეისმა ამონიუმის წრიულ ლაზერში (TPW91), ხოლო

კიმა, იიმა, რიუმ და პარკმა (KYR98) დიოდურ-ინდუქტორულ წრედში ექსპერიმენტულად გამოიკვლიეს.

წყვეტის მეოთხე ტიპს *რელეს ტიპის წყვეტა* ეწოდება, რადგან სისტემის ქმედება ერთმანეთისგან ძალზედ განსხვავებული მშვიდი ქმედებისა და ქაოსური აფეთქებების ნაზავია. წყვეტის ასეთი ტიპი III ტიპის წყვეტის ერთ-ერთი ვარიანტია ნულის ტოლი „ახალი სიხშირით“, ანუ მიახლოებით მივიღეთ „მდგრადი მდგომარეობის“ შესაბამისი ქმედება. ამგვარი კავშირის ახსნისთვის უნდა წარმოვიდგინოთ, რომ საძიებელი ცვლადი, მაგალითად x_m , განსაზღვრულია მდგომარეობების სივრცის იმ ნაწილში, სადაც მას გააჩნია ფიქსირებული წერტილი $x_m=0$ -ში (ან მის მიდამოში).. უფრო ზოგადად რომ ვთქვათ, მდგომარეობათა სივრცეში შეიძლება არსებობდეს ისეთი $x_1=0$, $x_2=0$, ... $x_k=0$ ჰიპერსიბრტყე, რომ სიბრტყეში საწყისის მქონე ტრაექტორია ამავე სიბრტყეში დარჩეს. თუ საძიებელი ცვლადი შესაბამეა ამ სიბრტყესთან დაკავშირებულ რომელიმე $\{x_i\}$ ცვლადს ან ცვლადთა წრფივ კომბინაციას, მაშინ ამ სიბრტყის სიახლოვეს ტრაექტორიის გავლისას სისტემა „მშვიდად“ გამოიყურება. თუ ტრაექტორია სიბრტყის სიახლოვეს დიდხანს ყოვნდება, მაშინ სისტემა „გამორთულია“. რა თქმა უნდა, საბოლოოდ ტრაექტორია ამ სიბრტყის „შემოგარენს“ დატოვებს. თუ შემდგომში ტრაექტორია მდგომარეობათა სივრცის ქაოსურ არეში „ხეტიალს იწყებს“, შესაძლოა ქაოსური ქმედების აფეთქებამაც იჩინოს თავი („ჩართვის“ ქმედება). შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ სისტემის ქმედება k განზომილებიან სიბრტყეში შეშფოთებულია თავისუფლების ისეთ ხარისხთა მიერ, რომლებიც არ არიან სიბრტყესთან კავშირში. თუ თავისუფლების დანარჩენი ხარისხების შესაბამისი ქმედება ქაოსურია, მაშინ ჰიპერსიბრტყის სიახლოვეს გატარებული დრო არაპროგნოზირებადია და „გამორთვისა“ და „ჩართვის“ შემთხვევითი ქმედების ინტერვალები ერთიმეორეს ცვლიან.

რელეს ტიპის წყვეტის გამოკვლევისას საძიებელი ცვლადები გარკვეული ჰიპერსიბრტყის ზოგიერთ ცვლადთან შესაბამისობაში უნდა იყოს. ამკარაა, რომ ცვლადებს ყოველთვის სწორად ვერ შევარჩევთ. რელეს ტიპის წყვეტის გამომხატველი ზოგიერთი მოდელი და იტერაციული ასახვის მოდელები PST93-შია განხილული. HPH94 და RCB95 რელეს ტიპის წყვეტის მაჩვენებელი ექსპერიმენტული სისტემების შესახებ მოგვითხრობენ. არსებული ჰიპოთეზის თანახმად, რელეს ტიპის წყვეტა შესაძლოა გარკვეულ როლს ასრულებდეს სხვადასხვა ბუნებრივ მოვლენებში. ამის მაგალითია „აფეთქება“ ხსნარის ნაკადში, მზის ლაქის აქტიურობა და დედამიწის მაგნიტური ველის პოლუსების ინვერსია.

7.6 კრიზისები

კრიზისი წარმოადგენს ბიფურკაციულ მოვლენას, როდესაც ქაოსური მიმზიდველი (და მისი მიზიდულობის არე) ქრება, ან უეცრად გაფართოებას იწყებს (GOY82, GOY83). კრიზისის უკანასკნელ ტიპს ხშირად **სასაზღვრო კრიზისს** უწოდებენ (თუ რატომ, ამას მომავალში გავიგებთ). ქაოსური მიმზიდველის უეცარ გაფართოებას (ან შეკუმშვას) **შიდა კრიზისი** ეწოდება. კრიზისის მიზეზი ორივე შემთხვევაში სისტემის რომელიმე პარამეტრის ცვლილებასთან ერთად არასტაბილური ფიქსირებული წერტილის ან არასტაბილური ზღვრული ციკლის ქაოსურ მიმზიდველთან „შეჯახება“ გახლავთ. **მეტამორფოზა** კრიზისის კიდევ ერთი სახეობაა (GOY87) (ATY91). ამ დროს მიზიდულობის არის საზღვარზე ფრაქტალური სტრუქტურა ჩნდება ან უეცრად იზრდება.

კრიზისის პირობებში სისტემის ქმედების წარმოდგენისთვის ბიფურკაციის აქამდე განხილულ ორ დიაგრამას დავუბრუნდეთ. 1.14 ნახაზზე ლოჯისტიკური ასახვის შესაბამისი ბიფურკაციული დიაგრამა $A=4$ მნიშვნელობაზე უეცრად წყდება. $A<4$ მნიშვნელობებისთვის არსებული ქაოსური მიმზიდველი სასაზღვრო კრიზისის შემთხვევაში ქრება. 1.8 ნახაზზე დიოდის წრედისთვის წარმოდგენილი დიაგრამა გვიჩვენებს სამ ქაოსურ დიაპაზონს, რომლებიც დაახლოებით $V=0.4$ ვოლტზე ვლინდებიან (დიაგრამაზე განვლილი გზის დაახლოებით $2/3$) და უეცრად ერთ მოზრდილ ქაოტურ დიაპაზონად გარდაიქმნიებიან. ეს შიდა კრიზისის ნიმუშია. მსგავსი ტიპის შიდა კრიზისების ნახვა, 5.15 და 5.17 ნახაზებზე, გაუსის ასახვის ბიფურკაციულ დიაგრამაზეა შესაძლებელი. ახლა გავარკვიოთ, თუ როგორ ვითარდება ამგვარი კრიზისები.

სასაზღვრო კრიზისი

თავდაპირველად განვიხილოთ სასაზღვრო კრიზისი ლოჯისტიკური ასახვისთვის, როდესაც $A=4$. მე-5 თავიდან გავიხსენოთ, რომ ლოჯისტიკური ასახვის ფიქსირებული წერტილია $x=0$ და ეს ფიქსირებული წერტილი $A>1$ -ის შემთხვევაში არასტაბილური ხდება. A -ს 4-თან მიახლოებისას ქაოსური მიმზიდველი თანდათანობით ფართოვდება და $A=4$ მნიშვნელობაზე არასტაბილურ ფიქსირებულ წერტილს ეხება (ეჯახება). $A>4$ -ის შემთხვევაში თითქმის ყველა საწყისი წერტილი $x=-\infty$ -ზე დასრულებულ ტრაექტორიებს იწვევს. თუ ტრაექტორია მოძრაობას იწყებს 0-სა და 1-ს შორის იმ არეში, სადაც $A<4$ -სთვის ქაოსური მიმზიდველი არსებობდა, მაშინ ტრაექტორია $-\infty$ -ში მყოფ სხვა მიმზიდველისაკენ “წასვლამდე” ქაოსურად „ინეტიალებს“ ძველი მიმზიდველის გარშემო. $A>4$ -ის შემთხვევაში ქაოსური

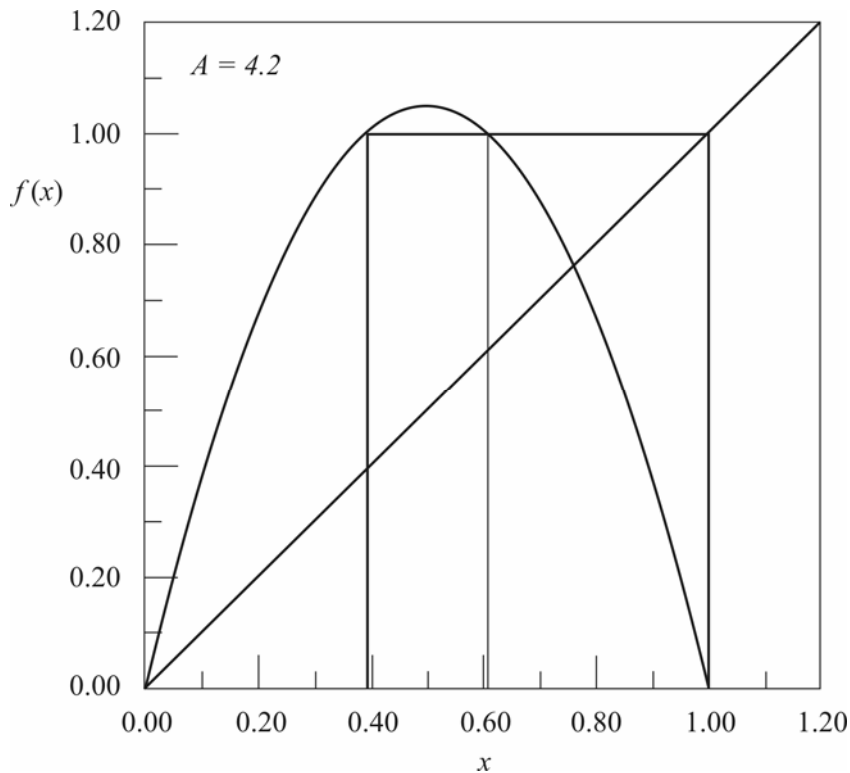
მიმზიდველი და მისი მიზიდულობის არე ქრება და მდგომარეობათა სივრცის იმავე არეში ახალი მიმზიდველი არ დაიკვირვება.

ამოცანა 7.6-1. განიხილეთ 5.4-6 ამოცანაში მოყვანილი კვადრატული ასახვა და აჩვენეთ, რომ მას სასაზღვრო კრიზისი $C=2$ -თვის გააჩნია. დაუკავშირეთ ეს სასაზღვრო კრიზისი $C=-1/4$ -ზე „დაბადებული“ არასტაბილური ფიქსირებული წერტილის თვისებებს.

$A>4$ -ის შემთხვევაში ქმედების კონკრეტული დინამიკის გააზრებას გრაფიკული იტერაციის მეთოდის გამოყენებით შევძლებთ. 7.5 ნახაზი გვიჩვენებს $A>4$ მნიშვნელობის შესაბამის ლოჯისტიკურ ასახვას. $x=1/2$ -ის მიმართ ცენტრირებულ x მნიშვნელობების ვიწრო დიაპაზონს „გაღინების არე“ ეწოდება. როდესაც ტრაექტორია გაღინების არეში აღმოჩნდება, შემდეგი იტერაცია x -ის 1-ზე მეტ მნიშვნელობას გვაძლევს. მომდევნო იტერაციები ტრაექტორიას სწრაფად წაიყვანს $-\infty$ -ის მიმართულებით. x -ის იმ მნიშვნელობების პოვნით, რომელთაც $x=1$ შემთხვევისაკენ მივყავართ, განვსაზღვრავთ გაღინების არის საზღვრებს. წრფივი ალგებრის მიხედვით:

$$x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2A^{1/2}} \sqrt{A-4} \quad (7.6-1)$$

ამრიგად, გაღინების არის ზომა, რომელიც მოიცემა ორი სასაზღვრო მნიშვნელობის სხვაობით, იცვლება $(A-4)^{1/2}$ სახით. ვინაიდან 0-სა და 1-ს შორის საწყისის მქონე ტრაექტორიას გაღინება მხოლოდ ამ არეში შელწევის შემთხვევაში შეუძლია, ქაოსური გარდამავალი სტადიის საშუალო ხანგრძლივობა, ვიდრე $-\infty$ -ის მიმართულებით გაღინება მოხდებოდეს, $(A-4)^{-1/2}$ კანონით იცვლება. ამგვარი ქმედება სხვადასხვა ასახვის ფუნქციების მიხედვით რიცხობრივი ექსპერიმენტებით არის შემოწმებული (GOY83).



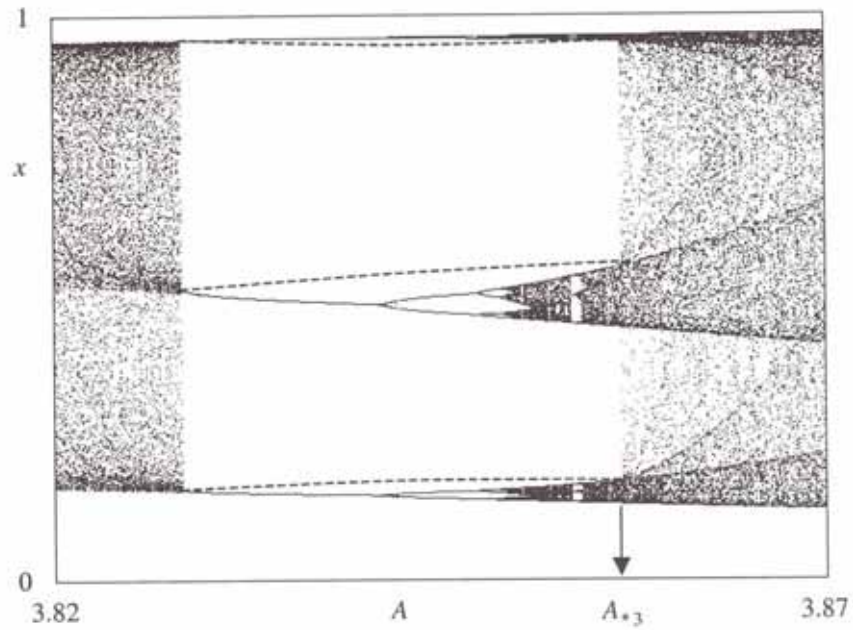
ნახაზი 7.5. ლოჯისტიკური ასახვის მრუდი, როდესაც $A=4.2$. „გადინების არის“ ფარგლებში არსებული x -ებისათვის, რომელიც შემოსაზღვრულია ვერტიკალური მონაკვეთებით $x=1/2$ მნიშვნელობის გარშემო, ტრაექტორიები სწრაფად გაედინება $x=-\infty$ მიმართულებით. გადინების არეების საზღვრები x -ის ის მნიშვნელობებია, რომლებიც $x=1$ მნიშვნელობაში აისახებიან. 0-სა და 1-ს შორის მყოფი x -ის სხვა მნიშვნელობებში დაწყებული ტრაექტორიები ქაოსურად იმოძრავენ გადინების არეში შესვლამდე.

ამგვარი ქმედება უნივერსალური იქნება ნებისმიერი კვადრატული ასახვის ფუნქციისთვის მისი მაქსიმალური მნიშვნელობის მიდამოში.

კრიზისი უფრო მეტი განზომილების მქონე ასახვის ფუნქციებშიც შეიძლება გამოვლინდეს. ჰენონის ასახვაში სასაზღვრო კრიზისი 5.2-1 ნახაზზე მოყვანილი სახით დაიკვირვება. $C=1.08$ მნიშვნელობის მიდამოში, ექვსი ნაწილისგან შემდგარი მიმზიდველის ქაოსური მხარე მიზიდულობის ორი არის საზღვარზე მდებარე “უნაგირის” წერტილს ეჯახება და მყისიერად ქრება (GOY83).

შიდა კრიზისი

ამგვარად განვიხილოთ კრიზისის კიდევ ერთი სახეობა – შიდა კრიზისი. ბიფურკაციის ამ ტიპისათვის მიზიდულობის არის ფარგლებში არსებული არასტაბილური ფიქსირებული წერტილი ან არასტაბილური ზღვრული ციკლი პარამეტრის ცვლილებასთან ერთად ქაოსურ მიმზიდველს „ეჯახება“.

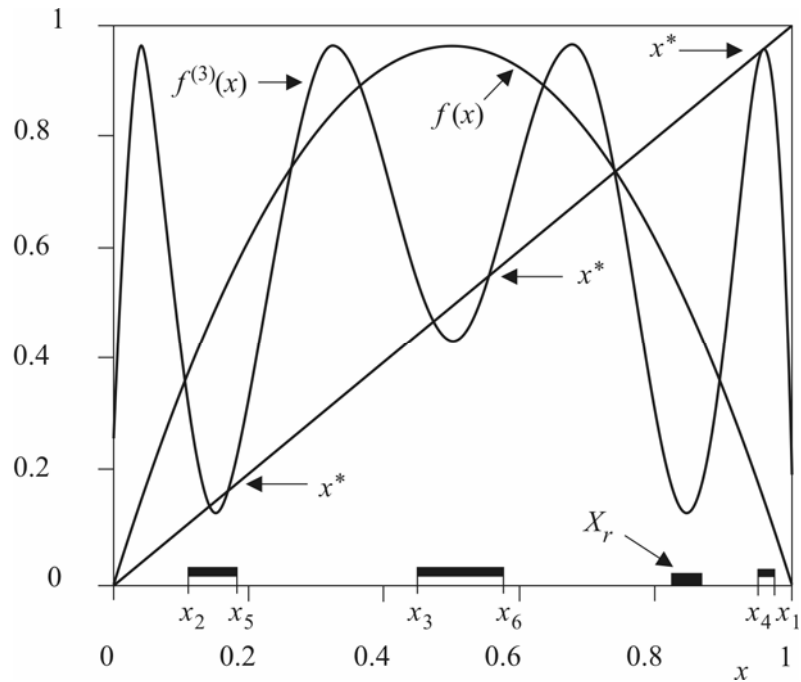


ნახაზი 7.6. ლოჯისტიკური ასახვისთვის ბიფურკაციული დიაგრამა პერიოდი-3-ს შესაბამისი შიდა კრიზისის არეში. $A=1+\sqrt{8}$ მნიშვნელობის შემთხვევაში მხები ბიფურკაცია პერიოდი-3-ის ღიაპაზონს ქმნის (გარდა ამისა, უნიშნეთ, რომ წყვეტის ეფექტი მხები ბიფურკაციის მარცხნივ მდებარე სამ ღიაპაზონში მდებარე ტრაექტორიის წერტილების გროვაში დაკვირვება. ასევე სახეზეა სამი არასტაბილური ფიქსირებული წერტილი. A პარამეტრის ზრდისას სტაბილური ფიქსირებული წერტილები პერიოდის გაორმაგებას უჩვენებენ და ქაოსურ ღიაპაზონს ქმნიან. პერიოდი-3-ის არასტაბილური ფიქსირებული წერტილების მდებარეობა პუნქტირითაა აღნიშნული. A -ს შემდგომი ზრდისას არასტაბილური ფიქსირებული წერტილები ქაოსურ ღიაპაზონებთან კონტაქტში შედის და ქაოსური მიმზიდველის ზომა მყისიერად მატულობს.

დაჯახებისას ქაოსური მიმზიდველის ზომა მყისიერად მატულობს. გაფართოების მიზეზი იმაში მდგომარეობს, რომ ტრაექტორიები ქაოსურ მიმზიდველზე საბოლოოდ არასტაბილურ ფიქსირებულ წერტილს (ან არასტაბილურ ზღვრულ ციკლს) უახლოვდებიან და შემდეგ ფიქსირებული წერტილის მიერ მდგომარეობათა სივრცის იმ არეებში განიზიდებიან, სადაც ისინი დაჯახებამდე არ ყოფილან. საბოლოო ეფექტი მდგომარეობათა სივრცის იმ არის გაფართოებაა, სადაც ტრაექტორიები „მოძრაობენ“.

წყვეტისა და მხები ბიფურკაციების შესახებ ზემოთ მოყვანილი მსჯელობიდან შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ შიდა კრიზისი პერიოდული ფანჯრის წარმოქმნელი მხები ბიფურკაციის „პარტნიორია“, რადგან როგორც არასტაბილური, ისე სტაბილური

ფიქსირებული წერტილები მხები ბიფურკაციის შემთხვევაში იჩენენ თავს. მაგალითად, ლოჯისტიკური ასახვისთვის პერიოდი-5-ის მაჩვენებელი 2.4 ნახაზი შიდა კრიზისს პერიოდი-5-ის პერიოდის გაორმაგების კასკადის მარჯვნივ ავლენს. ხუთი ქაოსური დიაპაზონი მყისიერად იზრდება და პერიოდი-5-ის ტრაექტორიებით მოცულ x დიაპაზონს მთლიანად ავსებს. 7.6 ნახაზი ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციისათვის გვიჩვენებს შიდა კრიზისს პერიოდი-3-ის შემთხვევაში.



ნახაზი 7.7. ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციისა და მისი მესამე რიგის იტერაციის გრაფიკი A_{*3} -ზე დიდი $A=3.86$ მნიშვნელობისათვის. x^* -ით აღნიშნული არასტაბილური ფიქსირებული წერტილები x ღერძის გასწვრივ ციფრებით გამოსახულ და მსხვილი ხაზებით აღნიშნულ ქაოსურ დიაპაზონებშია მოხვედრილი. X_r -ით აღნიშნულია „განმეორებით შემოსვლის“ არე. აქ მოხვედრილი ტრაექტორიები ვიწრო ზოლოვან დიაპაზონებში განმეორებით ჩნდებიან. ციფრებით აღნიშნული წერტილები $x=1/2$ მნიშვნელობაზე დაწყებული მიმდევრობითი იტერაციების შესაბამისი ტრაექტორიის წერტილებია.

კრიზისის დაწყებამდე, მიმზიდველი სამი განცალკევებული დიაპაზონისგან შედგება, რაც პერიოდი-3 ტიპის კასკადით არის განპირობებული. $A=A_{*3}$ მნიშვნელობისათვის ვლინდება შიდა კრიზისი, მიმზიდველი მყისიერად ფართოვდება და დიაპაზონებს შორის აქამდე „აუთვისებელ“ არეებს ავსებს.

შიდა კრიზისის არეში ტრაექტორიების ქმედებას რამდენიმე უნივერსალური თვისება გააჩნია (CHW81, GOY83). ლოჯისტიკური ასახვის A_{*3} კრიზისული მნიშვნელობის მიღმა მყოფი პარამეტრის მნიშვნელობებისთვის პერიოდი-3-ის ტიპის შიდა კრიზისის შემთხვევაში ტრაექტორიების მიერ ვიწრო დიაპაზონებში გატარებული საშუალო დრო $(A - A_{*3})^{-1/2}$ კანონით იცვლება. ამ შემთხვევაში $x=1/2$ მნიშვნელობის მახლობლად არსებობს „გადინების არე“, რომელიც ტრაექტორიებს აქამდე „აკრძალულ“ დიაპაზონში შესვლის საშუალებას აძლევს. ამ არის ზომა $(A - A_{*3})^{+1/2}$ კანონის მიხედვით იზრდება და გადინებამდე ტრაექტორიების მიერ აქ გატარებული τ საშუალო დრო $(A - A_{*3})^{-1/2}$ სახით იცვლება. ასეთი ქმედება გამოკვლეულია ნახევარგამტარულ დიოდებზე ჩატარებული ექსპერიმენტებისა და (GOY83)რიცხვითი გამოთვლების შემთხვევაში. სისტემებისთვის, რომლებიც სათანადოდ არ არიან მოდელირებული კვადრატული მაქსიმუმის მქონე ერთგანზომილებიანი ასახვებით, ხარისხოვანი კანონით გამოხატული ქმედების შესაბამისი ექსპონენტა შეიძლება არ აღმოჩნდეს $1/2$ -ის ტოლი (GOR87). როდესაც ქმედება საწყის ქაოსურ დიაპაზონებზე გავრცელებიდან მდგომარეობათა სივრცის უფრო დიდ არეში მოძრაობად იქცევა, მას ზოგჯერ **კრიზისით გამოწვეულ წყვეტას** (GOR87) უწოდებენ.

უნივერსალური ქმედების მეორე ტიპი მდგომარეობათა სივრცის აქამდე აკრძალულ არეებში ტრაექტორიების მიერ გატარებული დროის წილთანაა დაკავშირებული. ჩვენ ამგვარი ქმედების გამოწვევი მიზეზის დადგენა იმიტომ გვსურს, რომ იგი ძალიან კარგად აჩვენებს, თუ როგორ შეიძლება მარტივმა გეომეტრიულმა მიზეზებმა სისტემის დინამიკის შესახებ დეტალური პროგნოზირების საშუალება მოგვცეს. ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციას ჩვენ შაბლონად გამოვიყენებთ, მაგრამ ცხადია, რომ შედეგები კვადრატული მაქსიმუმის მქონე ნებისმიერ ერთგანზომილებიან ასახვის ფუნქციას შეესაბამება.

აღნიშნათა გამარტივებისათვის, შემოვიტანოთ აღნიშვნა $a=A - A_{*3}$. შემდეგ შევნიშნოთ, რომ a -ს მცირე მნიშვნელობებისთვის აკრძალულ არეებში ტრაექტორიების მიერ გატარებული დროის წილი შეიძლება გამოისახოს $F=t_n/t_0$ სახით, სადაც t_n ახალ (აქამდე აკრძალულ) არეში გატარებული საშუალო დროა, ხოლო t_0 – ძველ, ვიწროზოლოვან არეში გატარებული საშუალო დრო (დავუშვათ, რომ $t_n \ll t_0$.) წინა პარაგრაფში ვაჩვენეთ, რომ $t_0 R a^{-1/2}$, ამიტომაც ამჯერად საჭიროა t_n -ის გამოთვლა.

t_n -ის დასადგენად გადავავლოთ თვალი 7.7 ნახაზს. ვიწრო ქაოსური დიაპაზონები x ღერძის გასწვრივ მსხვილი მონაკვეთებითაა აღნიშნული. ქაოსური დიაპაზონების საზღვრები 1-დან n -ის ჩათვლით ციფრებითაა აღნიშნული. ეს წერტილები f -ის $x = 1/2$ -ის მიმართ n -ჯერ გამოყენების შედეგია, ანუ, $x_n = f^{(n)}(1/2)$ (მე-5 თავიდან გაიხსენეთ, რომ მიმდევრობითი იტერაციები $x=1/2$ კრიტიკული წერტილის მიმართ გამოყოფს მოცემული ტრაექტორიის

ექსტრემალურ მნიშვნელობებს). $A > A_{*3}$ -სთვის x^* -ით აღნიშნული პერიოდი-3-ის შესაბამისი არასტაბილური ფიქსირებული წერტილები ქაოსურ დიაპაზონებშია გადაადგილებული. ერთ-ერთი ფიქსირებული წერტილის მიდამოში გამავალი ტრაექტორია თავდაპირველად აკრძალული არის მიმართულებით განიზიდება. ერთ-ერთ ასეთ აკრძალულ არეში X_r -ით აღნიშნულ ინტერვალს „განმეორებით შემოსვლის“ არე ეწოდება. აკრძალულ არეში მოხვედრის შემთხვევაში ტრაექტორია შემდგომში თავს იჩენს სწორედ ამ არეში. ამრიგად, t_n იმის მიხედვით განისაზღვრება, თუ საშუალოდ რა დრო დასჭირდა ტრაექტორიას აკრძალული არიდან X_r -ში გადასვლაში.

სავარჯიშო 7.6-2. აჩვენეთ, რომ ლოჯისტიკური ასახვისათვის პერიოდი-3-ის ტიპის შიდა კრიზისი $A=3.8568$ მნიშვნელობაზე იჩენს თავს. მინიშნება: როდესაც $A=A_{*3}$, პერიოდი-3-ის არასტაბილური ფიქსირებული წერტილები ზუსტად 7.7 ნახაზზე აღნიშნულ ქაოსურ დიაპაზონებში გადანაცვლდებიან. ამრიგად, x_4 -ით აღნიშნული წერტილი იგივეა, რაც x_7 იქნებოდა (ეს უკანასკნელი x_6 წერტილის მიმართ ასახვის ფუნქციის გამოყენების შედეგად მიიღება). ამგვარად, $A=A_{*3}$ მნიშვნელობისთვის $f^{(4)}(1/2) = f^{(7)}(1/2)$.

განვიხილოთ $x=1/2$ მიდამოში დაწყებული ტრაექტორია. ასახვის ფუნქციის ექვსჯერ გამოყენების შემდეგ (ან $f^{(3)}$ -ის ორჯერ გამოყენებით) ტრაექტორია 7.7 ნახაზზე x_6 -ით აღნიშნულ წერტილში აღმოჩნდება. შენიშნეთ, რომ x_6 ერთ-ერთ არასტაბილურ ფიქსირებულ წერტილთან ახლოს მდებარეობს. ფაქტობრივად, a -ს მცირე მნიშვნელობებისათვის x_6-x^* მანძილი a -სადმი პროპორციულია (იხ. ამოცანა 7.6-3). როდესაც ტრაექტორია არასტაბილური ფიქსირებული წერტილის სიახლოვესაა, $f^{(3)}$ -ის შემდგომი იტერაციისას, ტრაექტორიასა და არასტაბილურ ფიქსირებულ წერტილს შორის მანძილი გაიზრდება M -ჯერ, რომელიც $f^{(3)}$ -ის მახასიათებელი მაშრავლია კრიზისის წერტილში. ($M=e^{\lambda}$, სადაც λ ლიაპუნოვის ექსპონენტია $f^{(3)}$ -სთვის კრიზისის წერტილში). ამრიგად, ტრაექტორიას ესაჭიროება $f^{(3)}$ -ის n -გზის იტერაცია x^* -დან X_r -მდე არსებული d მანძილის გასაველელად, სადაც n აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:

$$d = kaM^n \tag{7.6-2}$$

და k მუდმივაა. (7.6-2) განტოლების ორივე მხრის მიმართ ნატურალური ლოგარითმის გამოყენებით შეგვიძლია n -ის მნიშვნელობის პოვნა:

$$n = \frac{\ln d}{\ln M} - \frac{\ln(ka)}{\ln M} \quad (7.6-3)$$

აღსანიშნავია, რომ (7.6-3) განტოლების მარჯვენა ნაწილის პირველი წევრი ასახვის კონკრეტული ფუნქციისთვის a -სგან თითქმის დამოუკიდებელია.

ვინაიდან იტერაციათა n რიცხვი აკრძალულ არეში გატარებული დროის პროპორციულია, პრობლემის გადაჭრა თითქმის მთლიანად ხერხდება. მიუხედავად ამისა, არსებობს გარკვეული სირთულე: დავუშვათ, რომ A -ს გარკვეული მნიშვნელობისთვის $f^{(3)}$ -ის n -იტერაცია გვაძლევს X_r -კენ მიმართულ ტრაექტორიას. A -ს შემდგომ ზრდასთან ერთად შეიძლება წარმოიქმნას A -ს ისეთი დიაპაზონი, რომლისთვისაც n -იტერაცია ტრაექტორიას X_r -ის გარეთ განსაზღვრავს, მაშინ როცა $(n-1)$ -ე იტერაცია X_r -ში არ არის ჯერ მოხვედრილი. ამ შემთხვევაში ტრაექტორია არეს განმეორებით აღარ დაუბრუნდება და აკრძალულ არეში გატარებული დრო გაიზრდება. თუ A კვლავ განაგრძობს ზრდას, საბოლოოდ n -ური იტერაცია X_r -ში მოხვდება და აკრძალულ არეში გატარებული დრო შემცირდება. ამიტომ მოსალოდნელია, რომ t_n იყოს $\ln a$ -ს პერიოდული ფუნქცია.

$\ln a$ -ზე დამოკიდებულების მიზეზისა და პერიოდის ხანგრძლივობის დასადგენად აღვნიშნოთ a_n -ით a -ს ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც n -ური იტერაცია X_r -ში გამავალ ტრაექტორიას გვაძლევს, ხოლო a_{n-1} კი იყოს მნიშვნელობა, რომელიც $(n-1)$ -ე იტერაციას X_r -მდე მიიყვანს. ამ ორმა მნიშვნელობამ უნდა დააკმაყოფილოს შემდეგი პირობა:

$$a_n M^n = a_{n-1} M^{n-1} \quad (7.6-4)$$

თუ (7.6-4) განტოლების ორივე მხრის მიმართ ნატურალურ ლოგარითმს გამოვიყენებთ, მივიღებთ

$$\ln a_{n-1} - \ln a_n = \ln M \quad (7.6-5)$$

აქედან ვადგენთ, რომ ქმედების ეს ციკლი დამოკიდებულია a -ს მნიშვნელობების ნატურალურ ლოგარითმებზე და მისი პერიოდი $\ln M$ გახლავთ. შენიშნეთ, რომ ჩვენს მიერ გამოტანილი დასკვნის მეშვეობით ვერ ვარკვევთ, თუ კონკრეტულად რა სახე აქვს პერიოდულ ფუნქციას. არაა აუცილებელი იგი მაინცდამაინც სინუსოიდური იყოს.

საბოლოო ჯამში ვადგენთ, რომ აკრძალულ არეებში გატარებული დროის წილი a პარამეტრის მიხედვით შემდეგნაირად იცვლება:

$$F(a) = K\sqrt{a} \left[\text{constant} + P(\ln a) - \frac{\ln a}{\ln M} \right] \quad (7.6-6)$$

სადაც $P \ln M$ პერიოდის მქონე უცნობი პერიოდული ფუნქციაა, ხოლო K – a -საგან დამოუკიდებელი მუდმივაა. ეს საკმაოდ რთული შედეგი კვადრატული ასახვის (GOY83) რიცხვითი გამოთვლებისა და ნახევარგამტარულ დიოდებზე ჩატარებული ექსპერიმენტების მიხედვით არის გადამოწმებული (HIL85). გაკვირვებას იწვევს შედარებით მარტივი გეომეტრიული არგუმენტები, რომლებიც შიდა კრიზისით მოცულ მიდამოში ტრაექტორიების შესახებ საკმაოდ დეტალური რაოდენობრივი პროგნოზირების საშუალებას გვაძლევენ.

ამოცანა 7.6-3. ზემოთ დაუშვით, რომ x_6 -სა და x^* -ს შორის მანძილი a პარამეტრის სხვაობის პროპორციულია. კერძოდ, ვთქვათ ეს მანძილი a^p -სადმი პროპორციულია, სადაც p რაღაც ექსპონენტია. ვაჩვენოთ, რომ ახალი დამოკიდებულება (7.6-6) განტოლების იდენტურ შედეგს გვაძლევს.

ხმაურით გამოწვეული კრიზისი

წინა პარაგრაფში დაუშვით, რომ ჩვენს წინაშეა იდეალურად დეტერმინისტული სისტემა და არ არსებობს გარეშე ხმაური. წინააღმდეგ შემთხვევაში სისტემა, რომელიც ახლოსაა, მაგრამ არ იმყოფება კრიზისის არეში, შესაძლოა კრიზისის არეში მყისიერად „შევიდეს“ და „გამოვიდეს“. ქაოსურ დიაპაზონებს შორის არსებულ აცილებების არეებს შორის მოძრაობის საშუალო τ დრო საშუალო დრო მასშტაბირების წესის მეშვეობით აღიწერება (SOG91):

$$\tau = K\sigma^{-\gamma} g\left(\frac{|A-A_*|}{\sigma}\right) \quad (7.6-7)$$

სადაც σ ხმაურის „სიმძლავრის“ საზომია (ე.წ. სტანდარტული გადახრა), ხოლო A_* პარამეტრის ის მნიშვნელობაა, რომლისთვისაც კრიზისი ხმაურის გარეშე ვლინდება, γ კი მასშტაბირების ექსპონენტია τ ს-თვის ხმაურის და კრიზისის არარსებობის პირობებში, g საკვლევ სისტემაზე დამოკიდებული გარკვეული ფუნქცია და ხმაურის სიხშირის განაწილების მახასიათებელია. კავშირი არაწრფივად მართულ მერხვე სისტემაზე ჩატარებული ექსპერიმენტის (SDG91) მეშვეობითაა გადამოწმებული.

ორმაგი კრიზისი

თუ სისტემის ორი პარამეტრი ერთდროულად იცვლება, ორზე მეტი რთული კრიზისული მოვლენაა მოსალოდნელი, [რომელთაც როგორც შიდა და სასაზღვრო კრიზისი, ასევე შიდა კრიზისი და არის საზღვრის მეტამორფოზა შეიძლება აჩვენონ.] ასეთი რთული შემთხვევები GGY93-სა და SUG95-შია განხილული.

7.7 ზოგიერთი დასკვნა

მოცემულ თავში გამოვიკვლიეთ ქაოსისკენ მიმავალი რამდენიმე გზა და ქაოსური მიმზიდველების შესაბამისი ბიფურკაციები. წყვეტა და კრიზისი ისეთივე ხშირია, როგორც პერიოდის გაორმაგება. ღრმად ჩახედული ქაოსოლოგი ასეთი მოვლენების შეცნობას მათი წარმოშობისთანავე უნდა ახერხებდეს. ყველა შემთხვევაში საქმე გვაქვს მარტივ გეომეტრიულ და რენორმალიზაციის წინაპირობებთან, რომლებიც ერთგანზომილებიანი ასახვების მიერ მოდელირებადი დინამიკის მქონე სისტემების ქმედების შესახებ სერიოზული უნივერსალური წინასწარი დასკვნების გამოტანის საშუალებას გვაძლევენ. უფრო მეტი განზომილების მქონე ასახვებისა და დინამიკური სისტემების უფრო ზოგადი სახეობების მიმართ ამ იდეების მორგების პროცესი კვლავ საწყის ეტაპზეა.

7.8 დამატებითი ლიტერატურა

ქაოსში გადასვლა წყვეტის გზით: P. Manneville and Y. Pomeau, "Intermittency and the Lorenz Model," *Phys. Lett. A* 75,1-2 (1979) and Y. Pomeau and P. Manneville, "Intermittent Transition to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems," *Commun. Math. Phys.* 74,189-97 (1980) (reprinted in [Hao, 1984], and [Cvitanovic, 1984]).

წყვეტა უფრო დეტალურად განხილულია: [Berge, Pomeau and Vidal, 1986], [Thompson and Stewart, 1986], and [Schuster, 1995].

B. Hu and J. Rudnick, "Exact Solutions to the Feigenbaum Renormalization Equations for Intermittency," *Phys. Rev. Lett.* 48, 1645-48 (1982). სტატია ეძღვნება წყვეტის მიმართ რენორმალიზაციის მეთოდის გამოყენებას.

1/f ზმაური და წყვეტა

P. Manneville, "Intermittency, Self-Similarity and $1/f$ -Spectrum in Dissipative Dynamical Systems," *J. Phys. (Paris)* 41, 1235 (1980).

I. Procaccia and H. G. Schuster, "Functional Renormalization Group Theory of Universal $1/f$ -noise in Dynamical Systems," *Phys. Rev. A* 28,1210-12 (1983).

E. G. Gwinn and R. M. Westervelt, "Intermittent Chaos and Low-Frequency Noise in the Driven Damped Pendulum" *Phys. Rev. Lett.* 54, 1613-16 (1985).

წყვეტის ექსპერიმენტული შესწავლა
პირველი ტიპის წყვეტა

C. Jeffries and J. Perez, "Observation of a Pomeau-Manneville Intermittent Route to Chaos in a Nonlinear Oscillator," *Phys. Rev. A* 26,2117-22 (1982).

W. J. Yeh and Y. H. Kao, "Universal Scaling and Chaotic Behavior of a Josephson-Junction Analog," *Phys. Rev. Lett.* 49, 1888-91 (1982).

H. Hayashi, S. Ishizuka, and K. Hirakawa, "Transition to Chaos Via Intermittency in the Onchidium Pacemaker Neuron," *Phys. Lett. A* 98, 474-76 (1983).

R. W. Rollins and E. R. Hunt, "Intermittent Transient Chaos at Interior Crises in the Diode Resonator," *Phys. Rev. A* 29, 3327-34 (1984).

მეორე ტიპის წყვეტა

J.-Y. Huang and J.-J. Kim, "Type-II Intermittency in a Coupled Nonlinear Oscillator: Experimental Observation," *Phys. Rev. A* 36, 1495-97 (1987).

J. Sacher, W. Elsasser, and E. Gobel, "Intermittency in the Coherence Collapse of a Semiconductor Laser with External Feedback," *Phys. Rev. Lett.* 63, 2224-27(1989).

მესამე ტიპის წყვეტა

M. Dubois, M. A. Rubio, and P. Berge, "Experimental Evidence of Intermittency Associated with a Subharmonic Bifurcation," *Phys. Rev. Lett.* 51, 1446-49(1983).

D. Y. Tang, J. Pujol, and C. O. Weiss, "Type III intermittency of a laser," *Phys. Rev. A* 44, 35-38 (1991).

C.-M. Kim, G.-S. Yim, J.-W. Ryu, and Y.-J. Park, "Characteristic Relations of Type-III Intermittency in an Electronic Circuit," *Phys. Rev. Lett.* 80, 5317-20 (1998).

რელეს ტიპის წყვეტა

N. Piatt, E. A. Spiegel, and C. Tresser, "On-Off Intermittency: A Mechanism for Bursting," *Phys. Rev. Lett.* 70,279-82 (1993).

P. W. Hammer, N. Piatt, S. M. Hammel, J. F. Heagy, and B. D. Lee, "Experimental Observation of On-Off Intermittency," *Phys. Rev. Lett.* 73, 1095-98 (1994).

F. Rodelsperger, A. Cenys, and H. Benner, "On-Off Intermittency in Spin-Wave Instabilities," *Phys. Rev. Lett.* 75, 2594-97 (1995). რელეს ტიპის წყვეტა ფერომაგნეტური რეზონანსის დროს.

კრიზისები

კრიზისის ცნება არაწრფივ დინამიკაში შემოიტანა C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke, "Chaotic Attractors in Crisis," *Phys. Rev. Lett.* 48,1507-10 (1982).

C. Grebogi, and E. Ott, and J. A. Yorke, "Crises, Sudden Changes in Chaotic Attractors and Transient Chaos," *Physica D* 7,181-200 (1983).

კრიზისით გამოწვეული წყვეტა განხილულია by C. Grebogi, E. Ott, F. Romeiras, and J. A. Yorke, "Critical Exponents for Crisis-induced Intermittency," *Phys. Rev. A* 36,5365-80 (1987).

არის საზღვრის მეტამორფოზა განხილულია:

C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke, "Basin Boundary Metamorphoses: Changes in Accessible Boundary Orbits," *Physica D* 24,243-62 (1987).

K. T. Alligood, L. Tedeschi-Lalli, and J. A. Yorke, "Metamorphoses: Sudden Jumps in Basin Boundaries," *Commun. Math. Phys.* 141, 1-8 (1991).

ერთდროულად ორი პარამეტრის ცვლილების შედეგად გამოწვეული კრიზისები განხილულია J. A. C. Gallas, C. Grebogi, and J. A. Yorke, "Vertices in Parameter Space: Double Crises Which Destroy Chaotic Attractors," *Phys. Rev. Lett.* 71, 1359-1362 (1993).

H. B. Stewart, Y. Ueda, C. Grebogi, and J. A. Yorke, "Double Crises in Two-Parameter Dynamical Systems," *Phys. Rev. Lett.* 75, 2478-2481 (1995).

კრიზისების ექსპერიმენტული შესწავლა

R. C. Hilborn, "Quantitative Measurement of the Parameter Dependence of the Onset of a Crisis in a Driven Nonlinear Oscillator," *Phys. Rev. A* 31, 378-82 (1985).

W. L. Ditto, S. Rauseo, R. Cawley, C. Grebogi, G.-H. Hsu, E. Kostelich, E. Ott, H. T. Savage, R. Segnan, M. L. Spano, and J. A. Yorke, "Experimental Observation of Crisis-Induced Intermittency and Its Critical Exponent," *Phys. Rev. Lett.* 63,923-26 (1989).

D. Dangoisse, P. Glorieux, and D. Hennequin, "Laser Chaotic Attractors in Crisis," *Phys. Rev. Lett.* 57,2657-60 (1986).

J. C. Sommerer, W. L. Ditto, C. Grebogi, E. Ott, and M. L. Spano, "Experimental Confirmation of the Scaling Theory of Noise-Induced Crises," *Phys. Rev. Lett.* 66, 1947-50 (1991).

M. Finardi, L. Flepp, J. Parisi, R. Holzner, R. Badii, and E. Brun, "Topological and Metric Analysis of Heteroclinic Crisis in Laser Chaos," *Phys. Rev. Lett.* 68,2989-2991 (1992).

კრიზისებთან დაკავშირებული სხვა საკითხები

J. A. Yorke, C. Grebogi, E. Ott, and L. Tedeschini-Lalli, "Scaling Behavior of Windows in Dissipative Dynamical Systems," *Phys. Rev. Lett.* 54, 1095-98 (1985).

J. C. Sommer, E. Ott, and C. Grebogi, "Scaling Law for Characteristic Times of Noise-induced Crises," *Phys. Rev. A* 43, 1754-69 (1991). ეგრეთ წოდებული ხმაურით გამოწვეული კრიზისების თეორია.

7.9 კომპიუტერული სავარჯიშოები

CE7-1. გამოიკვლიეთ ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციის იტერაციათა წყვეტა, როგორც $A=3.7375$ -ის სიახლოვეს მყოფ პერიოდი-5-ის, ასევე $A=3.8391$ მიდამოში არსებულ პერიოდი-3-ის არეში. ამისთვის x -ის, როგორც იტერაციის რიგის ფუნქციის სახით გამომსახველი პროგრამა დაიხმარეთ.

CE7-2. უფრო რთული წინააღმდეგობა: ლოჯისტიკური ასახვის შემთხვევაში (7.4-7) განტოლებაში მოცემული პერიოდული „აფეთქებების“ საშუალო ხანგრძლივობისთვის მასშტაბის პროგნოზირება რიცხვითი სახით მოახდინეთ.

CE7-3. გამოიკვლიეთ კრიზისის არეები ლოჯისტიკური ასახვისთვის $A=3.86$ მიდამოში და მე-5 თავში წარმოდგენილი გაუსის ასახვის ფუნქციისთვის და ამ არეების შესაბამისი ბიფურკაციული დიაგრამები ააგეთ.

CE7-4. შეისწავლეთ ლოჯისტიკური ასახვის იტერაციათა გარდამავალი ქმედება $A>4$ პირობებში, $1-1/A$ ფიქსირებული წერტილის მიდამოში დაწყებული ტრაექტორიებისათვის. შეგიძლიათ განსაზღვროთ $A-4$ სხვაობაზე დამოკიდებული გარდამავალი სტადიების საშუალო ხანგრძლივობა?

ჰამილტონისეული სისტემები

„ფიზიკა არის იქ, სადაც ქმდება“

8.1 შესავალი

აქამდე არაწრფივ დინამიკას მხოლოდ დისიპაციური სისტემებისთვის განვიხილავდით. მდგომარეობათა სივრცის თვალსაზრისით, დისიპაციური სისტემის მთავარი თვისება ამ სივრცეში არსებული საწყისი პირობების შესაბამისი მოცულობის „კოლაფსში“ გამოიხატება. მრავალი მიზეზის გამო, ყურადღებას მიმზიდველის (ან, საზოგადოდ, მიმზიდველების), ანუ იმ „არის“ მიმართ გავამახვილებთ, რომლისკენაც სხვადასხვა საწყისი პირობების მქონე ტრაექტორიები მიისწრაფვიან. აქედან გამომდინარე, დროის ხანგრძლივი ინტერვალისათვის აღებული სისტემის დინამიკის შეცნობისთვის მხედველობაში მხოლოდ მიმზიდველების მიღებაა საჭირო.

რა ხდება, როდესაც დისიპაცია თანდათან მცირდება? ამ შემთხვევაში ტრაექტორიას სულ უფრო და უფრო მეტი დრო ჭირდება მიმზიდველამდე მიღწევისათვის. იგივე ითქმის საწყისი პირობების შესაბამისი მოცულობის კოლაფსთან დაკავშირებითაც და ზღვრულ შემთხვევაში, როდესაც დისიპაცია საერთოდ არ არსებობს, უნდა ველოდოთ, რომ ზემოხსენებული მოცულობა უცვლელი დარჩება და ტრაექტორიებისთვის მიმზიდველები აღარ იარსებებენ.

დისიპაციის გარეშე სისტემებს *კონსერვატიულ* ან *ჰამილტონისეულ სისტემებს* უწოდებენ. კონსერვატიული ნიშნავს, რომ სისტემის ძირითადი ფიზიკური პარამეტრები (როგორცაა სრული მექანიკური ენერგია, კუთხური მომენტი და ა.შ.) დროში უცვლელია. ჩვენ ვამბობთ, რომ ეს პარამეტრები *მუდმივია*. თუ სისტემას ქმედების დასაწყისში ენერგიის გარკვეული რაოდენობა გააჩნია, იგი სამუდამოდ უცვლელი იქნება. ამ ტიპის სისტემებს „ჰამილტონისეული“ ეწოდებათ, რადგანაც მათი დინამიკა ე.წ. ჰამილტონის განტოლებების მეშვეობით აღიწერება (გამოჩენილი შოტლანდიელი მათემატიკოსის – სერ უილიამ ჰამილტონის (1805-1865) პატივსაცემად). ამ განტოლებების შესახებ მომდევნო პარაგრაფში ვიმსჯელებთ.

გვხვდება თუ არა კონსერვატიული სისტემები ბუნებაში? ამ შეკითხვის პასუხი ჩვენ მიერ სისტემის „აღწერის ღონეზე“ დამოკიდებული. როგორც ვიცით, იზოლირებული

სისტემის სრული ენერგია მუდმივია, თუმცა ენერგიამ შეიძლება შეიცვალოს ფორმა. ასე რომ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ჰამილტონის მოდელები ერთადერთი შესაფერისი მოდელებია. პრაქტიკაში მათი სრულად აღწერა ხშირად რთულია და ამიტომ ყურადღებას ცალკეულ ქვესისტემაზე ვამახვილებთ. სისტემის დანარჩენი ნაწილები კი ენერგიის გენერაციის ან დისიპაციის წყაროებს წარმოადგენენ. ამ შემთხვევაში დისიპაციური მოდელის გამოყენება მიზანშეწონილია.

ბუნებაში ბევრი სისტემა კონსერვატიულთან მიახლოებულ ქმედებას ამჟღავნებს. ყველაზე ცნობილი კონსერვატიული სისტემა მზის სისტემაა. ფაქტობრივად, მზის სისტემის დინამიკით დაინტერესებამ განაპირობა პუნკარეს მიერ არაწრფივი დინამიკის აღმწერი მრავალი მეთოდის განვითარება. მზის სისტემის შემთხვევაში (რომელიც მილიონობით და მილიარდობით წლისაა) შეგვიძლია დისიპაციის უამრავი ასპექტის უგულვებელყოფა. მზის სისტემაში არსებობს დისიპაციის ისეთი ეფექტები, როგორცაა მიმოქცევითი ძალები, რომლებიც პლანეტებსა და მთვარეზე მოქმედებენ და ასევე მზის მიერ გამოსხივებული ნაწილაკების ნაკადის მიერ წარმოქმნილი „მზის ქარი“. მაგალითად, დისიპაციური მიმოქცევითი ძალების დამსახურებაა მთვარის საკუთარი ღერძის ირგვლის ბრუნვის სიჩქარის სინქრონიზაცია მის ორბიტულ პერიოდთან ისე, რომ დედამიწიდან მთვარის მხოლოდ ერთი და იგივე მხარის დანახვაა შესაძლებელი. უფრო მაღალი დონის მიახლოების შემთხვევაში, თუ რამდენიმე მილიონი წელიწადით შემოვიფარგლებით, დისიპაციური ეფექტების უგულვებელყოფა შესაძლებელი ხდება. ამგვარ მსჯელობაზე დაყრდნობით მზის სისტემის დინამიკის მოდელის შექმნას დისიპაციისაგან თავისუფალი კონსერვატიული (ჰამილტონის) მოდელის მეშვეობით შევძლებთ.

ჰამილტონის მოდელები აგრეთვე მნიშვნელოვან როლს ასრულებს მაღალენერგიულ ნაწილაკთა აჩქარებისას პროტონთა მიმართული გამოსხივების სწავლებაში კვანტურ მექანიკაში, (უფრო ვრცლად მე-12 თავში ვისაუბრებთ) და ასევე საინტერესონი არიან, როგორც გამოყენებითი მათემატიკის ერთ-ერთი განშტოების ნაწილები და ა.შ. ამ თავში აღწერთ, თუ როგორ იჩენს თავს ქაოსი ჰამილტონის სისტემებში. ამასთან, მათემატიკურ დეტალებს მკაცრად შევზღუდავთ და ყურადღებას ვამახვილებთ იმაზე, თუ როგორ განსხვავდება ჰამილტონის სისტემები დისიპაციური სისტემებისგან ზოგიერთ შემთხვევაში მაგრამ მსგავსია სხვა შემთხვევებში. ცვლადი დისიპაციის მოდელზე დაკვირვებით შეგვიძლია ვნახოთ, თუ როგორაა სისტემათა ეს ორი ტიპი ერთმანეთთან დაკავშირებული. მნიშვნელოვანი თეორიული შედეგების უმრავლესობა სინამდვილესთან საკმაოდ ახლოსაა. ჩვენი მიზანია გადმოვცეთ ჰამილტონის სისტემების ქმედების საკმაოდ რთული სურათი.

მათემატიკით დაინტერესებულმა მკითხველმა სასურველია ამ თავის ბოლოში მოწოდებული ლიტერატურის ნუსხით იხელმძღვანელოს.

თავდაპირველად წარმოგიდგინოთ ზოგიერთ ძირითად ცნებას ჰამილტონის სისტემების შესახებ, შემდეგ კი მათ მნიშვნელოვან, მაგრამ შეზღუდულ, ე.წ. *ინტეგრებად* ქვეკატეგორიას განვიხილავთ. ინტეგრებადი სისტემები ქაოსურ ქმედებას ვერ ავლენენ. ამიტომ უნდა დავადგინოთ რა ხდება, როდესაც ჰამილტონის სისტემები არაინტეგრებადი ხდება.

8.2 ჰამილტონის განტოლებები და ჰამილტონის ფუნქცია

ჩვენ ჰამილტონის განტოლებების გამოყენების ფართო სპექტრზე არ შევჩერდებით და მათ შესახებ მოკლედ ვისაუბრებთ. კლასიკური (ნიუტონის) მექანიკის ჰამილტონისეული ფორმულირების მიხედვით, სისტემის დინამიკას მისი შემადგენელი ნაწილაკთა რადიუს-ვექტორები (კოორდინატები) და იმპულსების სიმრავლე აღწერს. კოორდინატები აღინიშნებიან q_i სიმბოლოთი, ხოლო იმპულსი p_i -თი. ინდექსი ცალკეული ნაწილაკის რადიუს-ვექტორისა და იმპულსის ვექტორის ცალკეული კომპონენტის აღსანიშნავად გამოიყენება. თუ სისტემა N როდენობის მატერიალურ წერტილს შეიცავს და თითოეულ მათგანს საკუთარი რადიუს-ვექტორისა და იმპულსის ვექტორის სამ-სამი მდგენელი გააჩნია, i ინდექსი მიიღებს მნიშვნელობებს 1-დან $3N$ -მდე. მაგალითად, შეიძლება გვქონდეს $q_1 = (\bar{q}_1)_x$ და $p_1 = (\bar{p}_1)_x$. ამ შემთხვევაში q_1 წერტილი №1 ნაწილაკის რადიუს-ვექტორის x მდგენელს, ხოლო p_1 - იმპულსის ვექტორის შესაბამის x მდგენელს წარმოადგენს. $P_i q_i$ წყვილი ჰამილტონისეულ სისტემაში „თავისუფლების ხარისხს“ შეესაბამება (გაიხსენეთ 3.2 პარაგრაფში თავისუფლების ხარისხის განსხვავებული გამოყენების შესახებ.)

ჰამილტონისეული სისტემის დინამიკა სრულად არის აღწერილი, თუ q -სა და p -ის დროზე დამოკიდებულება ცნობილია ანუ თუ ყოველი t -ისა და i -სთვის ვიცით $q_i(t)$ და $p_i(t)$, მაშინ სისტემის ქმედების შესახებ ყველაფერი გვეცოდინება. q -სა და p -ს დროზე დამოკიდებულების განსაზღვრა $H(q, p)$ **ჰამილტონის ფუნქციის** (ან, უბრალოდ, **ჰამილტონიანის**) წარმოებულების მეშვეობით შედგენილი ჰამილტონის განტოლებების ამონახსნის გზითაა შესაძლებელი, სადაც უნდაქსო q და p სიმბოლოები ნიშნავს, რომ H საზოგადოდ დამოკიდებულია ყოველ q_i -სა და p_i -ზე. უმარტივეს შემთხვევებში ჰამილტონის ფუნქცია სისტემის q და p ცვლადებზე დამოკიდებული სრული მექანიკური (კინეტიკურს დამატებული პოტენციალური) ენერგიაა. ნებისმიერ შემთხვევაში ჰამილტონის განტოლებები

დიფერენციალური განტოლებებია $2N$ რაოდენობის წყვილისაგან შემდგარი სიმრავლე (N თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემისთვის).

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q_i} \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (8.2-1)$$

ამოცანა 8.2-1. დავუშვათ, რომ m მასის მქონე წერტილს გადაადგილება x ღერძის გასწვრივ შეუძლია. მისი ჰამილტონის $H = p_x^2/2m + U(q_x)$ ფუნქცია კინეტიკური ენერჯის და U პოტენციალური ენერჯის ჯამია. აჩვენეთ, რომ ჰამილტონის განტოლებები მოცემული სისტემისთვის ნიუტონის კანონების ექვივალენტურია. მინიშნება: სისტემაზე მოქმედი ძალის x შემადგენელი მოცემულია $F = -dU/dx$ პოტენციალური ენერჯის ფუნქციის უარყოფითი გრადიენტით (x მიმართულებით). შემა

შენიშნეთ, რომ ჰამილტონის განტოლებების ფორმა მდგომარეობათა სივრცეში სხვადასხვა სისტემების დინამიკის აღწერისთვის გამოყენებული პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებების მსგავსია. მსგავსება მდგომარეობათა სივრცის $x_1=q_1$, $x_2=p_1$, $x_3=q_2$ და ა.შ. ცვლადების იდენტიფიკაციის შემდეგ კიდევ უფრო აშკარა ხდება. ჰამილტონის სისტემისთვის მდგომარეობათა სივრცის ცვლადების დროზე დამოკიდებულების ფუნქციები ჩვეულებრივი ფუნქციის, მაგალითად, ჰამილტონიანის, (კერძო) წარმოებულების მეშვეობით შეიძლება ჩაიწეროს. მომდევნო პარაგრაფში ვიხილავთ, რომ ეს უმნიშვნელოვანესი თვისება ჰამილტონის სისტემების გამორჩეულ ბუნებას განაპირობებს. q -სა და p -ს და ჰამილტონის ფუნქციის კერძო წარმოებულებს შორის კავშირი ჰამილტონისეულ მექანიკას **სიმპლექსურ** სტრუქტურად წოდებულ განსაკუთრებულ მათემატიკურ ფორმას ანიჭებს. მისი გამოყენება ქმედების ბევრი მახასიათებელი თვისებისთვის მარტივად შემოწმების საშუალებას გვაძლევს (იხ. მაგალითად [Goldstein, 1980]).

ჰამილტონის განტოლებებიდან ვლევულობთ მნიშვნელოვან შედეგს: ჰამილტონის ფუნქციის მნიშვნელობა მუდმივია და იგი დროში არ იცვლება. მრავალცვლადის ფუნქციის დიფერენცირების წესის თანახმად:

$$\frac{dH(q, p)}{dt} = \sum_i \left\{ \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} \right\} + \frac{\partial H}{\partial t} \quad (8.2-2)$$

აქ ფიგურულ ფრჩხილებში ჩასმული წევრები გვამცნობენ, რომ, რადგანაც H დამოკიდებულია q -სა და p -ზე, ხოლო q და p (ზოგადად) დამოკიდებულია დროზე, ამიტომ H -ის დამოკიდებული იქნება დროზე. გამოსახულების ეს ნაწილი გამოსახავს H -ის ე.წ. არაცხადი სახით დამოკიდებულებას დროზე. (8.2-2)-ის ბოლო წევრი კი H -ის დროზე ცხად დამოკიდებულებას გვიჩვენებს. აშკარა დამოკიდებულება დროზე მაშინ გვაქვს, როდესაც სისტემაზე მოქმედებს დროზე დამოკიდებული გარეშე ძალა. ჩვენ ამჯერად ასეთ შემთხვევებს არ განვიხილავთ ანუ ვუშვებთ, რომ (8.2-2)-ის უკანასკნელი წევრი ნულის ტოლია.

(8.2-1)-ის (8.2-2)-ში ჩასმით მივიღებთ:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0 \quad (8.2-3)$$

ამრიგად, H -ის წარმოებული დროის მიმართ ნულის ტოლია (თუ H დროზე ცხადი სახით დამოკიდებული არ არის). ამრიგად, H მუდმივ სიდიდეს წარმოადგენს. თუ H წარმოადგენს სისტემის სრულ ენერგიას, მაშინ ვამბობთ, რომ ჰამილტონისეული სისტემისთვის სრული ენერგია მუდმივია. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, სრული ენერგია, „მოძრაობის მუდმივაა.“

ამოცანა 8.2-2. მარტივ შემთხვევებში სისტემის ჰამილტონიანი კინეტიკური და პოტენციური ენერგიების ჯამის სახით შეიძლება გამოისახოს, რომლებიც, თავის მხრივ, იმპულსისა და რადიუს-ვექტორის ფუნქციებს წარმოადგენენ. x ღერძის გასწვრივ მოძრავი m მასის მქონე წერტილისთვის კინეტიკური ენერგია $(1/2)mv_x^2$ ხოლო იმპულსი $p_x^2/2m$ სახით ჩაიწეროს (სადაც $p_x = mv_x$ გამოყენებით v_x ნაწილაკის სიჩქარის x მდგენელია). იდეალური ზამბარაზე მოდებული მერხევი წერტილოვანი მასისთვის (რომელზეც $F_x = -kx$ ჰუკის კანონით მოცემული ძალა მოქმედებს) აჩვენებს, რომ ჰამილტონის ფუნქციას იქნება შემდეგი სახე: $H(q, p) = p^2/2m + (1/2)kq^2$, სადაც $q=x$ **nawil akis** კოორდინატია, ხოლო $p=p_x$ - შესაბამისი იმპულსი. ჰარმონიულად მერხევი მარტივი სისტემისთვის დინამიკური განტოლებების შესადაგენად გამოიყენეთ ჰამილტონის განტოლებები.

8.3. ფაზური სივრცე

როგორც ვხედავთ, მდგომარეობათა სივრცის გეომეტრიული აღწერა აუცილებელი თუ არა, სასურველი მაინც არის რათა გავიგოთ, თუ როგორ წარმოიშობა ჰამილტონისეულ სისტემებში ქაოსი. ჰამილტონისეული სისტემებისთვის მდგომარეობათა სივრცეს **ფაზურ სივრცეს** უწოდებენ. ფაზურ სივრცეში ვაგებთ q -ებისა და p -ები შესაბამის საკოორდინატო ღერძებს. ამრიგად, თუ სისტემას გააჩნია თავისუფლების N ხარისხი, მაშინ იარსებებს q -სა და p -ს N რაოდენობის წყვილი და ფაზური სივრცეც $2N$ -განზომილებიანი იქნება. ჰამილტონისეული სისტემისთვის (H - S დროზე არაცხადი დამოკიდებულების შემთხვევაშიც კი) ფაზურ სივრცეს რამდენიმე განზომილება მაინც ექნება. ასეთ მრავალგანზომილებიან ფაზურ სივრცეებზე დაკვირვება რთულია, ამიტომ სურათის გამარტივებისთვის გეგმილებითა და პუნქარეს კვებით უნდა ვისარგებლოთ.

რადგან ჰამილტონის ფუნქციის მნიშვნელობა (ანუ სისტემის ენერგია) მოძრაობის მუდმივაა, ჰამილტონისეული სისტემისთვის ფაზურ სივრცეში ტრაექტორია ნებისმიერი მიმართულებით ვერ გადაადგილდება. მას მხოლოდ ტრაექტორიის საწყისი წერტილის ტოლი ენერგიის მქონე (q, p) არის მიმართულებით შეუძლია გადაადგილება. ამრიგად, ვიტყვით, რომ ტრაექტორიები ფაზურ სივრცეში $2N - 1$ განზომილების მქონე **მუდმივი ენერგიის ზედაპირში** არიან ჩაკეტილი (რა თქმა უნდა, ეს „ზედაპირი“ მრავალგანზომილებიანი გეომეტრიული ობიექტიც შეიძლება აღმოჩნდეს.)

დისიპაციურ სისტემებისათვის გამოყენებული მსგავსი მეთოდით შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ ფაზურ სივრცეში საწყისი პირობების სიმრავლის შესაბამისი მოცულობა ჰამილტონის სისტემის განვითარებასთან ერთად უცვლელი რჩება. მე-3 თავში დავადგინეთ, რომ მდგომარეობათა სივრცეში საწყისი პირობების სიმრავლის შესაბამისი V მოცულობის დროზე დამოკიდებულება შემდეგნაირად მოიცემა:

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \quad (8.3-1)$$

იმის საჩვენებლად, რომ ეს წარმოებული ნულის ტოლია, (8.3-1) უნდა „გადავთარგმნოთ“ ჰამილტონისეული დინამიკის „ენაზე“. ამისათვის x_1 გავაიგივოთ q_1 -თან, $x_2 - p_1$ -თან, $x_3 - q_2$ -თან, $x_4 - p_2$ -თან და ა.შ. აგრეთვე გავიხსენოთ, რომ x -ების დროზე დამოკიდებულება შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots) \quad (8.3-2)$$

თუ ფაზურ სივრცეს გააჩნია $2N$ განზომილება, მაშინ i ინდექსი „გაირბენს“ 1-დან $2N$ -მდე. შემდეგ x -ს, q -ს და p -ს შორის არსებული კავშირის გამოყენების შედეგად გვექნება:

$$\dot{q}_1 = \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots) = \frac{\partial H}{\partial p_1} \quad (8.3-3)$$

$$\dot{p}_1 = \dot{x}_2 = f_2(x_1, \dots) = -\frac{\partial H}{\partial q_1} \quad (8.3-4)$$

განვიხილოთ (8.3-1)-ის მარჯვენა მხარეში მყოფი წევრები, კერძოდ, ყურადღება მივაქციოთ პირველ ორ წევრს და ჩავსვათ (8.3-3) და (8.3-4) მნიშვნელობები:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\partial H}{\partial p_1} \right) + \frac{\partial H}{\partial p_1} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_1} \right) \\ &= \frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_1} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial q_1} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (8.3-5)$$

ეს შედეგი გამოძინარეობს იმ ფაქტიდან, რომ შერეული წარმოებულის მნიშვნელობა დიფერენცირებისას ცვლადების რიგზე არაა დამოკიდებული.

ნულთან გატოლება გვექნება q -სა და p -ს ყოველ წყვილისათვის. აქედან გამოძინარე ვასკვნი, რომ ჰამილტონის სისტემისთვის საწყისი პირობების სიმრავლის შესაბამისი მოცულობა სისტემის განვითარებასთან ერთად დროში არ იცვლება. მუდმივი მოცულობის პრაქტიკული მნიშვნელობა ის არის, რომ ჰამილტონისეულ სისტემებს ფაზურ სივრცეში მიმზიდველები არ გააჩნია, როგორც ეს დისიპაციური სისტემების შემთხვევაში იყო. როგორც ვნახავთ, მიმზიდველების ამგვარი დეფიციტი გამარტივებასთან ერთად გარკვეულ სირთულეებს ქმნის. მიმზიდველების არარსებობისას აღარ დაგვჭირდება გარდამავალი სიდიდეების განხილვა, რაც ამონახსნების პოვნის პროცესს ამარტივებს. მეორეს მხრივ, განსხვავებული საწყისი პირობების მქონე ტრაექტორიებმა დროში შეიძლება საკმაოდ განსხვავებული ქმედება გამოავლინონ, რადგან არ იარსებებს არე, სადაც ისინი “თავს მოიყრიან”.

ლუივილის თეორემა და ფაზური სივრცის განაწილებები

ჩვენი მიზანია განვაზოგადოთ ფაზური სივრცის მოცულობისა და მისი დროში ევოლუციისათვის მიღებული შედეგები, რაც განსაკუთრებულ მნიშვნელობას მე-12 თავში მოყვანილ კვანტურ მექანიკაში ქაოსის საკითხის განხილვისას იძენს. დავუშვათ, რომ ფაზურ სივრცეში საწყისი პირობების განაწილებას ვსაზღვრავთ ალბათობის სიმკვრივის $\rho(q, p)$ ფუნქციის დახმარებით, სადაც q და p სიმბოლოები კვლავ (q_i, p_i) სიმრავლეს აღნიშნავენ. ალბათობის ფუნქცია განისაზღვრება იმგვარად, რომ (q, p) ცენტრის მქონე მცირე dV მოცულობაში ტრაექტორიის მოხვედრის ალბათობა მოცემულია

$$probability = \rho(q, p)dV \tag{8.3-6}$$

ამასთან ერთად დავუშვათ, რომ საწყისი პირობების შესაბამის წერტილთა სიმრავლე ფაზურ სივრცეში შემოსაზღვრავს გარკვეულ V მოცულობას. სისტემის განვითარებასთან ერთად V მოცულობაც წანაცვლდება ფაზურ სივრცეში. სასაზღვრო ზედაპირი საბოლოოდ ჯამში დეფორმაციას განიცდის, თუმცა მის მიერ შემოსაზღვრული სივრცის მოცულობა უცვლელი დარჩება. რა ემართება ამ დროს ალბათობის სიმკვრივეს? ვისარგებლოთ H -ის დროზე ზემოგანხილული დამოკიდებულებით, რის შედეგადაც მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \sum_i \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right\} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ &= \sum_i \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \right\} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ &\equiv \{ \rho, H \} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \tag{8.3-7}$$

უკანასკნელი იგივეობა განსაზღვრავს **პუასონის ფრჩხილებად** ცნობილ $\{ \rho, H \}$ სიდიდეს. ფიგურულ ფრჩხილებში მყოფი წევრები „გვამცნობენ“, თუ როგორ იცვლება ρ q -სა და p -ს მიხედვით, ბოლო წევრი გვაუწყებს, თუ როგორ იცვლება იგი დროის მიხედვით ფაზური სივრცის ფიქსირებულ წერტილში. მრავალგანზომილებიან ფაზურ სივრცეში ალბათობის სიმკვრივის ცვლილება არაკუმშვადი ხსნარის მოძრაობას წააგავს. ხსნარების მექანიკაში ე.წ. **ლაგრანჟისეული** მიდგომა განიხილავს ხსნარის მცირე ელემენტის ტრაექტორიას და

ყურადღებას ამახვილებს, თუ როგორ შეიცვლება ამ ელემენტის თვისებები მისი მოძრაობისას. ამ შემთხვევაში სრულ dp/dt წარმოებულს *მატერიალური წარმოებული* ან *ჰიდროდინამიკური წარმოებული* ეწოდება. გვაქვს ე. წ. *ელიერისეული* მიდგომა – ხდება ფაზური სივრცის ფიქსირებულ წერტილში დროის მიხედვით ცვალებადობაზე დაკვირვება.

ლუივილის თეორემა (იხ. მაგალითად, [Goldstein, 1980]) გვამცნობს, რომ ალბათობის სიმკვრივის დროის მიხედვით სრული წარმოებული $dp/dt = 0$ ანუ ტრაექტორიის შემცველი ფაზური სივრცის სიმკვრივე დროში უცვლელი რჩება.

თეორემა მიიღება მარტივი არგუმენტის საფუძველზე. განსაზღვრების თანახმად, ჰამილტონისეული სისტემისთვის გარკვეული „საწყისი პირობების ზედაპირით“ შემოსაზღვრული ფაზური სივრცის მოცულობა დროში მუდმივია. ვთქვათ, ამ ზედაპირის შიგნით გვაქვს M რაოდენობის საწყისი წერტილები, რომლებიც რაღაც ალბათობის $\rho(q, p)$ სიმკვრივის მიხედვით არიან განაწილებული. დროთა განმავლობაში ზედაპირის შიგნით მყოფი ტრაექტორიის წერტილების რაოდენობა არ უნდა შეიცვალოს, რადგან M -ის ცვლილება ნიშნავს, რომ ტრაექტორია სასაზღვრო ზედაპირს კვეთს, რაც არათანაკვეთადობის თეორემის დარღვევაა. ფაზურ სივრცეში, როგორც მოცულობის, ასევე M მუდმივობის პირობები შეგვიძლია გამოვიყენოთ ძალზე მცირე dV მოცულობებისა და dM რაოდენობის მიმართაც. ამრიგად, ფარდობა $dM/dV = \rho$ უცვლელია. სწორედ ეს გახლავთ ლუივილის თეორემის საფუძველი.

გვინდა აღვნიშნოთ, რომ ლუივილის თეორემის განზოგადება დისიპაციური სისტემების შემთხვევაშიც შეიძლება. საკმაოდ ამომწურავი, მაგრამ მარტივი გამოთვლები [Jackson, 1989, გვ. 44-45 და C **damateba**] გვიჩვენებს, რომ $\rho(q, p)$ აკმაყოფილებს შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} [\rho(q, p, t) f_i(q, p)] = 0 \quad (8.3-8)$$

სადაც f_i სიდიდეები განსაზღვრულია (8.3-3) და (8.3-4) დამოკიდებულებების მიხედვით. ჰამილტონის სისტემებისთვის „დიფერენციის აუცილებელი პირობაა“

$$\sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0 \quad (8.3-9)$$

ასე რომ, ჰამილტონის სისტემებისთვის (8.3-8) განტოლება დაიყვანება შემდეგ სახეზე:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i f_i(q, p) \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0 \quad (8.3-10)$$

x_i -ების q -ებთან და p -ებთან შესაბამისობის გამოყენების შედეგად ვადგენთ, რომ (8.3-10) იდენტურია (8.3-7) განტოლებისა.

მოცემული მსჯელობის არსი მდგომარეობს იმაში, რომ როგორც (8.3-6), ისე (8.3-7) განტოლებები ρ -ს მიმართ წრფივია. ამრიგად, ზემომოყვანილი მიზეზებიდან გამომდინარე, ρ -ს დროში ცვლილება ქაოსური ვერ იქნება. მიუხედავად იმისა, რომ ცალკეული ტრაექტორიები შეიძლება ქაოსურ ქმედებას გვიჩვენებდეს, ტრაექტორიის წერტილების განაწილების ალბათობა არ იქნება ქაოსური. თუ ავიღებთ ოდნავ განსხვავებულ ალბათობის საწყისი განაწილებას, მის ცვლილებაზე დაკვირვების შედეგად ვადგენთ, რომ სხვაობა მოცემულ და თავდაპირველ განაწილებებს შორის ექსპონენციალურად არ იზრდება. ასე რომ, არ არსებობს ალბათობის განაწილების მგრძობიარე დამოკიდებულება საწყისი პირობების მიმართ. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ქაოსური ქმედების კვლევისას სიმკვრივის ალბათობის განაწილებასა და მის დროში ცვლილებას ვერ დავაკვირდებით. ერთი შეხედვით, ჩვენ უნდა შევისწავლოთ კონკრეტული ტრაექტორიები. ამ შეხედულებას კვანტური მექანიკის შესახებ მსჯელობისას მე-12 თავში დავუბრუნდებით. 8-8 პარაგრაფში მოყვანილი ე.წ. არნოლდის კატის ასახვა ჰამილტონისეული ქაოსური სისტემებისთვის ფაზურ სივრცეში განაწილების მარტივი ნიმუშია.

8.4 მოძრაობის მუდმივები და ინტეგრებადი ჰამილტონიანები

8.2 პარაგრაფში ვნახეთ, რომ ჰამილტონის ფუნქციით წარმოდგენილი სისტემის ენერგია მუდმივია, თუ ეს ფუნქცია დროზე ამკარად დამოკიდებული არ არის. თუ ფაზურ სივრცეში ტრაექტორია (q_0, p_0) წერტილში იღებს სათავეს, სადაც q და p $2N$ ფაზური სივრცის კოორდინატების სრული სიმრავლეა, სისტემის ენერგია იქნება $H(q_0, p_0)$. q -ები და p -ები დროში იცვლებიან, მაგრამ ნებისმიერი მომენტისათვის ენერგია ერთი და იგივე სიდიდისაა:

$$H(q(t), p(t)) = H(q_0, p_0) \quad (8.4-1)$$

სადაც $(q(t), p(t))$ წარმოადგენს ფაზური სივრცის (q_0, p_0) წერტილში დაწყებულ ტრაექტორიას. ამრიგად, ჰამილტონის სისტემისთვის შესაძლო ნებისმიერი ტრაექტორია ამ

ტრაექტორიის „შესაბამისი“ ენერჯის მეშვეობით შეიძლება აღინიშნოს. შებრუნებული მტკიცება, საზოგადოდ, სამართლიანი არაა: ენერჯის ერთსა და იმავე მნიშვნელობას შესაძლებელია ბევრი განსხვავებული ტრაექტორია შეესაბამებოდეს.

ზოგიერთი ჰამილტონისეული სისტემისათვის დამატებით არსებობენ ისეთი სიდიდეები, რომელთა მნიშვნელობები ტრაექტორიების ევოლუციასთან ერთად უცვლელია. ვნახოთ, თუ რატომ არის მნიშვნელოვანი ამგვარი შემთხვევების შესწავლა. დავუშვათ, რომ რომელიღაც q_j -დროში უცვლელია:

$$\dot{p}_j = 0 = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (8.4-2)$$

ყოველი $(q(t), p(t))$ -ს მნიშვნელობისთვის ტრაექტორიის გასწვრივ (8.4-2) განტოლების ბოლო შესაკრები მხოლოდ იმ შემთხვევაში იქნება ნულის ტოლი, როდესაც $H(q, p)$ არაა დამოკიდებული q_j -ზე! არსებობს საერთო წესი: p_j იმპულსი მაშინ და მხოლოდ მაშინ იქნება მოძრაობის მუდმივა, თუ სისტემის ჰამილტონიანი q_j -ზე ცხადი სახით დამოკიდებული არ არის. ამ შემთხვევაში ტრაექტორია როგორც $p_j = p_{j0}$ მნიშვნელობის, ასევე $H(q_0, p_0)$ ენერჯის მეშვეობით შეგვიძლია აღვნიშნოთ. ამ დროს ტრაექტორიები ჩაკეტილია არამარტო ფაზური სივრცის გარკვეული ენერჯის შესაბამის არეებში, არამედ შეზღუდულია p_j მნიშვნელობის მხრივაც. ამრიგად, ტრაექტორიებმა უნდა „იარსებონ“ ფაზური სივრცის $2N-k$ განზომილებიან „ზედაპირზე“, სადაც k მუდმივი სიდიდეების რაოდენობაა.

ჰამილტონის სისტემების გამორჩეული (ძალიან შეზღუდული, მაგრამ თეორიული თვალსაზრისით მეტად მნიშვნელოვანი) კლასისთვის მოძრაობის მუდმივების რაოდენობა თავისუფლების ხარისხების ტოლია. ასეთ სისტემებს **ინტეგრებადი** ეწოდება. უმეტეს შემთხვევაში მოძრაობის მუდმივები არ წარმოადგენს იმ p -ებს იმ პირობებში, რომელთათვისაც ჰამილტონის ფუნქციები განვსაზღვრეთ. მოძრაობის მუდმივები ყოველთვის შეიძლება საწყისი q -ებისა და p -ების ფუნქციის სახით გამოისახოს. მოძრაობის მუდმივებს **ქმელების ცვლადები** ეწოდება და მათ ჩვეულებრივ $J_i(q, p)$, $i = 1, 2, \dots, N$ ფორმით გამოსახავენ. ჰამილტონის ინტეგრებადი სისტემისთვის ფაზური სივრცის ტრაექტორიები ამ სივრცის N -განზომილებიან ზედაპირზეა ჩაკეტილი.

არსებობს თითოეული $J_i(q, p)$ -ს შესაბამისი მეორე $\theta_i(q, p)$ ცვლადიც, რომელსაც შესაბამისი **კუთხური ცვლადი** ეწოდება. J_i -ები და θ_i -ები ისეა შერჩეული, რომ *მათი მეშვეობით* გამოსახულ ჰამილტონის განტოლებებს q -ებით და p -ებით გამოსახული თავდაპირველი განტოლებების იდენტური ფორმა გააჩნიათ:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_i &= \frac{\partial H(\theta, J)}{\partial J_i} \\ J_i &= -\frac{\partial H(\theta, J)}{\partial \theta_i}\end{aligned}\tag{8.4-3}$$

(რადგან კუთხურ ცვლადს განზომილება არ გააჩნია; ქმედების ენერჯის ერთეულები გამრავლებული დროზე, იგივეა, რაც იმპულსი გამრავლებული მანჰილზე). თუ (8.4-3) ძალაშია, (θ, J) ცვლადები (q, p) ცვლადებთან **კანონიკური გარდაქმნით** არიან დაკავშირებულნი (აქ კანონიკური „ზოგიერთი კანონის ან წესის შესრულებას“ ნიშნავს). როგორც ქვემოთ ვნახავთ, ფაზურ სივრცეში პერიოდული ტრაექტორიისთვის ქმედება იძლევა შემდეგ გეომეტრიულ ინტერპრეტაციას: პერიოდული ტრაექტორიის შესაბამისი ქმედება პროპორციულია ამ ტრაექტორიის მიერ შემოსაზღვრული ფაზური სივრცის არის ფართობისა.

ჩვენთვის საინტერესოა მხოლოდ ის კანონიკური გარდაქმნა, რომლის შედეგად მიღებული ჰამილტონიანი დამოკიდებულია J_i -ებზე და არა θ_i -ებზე ამ დროს ყოველი $i=1, 2, \dots, N$ -თვის გვაქვს:

$$\dot{J}_i = 0\tag{8.4-4}$$

სადაც ე.წ. $J_i (i=1, \dots, N)$ მოძრაობის ინტეგრალია.

(8.4-3) და (8.4-4) განტოლებების დამაკმაყოფილებელ ჰამილტონისეულ სისტემას **ინტეგრებადი სისტემა** ეწოდება. ტერმინი **ინტეგრებადი** გამომდინარეობს იმ შეხედულებიდან, რომ J_i ქმედება სისტემის მოძრაობის გასწვრივ ალებული ინტეგრალის სახით შეიძლება გამოისახოს და θ_i -ის შესაბამისი განტოლების ინტეგრირება ადვილად შესაძლებელია.

ტერმინი **ინტეგრებადი** ალბათ გარკვეულწილად დამაბნეველია, რადგან თითქოს გულისხმობს, რომ სისტემის ხასიათი შესაბამისი კანონიკური გარდაქმნის დადგენის ან საჭირო ინტეგრალის გამოყვანის ჩვენეულ **უნარზეა** დამოკიდებული. ლიტერატურაში შეიძლება შეგვხვდეს ასეთი ფრაზები: „სისტემა ინტეგრებადია, თუ შეგვიძლია კანონიკური გარდაქმნის დადგენა. . .“. სინამდვილეში, სისტემის ხასიათი (მოძრაობის მუდმივების რაოდენობა) ჩვენს მიერ შესაბამისი კანონიკური გარდაქმნის პოვნის უნარზე დამოკიდებული არ არის.

მცირე ტექნიკური მომენტი: სისტემის ინტეგრებადობისა და მარტივი მახასიათებლების ქონისათვის მოძრაობის მუდმივები უნდა აკმაყოფილებდნენ პირობას: $\{J_i, J_j\}=0$ ნებისმიერი i -სა და j -სთვის. ამ პირობის შესრულების შემთხვევაში ამბობენ, რომ სისტემას გააჩნია მოძრაობის N ინტეგრალი.

სასურველი კანონიკური გარდაქმნის ე.წ. *ბირჰოფის მიმდევრობების* მეშვეობით გამოსახვით და ამ მიმდევრობების კრებადობის საკითხის განსაზღვრის გზით შესაძლებელია ჰამილტონის სისტემის ინტეგრებადობისა თუ არაინტეგრებადობის საკითხის გარკვევაც (HEL80). თუ სისტემა *არაინტეგრებადია*, მას თავისუფლების ხარისხებზე მცირე რაოდენობის მოძრაობის ინტეგრალი აღმოაჩნდება.

ახლა წარმოვიდგინოთ რამდენიმე შედეგს (დამტკიცების გარეშე). ისინი გვამცნობენ ჰამილტონის სისტემების რომელი ტიპებია ინტეგრებადი (HEL80).

1. თავისუფლების ერთი ხარისხის მქონე ნებისმიერი ჰამილტონისეული სისტემა, რომლისთვისაც H -ს q -სა და p -ს მიმართ სასრულო წარმოებული გააჩნია (ანუ იგი „ანალიზური“ ფუნქციაა) ინტეგრებადია და შესაბამისი J აკმაყოფილებს $H=\omega J$ პირობას, სადაც $\omega=\partial H/\partial J$.
2. ჰამილტონის სისტემა, რომლისთვისაც ჰამილტონის განტოლებები q -სა და p -ს მიმართ წრფივია, ინტეგრებადია (ე.წ. ნორმალური გარდაქმნების გზით).
3. არაწრფივი განტოლებებით გამოსახული ჰამილტონის ნებისმიერი სისტემა, რომელიც თავისუფლების ერთი ხარისხის მქონე არაშეუღლებად სისტემებად შეგვიძლია დავშალოთ, ინტეგრებადია.

გამოვიკვლიოთ ჰამილტონის ინტეგრებადი ფუნქცია, რომლისთვისაც ყოველი J_i მოძრაობის ინტეგრალია. ამ შემთხვევაში θ_i სიდიდის დროზე დამოკიდებულების სახის დადგენა ადვილია:

$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial H}{\partial J_i} \equiv \omega_i(J) \quad (8.4-5)$$

ამ განტოლების მარჯვენა მხარე მოძრაობის ე.წ. კუთხურ სიხშირეს განსაზღვრავს. ინტეგრებადი სისტემისთვის ω_i დამოკიდებულია ყველა J_i -ურ მნიშვნელობაზე, მაგრამ

რადგან J_i -ები დროის მიმართ დამოუკიდებელი სიდიდეებია, ω_i -იც არ იქნება დროზე დამოკიდებული. ამრიგად, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\theta_i(t) = \omega_i t + \theta_i(0) \quad (8.4-6)$$

ამრიგად, თუ სისტემა ინტეგრებადია და (8.4-3) და (8.4-4) განტოლებებით მოცემული კანონიკური გარდაქმნების დადგენა შესაძლებელია, მაშინ სისტემის დინამიკა მთლიანობაში დეტერმინისტურია.

თუ სისტემის ქმედების დადგენა საწყის q -ებსა და p -ებზე დაყრდნობით გვსურს, მაშინ კანონიკური გარდაქმნების მიმართ შებრუნებული გარდაქმნების მეშვეობით მივიღებთ:

$$\begin{aligned} q_i(t) &= f(\theta, J) \\ p_i(t) &= g(\theta, J) \end{aligned} \quad (8.4-7)$$

სივრცითი თვალსაზრისით შემოსაზღვრული სისტემის შემთხვევაში, როდესაც $\theta_i(t)$ განუსაზღვრელად იზრდება $t \rightarrow \infty$ პირობებში, q -ები და p -ები θ_i -ის პერიოდული ფუნქციები უნდა იყოს.

ფაზური ინტეგრალის კუთხური ცვლადის გარდაქმნების დადგენის მათემატიკურ პროცედურას შემოთავაზებთა *კანონიკური თეორია* ეწოდება. აქ საწყისი q -ები და p -ები j და θ ახალი ცვლადების ხარისხობრივი ფუნქციების მწკრივების სახითაა გამოსახული. რიგების მწკრივების განშლადობის შემთხვევაში სისტემა არაინტეგრებადია.

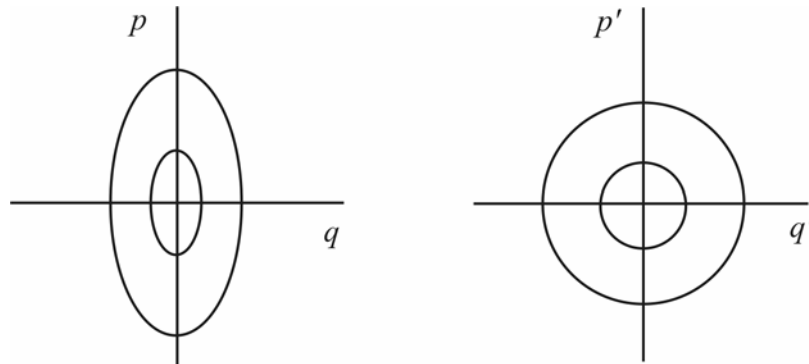
ამჯერად გავეცნოთ თავისუფლების ერთი ხარისხის მქონე ჰამილტონიანის მქონე სისტემებსა და მათი შესაბამისი ფაზური სივრცის თვისებებს ორი მაგალითის საფუძველზე.

მარტივი ჰარმონიული ოსცილატორი

8.2-2 ამოცანიდან ვიცით, რომ m მასისა და k მუდმივას ზამბარის მქონე ერთგანზომილებიანი მარტივი ჰარმონიული ოსცილატორისათვის ჰამილტონიანს ექნება შემდეგი სახე:

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 \quad (8.4-8)$$

სადაც q წარმოადგენს ოსცილატორის წანაცვლებას წონასწორული მდგომარეობიდან. ამ შემთხვევაში ჰამილტონის ფუნქციის რიცხვითი მნიშვნელობა სისტემის სრული მექანიკური ენერჯის ტოლია. დროის მიმართ დამოკიდებული ჰამილტონის განტოლებები შემდეგ სახეს მიიღებენ:



ნახაზი 8.1. მარცხნივ გამოსახულია მარტივი ჰარმონიული ოსცილატორის ტრაექტორია ფაზურ სივრცეში. თითოეული ელიფსი ენერჯის გარკვეულ მნიშვნელობას შეესაბამება. უფრო დიდი ელიფსი ენერჯის უფრო დიდი მნიშვნელობის შესაბამისია. ცვლადების სათანადო გარდაქმნით ტრაექტორიები წრეიულ სახეს მიიღებენ და მათი რადიუსი \sqrt{J} -ის ტოლი იქნება, სადაც J მოცემული ტრაექტორიის შესაბამისი ქმედების სიდიდეა. θ კუთხური ცვლადი განსაზღვრავს წერტილის მდებარეობას ტრაექტორიაზე.

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq \end{aligned} \tag{8.4-9}$$

ერთგანზომილებიანი მარტივი ჰარმონიული ოსცილატორის მოდელს თავისუფლების ერთი ხარისხი გააჩნია, ხოლო მისი ფაზური სივრცე ორგანზომილებიანია. როდესაც ჰამილტონის ფუნქცია დროისაგან დამოუკიდებელია, ტრაექტორიები ფაზური სივრცის $2N-1=1$ განზომილების „ზედაპირზე“ (ანუ მრუდზე) მდებარეობს. მოძრაობის პერიოდულობის გამო ტრაექტორიები ჩაკეტილი მრუდებია. ენერჯის თითოეული მნიშვნელობა კონკრეტულ ჩაკეტილ მრუდს შეესაბამება.

მარტივი ჰარმონიული ოსცილატორისათვის ფაზური სივრცის ტრაექტორიები სისტემის ენერჯის (ჰამილტონის ფუნქციის) უფრო დიდი მნიშვნელობისათვის ელიფსია. თუ 8.1 ნახაზზე ფაზური სივრცის კოორდინატები სათანადო სახით არიან გარდაქმნილნი, მაშინ ტრაექტორიები წრეებად გადაიქცევიან. თითოეული წრის რადიუსი ტრაექტორიის შესაბამისი

მოქმედების სიდიდის კვადრატული ფუნქციის ტოლია. შესაბამისი კუთხური ცვლადი კი წრეზე ტრაექტორიის წერტილის ადგილმდებარეობას განსაზღვრავს.

აღსანიშნავია, რომ მარტივი ჰარმონიული ოსცილატორის მოდელს მხოლოდ ერთი ფიქსირებული წერტილი გააჩნია, კერძოდ ($p=0, q=0$). ჰამილტონის დინამიკის თვალსაზრისით, ფიქსირებული წერტილის ამ ტიპს *ელიფსური წერტილი* ეწოდება, რადგან ფიქსირებული წერტილის მახლობლად მდებარე ტრაექტორიები ელიფსებს წარმოადგენენ.

მარტივი ჰარმონიული ოსცილატორის მოდელისათვის ვიცით, რომ რხევითი

მოდრობის კუთხური სიხშირეა $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. რადგანაც საქმე გვაქვს თავისუფლების ერთი ხარისხის მქონე სისტემასთან ან რადგანაც ჰამილტონის განტოლებები წრფივია, უნდა ველოდოთ, რომ სისტემა ინტეგრებადია.

მოდრობის ერთი მუდმივა ჰამილტონის ფუნქცია (ენერგია) ან მისი ჯერადი სიდიდეა. აქედან გამომდინარე, J ქმდება

$$J = \frac{H}{\omega} = \frac{p^2}{2m\omega} + \frac{kq^2}{2\omega} \quad (8.4-10)$$

თუ $p/\sqrt{2m\omega}$ -სა და $q/\sqrt{m\omega/2}$ -ს ფაზური სივრცის ცვლადებად გამოვიყენებთ, მაშინ ტრაექტორიები \sqrt{J} რადიუსის მქონე წრეები იქნებიან. საქმის ბოლომდე მისაყვანად შეგვიძლიან საწყისი ფაზური სივრცის შესაბამისი p და q ცვლადები პოლარული კოორდინატების სახით გამოვსახოთ :

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{2m\omega J} \sin \theta \\ q &= \sqrt{2J / (m\omega)} \cos \theta \end{aligned} \quad (8.4-11)$$

სადაც θ დადებითი q ღერძიდან საათის ისრის მოძრაობის საპირისპირო მიმართულებით დასაწყისი დადებით მნიშვნელობებს.

ამოცანა 8.4-1. (a) აჩვენეთ, რომ თუ ფაზური სივრცის კოორდინატების გარდაქმნა ტექსტში აღწერილი სახით მოხდება, მაშინ მარტივი ჰარმონიული ოსცილატორის ტრაექტორიები ფაზურ სივრცეში წრეებს წარმოადგენენ. (b) აჩვენეთ, რომ წრიული ტრაექტორიის რადიუსი \sqrt{J} -ს ტოლია. (c) აჩვენეთ, რომ საწყის ფაზურ სივრცეში ელიფსის მიერ შემოსაზღვრული არის ფართობი $2\pi J$ -ს ტოლია.

8.4-1 **ამოცანა** გვიჩვენებს, რომ ჩაკეტილი ტრაექტორიის შესაბამისი ქმედება დაკავშირებულია ტრაექტორიის მიერ შემოსაზღვრულ ფაზური სივრცის არესთან. საზოგადოდ, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p \, dq \quad (8.4-12)$$

სადაც \oint სიმბოლო ნიშნავს, რომ ინტეგრალი ჩაკეტილი ტრაექტორიის გასწვრივაა აღებული.

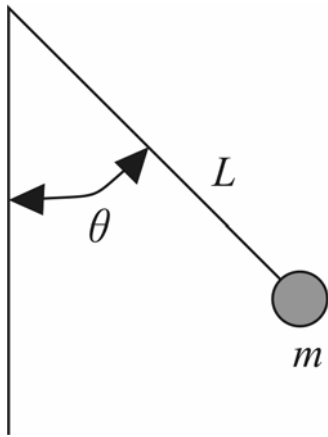
მათემატიკური ქანქარა

ჰამილტონის სისტემებიდან ყველაზე დიდი ისტორიის მქონე და ხშირად (საფუძვლიანად) შესწავლილი მაგალითი მათემატიკური ქანქარაა. სისტემა L სიგრძის მქონე არა დეფორმირებადი (მასის არმქონე) ღეროს ბოლოში დაკიდული m წერტილოვანი მასაა. ღეროს შეუძლია თავისუფლად რხევა მის მეორე ბოლოში მყოფი ღერძის მიმართ. ამ სისტემის ჰამილტონისეულ სისტემად წარმოდგენისთვის ყოველგვარ დისიპაციას უგულვებელყოფთ, რაც თავის მხრივ დაკავშირებულია ღეროს რხევისას მოქმედ ხახუნის ძალასთან და ჰაერის წინაღობასთან. ასეთი სისტემა 8-2 ნახაზზეა ნაჩვენები.

მოცემული სისტემისთვის ჰამილტონის ფუნქცია რხევის კინეტიკური ენერჯიისა და გრავიტაციული პოტენციალური ენერჯიის ჯამის ტოლია:

$$H = \frac{p_\theta^2}{2mL^2} + mgL(1 - \cos \theta) \quad (8.4-13)$$

სადაც p_θ რხევასთან დაკავშირებული კინეტიკური მომენტია, ხოლო g – მიზიდულობის (თავისუფალი ვარდნის) აჩქარებაა. ამრიგად, მათემატიკური ქანქარა თავისუფლების ერთი ხარისხის მქონე სისტემაა (ორი განზომილების მქონე ფაზური სივრცით).



ნახაზი 8.2. ქანქარის სქემა. θ კუთხე აითვლება სტაბილური წონასწორობის წერტილის მიმართ. მიზიდულობის ძალა მიმართულია ქვემოთ.

ამრიგად, ზემოთ წარმოდგენილი არგუმენტების თანახმად, ეს სისტემა მოძრაობის ერთი ინტეგრალის (სრული მექანიკური E ენერჯის) მქონე ინტეგრებადი სისტემაა.

E ენერჯის მოცემული მნიშვნელობისთვის (8.4-13) –დან ვღებულობთ:

$$p_\theta = \pm \sqrt{2mL^2[E - mgL(1 - \cos \theta)]} \quad (8.4-14)$$

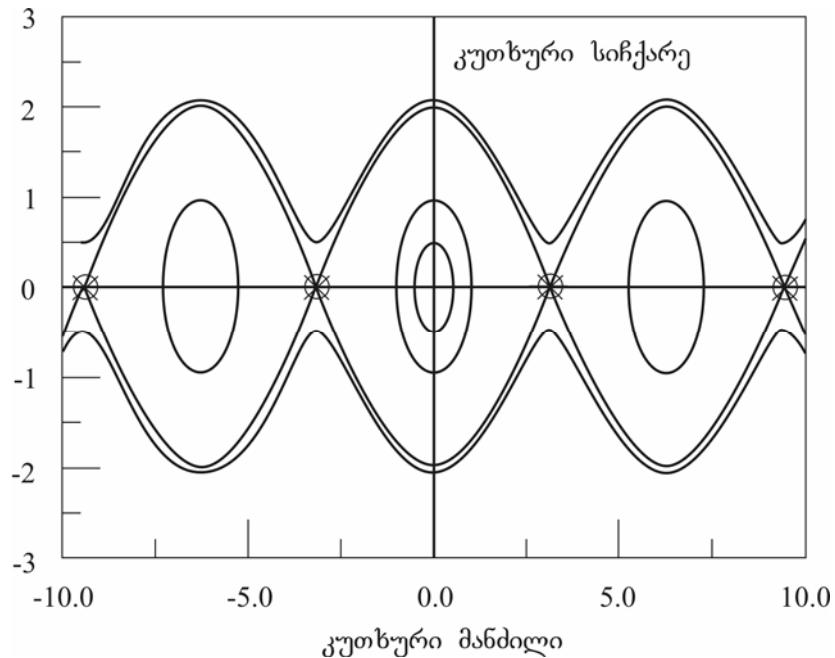
დაშვების თანახმად, მომენტი დადებითია, როდესაც ქანქარა საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით მოძრაობს, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში – უარყოფითია. (8.4-14) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ იმპულსს მაქსიმალური მნიშვნელობა $\theta=0$ მნიშვნელობისათვის გააჩნია. $2mgL$ -ზე ნაკლები ენერჯების შემთხვევაში გადახრის მაქსიმალური კუთხე $p_\theta=0$ პირობებში, ანუ $E=mgL(1-\cos\theta)$ -თვის გვექნება. საკმარისი ენერჯის ($2mgL$ -ზე მეტი) მინიჭების შემთხვევაში ქანქარას იმპულსის მინიმალური მნიშვნელობა $\theta = \pi$ მნიშვნელობისათვის ფიქსირდება. 8.3 ნახაზზე წარმოდგენილი ფაზური სივრცის ტრაექტორიების გამოსახვისთვის გამოყენებულია(8.4-14) დამოკიდებულება.

სისტემის შესაბამისი J ქმედების დადგენას რხევის ერთი ციკლის გასწვრივ იმპულსის ინტეგრების მეშვეობით შევძლებთ:

$$J = \frac{1}{2\pi} \int d\theta \sqrt{2mL^2[E - mgL(1 - \cos \theta)]} \quad (8.4-15)$$

მიღებული ინტეგრალი *ელიფსური ინტეგრალის* სახელით არის ცნობილი და იგი მრავალი მათემატიკური კურსის ფარგლებში განიხილება. აქ მნიშვნელოვანია, რომ მოძრაობის სიხშირის განსაზღვრა, (8.4-15) და (8.4-5) განტოლებების მეშვეობით რიცხობრივად

შეგვიძლია. ქანქარისთვის 8.3 ნახაზზე გამოსახული ფაზური სივრცის დიაგრამა ჰამილტონის მრავალი ინტეგრებადი სისტემისთვის დამახასიათებელი ტიპური დიაგრამაა. ენერჯის შედარებით მცირე მნიშვნელობებისათვის ფაზური სივრცის ტრაექტორიები კოორდინატთა სათავეს მიმართ ცენტრირებული „ელიფსებია“.



ნახაზი 8.3. ფაზური დიაგრამა ქანქარისათვის. კუთხური სიჩქარე (ვერტიკალური ღერძი) წარმოადგენს კუთხური დაშორების ფუნქციას (ჰორიზონტალური ღერძი). თითოეული ტრაექტორია შეესაბამება სისტემის სრული მექანიკური ენერჯის გარკვეულ მნიშვნელობას. ელიფსური ფიქსირებული წერტილები გვხვდებიან კოორდინატთა სათავეში და $\pm n2\pi$ კუთხური მანძილის შემთხვევაში, სადაც n -ის დადებითი ან უარყოფითი მთელი რიცხვებია. ჰიპერბოლური („უნაგირის“) წერტილები $\theta = \pm\pi$ -თვის იჩენენ თავს. ისინი მცირე ზომის წრეებითაა აღნიშნული. ტრაექტორიები, რომლებიც გადიან ჰიპერბოლურ წერტილებში, სეპარატრისებია. სეპარატრისების შიგნით მოძრაობა პერიოდული და რხევითია. რაც შეეხება სეპარატრისების მიღმა მდებარე ტრაექტორიებს, გვაქვს პერიოდული მოძრაობა საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით $\dot{\theta} > 0$ -ისათვის, ხოლო $\dot{\theta} < 0$ -შემთხვევაში კი – საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით.

კოორდინატთა სისტემის სათავეში მდებარეობს სისტემის ელიფსური ფიქსირებული წერტილი: თუ სისტემა სტარტს აიღებს $p_\theta = 0$ და $\theta = 0$ -ის პირობებში, მაშინ იგი სამუდამოდ იქვე დარჩება. ელიფსები ამ შემთხვევაში წარმოადგენენ „ორგანზომილებიან თორებს“, რომლებზეც ტრაექტორიები ორგანზომილებიან ფაზურ სივრცეში „არსებობენ“.

ამოცანა 8.4-2. მცირე ენერგიებისათვის (რხევის მცირე კუთხეები) $\sin\theta$ შეგვიძლია θ რადიანით შევცვალოთ. გამოიყენეთ ეს მიახლოება J -ს განსაზღვრისთვის და აჩვენეთ, რომ რხევის სიხშირეა $\omega=g/L$.

ფიქსირებული წერტილები გვექნება $p_\theta=0$ და $\theta=\pm n\pi$ შემთხვევებშიც, სადაც n მთელი კენტი რიცხვია. ფიქსირებული წერტილები ბრუნვის წერტილის მიმართ ვერტიკალურად ზემოთ მყოფ მდებარეობას შეესაბამებია. აღსანიშნავია, რომ $\theta=\pm\pi$ ფიზიკურად ექვივალენტური წერტილებია, რადგანაც ორივე მათგანი ქანქარის ვერტიკალურ მდებარეობას შეესაბამება. ქანქარას მოძრაობის ზოგიერთი ასპექტის ვიზუალიზაციისთვის ხანდახან სასურველია კუთხის სიდიდის შეუზღუდავად გაზრდა ან შემცირება. თუ θ -ს ღერძის გასწვრივ 2π -ის ჯერადი ერთეულით გადავანაცვლებთ, მაშინ მდგომარეობათა სივრცეში მდებარე ტრაექტორიების ნიმუშების პერიოდულობაში ფიზიკური ეკვივალენტურობა გამოვლინდება.

„ამოცირავებული“ ($\theta=\pm\pi$) მდებარეობის შესაბამისი ფიქსირებული წერტილები არასტაბილურია, რადგან ამ მდგომარეობიდან უმცირესი გადახრაც კი ქანქარის ვერტიკალური მდებარეობიდან „გაქცევას“ იწვევს. ამ ფიქსირებულ წერტილებს ჰამილტონის სისტემებისთვის **ჰიპერბოლურ წერტილებს** უწოდებენ, რადგან მათ მიდამოში მდებარე ტრაექტორიები ჰიპერბოლების მსგავსია. რა თქმა უნდა, ფიქსირებული წერტილები, მე-3 თავში მოყვანილი ტერმინოლოგიის თანახმად, „უნაგირის“ წერტილებია. ტრაექტორიები ჰიპერბოლურ წერტილს ერთი მხრიდან უახლოვდებიან, ხოლო მეორე მხრიდან კი შორდებიან.

შემდეგ ჰიპერბოლური წერტილში შემავალ ან მისგან გამომავალ ტრაექტორიებს **სეპარატრისები** ეწოდება, ვინაიდან ისინი ფაზურ სივრცეს თვისობრივად განსხვავებული ქმედების არეებად ყოფენ (სეპარატრისები წარმოადგენენ სტაბილურ ან არასტაბილურ მრავალსახეობებს, რომელთა განმარტებები წინა თავებში მოვიყვანეთ). ქანქარას შემთხვევაში სეპარატრისების შიგნით მდებარე ტრაექტორიები შეესაბამებიან რხევით მოძრაობას ქვედა ვერტიკალური წონასწორობის წერტილის მახლობლად. მათ გარეთ მყოფი ტრაექტორიები კი ასახავენ ისეთ მდგომარეობებს, როდესაც ქანქარას საკმარისი ენერგია გააჩნია რომ გადაიხაროს დიდი კუთხით. ამ დროს კუთხური სიჩქარე დადებითია (მოძრაობა საათის ისრის საპირისპირო მიმართულებით) ან უარყოფითი (სათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით). ორივე შემთხვევაში θ კუთხე დროში იზრდება.

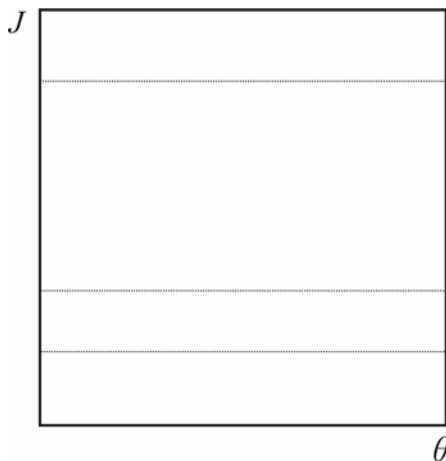
ჰამილტონის ინტეგრებადი სისტემებისათვის დამახასიათებელია ელიფსური ტიპის წერტილებით შედგენილი ფაზური სივრცე, რომელიც შემოსაზღვრულია ჰიპერბოლურ წერტილებთან დაკავშირებული სეპარატრისებით. სეპარატრისები ერთმანეთისაგან გაყოფენ ფაზური სივრცის იმ არეებს, რომლებიც მოძრაობის თვისობრივად განსხვავებულ ტიპებს შეესაბამებიან.

თავისუფლების N ხარისხის მქონე სისტემები

თუ მარტივი ჰარმონიული ოსცილატორისათვის მიღებულ შედეგებს (8.4-5) და (8.4-6) განტოლებებს შევადარებთ, აღმოჩნდება, რომ კუთხური ცვლადების თვალსაზრისით, თავისუფლების N ხარისხის მქონე ინტეგრებადი სისტემა N რაოდენობის არაკოჰერენტულ ოსცილატორთა სიმრავლის ექვივალენტურია (ოსცილატორები წარმოადგენენ მარტივ ჰარმონიკებს, თუ ω_i მნიშვნელობები J -ებისაგან დამოუკიდებელია. სხვაგვარად მივიღებდით არაწრფივ ოსცილატორებს, როდესაც ω დამოკიდებულია J -ზე). ამგვარი კავშირი ცხადჰყოფს, თუ რატომ ეთმობა მერხვე სისტემებს დინამიკაში დიდი ყურადღება.

როდესაც თავისუფლების N ხარისხის მქონე ინტეგრებადი სისტემისთვის მოძრაობის N ინტეგრალი არსებობს, მდგომარეობათა სივრცეში ტრაექტორიები მეტად შეზღუდულია. მაგალითად, თავისუფლების ორი ხარისხის მქონე ინტეგრებად სისტემას გააჩნია ფაზური სივრცის ორგანოზომილებიან ზედაპირზე ჩაკეტილი ტრაექტორიები. ეს ზედაპირი, საზოგადოდ, წარმოადგენს ოთხგანზომილებიან ფაზურ სივრცეში მყოფი თორის ზედაპირს. მე- n თავში შესწავლილი კვაზიპერიოდული მოძრაობის ანალოგიურად, ტრაექტორიებს ახასიათებენ ორგვარი სიხშირის მეშვეობით:

$$\omega_1 = \frac{\partial H}{\partial J_1} \quad \omega_2 = \frac{\partial H}{\partial J_2} \tag{8.4-16}$$



ნახაზი 8.4. კუთხე-ქმედების დიაგრამა თავისუფლების ერთი ხარისხის მქონე ინტეგრებადი ჰამილტონისეული სისტემისთვის. თითოეული ტრაექტორია „მოიცავს“ მუდმივ ქმედებას და ამგვარად კუთხე-ქმედების სივრცის ჰორიზონტალურ წრფეს შეესაბამება. პერიოდი- n -ის ტიპის პერიოდულ ტრაექტორიას შეესაბამება n რაოდენობის

წერტილი ჰორიზონტალურ წრფეზე. კვაზიპერიოდული ტრაექტორია საბოლოო ჯამში მთლიანად შეავსებს ჰორიზონტალურ წრფეს.

განზოგადებულად რომ ვთქვათ, თავისუფლების N ხარისხის მქონე ინტეგრებადი სისტემისთვის ტრაექტორია შეზღუდულია თორის N განზომილებიანი ზედაპირზე (რომელიც მდებარეობს $2N$ -განზომილებიან ფაზურ სივრცეში). იმის გამო, რომ მოძრაობა ყოველთვის ამ ზედაპირებზე ხდება, მათ ინვარიანტულ თორებსაც უწოდებენ.

თუ სხვადასხვა ω_i სიხშირეები არათანაზომადია, ხოლო მოძრაობა – კვაზიპერიოდული, მაშინ ტრაექტორია საბოლოო ჯამში თორის ზედაპირის ყველა ნაწილს „ესტუმრება“. ასეთ სისტემას *ერგოდული* ეწოდება, რადგან მისი ნებისმიერი პარამეტრის საშუალო მნიშვნელობის გამოთვლა ხდება ან დროში (რაც საკმაოდ რთულია) ან ზედაპირის შესაბამისი q და p სიდიდეების მიხედვით გასაშუალოების შედეგად (შედარებით იოლია და უმეტესწილად ამ ხერხს მიმართავენ).

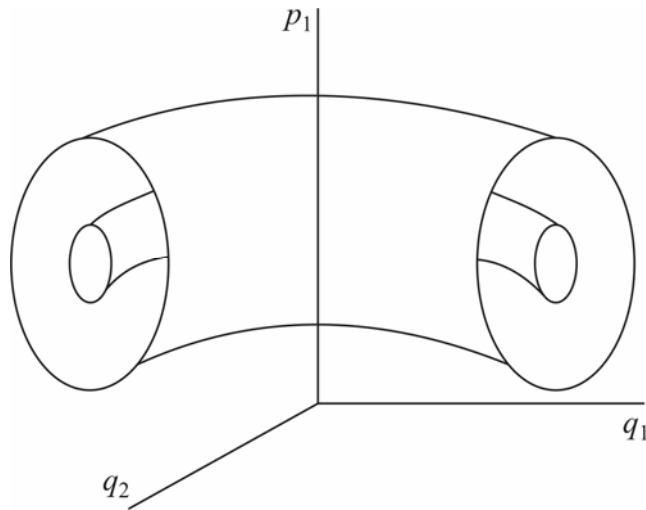
კუთხე-ქმედების სივრცე

ჩვეულებრივი pq ფაზური სივრცის ნაცვლად მდგომარეობათა სივრცის განსხვავებული ინტერპრეტაცია იყენებს კუთხე-ქმედება ცვლადებს. ამისთვის სამმაგი მოტივაცია არსებობს. პირველი მდგომარეობს იმაში, რომ ინტეგრებადი სისტემისთვის ნებისმიერი ტრაექტორია ქმედების შესაბამის ცვლადთა ფიქსირებული მნიშვნელობებით შეგვიძლია დავახასიათოთ. მაგალითად, მარტივი ჰარმონიული ოსცილატორისათვის pq ფაზურ სივრცეში თითოეული ტრაექტორია (8.4-10)-ით მოცემულ ფიქსირებულ ქმედებას შეესაბამება.

კუთხე-ქმედების სივრცეში ინტეგრებადი სისტემის შესაბამისი ტრაექტორიები მუდმივი ქმედების ჰორიზონტალურ წრფეებზე მდებარეობს. 8.4 ნახაზზე თითოეული ჰორიზონტალური წრფე საწყისი pq ფაზური სივრცის „თორს“ შეესაბამება.

კუთხე-ქმედების დიაგრამის აგების მეორე მოტივაცია არაინტეგრებადი სისტემებს უკავშირდება. მომდევნო პარაგრაფში ვნახავთ, რომ როდესაც ჰამილტონისეული სისტემა არაინტეგრებადი ხდება, ტრაექტორიის შესაბამისი ქმედება უკვე საზოგადოდ მუდმივი აღარ არის. განსაკუთრებით აშკარად ეს ფაქტი კუთხე-ქმედების დიაგრამაზე ვლინდება, სადაც ტრაექტორია ვერტიკალურად „მოძრაობს“.

კუთხე-ქმედების სივრცის შემოყვანის მესამე მიზეზი დაკავშირებულია კვანტურ მექანიკაში არსებულ ქმედებებთან. მე-12 თავში ვნახავთ, რომ თითოეული დასაშვები კვანტური მდგომარეობა ქმედების ფუნდამენტური ერთეულის მთელ რიცხვზე ნამრავლს შეესაბამება.



ნახაზი 8.5. თავისუფლების ორი ხარისხის მქონე ინტეგრებადი სისტემის შემთხვევაში ტრაექტორიები ჩაკეტილია კონცენტრული თორების ზედაპირებზე. თითოეული ზედაპირი შეესაბამება მოძრაობის ორი მუდმივას მნიშვნელობათა სხვადასხვა სიმრავლეს. თუ სისტემა არაინტეგრებადი ხდება, მაშინ ტრაექტორიებს შეუძლიათ გავიდნენ თორის ზედაპირიდან.

ამრიგად, დასაშვები კვანტური მდგომარეობები შეესაბამებიან კუთხე-ქმედების დიაგრამაზე ქმედების შესაბამისი ცვლადის მიხედვით თანაბრად განაწილებულ ტრაექტორიებს.

8.5 არაინტეგრებადი სისტემები, KAM თეორემა და პერიოდის გაორმაგება

როდესაც ჰამილტონის ინტეგრებადი სისტემის ქმედება ყოველთვის პერიოდული ან კვაზიპერიოდულია, მაშინ ინტეგრებადი სისტემა ქაოსურ ქმედებას ვერ ამჟღავნებს. ჩვენ გარკვეული დრო დაგუთმეთ ინტეგრებადი სისტემების აღწერას, რადგანაც ჰამილტონისეული სისტემების ქაოსური ქმედების შესახებ არსებული ლიტერატურა ფოკუსირებულია მცირედ არაინტეგრებად სისტემებზე. შემდგომში შევძლებთ პასუხის გაცემას, თუ რამდენად განსხვავებული ხდება არაინტეგრებადი სისტემის ქმედება არაინტეგრებადობის ზრდასთან ერთად.

არაინტეგრებადი სისტემების შემთხვევაში ჩვენ ვდგავართ ტრაექტორიების ვიზუალიზაციის პრობლემის წინაშე, რადგან არაინტეგრებად სისტემას თავისუფლების ორი ხარისხი მაინც უნდა ჰქონდეს. სისტემა ინტეგრებადი რომ ყოფილიყო, მაშინ ტრაექტორიები თორის ორგანზომილებიან ზედაპირზე გადაადგილდებოდა და პერიოდულობას ან კვაზიპერიოდულობას გამოავლენდა. თუ სისტემა არაინტეგრებადია, მაშინ ტრაექტორიებს გადაადგილება შეუძლიათ ოთხგანზომილებიან ფაზურ სივრცეში მდებარე სამგანზომილებიან

ზედაპირზე (ამ შემთხვევაში ენერგია კვლავ მუდმივია და ხდება ტრანექტორიათა შეზღუდვა). ასეთი სამგანზომილებიანი მოძრაობა ქმნის ქაოსის შესაძლებლობას.

თავისუფლების ორი ხარისხის მქონე ინტეგრებად სისტემისათვის ფაზური სივრცე შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც კონცენტრულ თორთა სიმრავლე (იხ. ნახაზი 8.5). მოძრაობის ორი მუდმივას ფიქსირებული მნიშვნელობებისთვის ტრანექტორიები ერთ-ერთი თორის ზედაპირზეა ჩაკეტილი. როდესაც სისტემა უმნიშვნელოდ არაინტეგრებადი ხდება, ტრანექტორიები თორის ზედაპირიდან გადის. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ თორი ირღვევა.

სურათის გასამარტივებლად გამოვიყენოთ პუანკარეს კვეთები. ჯერ შევარჩევთ ფაზური სივრცის ისეთ სიბრტყეს, რომელსაც ტრანექტორიები „განივად“ კვეთენ, ხოლო შემდეგ ტრანექტორიებისა და სიბრტყის გადაკვეთის წერტილებს მოვნიშნავთ. ამგვარად, თავისუფლების ორი ხარისხის მქონე სისტემის აღწერას ორგანზომილებიანი სიბრტყის შემადგენელ წერტილების სიმრავლემდე დავიყვანთ.

საზოგადოდ, თავისუფლების ორი ხარისხის მქონე სისტემისთვის პუანკარეს სიბრტყე ქანქარას ფაზური სივრცის (გამრუდებული) დიაგრამის ანალოგიურია: არსებობს *ელიფსური ორბიტები*, რომლებიც ელიფსური წერტილების გარშემო ჩაკეტილ კონტურებს ქმნიან (როგორც მე-6 თავში აღვნიშნეთ, პერიოდული მოძრაობის შემთხვევაში კონტურები დისკრეტული წერტილების უსაზღვრო რაოდენობას მოიცავენ. კვაზიპერიოდული მოძრაობისას კი კვეთის წერტილები უწყვეტ მრუდს შეავსებენ პუანკარეს სიბრტყეში). ჰიპერბოლური ტიპის წერტილების მიდამოებში იარსებებენ *ჰიპერბოლური ორბიტებიც*, რომელთაგან ზოგიერთი ერთმანეთს გადაკვეთს ამ („უნაგირის“ ტიპის) წერტილებში. 8.6 ნახაზი წარმოგვიდგენს პუანკარეს სიბრტყეს ჰენონ-ჰეილსის სისტემისთვის. უფრო დეტალურად მას 8.6 პარაგრაფში განვიხილავთ.

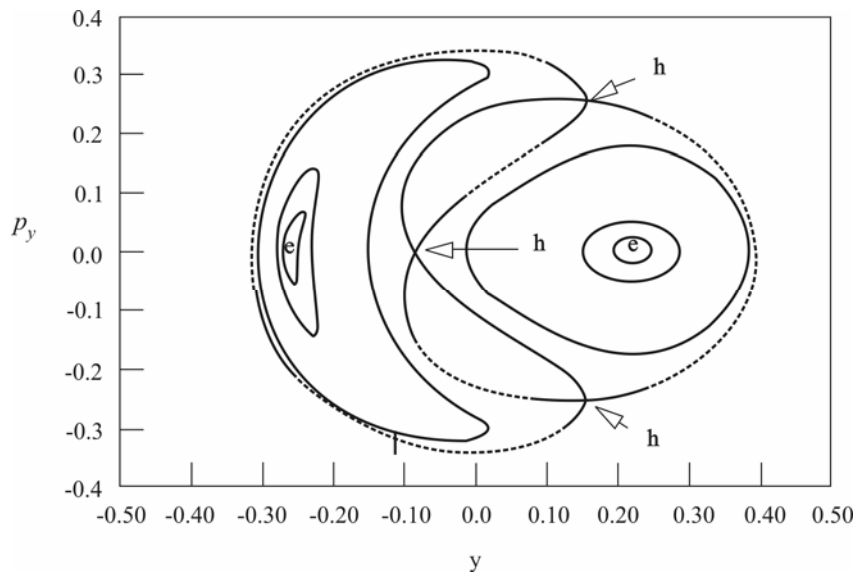
თუ სისტემა არაინტეგრებადი გახდება, მაშინ ტრანექტორიები შეზღუდვისგან თავისუფლდებიან და ფაზურ სივრცეში უფრო თავისუფლად გადაადგილდებიან. ამრიგად, თამამად შეგვიძლია განვაცხადოთ, რომ მოსალოდნელია ინტეგრებადი სისტემისათვის დამახასიათებელი კარგად ორგანიზებული პუანკარეს კვეთის „გაქრობა“. ახლავს თუ არა ამ პროცესს თან წერტილების შემთხვევითი სახით გაბნევა? ამ კითხვაზე პასუხი *კოლმოგოროვი-არნოლდი-მოსერის (KAM)* ცნობილმა თეორემამ [Arnold, 1978] გასცა.

KAM თეორემა ამტკიცებს, რომ (ზოგიერთი ტექნიკური ხასიათის პირობების შესრულების შემთხვევაში რომელთაც აქ არ განვიხილავთ) ფაზური სივრცის ზოგიერთი თორი, კერძოდ ისინი, რომლებიც დაკავშირებული არიან ნახვევთა ირაციონალური რიცხვის მქონე კვაზიპერიოდულ მოძრაობასთან, „გადარჩება“ (მაგრამ ოდნავ დეფორმირდება) იმ შემთხვევაში, თუ ინტეგრებადი სისტემა უმნიშვნელოდ არაინტეგრებადი გახდება. ეს შედეგი

უფრო ფორმალური სახით შეგვიძლია ასე ჩამოვაყალიბოთ: თავდაპირველად ინტეგრებადი სისტემის შესაბამისი ჰამილტონიანი შეიძლება $H_0(J)$ ფუნქციის სახით ჩავწეროთ. სისტემას არაინტეგრებადს $H_0(J)$ -სათვის მეორე წევრის დამატებით გავხდით. ჰამილტონის სრული ფუნქცია იქნება

$$H(J, \theta) = H_0(J) + \varepsilon H_1(J, \theta) \quad (8.5-1)$$

სადაც ε პარამეტრი გვაძლევს არაინტეგრებადობის ხარისხს. (8.5-1) განტოლების მეორე წევრს ზოგჯერ ჰამილტონის საწყისი ფუნქციის „შეშფოთებას“ უწოდებენ, ხოლო ტრაექტორიის ხასიათზე ამ წევრის ზეგავლენის განსაზღვრისთვის გამოიყენება „შეშფოთებათა თეორია“. KAM თეორემა ამტკიცებს, რომ როდესაც $\varepsilon \ll 1$ (ანუ სისტემა თითქმის ინტეგრებადია) ქმედებასთან დაკავშირებული, სიზშირეთა ირაციონალური ფარდობის მქონე თორი „გადარჩება“.



ნახაზი 8.6. ჰუნკარეს კვეთა თავისუფლების ორი ხარისხის მქონე (თითქმის) ინტეგრებადი სისტემისთვის (8.6 პარაგრაფში მოყვანილი ჰენონ-ჰეილსის სისტემა), ენერჯის ფიქსირებული მნიშვნელობით. თითოეული ტრაექტორია მოძრაობის მუდმივას განსხვავებულ მნიშვნელობას შეესაბამება. **e**-ით აღნიშნული ორი ელიფსური ტიპის წერტილი „ელიფსური“ ორბიტებითაა გარშემორტყმული. **h**-ით აღნიშნული სამი ჰიპერბოლური წერტილი სიბრტყის განსხვავებულ არეებად დამყოფ სეპარატრისებთანაა დაკავშირებული.

მათ **KAM** თორებს უწოდებენ. ε -ის ზრდასთან ერთად თორები ერთიმეორის მიყოლებით „ნადგურდებიან“. გადარჩება მხოლოდ ერთი თორი, რომელსაც ოქროს შუალედის ტოლი („ყველაზე ირაციონალური“ ირაციონალურ რიცხვთა შორის) ნახვევთა რიცხვი გააჩნია.

როდესაც ε იზრდება, ნახვევთა რაციონალური რიცხვის შესაბამისი თორი „ნადგურდება“. პუანკარეს კვეთის თვალსაზრისით, წერტილები პუანკარეს სიბრტყის გარშემო განიბნევიან. სწრაფი „განადგურება“ მე- n თავში განხილული რეზონანსის ეფექტით შეიძლება აიხსნას. ჰამილტონის ფუნქციის არაინტეგრებადი ნაწილი „აწყვილებს“ ისეთ რხევებს, რომლებიც დამოუკიდებელი არიან ინტეგრებადობის შემთხვევაში. როდესაც თორისთვის ფარდობითი სიხშირე რაციონალურია, მაშინ ადგილი აქვს თითოეული რხევის შესაბამისი ჰარმონიკების მიერ ერთმანეთის გადაფარვას. ამგვარი გადაფარვა დამახასიათებელია „ძლიერი რეზონანსისათვის“, რომელსაც მივყავართ რხევის ამპლიტუდის სწრაფ ზრდისკენ ფაზურ სივრცეში და თორის ზედაპირიდან ტრაექტორიების სწრაფი დაცილებისკენ. როდესაც ფარდობითი სიხშირე ირაციონალურია, ჰარმონიკების მიერ ერთიმეორის გადაფარვა აღარ არის მოსალოდნელი და შესაბამისი თორის „გადარჩენას“ ε -ს უფრო დიდი მნიშვნელობების შემთხვევაშიც კი უნდა ველოდოთ.

KAM თეორემა ამტკიცებს, რომ არაინტეგრებადობის მოცემული მაჩვენებლის შემთხვევაში „გადარჩენილ“ თორს შეესაბამება ნახვევთა ისეთი ω რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ უტოლობას [Schuster, 1995]:

$$\left| \omega - \frac{m}{n} \right| > \frac{g(\varepsilon)}{n^{2.5}} \quad (8.5-2)$$

სადაც ვუშვებთ, რომ მთელი დადებითი რიცხვების m/n ფარდობა უმარტივეს სახეზეა დაყვანილი. $g(\varepsilon)$ კოეფიციენტი, რომელიც არაინტეგრებადობის მაჩვენებლის ზრდასთან ერთად იზრდება, m/n -ის ყოველი მნიშვნელობისთვის უცვლელია. როგორც ვხედავთ, ისეთი ω -ების შემთხვევაში, რომელთაც გააჩნიათ მცირე მნიშვნელები (მაგალითად, $1/4$ ან $1/3$) თორი ყველაზე ახლოსაა „განადგურებასთან“. წინააღმდეგ შემთხვევაში თორები ε -ს შედარებით დიდი მნიშვნელობებისათვისაც კი „გადარჩებიან“ (მაგალითად, ოქროს კვეთის შემთხვევა).

თორის „განადგურების“ საილუსტრაციოდ ავავოთ თითოეული m/n რაციონალური წილადის შემცველი $g(\varepsilon)/n^{2.5}$ ზომის მქონე წარმოსახვითი არეები. ყოველ ასეთ არეში მოხვედრილი ნახვევთა ირაციონალური რიცხვის შესაბამისი ნებისმიერი თორი „ნადგურდება“. კუთხე-ქმედების შესაბამის დიაგრამაზე თითოეული არე ნახვევთა რაციონალური რიცხვის მქონე J -ს ჰორიზონტალური წრფის გარშემო მდებარე ჰორიზონტალური დიაპაზონებისგან

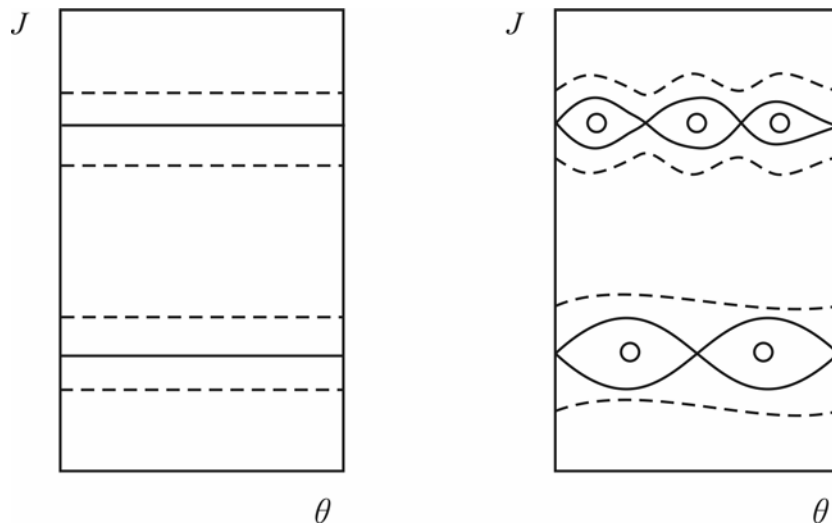
შედგება. ამ დიაპაზონებს, რომლებიც J -ს მნიშვნელობების შესაბამისი ჰიპერბოლური წერტილებისაგან შედგენილი სეპარატრისებით არიან შემოსაზღვრულნი, **რეზონანსული სტრუქტურები** ეწოდებათ. არაინტეგრებადობის მაჩვენებლის ზრდასთან ერთად რეზონანსები ერთიმეორის გადაფარვას იწყებენ და მათ შორის არსებულ არეებში მდებარე ირაციონალურ თორებს „ანადგურებენ“. **რეზონანსული გადაფარვის ცნება** საშუალებას გვაძლევს მიახლოებით განვსაზღვროთ, თუ არაინტეგრებადობის რომელი მაჩვენებლისათვის “ნადგურდებაან” ყველა ამგვარი თორები და იწყება ქაოსური ქმედება (CHI79).

რა არის KAM თორის დინამიკური მნიშვნელობა? ინტეგრებადობის შემთხვევაში ტრაექტორიები ფაზურ სივრცეში თორების ზედაპირებზე არიან ჩაკეტილნი. სისტემის არაინტეგრებადობის შემთხვევაში ტრაექტორიებს თორებიდან გასვლის უნარი უჩნდებათ. “გადარჩენილი” KAM თორების შემთხვევაში ტრაექტორიები კვლავ მათ ზედაპირებზეა ჩაკეტილი. ამრიგად, KAM თორები კვლავ „ღებულობენ მონაწილეობას“ ფაზური სივრცის ტრაექტორიათა ორგანიზებაში.

შევამოწმოთ, თუ როგორ არის ამგვარი ორგანიზაციის უნარი დამოკიდებული ფაზური სივრცის განზომილებაზე (ანუ სისტემის თავისუფლების ხარისხების რაოდენობაზე). $2N$ განზომილების მქონე ფაზურ სივრცეში მუდვი ენერჯის მქონე „ზედაპირი“ $2N-1$ განზომილებისაა. ზემომოყვანილი დაშვების თანახმად, ინტეგრებად სისტემებში თორებს N განზომილება გააჩნიათ. ამრიგად, თორებისთვის ფაზური სივრცის დასაყოფად შეიძლება გვქონდეს როგორც $N=1$, ასევე $N=2$. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, თორებს ფაზური სივრცის არეებად დაყოფა შეუძლიათ მხოლოდ თავისუფლების ერთი ან ორი ხარისხის მქონე სისტემებისათვის. უფრო მეტი განზომილების მქონე სისტემებში, სადაც თორები სისტემის არაინტეგრებად მდგომარეობაში გადასვლასთან ერთად “განადგურებას” იწყებენ, წარმოიქმნება ე.წ. **სტოქასტიკური ქსელი**. ამ შემთხვევაში ტრაექტორიები მოძრაობენ მდგომარეობათა სივრცის დასაშვები ენერჯის შესაბამისი არის უმეტეს ნაწილში. [Zaslevsky, Sagdeev, Usikov and Chernikov, 1991] გვიქმნის საკმაოდ სრულყოფილ წარმოდგენას სტოქასტიკური ქსელის წარმოშობის შესახებ.

პუანკარე-ბირჰოფის თეორემა

რა ემართებათ ფაზური სივრცის ტრაექტორიებს ჰამილტონის ფუნქციის არაინტეგრებად მდგომარეობაში გადასვლისას და რაციონალური ფარდობის მქონე თორების “განაგურებისას”? ამ კითხვაზე პასუხს პუანკარე-ბირჰოფის (BIR35) (HEL80) ცნობილი თეორემა გაგვცემს.



ნახაზი 8.7. ნახვევთა რაციონალური რიცხვის მქონე თორის რღვევის (უწყვეტი წრფე მარცხნივ) ამსახველი კუთხე-ქმედების დიაგრამა, როდესაც ინტეგრებადი სისტემა (მარჯვნივ) ხდება უმნიშვნელოდ არაინტეგრებადი (მარცხნივ). ელიფსური ტიპის წერტილები წრეებითაა აღნიშნული. მათ შორის მდებარეობენ ჰიპერბოლური წერტილები, რომელთა შიდა და გარე სიმრავლეები უწყვეტი მრუდების მეშვეობითაა გამოსახული. ახლად წარმოქმნილი ჰიპერბოლური წერტილების შიდა და გარე სიმრავლეები უნდა “ერიდონ” ნახვევთა ირაციონალური რიცხვის შესაბამის ნარჩენ (KAM) თორებთან (წყვეტილი მრუდები) თანაკვეთას. ელიფსური წერტილების ყოველი სიმრავლე შესაბამისი ჰიპერბოლურ წერტილებთან და ამ უკანასკნელთა შიდა და გარე სიმრავლეები ერთად ამყარებენ „რეზონანსს“.

როდესაც სისტემა ინტეგრებადია, თორზე მდებარე, ნახვევთა m/n რაციონალური რიცხვის შესაბამისი თითოეული წერტილი პერიოდული ორბიტის ნაწილია. მე- n თავის თანახმად, თორზე განლაგებული თითოეული ორბიტა გადის თორის პუანკარეს კვეთაში მყოფ n რაოდენობის წერტილს. პუანკარე-ბირჰოფის თეორემის თანახმად, როდესაც სისტემა არაინტეგრებადი ხდება, თორი იშლება n რაოდენობის ელიფსური და ჰიპერბოლური წერტილების მიმდევრობებად. თითოეული ელიფსური წერტილის ირგვლივ ელიფსურ ორბიტათა მიმდევრობები წარმოიქმნება. ჰიპერბოლურ წერტილებთან დაკავშირებულია ჰომოკლინიკური ორბიტა, რომელიც ერთმანეთთან აერთებს „უნაგირის“ ტიპის წერტილების სტაბილურ (შიდა სიმრავლე) და არასტაბილურ (გარე სიმრავლე) მრავალსახეობებს. შიდა და გარე სიმრავლეები უნდა „ერიდონ“ ნარჩენ თორებთან თანაკვეთას. ამრიგად, სრულიადაც არაა გასაკვირი, რომ შიდა და გარე სიმრავლეებს ჰქონდეთ „ჩახვეული“ ფორმა. ვინაიდან ახლომდებარე ტრაექტორიები ამ შიდა და გარე სიმრავლეების გავლენას განიცდიან, მათ მიდამოში მდებარე ტრაექტორიებს შესაძლოა მეტად რთული ფორმა გააჩნდეთ. ამ მიზეზით

მოსალოდნელია, რომ ნახვევთა რაციონალური რიცხვის მქონე თორების რღვევა ჰომოკლინიკურ და ჰეტეროკლინიკურ დიაპაზონებს გამოიწვევს, რაც თავის მხრივ ქაოსური ქმედების „მიზეზია“.

დეტალური სტრუქტურა კიდევ უფრო რთულია. თითოეული ახლად წარმოქმნილი ელიფსური ორბიტის მახლობლად, პუანკარე-ბირჰოფის თეორემის თანახმად, უნდა არსებობდეს ელიფსური და ჰიპერბოლური წერტილების მიმდევრობა.

ამრიგად, არსებობს ელიფსური და ჰიპერბოლური წერტილების „ჯაჭვით“ გარშემორტყმული კონცენტრული KAM თორების რთული სტრუქტურა. ამგვარ „ჯაჭვთა“ უმრავლესობა ისეთი მცირე მასშტაბისაა, რომ რიცხვითი გამოთვლების მეშვეობით მათი დადგენა რთულია (იხილეთ მაგალითად, 8.6 პარაგრაფი).

ჩვენ უკვე შეგვიძლია დისიპაციურ და ჰამილტონის სისტემებში არსებულ ქაოსურ ქმედებებს შორის არსებული მნიშვნელოვანი განსხვავების გააზრება. დისიპაციურ სისტემებში საწყისი პირობები მნიშვნელოვანი არ არის, რადგან საბოლოოდ ტრაექტორიები მიმზიდველზე სრულდებიან (თუმცა უნდა გვახსოვდეს, რომ პარამეტრის მნიშვნელობათა მოცემული სიმრავლისთვის ბევრი მიმზიდველი შეიძლება არსებობდეს, ხოლო განსხვავებულმა საწყისმა პირობებმა კი შეიძლება ტრაექტორიების სხვადასხვა მიმზიდველზე დასრულება გამოიწვიოს). ჰამილტონის სისტემებში საწყისი პირობები გადამწყვეტ როლს ასრულებს. საწყისი პირობების ზოგიერთი სიმრავლე ჩვეულებრივ ქმედებას, ხოლო სხვები კი ქაოსურ ქმედებას შეესაბამებიან. ყველა მათგანს პარამეტრის მნიშვნელობათა ერთი და იგივე სიმრავლე გააჩნია. არაინტეგრებადობის მაჩვენებლის ზრდასთან ერთად ქაოსური არეები ჩვეულებრივი “არეების შევიწროებას” იწყებენ (ან ნახვევთა ირაციონალური რიცხვების მქონე თორების შესაბამისი ჩვეულებრივი არეები მცირდებიან, რაც ქაოსურ არეებს ზრდის საშუალებას აძლევს).

8.7 ნახაზი სქემატურად აღწერს, თუ როგორ „ნადგურდებიან“ პუანკარეს კვეთის შესაბამისი თორები სისტემის არაინტეგრებად მდგომარეობაში გადასვლისას. წყვეტილი მრუდებით აღნიშნული რაციონალური რიცხვების შესაბამისი თორები ელიფსურ და ჰიპერბოლურ ტიპის წერტილებად იშლებიან (უწყვეტი წრფეები). ჰიპერბოლური წერტილების შიდა და გარე სიმრავლეები “გარემოცავენ” ახლად წარმოქმნილ ელიფსებს და ნარჩენ KAM თორებს „გაერიდებიან“.

თუ საწყის ინტეგრებად სისტემას გააჩნია ჰიპერბოლური წერტილები, მათი შიდა და გარე სიმრავლეები სისტემის ოდნავ არაინტეგრებად მდგომარეობაში გადასვლასთან ერთად უნდა ქრებოდნენ. (HEL80, გვ. 433)-ის თანახმად, ასეთი შიდა და გარე სიმრავლეები ჰომოკლინიკურ და ჰეტეროკლინიკურ კეთხეებს ქმნიან, რომლებიც, თავის მხრივ, არაინტეგრებადი სისტემისთვის ქაოსური ქმედების საწყისებს წარმოადგენენ.

ქაოსური ქმედებისა და ფაზური სივრცის ნარევი

არაინტეგრებად მდგომარეობაში გადასული, თავისუფლების ორი ხარისხის მქონე სისტემისთვის ქაოსური ქმედება ნახვევთა რაციონალური რიცხვის მქონე თორების „განადგურების“ შედეგად შექმნილ ჰომოკლინიკურ კუთხეებს შეესაბამება. თუმცა, ქაოსური ტრაექტორიები შეზღუდულნი არიან ფაზური სივრცის შედარებით მცირე არეებში ნარჩენი KAM თორების მიერ. არაინტეგრებადობის მცირე მაჩვენებლების შემთხვევაში ქაოსური ქმედება პრაქტიკულად შეუმჩნეველი უნდა დარჩეს. არაინტეგრებადობის მაჩვენებლის ზრდასთან ერთად KAM თორების საკმარისად დიდი რაოდენობა „ნადგურდება“ და ქაოსურ ქმედებას ფაზური სივრცის სულ უფრო და უფრო მეტ არეში „შეჭრის“ საშუალება ეძლევა და საბოლოოდ ცალკეულ ქაოსურ ტრაექტორიას შეუძლია ფაზური სივრცის დასაშვები არის უდიდეს ნაწილს „ესტუმროს“.

თუ სისტემას სამი (ან მეტი) თავისუფლების ხარისხი გააჩნია და არაინტეგრებადი ხდება, $(2N-1)$ განზომილების მქონე მრავალსახეობები, რომლებიც KAM თორების ზედაპირებს წარმოადგენენ, ქაოსური ტრაექტორიების საზღვრები აღარ იქნებიან და მოცემული ქაოსური ტრაექტორია ფაზური სივრცის ვრცელ ნაწილში შეძლებს გადაადგილებას. ფაზურ სივრცეში ამგვარ „ხეტიალს“ *არნოლდის დიფუზია* ეწოდება. იგი, ქაოსის გამო, სტატისტიკურ ნარევს წარმოადგენს. თუმცა, თავისუფლების ორი ხარისხის მქონე სისტემებისთვის KAM თორები კვლავ იცავენ ფაზური სივრცის გარკვეულ არეებს (ვიდრე მათი „განადგურება“ არ მოხდება).

ლიაპუნოვის ექსპონენტები

ჰამილტონის სისტემის არაინტეგრებად მდგომარეობაში გადასვლასთან ერთად, როგორ უნდა შევიტყოთ სისტემაში ქაოსური ქმედების არსებობის შესახებ? ამ შეკითხვაზე პასუხის გასაცემად კვლავ უნდა დავუბრუნდეთ ლიაპუნოვის ექსპონენტებს. ლიაპუნოვის ექსპონენტების რაოდენობა ფაზური სივრცის განზომილების ტოლია. ლიაპუნოვის ექსპონენტების გამოთვლა მე-9 და მე-10 თავებში მოცემული მეთოდის მიხედვით არის შესაძლებელი. არაინტეგრებადი სისტემისთვის ჰიპერბოლური წერტილების ირგვლივ არსებულ არეებში გამავალი ტრაექტორიებისთვის ლიაპუნოვის ერთ-ერთი ექსპონენტი მინც დადებითია. ჰამილტონისეული სისტემისთვის ლიაპუნოვის ექსპონენტების ჯამი (ვინაიდან ფაზური სივრცის მოცულობა მუდმივია) ნულის ტოლი უნდა იყოს. თავისუფლების ორი ხარისხის მქონე სისტემისთვის (ქაოსის აღძვრისათვის საჭირო მინიმალური განზომილება)

ლიაპუნოვის ოთხი ექსპონენტა არსებობს. ქაოსური ტრაექტორიების შემთხვევაში ერთ-ერთი მათგანი დადებითია, ორი – ნულის ტოლი, ხოლო ერთი – უარყოფითი.

ჩვენ უმეტესწილად პერიოდულ ტრაექტორიებთან ახლოს მყოფი ტრაექტორიების ქმედება გვანტერესებს (რომელთაგან ზოგიერთი სტაბილურია, ზოგიერთი კი – არასტაბილური). თუ ფაზურ სივრცეში ამგვარი ტრაექტორიის გამოსახვისთვის $\vec{z}(t)$, ხოლო განსახილველ ტრაექტორიასა და პერიოდულ ორბიტას შორის მანძილის აღსანიშნავად $\delta\vec{z}(t)$ სიმბოლოებს გამოვიყენებთ, უკანანელი სიდიდე ე.წ. *მონოდრომიის* \vec{M} *მატრიცის* მეშვეობით აღიწერება:

$$\delta\vec{z}(t) = \vec{M}\delta\vec{z}(0) \quad (8.5-3)$$

მონოდრომიის მატრიცის მახასიათებელ რიცხვებს გააჩნიათ λ და $1/\lambda$ *მნიშვნელობები* (ამ სიდიდეთა ნამრავლი ერთის ტოლი უნდა იყოს ფაზური სივრცის მუდმივობის გამო).

პერიოდის გაორმაგება ჰამილტონისეული სისტემებისათვის

როდესაც ინტეგრებადი სისტემა არაინტეგრებადი ხდება, პუანკარე-ბირჰოფის თეორემის ძალით, პუანკარეს კვეთა (ელიფსი), რომელიც შეესაბამება ნახვევთა m/n რიცხვის მქონე თორს, იშლება ერთნაირი რაოდენობის შედარებით მცირე ზომის ელიფსებად და ჰიპერბოლურ წერტილებად. მცირე ელიფსები შეესაბამებიან ნახვევთა $2m/2n$ რიცხვის მქონე თორებს. არაინტეგრებადობის მაჩვენებლის ზრდასთან ერთად თითოეული ელიფსი ელიფსების (და ჰიპერბოლური წერტილების) წყვილების მიმდევრობად იშლება, რაც მოგვაგონებს პერიოდის გაორმაგების ბიფურკაციას დისიპაციური სისტემებისათვის. რენორმალიზაციის ტიპის არგუმენტების გამოყენების შედეგად განისაზღვრება ფეიგენბაუმის რიცხვები. ჰამილტონის სისტემების შემთხვევაში:

$$\delta_H = 8.721097 \dots \quad \alpha_H = -4.01807\dots \quad (8.5-4)$$

სადაც H ინდექსი გვიჩვენებს, რომ ეს რიცხვები განსაზღვრულია ჰამილტონისეული სისტემებისათვის. პერიოდის გაორმაგების ასეთი ტიპი დამახასიათებელია ბევრი მათემატიკური მოდელისათვის (იხ. 8.6 და 8.7 პარაგრაფები), მაგრამ ჩვენ ამ საკითხს არ

ჩავუღრმავდებით, რადგან რეალური ფიზიკური სისტემებისთვის იგი ჯერ-ჯერობით არ გამოყენებულა.

ჰამილტონის სისტემებში $n > 2$ შემთხვევაში n -ჯერადი პერიოდები იჩენენ თავს. მაგალითად, პერიოდი-2-ის ტიპის ციკლმა შეიძლება პერიოდის გახუთმაგება განიცადოს და გადაიზარდოს პერიოდი-10-ის შესაბამის ციკლში. მარტივად რომ ვთქვათ, მაღალი რიგის პერიოდებში ამგვარი გადასვლები სისტემისთვის დამახასიათებელ არაწრფივ რხევებს შორის არსებული „რეზონანსებიდან“ გამომდინარეობს (იხ. მაგალითად, GMV81).

არსებობს დაკვირვებული ფაქტები, რომ ჰამილტონისეულ სისტემებში პერიოდული ორბიტების ბიფურკაციები ხშირად ორგანიზებული ჯგუფებისათვის ვლინდება. „ნორმალური ფორმის თეორია“ (იხ. B დანართი) გვაძლევს ამგვარი ორგანიზების კვლევის მეთოდს (SSD95). მაიერის თეორემა (Meyer and Hall, 1992] ამტკიცებს, რომ პერიოდული ორბიტები მხოლოდ ხუთი ტიპის ბიფურკაციებს განიცდიან.

მეტი სიცხადისათვის გავიხსენოთ, რომ ჰამილტონის სისტემებს ახასიათებთ ქაოსური ქმედების გამომხატველი ტრაექტორიები არა მათი არაინტეგრებალობიდან გამომდინარე, არამედ იმიტომ, რომ ჰამილტონიანს გააჩნია სინგულარული წერტილები, რომლებშიც იგი არაა დიფერენცირებადი. ამგვარი თავისებურებები, მაგალითად, ბილიარდის მყარი ბურთულების შეჯახების მოდელებში ვლინდება. უხეშად რომ ვთქვათ, ეს მოდელები ანალოგიურია მეხუთე თავში განხილული უბან-უბან წრფივი იტერაციული ფუნქციებისა და უბან-უბან წრფივი დიფერენციალურ განტოლებებზე დამყარებული მოდელებისა, რომლებიც მე-12 თავში იქნებიან განხილული.

ჰამილტონის სისტემების შესახებ მსჯელობა აქამდე საკმაოდ აბსტრაქტული და ზოგადი იყო. მომდევნო ორ პარაგრაფში წარმოგიდგინთ ჰამილტონისეული სისტემების ორ ნიმუშს, რომელთა ზოგადი თვისებები ზემოაღწერილის ანალოგიურია.

8.6 ჰენონ-ჰეილსის ჰამილტონიანი

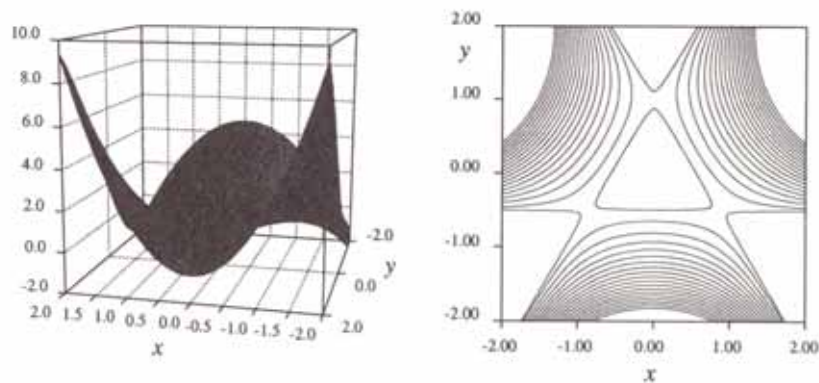
ჰამილტონის სისტემების დინამიკის ილუსტაციის მიზნით, ამ პარაგრაფში ჰამილტონის ფუნქციის კონკრეტული ნიმუშის თვისებებს გამოვიკვლევთ. ეს ფუნქცია თავდაპირველად ჰენონმა და ჰეილსმა (HEH64) გალაქტიკაში ვარსკვლავის მოძრაობის მოდელირებისათვის წარმოადგინეს. ჰამილტონიანს თავისუფლების ორი ხარისხი გააჩნია (p -ებისა და q -ების ორი ორი წყვილი) და შემდეგ ფორმას ღებულობს:

$$H = \frac{1}{2} p_1^2 + \frac{1}{2} q_1^2 + \frac{1}{2} p_2^2 + \frac{1}{2} q_2^2 + \left[q_1^2 q_2 - \frac{1}{3} q_2^3 \right] \quad (8.6-1)$$

ამ ტიპის ჰამილტონიანი წარმოადგენს ორ მარტივ ჰარმონიულ ოსცილატორს, რომლებიც შედიან კუბურ წევრში. ეს უკანასკნელი ჰამილტონიანს არაინტეგრებადს ხდის (შეადარეთ ამოცანა 8.2-2-ს). თუ დავუშვებთ, რომ $q_1=x$, $q_2=y$, $p_1=p_x$, და $p_2=p_y$, მაშინ ჰამილტონიანი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ ორ განზომილებაში მოძრავი ერთი ნაწილაკის მეშვეობით, რომელზეც მოქმედებს სისტემის პოტენციალური ენერგიის მეშვეობით გამოსახული ძალა:

$$V(x, y) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2 + x^2 y - \frac{1}{3} y^3 \quad (8.6-2)$$

პოტენციალური ენერგიის ამ ფუნქციას ლოკალური მინიმუმი კოორდინატა სისტემის სათავეში ($x=0$, $y=0$) აქვს. 8.8 ნახაზი პოტენციალური ენერგიის ფუნქციის სამგანზომილებიან მრუდს გვიჩვენებს.



ნახაზი 8.8. მარცხნივ ჰენონ-ჰელისის მოდელის შესაბამისი პოტენციალური ენერგიის ფუნქციის სამგანზომილებიანი მრუდია ნაჩვენები. მარჯვნივ ამავე ფუნქციის კონტურულ მრუდს ვხედავთ. ჩვენ გვინტერესებს ნაწილაკის გადაადგილება სათავის მიდამოში არსებულ მცირე ზომის ღრმულში. თუ ნაწილაკის ენერგია $1/6$ -ზე ნაკლებია, მაშინ ის სათავის მახლობლად მდებარე სამკუთხა რეგიონში აღმოჩნდება „მომწყვდეული“. შედარებით მაღალი ენერგიების შემთხვევაში ნაწილაკს პოტენციალური ენერგიის ლოკალური მინიმუმიდან თავის დაღწევა შეეძლება.

8.8 ნახაზის მარჯვენა ნაწილი ამავე პოტენციალური ენერგიის ფუნქციის კონტურულ მრუდს წარმოგვიდგენს.

თუ სათავის სიახლოვეს მყოფ ნაწილაკს გააჩნია $1/6$ -ზე ნაკლები ენერგია, მაშინ იგი სამუდამოდ სათავის მახლობლად განლაგებულ „ორბიტაზე“ დარჩება. თუ ენერგიის სიდიდე

1/6-ს აჭარბებს, მაშინ ნაწილაკს პოტენციალური ენერგიის ლოკალური მინიმუმის დაძლევა და უსასრულობისკენ მოძრაობა შეუძლია. თუ ენერგია ძალზედ მცირეა, მაშინ ნაწილაკი სათავის მიდამოში მოძრაობს და ტრაექტორიები ორგანზომილებიანი მარტივი ჰარმონიული რხევის მსგავსია.

ამ სისტემის აღმწერი ჰამილტონის განტოლებები შემდეგნაირია:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = P_x \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y} = P_y \\ \dot{P}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -x - 2xy \\ \dot{P}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} = -y - x^2 + y^2 \end{aligned} \tag{8.6-3}$$

როგორც ვხედავთ, სისტემა „არსებობს“ ოთხგანზომილებიან ფაზურ სივრცეში. მაგრამ, როდესაც სისტემა ჰამილტონისეულია, მაშინ ენერგიის მუდმივობის კანონის ძალით, ტრაექტორიები უნდა მდებარეობდნენ ამ ოთხგანზომილებიანი სივრცის სამგანზომილებიან მოცულობაში. ტრაექტორიის მონიშნული წერტილების ორგანზომილებიან სიბრტყეზე დატანისათვის კვლავ გამოვიყენებთ პუნკარეს კვითის მეთოდს.

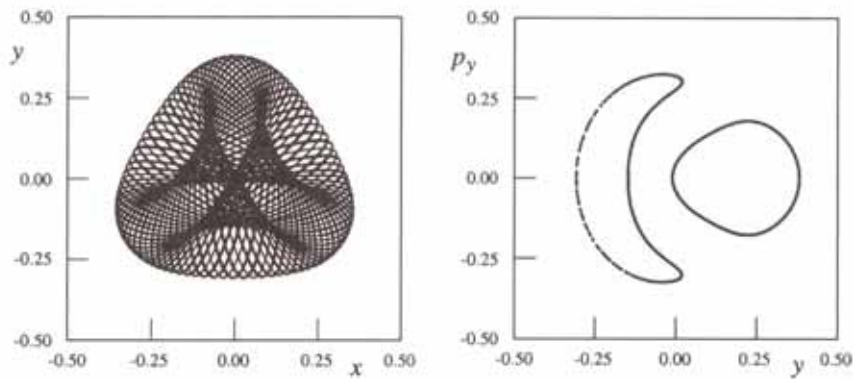
ამოცანა 8.6-1. შეამოწმეთ, რომ ჰამილტონის განტოლებები გვაძლევენ (8.6-3) განტოლებებს, ხოლო ეს უკანასკნელი არ აწესებენ მოცულობის მიმართ რაიმე შეზღუდვას ფაზურ სივრცეში.

განვიხილოთ დეტალურად, თუ როგორი იქნება პუნკარეს კვითა ამ შემთხვევაში. როგორც წესი, ტრაექტორიის მდებარეობას გამოსახვენ (y, p_y) სიბრტყეზე, როდესაც $x=0$. ამ ტრადიციას არც ჩვენ ვუღალატებთ. პუნკარეს კვითის განსაზღვრისას უპირველეს ყოვლისა E ენერგიის მნიშვნელობას, ხოლო შემდეგ პუნკარეს სიბრტყეზე ამ ენერგიის მნიშვნელობის შესაბამის რაიმე საწყის წერტილს შევარჩევთ. $x=0$ შემთხვევაში (y, p_y) მნიშვნელობები უნდა აკმაყოფილებდნენ შემდეგ პირობას:

$$E = \frac{1}{2} P_x^2 + \frac{1}{2} P_y^2 + \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{3} y^3 \tag{8.6-4}$$

ამგვარად, p_x -სთვის ფიქსირებული ენერჯისა და ცალკეული საწყისი მნიშვნელობისთვის (y, p_y) სიბრტყეზე იარსებებს პუანკარეს კვეთის წერტილების შემცველი სასრული არე. შემდეგ ვახდენთ (8.6-3) განტოლების ინტეგრებას და პუანკარეს კვეთის წერტილებს განვსაზღვრავთ. 8.9 ნახაზზე მარცხნივ ნაჩვენებია ერთ-ერთი ასეთი ორბიტა xy სიბრტყეზე. მარჯვნივ გამოსახულია შესაბამისი პუანკარეს კვეთა. პუანკარეს კვეთის წერტილები მოხვდებიან სამგანზომილებიანი თორის ზედაპირის პუანკარეს სიბრტყესთან გადაკვეთის შედეგად მიღებულ ორ „ელიფსზე“ (შენიშნეთ, რომ თორის განივკვეთი დეფორმირებულია და y -ის უარყოფითი და დადებითი მნიშვნელობებისათვის სიბრტყის გადაკვეთი თორის ნაწილებს განსხვავებული ფორმები გააჩნიათ). ამრიგად, ვასკვნით, რომ საქმე გვაქვს პერიოდულ ან კვაზიპერიოდულ ორბიტასთან. თითოეული ელიფსის დაახლოებით ცენტრში მდებარეობს ელიფსური ტიპის წერტილი, რომელიც 8.9 ნახაზზე არ ჩანს.

ამოცანა 8.6-2. დეტალურად ახსენით 8.9 ნახაზზე წარმოდგენილ xy ტრაექტორიებსა და პუანკარეს კვეთას შორის კავშირი.



ნახაზი 8.9. მარცხნივ მოყვანილია ჰენონ-ჰელისის $E=0.06$ მნიშვნელობის შესაბამის პოტენციალურ ველში გადაადგილებადი ნაწილაკის xy ტრაექტორია. ორბიტა სტარტს იღებს, როდესაც $x=0$, $y=-0.1475$, $p_x=0,3101$, ხოლო $p_y=0$. მარჯვნივ შესაბამისი p_y-y პუანკარეს კვეთაა წარმოდგენილი, როდესაც $x=0$. „ელიფსები“ წარმოიქმნებიან სამგანზომილებიანი თორის ზედაპირის პუანკარეს სიბრტყესთან კვეთის შედეგად.

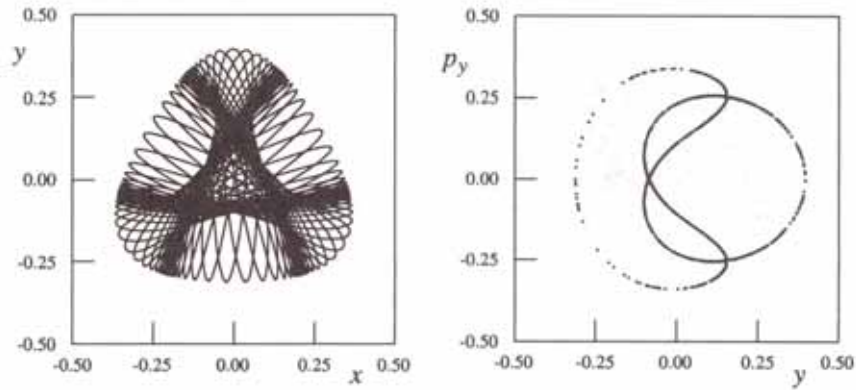
KAM თეორიის თანახმად, თუ ჰამილტონის ფუნქცია არაინტეგრებადია, მაშინ მხოლოდ „გადარჩენილი“ არაქაოსური ორბიტები იქნებიან კვაზიპერიოდულნი (ნახვევთა

ირაციონალური რიცხვით). აქედან გამომდინარე, პუანკარეს კვთაში, ამ ორბიტებისა და პუანკარეს სიბრტყის გადაკვეთის ადგილებში გლუვი მრუდების ნახვა შეგვიძლება. 8.9 და 8.10 ნახაზებზე ნაჩვენებია გადაკვეთები წერტილების ზღვრულ სრულ რაოდენობას გვიჩვენებენ, რომელთა ინტერპრეტაცია პერიოდულ ორბიტებზე დაყრდნობით შეიძლება. წერტილების ზღვრული რაოდენობა შედეგია ორი არტეფაქტისა: (1) ტრაექტორიებზე დაკვირვება მხოლოდ სასრული დროის განმავლობაში შეგვიძლია. თუ ცალკეული ორბიტისთვის ნახვეთა ირაციონალური რიცხვი ახლოსაა დაბალი რიგის რაციონალურ რიცხვთან (მაგალითად $1/4$), პუანკარეს სიბრტყეზე მრუდის „შევსებას“ დიდი დრო დასჭირდება; (2) რიცხვითი გამოთვლების ცდომილებებმა შესაძლოა მოჩვენებითი პერიოდული ორბიტები მოგვცეს.

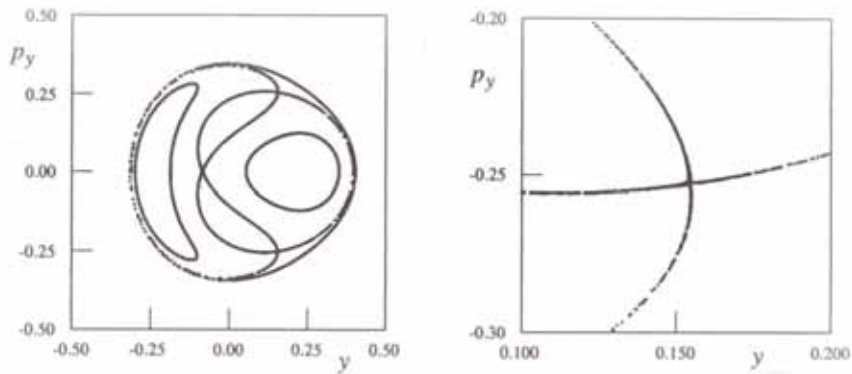
შენიშნეთ, რომ 8.9 ნახაზზე გამოსახული ტრაექტორია ენერჯის მოცემული მნიშვნელობის შესაბამის მრავალ ტრაექტორიათაგან ერთ-ერთია. პუანკარეს კვთის შევსებისათვის ერთი და იმავე ენერჯის შესაბამისი სხვადასხვა საწყისი პირობების შერჩევა გვესაჭიროება. 8.10 ნახაზი გვიჩვენებს კიდევ ერთ ორბიტას და შესაბამის პუანკარეს კვთას, რომელსაც ენერჯის იგივე მნიშვნელობა შეესაბამება, რომელიც 8.9 ნახაზზე გვქონდა გამოყენებული. ეს ორბიტა წარმოსახვითი გადაკვეთის არეებთან ახლომდებარე სამ ჰიპერბოლურ წერტილს ჯერ უახლოვდება, შემდეგ კი შორდება. ჰიპერბოლური წერტილების მახლობლად ტრაექტორიის წერტილები გადღაბნილია, რაც იმის მანიშნებელია, რომ ქმედება ქაოსურია. ქაოსური ქმედება პუანკარეს სიბრტყის მხოლოდ მცირე არეებშია ლოკალიზებული. ამრიგად, ჰამილტონისეულ სისტემებში ენერჯის ერთი და იმავე მნიშვნელობებისათვის სახეზეა ქაოსური და კვაზიპერიოდული ორბიტების თანაარსებობა. ზოგიერთი საწყისი პირობა ქაოსურ, ხოლო სხვა კი კვაზიპერიოდულ ორბიტას გვაძლევს.

ამოცანა 8.6-3. დეტალურად ახსენით 8.10 ნახაზზე ნაჩვენებ XY ტრაექტორიებსა და პუანკარეს კვთას შორის კავშირი.

ნახაზი 8.11 გვიჩვენებს შედარებით სრულყოფილ პუანკარეს კვთას, სადაც სხვადასხვა ტრაექტორიების შექმნისთვის გამოყენებული სხვადასხვა საწყისი პირობები, ყველა შემთხვევაში $E=0.06$ -ია. შენიშნეთ, რომ (y, p_y) სიბრტყეზე ($x=0$ პირობით) კვთის დასაშვები წერტილებისათვის არსებობს გარე ზღვარი.



ნახაზი 8.10. მარცხნივ - ჰენონ-ჰეილის პოტენციალის შესაბამისი კიდევ ერთი ორბიტა $E=0.06$ მნიშვნელობისათვის, მაგრამ მისი საწყისი პირობები 8.9 ნახაზზე მოყვანილი შემთხვევისაგან განსხვავდება. მარჯვნივ შესაბამისი (y, p_y) პუნკარეს კვეთა ნაჩვენებია.

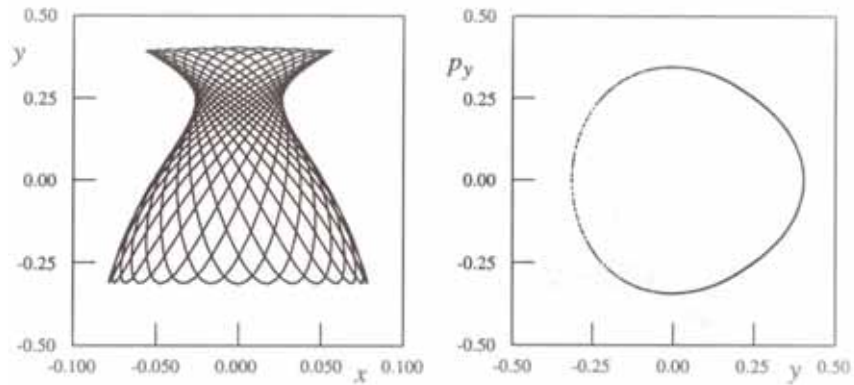


ნახაზი 8.11. მარცხნივ გამოსახულია (y, p_y) პუნკარეს კვეთა ჰენონ-ჰეილის სისტემისთვის, როდესაც $E=0.06$. მარჯვნივ ნაჩვენებია ჰიპერბოლური წერტილის მახლობლად არსებული ერთ-ერთი არის გადიდებული ხედი. კვეთის წერტილების (უმნიშვნელო) გადღაბნა ქაოსური ორბიტის არსებობის მანიშნებელია.

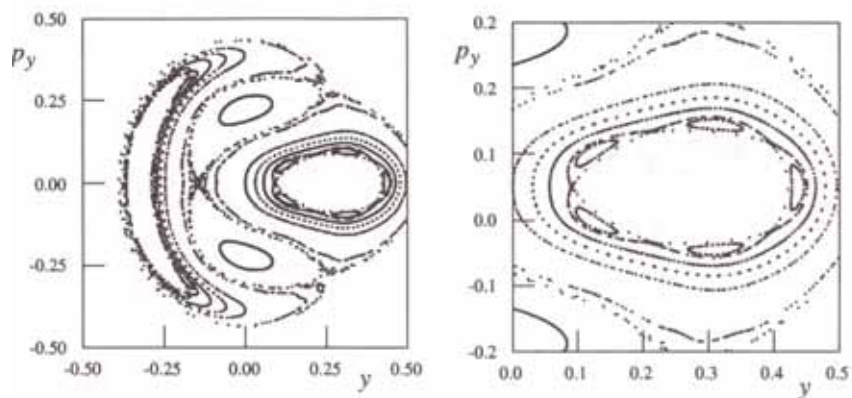
ამ ზღვრის გარეთ მდებარე წერტილები $E=0.06$ -გან განსხვავებული ენერჯის მქონე ტრაექტორიებს შეესაბამება. 8.11 ნახაზის მარჯვენა ნაწილში ნაჩვენებია ქვედა ჰიპერბოლური წერტილის მახლობლად მდებარე არის გადიდებული ხედი. აქ კვეთის წერტილების ქაოსური ხასიათი უფრო თვალსაჩინოა. ჰიპერბოლური წერტილების შესაბამის ქაოსურ არეებს ზოგჯერ *სტოხასტიკურ ფენებს* ან *სტოხასტიკურ ქსელებს* უწოდებენ. ამგვარი ფენები მიიღებიან ჰომოკლინიკური და ჰეტეროკლინიკური კუთხეების მეშვეობით, რომლებიც, თავის

მხრივ, ვითარდებიან „უნაგირის“ ტიპის წერტილებთან დაკავშირებული სტაბილური და არასტაბილური მრავალსახეობიდან.

ჰიპერბოლური წერტილების მიდამოებში გამავალი ორბიტები ამ წერტილებთან დაკავშირებული სეპარატრისების სიახლოვეს „მოძრაობენ“. ჰამილტონის სისტემების უმრავლესობისთვის სეპარატრისები თვისობრივად განსხვავებული ქმედების მქონე არეებს ერთმანეთისაგან აცალკევებენ.



ნახაზი 8.12. მარცხნივ გამოსახულია ჰენონ-ჰეილსის მოდელის შესაბამისი xy ტრაექტორია $E=0.06$ მნიშვნელობისთვის მარჯვნივ კი – ჰუნკარეს კვება. კვების წერტილები იმყოფებიან ენერჯის დასაშვები მნიშვნელობების არის გარეთ. შედეგად xy ტრაექტორია თვისობრივად განსხვავებულია სეპარატრისების შიგნით მდებარე ჰუნკარეს მრუდების შესაბამისი (8.9 ნახაზი) ტრაექტორიებისგან.



ნახაზი 8.13. მარცხნივ გამოსახულია ჰენონ-ჰეილსის მოდელის შესაბამისი ჰუნკარეს კვება, როდესაც $E=0.10$. მარჯვნივ ნაჩვენებია KAM თორისგან მიღებული ელიფსური და

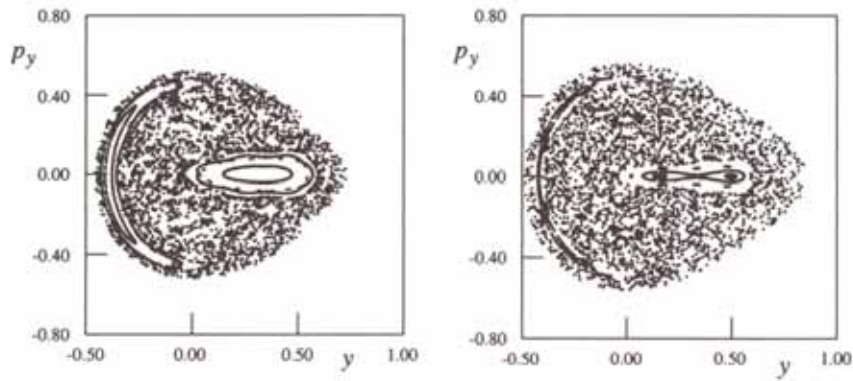
ჰიპერბოლური წერტილებისაგან შემდგარი „კუნძულების“ ერთ-ერთი „არქიპელაგის“ ჯაჭვის გადიდებული ხედი. ეს ჯაჭვი გარემოცულია „გადარჩენილი“ KAM თორებით.

ჰენონ-ჰილსის სისტემის შემთხვევაში, პუანკარეს კვითის „მრუდებთან“ დაკავშირებული სეპარატრისების მიღმა მდებარე ტრაექტორიები შეესაბამებიან γ ლერძის სიახლოვეს არსებულ მოძრაობას რეალურ ფიზიკურ სივრცეში. 8.12 ნახაზი გვიჩვენებს პუანკარეს კვითის მრუდთან დაკავშირებულ ტრაექტორიას, რომელიც წარმოადგენს დასაშვები არის ზღვარს. ლარნაკისებრი ფორმის მქონე რეალური სივრცის ტრაექტორია თვისობრივად განსხვავდება პუანკარეს კვითებში მდებარე შედა ელიფსებთან დაკავშირებული ტრაექტორიებისგან (8.9 და 8.10 ნახაზები). როდესაც სეპარატრისების სიახლოვეს მყოფი ორბიტები ქმედების ორ ტიპს შორის არსებულ ზღვარზე მდებარეობენ, ისინი მოუწესრიგებლობისკენ მიდრეკილებას ამჟღავნებენ და სისტემის არაინტეგრებად მდგომარეობაში გადასვლას, ქაოსური ქმედების ნიშნებს პირველები ავლენენ.

გავზარდოთ ნაწილაკის ენერგია და დავაკვირდეთ, თუ როგორ იცვლება პუანკარეს კვითა. ენერგიის შედარებით დიდი მნიშვნელობების შემთხვევაში მოსალოდნელია, რომ ნაწილაკი გაივლის xy მნიშვნელობათა უფრო ფართო დიაპაზონს და, აქედან გამომდინარე, არაინტეგრებადობის გამომწვევი კუბური წვერი შესაძლოა უფრო მნიშვნელოვანი გახდეს.

8.13 ნახაზზე გამოსახულია პუანკარეს კვითა (კვლავ $x=0$ -თვის), როდესაც $E=0.10$. პუანკარეს კვითის ზოგადი სტრუქტურა იგვევა, რაც 8.11 ნახაზის შემთხვევაში: სახეზეა ელიფსთა ორი სიმრავლე ორი ელიფსური ტიპის წერტილის ირგვლივ და ჩახლართული ტრაექტორია, რომელიც გაივლის სამი ჰიპერბოლური წერტილის სიახლოვეს. მიუხედავად ამისა, ამ შემთხვევაში ჰიპერბოლურ წერტილებთან დაკავშირებული ორბიტა გაცილებით ქაოსურია. ფაქტიურად, წერტილების მთელი ქაოსური სიმრავლე ერთ-ერთი ჰიპერბოლური წერტილის მახლობლად გამავალი განცალკევებული ტრაექტორიისაგან იქმნება.

გარდა ამისა, თავს იჩენს ახალი თვისება. 8.13 ნახაზის მარცხენა ნაწილში თითოეული ელიფსური ტიპის წერტილის ირგვლივ მდებარე ელიფსური ფორმის მქონე არე გადღაბნილია. 8.13 ნახაზის მარჯვენა ნაწილში, ერთ-ერთი ასეთი კვანძის გადიდებული ხედი გვიჩვენებს, რომ ეს არე პრაქტიკულად ხუთი ჰიპერბოლური წერტილის მახლობლად გამავალ ორბიტის გარშემო განლაგებული ხუთი ელიფსური მრუდის სიმრავლეა („არქიპელაგი“). აღსანიშნავია, რომ ხუთი ელიფსური მრუდი მიღებულია ერთი ტრაექტორიისაგან და ისინი გარემოცული არიან „გადარჩენილი“ KAM თორების მიერ.



ნახაზი 8.14. მარცხნივ გამოსახულია ჰენონ-ჰელისის მოდელის შესაბამისი პუანკარეს კვეთის ($x=0$) (y, p_y) სიბრტყე, როდესაც $E=0.14$. მარჯვნივ გვაქვს $E=0.16$ შემთხვევა. ორივე შემთხვევაში გაბნეული წერტილები მიიღება ფაზური სივრცის დასაშვებ არეში ქაოსურად მოძრავი ერთი ტრაექტორიისაგან.

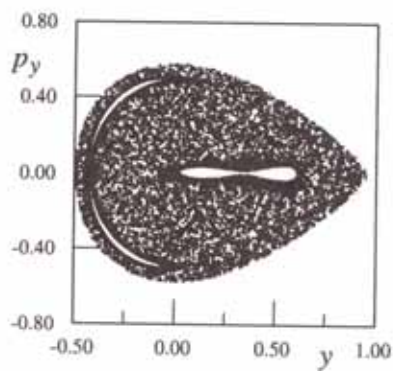
ამგვარი სტრუქტურის არსებობა, პუანკარე-ბირჰოფის თეორემიდან გამომდინარე სავსებით მოსალოდნელია. სისტემის ენერგიის ზრდასთან ერთად ჰამილტონის ფუნქციის არაინტეგრებადი ნაწილი უფრო არსებითი ხდება და ადგილი აქვს ნახვევთა ირაციონალური რიცხვის შესაბამისი KAM თორების დაშლას ზემომოყვანილი „არქიპელაგის“ ანალოგიურ სტრუქტურებად („კუნძულები“ და მათთან დაკავშირებული ჰიპერბოლური ტიპის წერტილები ერთდროულად „იბადებიან“).

ერთ არქიპელაგთან დაკავშირებული ქაოსური ტრაექტორია ჰიპერბოლური წერტილების სხვა სიმრავლეებთან დაკავშირებულ ტრაექტორიებთან კავშირში არ არის. წარმოვიდგინოთ, რომ „გადარჩენილი“ KAM თორები ბარიერების როლს ასრულებენ და ხელს უშლიან ქაოსის გავრცელებას ფაზური სივრცის დანარჩენ ნაწილში (კვლავ უნდა გავიხსენოთ, რომ ასეთი თვისება ახასიათებთ მხოლოდ თავისუფლების ორი ხარისხის მქონე სისტემებს).

ენერგიის შემდგომ ზრდასთან ერთად KAM თორების „ლიკვიდაცია“ გრძელდება და ცალკეული ქაოსური ტრაექტორია საბოლოოდ პუანკარეს კვეთის დასაშვები არის (რომლის სიდიდეც თანხმობაშია ენერგიის მუდმივობის კანონთან) თითქმის მთლიან ნაწილში „მოგზაურობს“. 8.14 ნახაზი წარმოგვიდგენს პუანკარეს კვეთებს, როდესაც $E=0.14$ (მარცხნივ) და $E=0.16$ (მარჯვნივ). გაბნეული წერტილები შეესაბამება ფაზური სივრცის ამ არეში ქაოსურად მოძრავ ცალკეულ ტრაექტორიას. KAM თორების გარკვეული ნარჩენების დანახვა კვლავ შესაძლებელია, მაგრამ ისინი ფაზური სივრცის გაცილებით მცირე არეს

იკავებენ. ქაოსური ტრაექტორიისთვის ლიაპუნოვის ექსპონენტების გამოთვლა გვიჩვენებს, რომ ერთი ექსპონენტი დადებითია, ორი ნულის ტოლია და ერთიც უარყოფითია.

შევაჯამოთ ჰენონ-ჰეილსის მოდელის საფუძველზე მიღებული შედეგები. ენერჯის მცირე მნიშვნელობების შემთხვევაში ტრაექტორიების უმრავლესობა კვაზიპერიოდულია (KAM თორები). ქაოსური ქმედება სახეზეა, მაგრამ ოდნავ შესამჩნევია, რადგან ფაზური სივრცის ძალზე მცირე არეში ვრცელდება.



ნახაზი 8.15. ჰენონ-ჰეილსის მოდელის შესაბამისი პუნკარეს კვების (y, p_y) სიბრტყე ($x=0$ პირობით), როდესაც $E=0.16666$. ყველა KAM თორი „ლიკვიდირებულია“ და ცალკეული ქაოსური ტრაექტორია ფაზური სივრცის თითქმის მთელ დასაშვებ არეში „დაეხეტება“.

ენერჯის ზრდასთან ერთად KAM თორები არქიპელაგის წარმოქმნის გზით ქრებიან. ქაოსური არეები გაფართოებას იწყებენ. თავისუფლების ორი ხარისხის მქონე სისტემების შემთხვევაში, „გადარჩენილი“ KAM თორები მოცემულ ქაოსურ ტრაექტორიას ფაზური სივრცის მთელ დასაშვებ არეში გადაადგილებას ხელს უშლიან. უკანასკნელი (ნახვეთა ოქროს შუალედთან ასოცირებული რიცხვის მქონე) KAM თორის გაქრობის შემდეგ ერთი ქაოსური ტრაექტორია ფაზური სივრცის თითქმის მთელ დასაშვებ არეს ფარავს (8.15 ნახაზი).

ამოცანა 8.6-4. ამ პარაგრაფში წარმოდგენილი მეთოდების გამოყენებით დაადგინეთ ნაწილაკის დინამიკა შემდეგ პოტენციალურ ველში:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(y - 2x^2)^2 + \frac{1}{2}x^2$$

დაადგინეთ მსგავსებები და განსხვავებები ჰენონ-ჰეილსის მოდელთან მიმართებაში

8.7 ჩირიკოვის სტანდარტული ასახვა

ჰამილტონის არაინტეგრებადი სისტემების უნივერსალობასთან დაკავშირებული არაერთი თეორიას დაედო საფუძველად ფართობის მუდმივობაზე დამყარებული იტერაციული ასახვების

კვლევები. ასეთი ასახვების გამოყენება მოხდა ჰამილტონისეული სისტემების პუანკარეს კვეთის წერტილების ქმედების მოდელირებაში. მოცემულ პარაგრაფში ჩირიკოვის (CHI79) მიერ წარმოდგენილ ერთ-ერთ ასეთ ასახვას განვიხილავთ. ჩირიკოვის ასახვამ იმდენად ფართო გამოყენება ჰპოვა, რომ მას **სტანდარტული ასახვა** უწოდეს. ჩვენი მიზნებიდან გამომდინარე, სტანდარტული ასახვა მე-ნ თავში შესწავლილი წრიული ასახვების ორ განზომილებიანი განზოგადების სახით შეგვიძლია აღვიქვათ. ჩვენ ვიმედოვნებთ, რომ ამგვარი ასახვის გამოყენება მიზანშეწონილი იქნება ჰამილტონისეულ სისტემებისთვისაც. ამ სისტემებისათვის ფაზური სივრცის მოცულობის მუდმივობის თვისება შესაბამისი ორგანზომილებიანი ასახვების შემთხვევაში ფართობის მუდმივობის თვისებად გადაიქცევა. მომდევნო პარაგრაფში სტანდარტულ ასახვას დავუმატებთ დისიპაციურ წევრს, რათა დავადგინოთ კავშირი ჰამილტონის (კონსერვაციულ) სისტემებსა და დისიპაციურ სისტემებს შორის.

ჩირიკოვის სტანდარტული ასახვის ფუნქცია ჩვეულებრივ r და θ ცვლადების (რომელთა ინტერპრეტაცია შესაძლებელია პუანკარეს ორგანზომილებიან სიბრტყესთან ტრაექტორიის გადაკვეთის წერტილის პოლარული კოორდინატების მეშვეობით) ფუნქციას წარმოადგენს:

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= r_n - \frac{K}{2\pi} \sin 2\pi\theta_n \bmod [1] \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + r_{n+1} \bmod [1] \end{aligned} \quad (8.7-1)$$

θ კუთხე და r ცვლადი, წრიული ასახვების მსგავსად, $[0,1]$ მონაკვეთზეა განსაზღვრული. K არაწრფივობის მაჩვენებელი დადებითი პარამეტრია.

არაწრფივი დინამიკისადმი მიძღვნილ ლიტერატურაში სტანდარტული ასახვა ხშირად (8.7-1) განტოლებაში „-“ ნიშნის ნაცვლად „+“ ნიშნით არის განსაზღვრული. ეს θ -ს მნიშვნელობის 0.5-ით (π - რადიანებში) წანაცვლების ტოლფასია, რასაც გადამწყვეტი მნიშვნელობა არ აქვს. სინუსოიდურ-წრიულ ასახვასთან კავშირის ცხადად წარმოდგენისთვის ჩვენ „-“ ნიშანს გამოვიყენებთ.

თუ r -ს ფიქსირებულს გავხდით და მოვითხოვთ, რომ კუთხური ცვლადი აკმაყოფილებდეს შემდეგ პირობას

$$\theta_{n+1} = \theta_n + g(r) \quad (8.7-2)$$

მაშინ სტანდარტული ასახვა ე.წ. *მოზერის სპირალურ ასახვამდე* [Moser, 1973] დაიყვანება. თუ $g(r)$ რაციონალური რიცხვია, მაშინ სპირალური ასახვის შესაბამისი ტრაექტორიები პერიოდულები იქნებიან. თუ $g(r)$ ირაციონალური რიცხვია, მაშინ ტრაექტორიებს xy სიბრტყეზე r რადიუსის მქონე წრეების (თორების) სახე ექნებათ. თუ $g(r) = r = \Omega$, მაშინ სპირალური ასახვა მე- n თავში განხილულ სინუსოიდურ-წრიულ ასახვამდე ($K=0$) დაიყვანება.

ასევე ხშირია r_n ცვლადის J_n -ით შეცვლა. ასეთ შემთხვევაში სტანდარტული ასახვის შესაბამისი მრუდი ჰამილტონისული სისტემის კუთხე-ქმედების ცვლადებით გამოსახულ პუანკარეს კვეთას შეესაბამება.

ამოცანა 8.7-1. შეამოწმეთ, რომ სტანდარტული ასახვა არადისიპაციური (ფართობის მუდმივობა!) ასახვის ფუნქციას შეესაბამება. მინიშნება: იხელმძღვანელეთ 4.6 პარაგრაფით.

თავდაპირველად დავადგინოთ სტანდარტული ასახვის ფიქსირებული წერტილები. (8.7-1) განტოლებაში r ცვლადის J -ით შეცვლის შემდეგ, ეს ხერხდება $\theta = 0$ ან $\theta = 0.5$ და $J = 0$ ან $J = 1$ პირობებში (გაიხსენეთ, რომ $J = 0$ და $J = 1$ ექვივალენტურია $\text{mod}[1]$ ოპერაციისა) 4.6 პარაგრაფის შედეგების გამოყენებით იოლი საჩვენებელია, რომ კოორდინატთა სისტემის სათავეში მდებარე ფიქსირებული წერტილი სტაბილური ფიქსირებული წერტილია $K < 4$ -თვის, მაგრამ ერთ-ერთი წერტილი ($\theta = 0.5$ შემთხვევაში) არასტაბილურია ნებისმიერი $K > 0$ -სთვის.

ამოცანა 8.7-2. განიხილეთ სტანდარტული ასახვა, როდესაც არაწრფივობის მაჩვენებელი პარამეტრი $K=0$. (a) აჩვენეთ, რომ ამ შემთხვევაში სტანდარტული ასახვის იტერაციები θ - J სიბრტყეზე ჰორიზონტალური წრფეებია. ახსენით ამ დიაგრამასა და კუთხე-ქმედების სივრცეში ინტეგრებადი ჰამილტონის სისტემის ქმედებას შორის კავშირი. (b) აჩვენეთ, რომ ტრაექტორიები კვაზიპერიოდულია, თუ $J \in (0,1)$ ირაციონალური ხოლო თუ $J \in (0,1)$ რაციონალური რიცხვია - პერიოდული.

ამოცანა 8.7-2. (გაგრძელება) (c) აჩვენეთ, რომ $K=0$ შემთხვევაში θ - J სიბრტყეზე $J=1/2$ მნიშვნელობის შესაბამისი ნებისმიერი წერტილი პერიოდი-2-ის ფიქსირებული წერტილია. (d) დაადგინეთ პერიოდი-3-ის ფიქსირებული წერტილები $K=0$ შემთხვევაში.

ამოცანა 8.7-3. აჩვენეთ, რომ სტანდარტული ასახვის ფიქსირებულ წერტილებს გააჩნიათ წინა პარაგრაფში აღწერილი სტაბილურობის თვისებები.

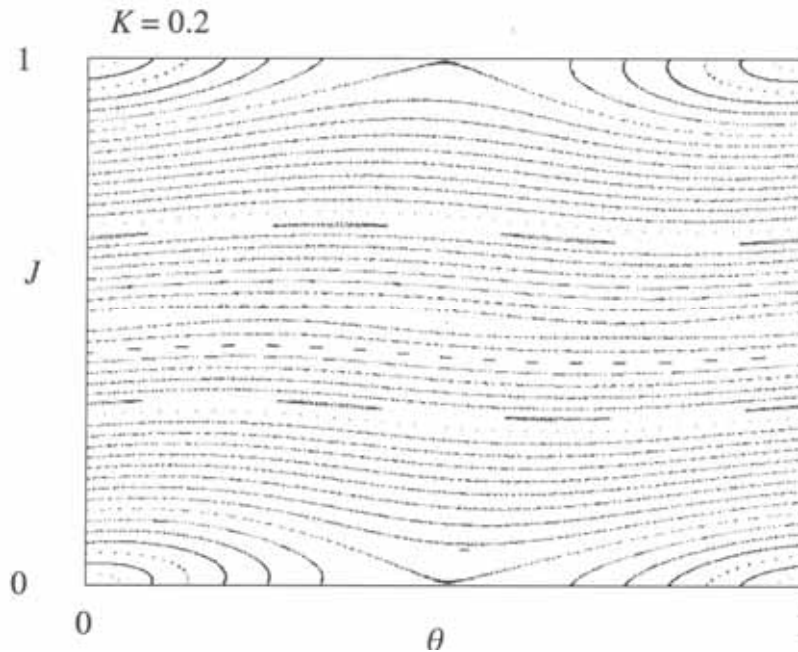
ამოცანა 8.7-4. აჩვენეთ, რომ ორგანოზომილებიანი კონსერვაციული ასახვის შემთხვევაში ფიქსირებული წერტილის სტაბილურობის პირობა შეიძლება $|TrJ| < 2$ სახით იქნას მოცემული, სადაც TrJ წარმოებულებისაგან შედგენილი იაკობის (ან ფლოკეს) მატრიცის შესაბამისი მრუდია.

სტანდარტული ასახვის შესაბამისი ტრაექტორიების თვისებების ილუსტრაციის მიზნით 8.16 ნახაზზე გამოსახულია ტრაექტორიის წერტილები 50 განსხვავებული საწყისი პირობის შემთხვევაში, როდესაც $K = 0.2$ $\theta = 0$. J იცვლება ნულსა და ერთს შორის 50 თანაბარი ბიჯით. თითოეული საწყისი წერტილის შემთხვევაში სტანდარტული ასახვის შესაბამისი იტერაცია 500-ჯერ ხდება და ტრაექტორიის თითოეული წერტილი დატანილია θ - J სიბრტყეზე.

განვიხილოთ 8.16 ნახაზი დეტალურად. $J = 0$ და $\theta = 0$ ფიქსირებული წერტილების გარშემო დაიკვირვება ელიფსური ორბიტების მიმდევრობა $\theta = 0.5$ და $J = 0$ (ან $J = 1$) მნიშვნელობების სიახლოვეს ჰიპერბოლური (საყრდენი) წერტილები მდებარეობენ. აქვე ვხედავთ ჰორიზონტალურ წყვეტილ კვაზიპერიოდული და პერიოდული (მცირე რაოდენობის წერტილები) ორბიტების შესაბამის მრუდებს. გაიხსენეთ, რომ კუთხე-ქმედება სივრცეში ფაზური სივრცის თორების ზედაპირები მეტ-ნაკლებად ჰორიზონტალური მრუდების მეშვეობით გამოისახება. მრუდები, რომლებიც უახლოვდებიან ან შორდებიან $J = 0$ (ან $J = 1$) და $\theta = 0.5$ არასტაბილურ ფიქსირებულ წერტილს, წარმოადგენენ ჰიპერბოლური ორბიტის ნაწილებს.

8.16 ნახაზიდან ტრაექტორიების ქმედების მთელ სირთულეს ვერ აღვიქვამთ. უფრო ფაქიზი დეტალების დაკვირვების შედეგად ირკვევა, რომ ჰიპერბოლურ წერტილებთან დაკავშირებულ ტრაექტორიებს თან ახლავთ მცირე კუნძულთა კრიალოსნები (ეს არის მაგალითი იმისა, რომ ჩვენი გამოთვლების შესაბამისმა სასრულმა სიზუსტემ შესაძლოა არასწორ დასკვნამდე მიგვიყვანოს). 8.17 ნახაზი წარმოადგენს 8.16-ის შუა ნაწილის გადიდებულ ხედს. მრუდის ცენტრის მახლობლად მდებარეობს ასახვის ფუნქციის მეორე რიგის იტერაციის ფიქსირებული წერტილი (ამავე იტერაციის კიდევ ერთი ფიქსირებული წერტილი გვხვდება $\theta = 0$, $J = 0.5$ მიდამოში). მის გარშემო განლაგებულია ელიფსური ორბიტები, რომლებიც პერიოდი-2-ის ნაწილებია.

ამოცანა 8.7-5. განიხილეთ სტანდარტული ასახვა $K=0$ შემთხვევაში და იპოვეთ პერიოდი-3-ის წერტილები და ელიფსები 8.16 ნახაზზე.



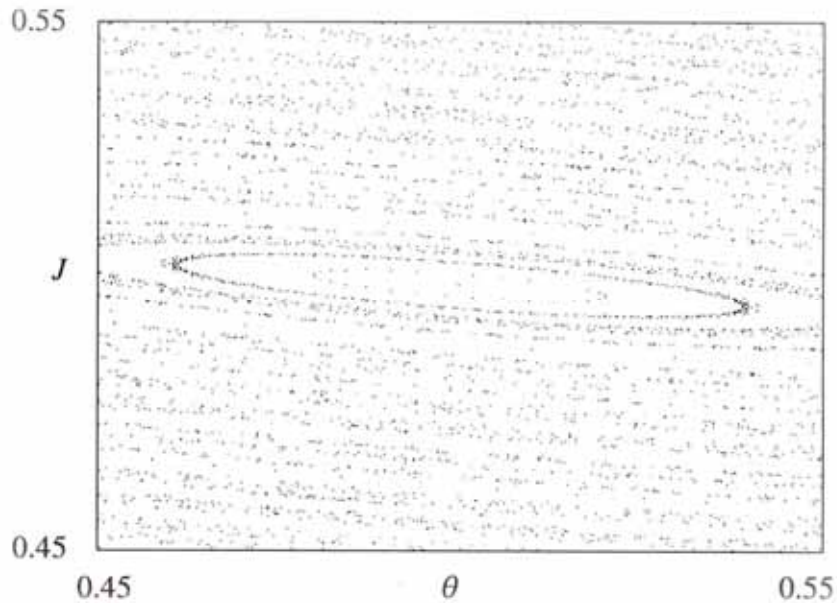
ნახაზი 8.16. სტანდარტული ასახვის ტრაექტორიები, როდესაც $K=0.2$. გამოსახულია ორმოცდაათი ტრაექტორია, რომელთაგან თითოეული 500 წერტილისგან შედგება.

K პარამეტრის ზრდისას ქაოსი თანდათან მატულობს. 8.18 ნახაზი გვიჩვენებს სტანდარტული ასახვის იტერაციებს, როდესაც $K=0.26$ (მარცხნივ) და $K=0.28$ (მარჯვნივ). მრუდის ცენტრის სიახლოვეს პერიოდი-2 წერტილების გარშემო მყოფი „კუნძულების“ მწკრივებია (პერიოდი-2-ის სტაბილური წერტილები კვლავ არსებობენ, როდესაც $J=0.5$, $\theta=0$ და $\theta=0.5$). „კუნძულთა“ შორის პერიოდი-2-ის შესაბამისი ჰიპერბოლური წერტილებია, ხოლო მათ სიახლოვეს გამავალ ორბიტებთან, ვიწრო სტოქასტიკური ზოლებია. ამ ორი ნახაზის შედარებით ჩანს, რომ კუნძულოვანი სტრუქტურა მაშინ ყალიბდება, როდესაც სეპარატრისებთან დაკავშირებული სხვადასხვა პერიოდულობის შესაბამისი ზოლები ერთმანეთს ეხება.

KAM თორები არაწრფივობის ზრდასთან ერთად ლიკვიდაციას განიცდის. ამრიგად, ჰიპერბოლურ წერტილებთან დაკავშირებული ქაოსური არეები შესაძლებელია გაფართოვდნენ და მათი დანახვა უფრო ადვილად შესაძლებელი. ჩირიკოვის რეზონანსული გადაფარვის კრიტერიუმის (CHI79) მეშვეობით შეგვიძლია შევაფასოთ K -ს ის მნიშვნელობა,

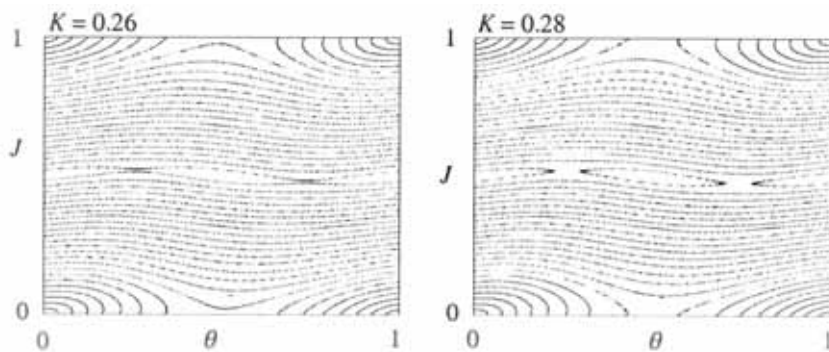
რომლისთვისაც რეზონანსული სტრუქტურები მათ შორის არსებულ KAM თორებს „ანადგურებენ“ და ერთმანეთს გადაფარავენ.

ამრიგად, არაწრფივობის ზრდასთან ერთად სტანდარტული ასახვა ჰენონ-ჰეილსის სისტემის მსგავს მრავალ თვისებას ავლენს. K -ს მცირე მნიშვნელობების შემთხვევაში სტაბილური ფიქსირებული წერტილების გარშემო მეტწილად ჩვეულებრივი ელიფსური ორბიტებია, ხოლო კუთხე-ქმედების სივრცეში თითქმის ჰორიზონტალურ თორები.



ნახაზი. 8.17. სტანდარტული ასახვის იტერაციების გადიდებული ხედი, როდესაც $K=0.2$. პერიოდი-2-ის ფიქსირებული წერტილი ცენტრის სიახლოვეს, ($J=0.5$, $\theta = 0.5$) წერტილის მიდამოში ვლინდება. ფიქსირებულ წერტილი გარემოცულია პერიოდი-2-ის შესაბამისი ელიფსური ორბიტებით. ამ მასშტაბებში თვალშისაცემია გარკვეული ქაოსური ქმედება.

დაიკვირვებიან. არაწრფივობის ზრდასთან ერთად სხვადასხვა პერიოდული წერტილების ირგვლივ კუნძულოვანი სტრუქტურები იწყებენ მათ შორის არსებულ KAM თორების „განადგურებას“ და ერთმანეთის გადაფარვას.



ნახაზი. 8.18. მარცხნივ ნაჩვენებია ტრაექტორიის წერტილები სტანდარტული ასახვისთვის, როდესაც $K=0.26$. მარჯვნივ $K=0.28$. როგორც ვხედავთ, როდესაც

სეპარატრისებთან დაკავშირებული სხვადასხვა პერიოდულობის შესაბამისი ზოლები ერთმანეთს ეხებიან, ყალიბდებიან კუნძულოვანი სტრუქტურები.

8.8 არნოლდის კატის ასახვა

(ფართობის თვალსაზრისით) კონსერვაციული ასახვის კიდევ ერთი მაგალითი ე.წ. **არნოლდის კატის ასახვა**. დამაინტრიგებელი სახელწოდება არნოლდის [Arnold and Aves, 1968] მიერ ასახვის ფუნქციის თვისებების ვიზუალიზაციის მიზნით კატის სურათის გამოყენებიდან გამომდინარეობს. კატის ასახვა შემდეგი სახით განსაზღვრული ორგანზომილებიანი ასახვაა (p და q ფაზური სივრცის ცვლადებია)

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= q_n + p_n \bmod [1] \\ p_{n+1} &= q_n + 2p_n \bmod [1] \end{aligned} \quad (8.8-1)$$

საძიებელია ნულსა და ერთს შორის მყოფი q_0 -ისა და p_0 -ის კოორდინატების საწყისი წყვილი. შენიშნეთ, რომ ცვლადების $\bmod [1]$ სახით აღება მათ მნიშვნელობებს შეზღუდავს ფაზურ სივრცეში არსებული ერთეულოვანი კვადრატის ფარგლებში.

ამოცანა 8.8-1. (a) (8.8-1) განტოლებაში გამოთვალეთ ასახვის ფუნქციის იაკობიანის (ფლოკეს) დეტერმინანტი და დარწმუნდით, რომ ასახვის ფუნქცია კონსერვაციულია (ფართობის თვალსაზრისით). (b) დაადგინეთ (8.8-1) ასახვის ფუნქციის მახასიათებელი მნიშვნელობები და აჩვენეთ, რომ ერთ-ერთი მათგანი 1-ზე მეტია. (c) აჩვენეთ, რომ $(0,0)$ წერტილი კატის ასახვის პირველი რიგის იტერაციის ფიქსირებული წერტილია, ხოლო $(2/5, 1/5)$ და $(3/5, 4/5)$ წერტილები – მეორე რიგის იტერაციისა. (d) აჩვენეთ, რომ ფიქსირებული წერტილები არასტაბილურია.

8.8-1 ამოცანის თანახმად, კატის ასახვის ფიქსირებული წერტილები რაციონალური წილადებით გამოსახული კოორდინატების მქონე საწყის წერტილებთან არიან დაკავშირებულნი. (ნულსა და ერთს შორის მყოფი) ირაციონალური რიცხვებით გამოსახული კოორდინატების მქონე საწყისი წერტილები ქაოსურ ტრაექტორიებს აძლევენ დასაბამს. ამრიგად, საწყის პირობათა „უმრავლესობა“ (ნულსა და 1-ს შორის ინტერვალში ირაციონალური რიცხვები სჭარბობს რაციონალურს) ქაოსურ ორბიტებს შეესაბამება. მე-5

თავში აღწერილი კარვის ასახვის ანალოგიურად, კატის ასახვა გვაძლევს მოდელურ სისტემას, რომლისთვისაც ტრაექტორიების უმეტესობა ქაოსურია. კატის ასახვის შემთხვევაში საწყისი პირობების სიმრავლის ფაზური სივრცის მოცულობა მუდმივია.

კატის ასახვა ჰამილტონის ქაოსურ სისტემებში ალბათობების განაწილების შედარებით მარტივი გზით ინტერპრეტაციისათვის შეგვიძლია გამოვიყენოთ (FOR88). ვთქვათ, კატის ასახვის ალბათობათა საწყისი განაწილებაა $\rho(q_0, p_0, t=0)$. ვინაიდან კატის ასახვა კონსერვაციულია, განაწილება უბრალოდ ტრაექტორიის წერტილების „გასწვრივ“ ხდება და ფორმალურად შეგვიძლია დავწეროთ

$$\rho(q_n, p_n, t = n) = \rho(q_0, p_0, t = 0) \quad (8.8-2)$$

ალბათობათა განაწილების სივრცითი ევოლუციის აღწერისთვის ვიყენებთ ფურიეს ანალიზს (იხ. **A damateba**). $t = n$ და $t = n + 1$ შემთხვევებში ფურიეს გარდაქმნის მეშვეობით მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \rho(q_n, p_n, n) &= \sum_{j,k} A_{j,k}^{(n)} e^{2\pi i(jq_n + kp_n)} \\ \rho(q_{n+1}, p_{n+1}, n+1) &= \sum_{j,k} A_{j,k}^{(n+1)} e^{2\pi i(jq_{n+1} + kp_{n+1})} \end{aligned} \quad (8.8-3)$$

ფურიეს $A_{j,k}^{(n)}$ კოეფიციენტები, საზოგადოდ, დამოკიდებული არიან დროის n -ურ მნიშვნელობაზე. j და k დადებითი მთელი სიმბოლოები ფურიეს სხვადასხვა მოდებს შეესაბამებიან (მათ ხანდახან ტალღურ რიცხვებსაც უწოდებენ).

როდესაც ფაზური სივრცის განაწილება აკმაყოფილებს (8.8-2) პირობას, მაშინ (8.8-3)-ის მარჯვენა მხარეთა ერთმანეთთან გატოლება შეგვიძლია. თუ შემდგომში q -ებისა და p -ების დაკავშირებისათვის (8.8-1) განტოლებაში მოცემულ ასახვის ფუნქციას გამოვიყენებთ, ვპოულობთ, რომ ფაზური სივრცის განაწილებათა ტოლობისთვის კოეფიციენტებმა შემდეგი პირობა უნდა დააკმაყოფილონ:

$$A_{j+k, j+2k}^{(n+1)} = A_{j,k}^{(n)} \quad (8.8-4)$$

უკანასკნელი განტოლება ფაზური სივრცის განაწილების შესახებ მრავლისმთქმელია. განვიხილოთ კონკრეტული (და არც თუ რეალური) შემთხვევა: დავუშვათ, $t=0$ შემთხვევაში

ფურიეს მხოლოდ ერთი ამპლიტუდაა მნიშვნელოვანი არანულოვანი j -სა და k -სათვის, მაგრამ (8.8-4) განტოლების თანახმად, ტალღური რიცხვები (ქვედა სიმბოლოები) სწრაფად იზრდება. რადგანაც დიდი ტალღური რიცხვი მაჩვენებელია იმისა, რომ პარამეტრის მნიშვნელობა სწრაფად იცვლება სივრცის ერთი წერტილიდან მეორეში გადასვლისას, ვასკვნიოთ, რომ კატის ასახვის შესაბამისი ალბათობების განაწილება სივრცული თვალსაზრისით სწრაფად ცვლადი ფუნქციაა. თუ დავიწყებთ შედარებით ბუნებრივი განაწილებით (რომელსაც ტალღურ რიცხვთა ფართო დიაპაზონი შეესაბამება), მაშინ კატის ასახვის ყოველი იტერაციისათვის მცირე ტალღური რიცხვები მყისვე უმნიშვნელო ხდება და განაწილებაც სივრცული თვალსაზრისით ძალზედ რთული და სწრაფად ცვალებადი იქნება.

ამოცანა 8.8-2. ჩაატარეთ სათანადო ალგებრული გარდაქმნები (8.8-3)-დან (8.8-4)-ის მისაღებად.

არსებითია ის ფაქტი, რომ კატის ასახვის შესაბამისი ტრაექტორიების ქაოსური ბუნება ვლინდება ალბათობის შედარებით გლუვი განაწილებიდან ალბათობების სიმკვრივის განაწილების მეტად რთულ სახეში გადასვლისას. მაგრამ თუ ფურიეს კოეფიციენტების უმნიშვნელო განსხვავებების მქონე, ოდნავ განსხვავებული განაწილებით დავიწყებთ, განტ. (8.8-3)-ის თანახმად, მოცემული ფურიეს კოეფიციენტები დროთა განმავლობაში მიიღებენ ისეთ მნიშვნელობებს, რომლებიც საწყისი განაწილებისათვის არსებული მნიშვნელობებისგან ღიდად არ განსხვავდებიან. ერთი სიტყვით, ალბათობათა განაწილებები საწყის პირობების მიმართ მგრძობიარობას არ ამჟღავნებენ. ეს მომენტი განსაკუთრებით მნიშვნელოვანი იქნება მე-12 თავში, კვანტურ მექანიკაში არსებული ქაოსის შესახებ მსჯელობისას.

8.9 დისიპაციური სტანდარტული ასახვა

ჰამილტონის სისტემებში შესაძლო ქაოსის შესწავლისას მნიშვნელოვანია დავადგინოთ კავშირი ამ და ადრე შესწავლილ დისიპაციურ სისტემებს შორის. ამისათვის მიზანშეწონილია განვიხილოთ იტერაციული ასახვის კიდევ ერთი მაგალითი ე.წ. **დისიპაციური სტანდარტული ასახვა** (SCW85)(SCH88). იგი ძალიან გავს 8.7-პარაგრაფში აღწერილ სტანდარტულ ასახვას, ოღონდ იგი მართვად დისიპაციურ კოეფიციენტზეა დამყარებული. ამ უკანასკნელის ვარიანტის მეშვეობით შევძლებთ დისიპაციურ და ჰამილტონისეულ (კონსერვატიულ) სისტემებს შორის ინტერპოლაციის დამყარებას. დისიპაციური სტანდარტული ასახვა შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$r_{n+1} = J_D r_n - \frac{K}{2\pi} \sin 2\pi \theta_n \text{ mod } [1] \quad (8.9-1)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + r_{n+1} \text{ mod } [1]$$

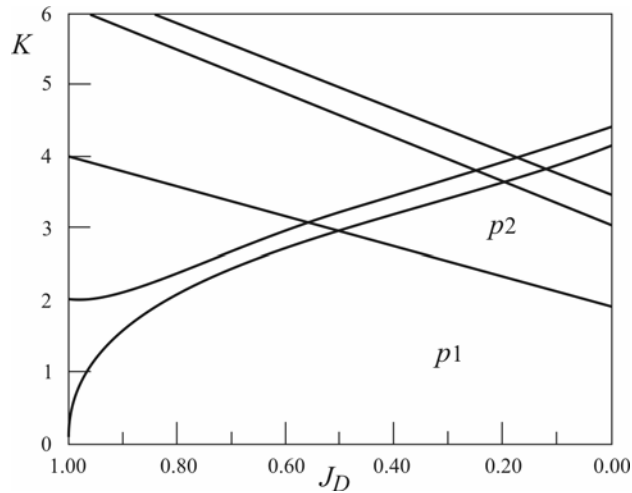
სადაც J_D ასახვის ფუნქციათა იაკობიანის დეტერმინანტია. თუ $J_D = 1$, მაშინ ასახვის ფუნქციები სტანდარტულ ასახვაზე დაიყვანება, ხოლო თუ $J_D = 0$, მაშინ ჩვენს წინაშეა სინუსოიდურ-წრიული ასახვის ტოლფასი ერთგანზომილებიან იტერაციულ ასახვათა სისტემა, როდესაც $\Omega=0$.

როდესაც $J_D = 0$, ვცვლით K პარამეტრს და ვიკვლევთ ქაოსის გამომწვევ ჩვეულებრივ პერიოდის გაორმაგებათა მიმდევრობასა და ქაოსურ დიაპაზონებს. შმიდტმა და ვანგმა (SCW85) შეისწავლეს, თუ რა ემართებათ ამ მახასიათებლებს J_D -ის 1-სკენ მისწრაფებისას. მათი კვლევის შედეგი 8.19 ნახაზზეა გამოსახული. თუ ნახაზის უკიდურეს მარჯვენა ნაწილს დავაკვირდებით, სადაც $J_D = 0$, დავინახავთ ჩვეულებრივ პერიოდის გაორმაგების კასკადს პერიოდი-1-დან პერიოდი-2-მდე. ეს პროცესი გგვადლევს უსასრულო პერიოდს, როდესაც $K = K_\infty$. $K = K_\infty$ მნიშვნელობის შემდგომ დაიკვირვებიან პერიოდული ზოლები და არეები (რომლებიც ნახაზზე $p2'$ და $p3'$ სიბოლოებით აღნიშნულია).

როდესაც $J_D \rightarrow 1$, დისიპაციის სიდიდე კლებულობს და მიმზიდველზე კრებადობისათვის გაცილებით მეტი იტერაციაა საჭირო. სისტემის ძირითადი მახასიათებლები შენარჩუნებულია, მაგრამ მათი მდებარეობები $J_D K$ სიბრტყეზე იცვლება. $J_D = 1$ შემთხვევაში ბევრი „არხი“ ახდენს ერთიმეორის გადაფარვას და განსხვავებული საწყისი პირობები კონსერვაციული ასახვისათვის (ან ჰამილტონისეული სისტემისათვის) ორბიტათა განსხვავებულ ტიპებს გვადლევს. ჰამილტონის სისტემის პერიოდი 2^n -ის მქონე ბიფურკაციული ორბიტები (რომლებიც წარმოიქმნებიან შედარებით მცირე პერიოდის მქონე ორბიტების გადაგვარების შედეგად) კორელაციაში იმყოფებიან სინუსოიდურ-წრიული ასახვის პერიოდის გაორმაგების მიმდევრობის 2^n სტაბილურ ორბიტებთან. ჰამილტონისეული სისტემის სხვა პერიოდული ორბიტები სინუსოიდურ-წრიული ასახვისთვის $K > K_\infty$ პირობებში აღძრულ პერიოდულ არეებთან ამყარებენ კორელაციას. ორ უკიდურეს შემთხვევას შორის, როდესაც $0 < J_D < 1$, მოცემული (J_D, K) წყვილისთვის ერთდროულად რამდენიმე მიმზიდველი არსებობს, რომელთაგან თითოეულს მიზიდულობის საკუთარი არე გააჩნია.

$J_D = 0$ პირობებში არსებული 2^n ტიპის ქაოსური ზოლები $J_D \rightarrow 1$ შემთხვევაში თანდათან ქრება. (SCH88) თანახმად, J_D -ის ის მნიშვნელობები, რომლებზეც ცალკეული ქაოსური ზოლები ქრება, სისტემათა ფართო სპექტრისათვის უნივერსალური რიცხვებია.

დისიპაციური სტანდარტული ასახვის ზემომოყვანილი მცირე მიმოხილვიდან გამომდინარე, ჰამილტონისა და დისიპაციური სისტემების ქმედებას შორის მრავალი განსხვავების მიუხედავად, ზოგიერთ შემთხვევაში მაინც შეგვიძლია განსხვავებულ ქმედებებს შორის არსებული გარკვეული კორელაციის დადგენა.



ნახაზი. 8.19. დისიპაციური სტანდარტული ასახვის ქმედების გამომხატველი მრუდი, სადაც არგუმენტებს წარმოადგენენ K და J_D . $J_D = 1$ შემთხვევაში ასახვის ფუნქცია კონსერვაციულია და ექვივალენტურია ჰამილტონისეული სისტემისა. როდესაც $J_D = 0$, ქმედება ერთგანზომილებიანი იტერაციული ასახვის ექვივალენტურია. $p1$ და $p2$ სიმბოლოებით აღნიშნულია პერიოდი-1-ისა და პერიოდი-2-ის შესაბამისი ორბიტები. K_∞ წარმოადგენს K -ს ისეთ მნიშვნელობას, როდესაც პერიოდის გაორმაგების მიმდევრობა ქაოსში გადადის. $p3$ პერიოდი-3-ის შესაბამისი არის აღმნიშვნელია.

როგორც ჩანს, არსებობს გარკვეული უნივერსალობა ძლიერი დისიპაციიდან ჰამილტონისეულ პირობებში გადასვლისას.

8.10 ჰამილტონისეული დინამიკის გამოყენება

ბილიარდი და სხვა თამაშები

დავიწყეთ ჰამილტონის ფუნქციის მოდელების კლასით, სადაც გამოიყენება საგნის იდეალურად დრეკადი დაჯახებები როგორც შემოსაზღვრულ კედლებთან, ასევე სხვა საგნებთან. ასეთი მოდელები ჰამილტონის სისტემების თეორიის დიდ ნაწილს წარმოადგენს. მათი ერთ-ერთი კლასი შეისწავლის რაიმე ორგანზომილებიან შემოსაზღვრულ არეში ჰორიზონტალურად მოძრავი ბურთის გადაადგილებას, რაც პრაქტიკულად, ბილიარდის იდეალიზირებული ვარიანტია. თუ შემოსაზღვრული არე მართკუთხა ან წრიულია, მაშინ

ყოველი ორბიტა პერიოდული ან კვაზიპერიოდული იქნება. თუ საზღვარს სწორი გვერდითი კედლებისა და ნახევრად მომრგვალებული ბოლოების მქონე სტადიონის მსგავსი ფორმა აქვს ან თუ მრგვალი დაბრკოლება მართკუთხა საზღვრის შიგნით მდებარეობს (სინაის ბილიარდი), მაშინ ზოგიერთი ტრაექტორიის შემთხვევაში მოძრაობა შეიძლება ქაოსური იყოს.

ამ კატეგორიის კიდევ ერთი ნიმუშია ორი ბურთულა. ბურთულების მოძრაობა იმგვარადაა შეზღუდული, რომ ისინი გადადგილდებიან მხოლოდ ვერტიკალური მიმართულებით მიზიდულობის ძალის ზემოქმედების პირობებში და ურთიერთქმედებენ იდეალურად დრეკადი დაჯახებების სახით „მიწასთან“ და ერთმანეთთან (WGC90). ჩვენდა გასაოცრად, ასეთი მარტივი მოდელი კომპლექსური ქმედების მთელ სპექტრს ასახავს.

მოდელთა ეს ტიპები ნაწილობრივ წრფივია, რადგან დაჯახებებს შორის მოძრაობა წრფივი განტოლებებით აღიწერება. ბილიარდის შემთხვევაში მოძრაობა პრაქტიკულად მუდმივი სიჩქარით ხდება, ხოლო დაჯახებები გარკვეულწილად არაწრფივობისა და ქაოსური ქმედების დაკვირვების შესაძლებლობას გვაძლევს. მე-12 თავში ნაწილობრივ წრფივ მოდელებს უფრო დეტალურად განვიხილავთ. ასევე ვნახავთ, რომ ბილიარდის ტიპის მოდელები კვანტური ქაოსის შეცნობისთვის კარგი „საცდელი სტენდები“.

ასტრონომიული დინამიკა

პლანეტების მოძრაობის შესწავლამ და მზის სისტემის ხანგრძლივი სტაბილურობის საკითხმა მე-18 და მე-19 საუკუნის კლასიკური მექანიკის განვითარებაში უდიდესი წვლილი შეიტანა. პუანკარე მზის სისტემის დინამიკით დაინტერესდა, რამაც მის არაერთ ნაშრომში დინამიკის ი ანალიზური მხარის დახვეწა განაპირობა. მეორეხარისხოვანი პერიოდული ძალებისა და მზის ქარის უგულვებელყოფის შემთხვევაში მზის სისტემა ჰამილტონისეული კონსერვაციული სისტემაა. არსებობს შეხედულება (WIS87, KER88), რომლის თანახმად, პლუტონისა და ზოგიერთი ასტეროიდის ორბიტები შესაძლოა ქაოსური იყოს.

ნაწილაკების ამჩქარებლის დინამიკა

ელემენტური ნაწილაკების თანამედროვე ფიზიკაში დიდი ენერჯის მქონე ამჩქარებელი მატერიის ფუნდამენტური სტრუქტურის შესწავლის უმნიშვნელოვანესი საშუალებაა. პროტონებისა და ელექტრონების აჩქარება, უძრაობის ენერჯიებზე ასჯერ ან ათასჯერ მეტი ენერჯიების მინიჭებით არაა ტრივიალური ამოცანა, რადგან ამჩქარებლებში მდებარე ნაწილაკების ორბიტები არასტაბილურ პირობებს და მრავალ წინააღმდეგობას იწვევს. მეტი სიცხადისათვის, ორბიტების განხილვისას დისიპაცია შეგვიძლია უგულვებელყოთ და ჰამილტონისეული დინამიკის მეთოდის გამოვიყენოთ. არაწრფივი დინამიკა ნაწილაკის

ორბიტების შესაძლო არასტაბილურობების შესწავლის დიდი „ლექსიკონია“ და არასტაბილური ორბიტების შესაძლო ამრიგი ამჩქარებლების შემუშავებისთვის აუცილებელ საშუალებებს გვაძლევს.

ზეგამტარობა

როდესაც მაღალი გამტარობის მქონე მასალაზე გარე მაგნიტური ველი მოქმედებს, ელექტრონების მოძრაობა გრიგალისებრ ხასიათს ღებულობს. გარე ძალების ზეგავლენით ამგვარმა გრიგალებმა შეიძლება სხვადასხვა სახე მიიღოს და დადგენილია, რომ ფაზათა სინქრონიზაცია, არნოლდის ენები, ფეირის ხეები და ეშმაკის საფეხურები ასეთი ქმედების დახასიათებისთვის შეგვიძლია გამოვიყენოთ (REN99).

ობტიკა

სინათლის ერთგვაროვან დიელექტრიკულ მასალაში გავრცელებისას, ფოტონთა დინამიკა სამგანზომილებიანი შემოსაზღვრული სივრცის ფარგლებში თავისუფლად მოძრავი წერტილოვანი მასის ჰამილტონისეული ფუნქციის დინამიკის მსგავსია. ეს ანალოგია, მცირე ზომის დიელექტრიკულ სფეროებში სინათლის ქმედების შესასწავლად შეგვიძლია გამოვიყენოთ. სფეროს ოდნავი დეფორმირების შემთხვევაში ფოტონთა ტრაექტორიები ქაოსურ სახეს ღებულობს (MNC95).

8.11 დამატებითი ლიტერატურა

ჰამილტონისეული მექანიკისა და ქაოსის ზოგადი თეორია

H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 2nd ed. (Addison-Wesley, Reading, MA, 1980). ნიუტონისეული კლასიკური მექანიკის უდავოდ საუკეთესო ტრადიციული შესავალი ბაკალავრიატის დამამთავრებელი კურსისა და მაგისტრატურისათვის.

R. H. G. Helleman, "Self-Generated Chaotic Behavior in Nonlinear Mechanics," in *Fundamental Problems in Statistical Mechanics*, Vol 5. (E. G. D. Cohen, ed.) (North-Holland, Amsterdam, 1980), pp. 165-233. Reprinted in [Cvitanovic, 1984]. არაჩვეულებრივი შესავალი კურსი არაინტეგრებადი ჰამილტონისეული სისტემების ქაოსური ქცევის შესახებ.

A. Chernikov, R. Sagdeev, and G. Zaslavsky, "Chaos: How Regular Can It Be?" *Physics Today* 41 (11), 27-35 (November 1988). ჰამილტონისეულ სისტემაში შერეული და ქაოსური ქცევის საკითხის მიმოხილვა.

A. J. Lichtenberg and M. A. Liebermann, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2nd ed. (Springer, New York, Heidelberg, Berlin, 1992).

R. S. Mackay and J. D. Meiss, *Hamiltonian Dynamical Systems* (Adam Hilger, Bristol, 1987).

G. M. Zaslavsky, R. Z. Sagdeev, D. A. Usikov, and A. A. Chernikov, *Weak Chaos and Quasi-Regular Patterns* (Cambridge University Press, Cambridge, 1991)

K. R. Meyer and G. R. Hall, *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-body Problem* (Springer, New York, 1992).

G. M. Zaslavsky, *Physics of Chaos in Hamiltonian Systems* (Imperial College Press, London, 1998).

G. O. Fountain, D. V. Khakhar, and J. M. Ottino, "Visualization of Three-Dimensional Chaos," *Science* **281**, 683-86 (1998).

ჰამილტონისეული ქაოსის მოკლე, მაგრამ საინტერესო შესავალი კურსი ბაკალავრიატის იმ სტუდენტებისათვის, რომელთაც კლასიკურ მექანიკაში გარკვეული ცოდნა აქვთ:

N. Srivastava, C. Kaufman, and G. Muller, "Hamiltonian Chaos," *Computers in Physics* **4**, 549-53 (1990), "Hamiltonian Chaos II," *Computers in Physics* **5**, 239-43 (1991), "Hamiltonian Chaos III," *Computers in Physics* **6**, 84 (1991). N. Regez, W. Breyman, S. Weigert C. Kaufman, and G. Muller, "Hamiltonian Chaos IV," *Computers in Physics* **10**, 39-45 (1996). ბოლო ორი ნაშრომი ეძღვნება კვანტურ ქაოსთან კავშირს (განხილულია მე-12 თავში).

KAM თეორემა და მასთან დაკავშირებული საკითხები

V. I. Arnold, *Mathematical Methods in Classical Mechanics* (Springer, New York, 1978).

[Guckenheimer and Holmes, 1990].

[Jackson, Vol. 2, 1991], Appendix L.

პერიოდის გაორმაგება ჰამილტონისეულ სისტემებში

G. Benettin, C. Cercignanni, L. Galgani, and A. Giorgilli, "Universal Properties in Conservative Dynamical Systems," *Lett. Nouvo. Cim.* **28**, 1-4 (1980).

J. M. Greene, R. S. MacKay, F. Vivaldi, and M. J. Feigenbaum, "Universal Behavior in Families of Area-Preserving Maps," *Physica D* **3**, 468-86 (1981).

T. C. Bounds, "Period Doubling Bifurcations and Universality in Conservative Systems," *Physica D* **3**, 577-89 (1981).

D. A. Sadovskif, J. A. Shaw, and J. B. Delos, "Organization of Sequences of Bifurcations of Periodic Orbits," *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2120-23 (1995).

ჰენონ-ჰეილის ჰამილტონიანი

M. Henon and C. Heiles, "The Applicability of the Third Integral of Motion: Some Numerical Experiments," *Astrophys. J.* **69**, 73-79 (1964). [Jackson, Vol. 2, 1991], p. 74.

ჩირიკოვის სტანდარტული ასახვა

B. V. Chirikov, "A Universal Instability of Many Dimensional Oscillator Systems," *Physics Reports* **52**, 263-379 (1979).

არნოლდის "კატის" ასახვა

V. I. Arnold and A. Avez, *Ergodic Problems of Classical Mechanics* (Benjamin, New York, 1968).

J. Ford, "Quantum Chaos, Is There Any?" in [Hao, 1988], pp. 128-47.

დისიპაციური სტანდარტული ასახვა

G. Schmidt and B. H. Wang, "Dissipative Standard Map," *Phys. Rev. A* **32**, 2994-99 (1985).

G. Schmidt, "Universality of Dissipative Systems," in [Hao, 1988], pp. 1- 15.

ჰამილტონისეული დინამიკის გამოყენება

R. Helleman, *op. cit.*, ჩამოთვლილია მრავალი ლიტერატურა ჰამილტონის დინამიკის გამოყენების შესახებ ასტრონომიასა და ამანქარებელთა ფიზიკაში.

ბილიარდისა და ასხლეტილი ბურთის მოდელები

G. Benettin and J.-M. Strelcyn, "Numerical Experiments on the Free Motion of a Point Mass Moving in a Plane Convex Region: Stochastic Transition and Entropy," *Phys. Rev. A* 17, 773-85 (1978).

N. D. Whelan, D. A. Goodings, and J. K. Cannizzo, "Two Balls in One Dimension with Gravity," *Phys. Rev. A* 42, 742-54 (1990).

ასტრონომიული დინამიკა

M. Henon and C. Heiles, "The Applicability of the Third Integral of Motion: Some Numerical Experiments," *Astron. J.* 69, 73-79 (1964).

J. Wisdom, "Chaotic Behavior in the Solar System," in *Dynamical Chaos*, (M. Berry, I. Percival, and N. Weiss, eds.) (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1987). პირველად დაიბეჭდა წიგნში *Proc. Roy. Soc. Lond.* A413, 1-199 (1987).

R. A. Kerr, "Pluto's Orbital Motion Looks Chaotic," *Science* 240, 986-87 (1988).

ამაჩქარებელთა დინამიკა

Helleman, *op. cit.*

A. Chao et al., "Experimental Investigation of Nonlinear Dynamics in the Fermilab Tevatron," *Phys. Rev. Lett.* 61, 2752-55 (1988).

ზეგამტარობა

C. Reichardt and F. Nori, "Phase Locking, Devil's Staircases, Farey Trees, and Arnold Tongues in Driven Vortex Lattices with Periodic Pinning," *Phys. Rev. Lett.* 82,414-17(1999).

ოპტიკა

A. Mekis, J. U. Nockel, G. Chen, A. D. Stone, and R. K. Chang, "Ray Chaos and Q Spoiling in Lasing Droplets," *Phys. Rev. Lett.* 75, 2682-85 (1995).

8.12 კომპიუტერული ამოცანები

CE8-1. გამოიყენეთ *Chaos Demonstrations*-ის მოდელი 10 და გამოიკვლიეთ ჩირიკოვის სტანდარტული ასახვის ქმედება, როდესაც K -ს სხვადასხვა მნიშვნელობები აქვს. გამოიკვლიეთ კუნძულთა ჯაჭვები, თორების ლიკვიდაცია და ამ თავში განხილული სხვა თვისებები.

CE8-2. გამოიყენეთ *Chaos Demonstrations*-ის მოდელი 5 და გამოიკვლიეთ სამი სხეულის შეზღუდული ამოცანა. ახლომდებარე ტრაექტორიების ექსპონენციალური დივერგენციის შესწავლის მიზნით ერთმანეთის ახლოს მდებარე საწყისი წერტილების მქონე რამდენიმე „პლანეტა“ შეგიძლიათ გამოიყენოთ.

CE8-3. გამოიყენეთ *Chaotic Dynamics Workbench* და შეისწავლეთ ჰენონ-ჰეილსის სისტემა კუნძულთა ჯაჭვების, თორების ლიკვიდაციისა და ჰამილტონის არაინტეგრებადი სისტემების სხვა მახასიათებელი თვისებების თვალსაზრისით. გამოიყენეთ რამდენიმე განსხვავებული პუნკარეს კვება და მთლიანი ფაზური სივრცის თვისებების ვიზუალიზაცია მოახდინეთ.

CE8-4. შეამოწმეთ სრივასტავას, კაუფმანისა და მიულერის 8.11 პარაგრაფში ციტირებულ პუბლიკაციებში მოყვანილი ზოგიერთი პროგრამული ამოცანა.

III

ქაოსის ზომები

9

ქაოსის გაზომვა

ვაქციოთ ქაოსი ქარიშხლად, დავაყენოთ ღრუბლების გროვა! მე ველი ფორმას. Robert Frost.
Pertinax

9.1 შესავალი

რამდენად ქაოსურია სისტემის ქაოსური ქმედება? მე-9 თავში ამ შეკითხვაზე რაოდენობრივი თვალსაზრისით პასუხის გაცემის სხვადასხვა გზებს განვიხილავთ. ვიდრე საკითხს დეტალურად ჩავუღრმავებთ, ალბათ უნდა ვიკითხოთ, თუ რატომ გვსურს ქაოსის გაზომვა. პირველი მიზეზი ის არის, რომ გვსურს სისტემის ერთი შეხედვით გარდამავალი სტადიისა და ჭეშმარიტად ქაოსური ქმედების ერთიმეორისაგან გარჩევა. როგორც ვნახეთ, ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ ქაოსის კვლევის რაიმე რაოდენობრივი მეთოდი და „ჭეშმარიტი ქაოსისა“ და კომპლექსური ანუ უნდა შეგვეძლოს თავისუფლების დიდი რაოდენობის ხარისხის მქონე ხმაურიანი ქმედების ერთიმეორისგან განსხვავება. გარდა ამისა, როგორც ამას მომდევნო თავში ვნახავთ, რომ ზოგიერთმა ამ რიცხვითმა მეთოდმა შეიძლება სისტემის თავისუფლების (აქტიური) ხარისხების რაოდენობის განსაზღვრის საშუალებაც მოგვცეს. ქაოსური ქმედების რაოდენობრივი კვლევის მესამე მიზეზი ის არის, რომ რეგულარული და ქაოსური ქცევების დამაკავშირებელი სცენარების უნივერსალობაზე ჩვენ მიერ ჩატარებული ექსპერიმენტების საფუძველზე შეიძლება ვივარაუდოთ, რომ სისტემის პარამეტრების ცვლასთან ერთად სავარაუდოდ უნდა არსებობდეს მისი ქაოსური ქმედების ცვლილების ამსახველი უნივერსალური თვისებები. ვნახავთ, რომ ზოგიერთი ამგვარი უნივერსალური თვისება მართლაც ნაპოვია და ისინი სისტემის ქმედებას საკმაოდ კარგად აღწერენ. ასევე სავარაუდოა, რომ უნდა არსებობდეს კორელაცია ქაოსის რაოდენობრივ მაჩასიათებლებისა და სისტემის ფიზიკური პარამეტრების ცვლილებებს შორის. მაგალითად, არსებობს თუ არა რაიმე რაოდენობრივი მაჩასიათებელი, რომლის ცვლილებებიც დაკავშირებულია გულის არითმიასთან, ხსნარში ტურბულენტობის აღძვრასთან ან ნახევარგამტარულ წრედში არსებულ ხმაურთან?

ქაოსური სისტემების ცალკეულ რაოდენობრივ მახასიათებელთა გამოთვლასთან ერთად მათთან დაკავშირებული ცდომილებების შეფასებაც უნდა შეგვეძლოს. ჩვენ ამ ცდომილებათა განსაზღვრის რამდენიმე მეთოდს შემოგთავაზებთ.

ამრიგად, არსებობს ქაოსური ქმედების რიცხვითი კვლევის სამმაგი მოტივაცია:

1. რაოდენობრივი მახასიათებლები შესაძლოა ქაოსურ და ხმაურიან ქმედებებს შორის განსხვავების პონაში დაგვეხმაროს.
2. შესაძლოა რაოდენობრივ მახასიათებლები სისტემის დინამიკის მოდელირებისთვის საჭირო ცვლადების რაოდენობის დადგენის თვალსაზრისითაც სასარგებლო იყოს.
3. ისინი შესაძლოა სისტემების უნივერსალობის კლასებად დაყოფაში დაგვეხმარონ.
4. რაოდენობრივ მახასიათებელთა ცვლილებებმა შესაძლოა სისტემის დინამიკაში მნიშვნელოვანი ცვლილებები გამოიწვიოს.

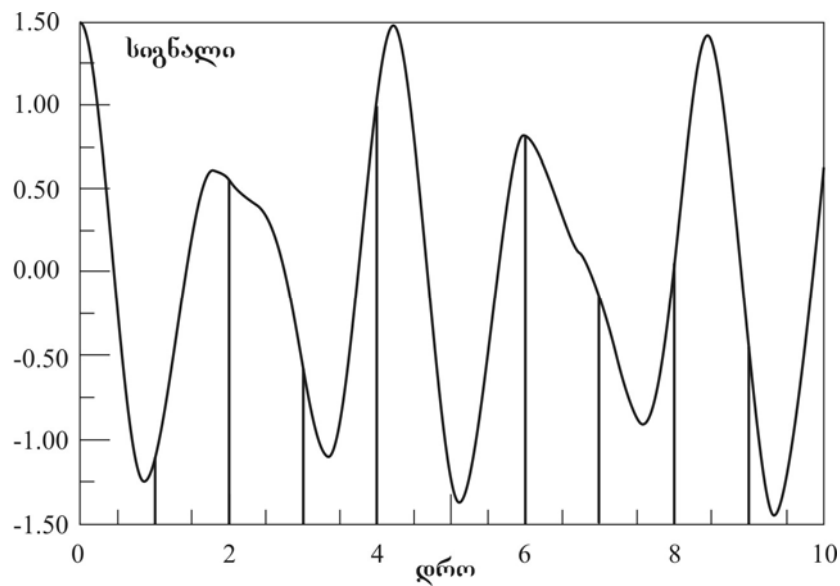
9.2 დინამიკური ცვლადების დროითი მწკრივები

ქაოსის რაოდენობრივი კვლევის მთავარი თეორიული იარაღი სისტემის მნიშვნელობათა დროითი მწკრივის ცნებაა. ჩვენ მას ნახევარგამტარული დიოდის წრედის სტრობოსკოპული გამონასახისა და, მოგვიანებით, მდგომარეობათა სივრცეში პუანკარეს კვეთების ზოგადი ფორმის დახმარებით გავეცანით. მოცემულ თავში სისტემის (შესაძლო) ქაოსური ქმედების რაოდენობრივი კვლევისას ყურადღებას გავამახვილებთ სისტემის მახასიათებელი ცალკეული ცვლადის (ვთქვათ $x(t)$) მნიშვნელობების დროითი მწკრივის სახით წარმოდგენაზე. ვთქვათ, გვაქვს $x(t_0), x(t_1), x(t_2), \dots$ მიმდევრობა, სადაც $t_0 < t_1 < t_2$ და ა.შ., როგორც ეს 9.1 ნახაზზეა ნაჩვენები. აქ დროის მნიშვნელობები შესაძლოა საკმაოდ ახლოს იყოს ერთმანეთთან ან გვექონდეს რომელიმე ცვლადის პუანკარეს კვეთის მნიშვნელობათა მწკრივი, რომელთა შესაბამისი დროის მომენტები ერთმანეთისაგან საკმაოდ დაშორებულია.

მაგრამ ერთი ცვლადის შერჩეული მნიშვნელობების ასეთი სიმრავლე შესაძლოა საკმარისი არ აღმოჩნდეს საკვლევი თვისებების შესასწავლად. მომდევნო თავში ვაჩვენებთ, რომ თუ შერჩევა დროის შესაბამის ინტერვალებშია ჩატარებული, მაშინ მდგომარეობათა სივრცეში დინამიკის ძირითადი თვისებების „რეკონსტრუქციას“ მართლაც შევძლებთ. მე-10 თავში ვნახავთ, რომ ხშირ შემთხვევაში შეგვიძლია ერთი ცვლადის დროითი ჩანაწერის მიხედვით სისტემის მდგომარეობის დადგენისთვის საჭირო ცვლადების რაოდენობის განსაზღვრა.

რასაკვირველია, ერთი ცვლადის შერჩეული მნიშვნელობები ბოლომდე ვერ (ან საერთოდ არაფერს) გვატყობინებს დანარჩენი ცვლადების შესახებ. მაგრამ, თუ შემოვიფარგლებით სისტემის ქმედების ბიფურკაციების განსაზღვრითა და ამგვარად წარმოდგენას შევიქმნით სისტემის ქაოსურობის შესახებ, მაშინ ირკვევა, რომ ზემოხსენებული მიმდევრობა ამ მხრივ სავსებით საკმარისია (რასაკვირველია, გარკვეულ ღონეზე)

ამრიგად, ჩვენ სისტემის დინამიკურ პარამეტრებს არაპირდაპირი გზით განვსაზღვრავთ. მაგალითად, თუ გვანტერესებს ტემპერატურა, შეგვიძლია გავზომოთ სისტემასთან კონტაქტში მყოფ თერმოელემენტზე არსებული ძაბვა.



ნახ. 9.1. დინამიკური ცვლადის შერჩევის სქემა. გაზომილი მნიშვნელობების მიხედვით ხდება დროითი მწკრივის შედგენა, რომელთა ანალიზსაც შემდეგში ვატარებთ. აქ მნიშვნელობათა შერჩევა ხდება დროის $t=0, 1, 2, \dots$ და ა.შ. მომენტებში.

შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ჩვენ ვახდენთ არა სისტემის დინამიკის, არამედ საკვლევი ფუნქციის მონიტორინგს.

ერთი შეხედვით შეიძლება მოგვეჩვენოს, რომ უმჯობესი იქნება, თუ სისტემის ქმედების ანალიზს უწყვეტი ფუნქციის (აღვნიშნოთ იგი პირობითად $\vec{x}(t)$ ვექტორული სახით, სადაც ვექტორი მოიცავს დინამიკურ ცვლადთა სრულ სიმრავლეს) მეშვეობით ჩავატარებდით. მაგრამ რეალურ ექსპერიმენტებში, როგორც წესი, ხდება დროის დისკრეტული მომენტების შერჩევა და რიცხვითი გამოთვლები რაღაც დროითი ბიჯის არჩევით წარმოებს. ამგვარად, როგორც წესი, საქმე გვაქვს დისკრეტულ დროით მწკრივებთან.

სათანადო დროის ინტერვალების ($t_1 - t_0$, $t_2 - t_1$ და ა.შ.) შერჩევას დიდი მნიშვნელობა აქვს. თუ ხელმისაწვდომია ხმაურისგან თავისუფალი მნიშვნელობების უსასრულო რაოდენობა, მაშინ დროითი ინტერვალების შერჩევის მხრივ შეზღუდული არ ვართ. მაგრამ რეალურ სიტუაციებში, როდესაც მნიშვნელობათა სასრულ სიმრავლეს ზედ ედება რაიმე ტიპის ხმაური, ძალიან დიდი სიფრთხილე უნდა გამოვიჩინოთ. მომდევნო თავში მნიშვნელობების დროის ინტერვალებისა და სხვა მახასიათებლების შერჩევასთან დაკავშირებით გარკვეულ „ემპირიულ წესებს“ გავეცნობით. მონაცემების ანალიზის ჩატარების მსურველებს დეტალურ კონსულტაციას მე-10 თავი და ამ თავის ბოლოში ციტირებული ლიტერატურა გაუწევს.

დავუშვათ, რომ გაგვანია დროის ინტერვალების შერჩევის „სათანადო“ სქემა. ქაოსის რაოდენობრივი დახასიათებისათვის განსაზღვრის ორ განსხვავებულ, მაგრამ ერთმანეთთან დაკავშირებულ მიდგომას ვიყენებთ. პირველი მიდგომა აქცენტს აკეთებს ქაოსური ქმედების *დინამიკაზე* (დროზე დამოკიდებულებაზე). ლიაპუნოვის ექსპონენტა ამგვარი ტიპის რაოდენობრივი მახასიათებელია. ჩვენ აგრეთვე შემოვიყვანთ „ენტროპიის“ სხვადასხვა სახეობას, რომლებიც მსგავს ფუნქციას ასრულებენ. ეს მახასიათებლები გვიქმნიან წარმოდგენას იმის შესახებ, თუ როგორ ვითარდება სისტემა დროში და რა ემართებათ ახლომდებარე ტრაექტორიებს დროთა განმავლობაში. რაოდენობრივ მახასიათებელთა მეორე ტიპი აქცენტს აკეთებს მდგომარეობათა სივრცეში არსებულ ტრაექტორიათა *გეომეტრიულ* თვისებებზე დროის საკმარისად დიდი ინტერვალების განმავლობაში (მაგალითად, შეზღუდულია თუ არა ტრაექტორიები მდგომარეობათა სივრცეში არსებულ რაიმე ზედაპირზე? ფარავენ თუ არა ისინი ასეთ შემთხვევაში მთლიან ზედაპირს და ა. შ.). ამგვარი გეომეტრიული კვლევისას ჩვენ ფრაქტალების მნიშვნელოვან და დამაინტრიგებელ ცნებასაც შევხვდებით.

რიცხვით მახასიათებელთა ზემოაღწერილი ორი ტიპი ამომწურავია. მაგალითად, თავდაპირველად ყურადღებას გავამახვილებთ ტრაექტორიათა დივერგენციის დროის მიმართ დამოკიდებულებაზე. შემდეგ გამოვიკვლევთ ამ ტრაექტორიების „ნაკვალევებს“. ინტუიცია გვეუბნება, რომ აღწერის ამ ორ ტიპს შორის გარკვეული კავშირი უნდა არსებობდეს, მაგრამ დღეისათვის ეს უმნიშვნელო სახით და უმეტესწილად ჰიპოთეტურ ხასიათს ატარებს. მიუხედავად იმისა, რომ ზოგიერთი რიცხვითი და ექსპერიმენტული ნიუანსი ამ ჰიპოთეზებს ზურგს უმაგრებს, ჯერ კიდევ უამრავი სამუშაოა ჩასატარებელი დინამიკურ და გეომეტრიულ მიდგომებს შორის კავშირის სათანადო დონეზე შესასწავლად.

მომდევნო პარაგრაფებში განვიხილავთ ქაოსის ოთხ რიცხვით მახასიათებელს: (1) ლიაპუნოვის ექსპონენტები; (2) კოლმოგოროვის ენტროპია, (3) ფრაქტალური

განზომილებები და (4) კორელაციული განზომილება. მე-5 თავის ანალოგიურად, დაუშვებთ, რომ ჩვენ წინაშეა ეფექტურად „ერთგანზომილებიანი“ სისტემა. მომდევნო თავში ვნახავთ, რომ როგორ მივუყენოთ ეს დაშვება მრავალგანზომილებიანი სისტემებს და რა გზით მივიღოთ ერთი ცვლადის დროითი მწკრივების მეშვეობით „მრავალგანზომილებიანი ინფორმაცია“.

ჩვენ შევხებით დისიპაციურ (ანუ ისეთ სისტემებს, რომელთა შემთხვევაშიც საწყის პირობებთან დაკავშირებული გარდამავალი სტადიები ქრება და დროის ხანგრძლივ ინტერვალზე აღებული ქმედება უკავშირდება მდგომარეობათა სივრცეში არსებულ მიზიდულობის არეს (ან არეებს). ქმედების რაოდენობრივი აღწერის პროცესში მხოლოდ მიმზიდველებზე მდებარე ტრაექტორიებს გავითვალისწინებთ. არადისიპაციური სისტემების შემთხვევაში (მე-8 თავში განხილული ჰამილტონის სისტემები) მიმზიდველები არ არსებობენ და საქმე გვექნება იმ სირთულესთან, რომ პარამეტრების მნიშვნელობათა ერთსა და იმავე სიმრავლის შემთხვევაში ზოგიერთი ტრაექტორია პერიოდული და ზოგიც ქაოსური შეიძლება იყოს. ამ თავში განხილული ზოგიერთი რაოდენობრივი მახასიათებელი შეიძლება ჰამილტონისეული სისტემების ტრაექტორიათა განსაზღვრისთვის გამოვიყენოთ, მაგრამ მდგომარეობათა სივრცეში ახლომდებარე ტრაექტორიებს შეიძლება სრულიად განსხვავებული ხასიათი აღმოაჩნდეთ. რასაკვირველია, ერთზე მეტი მიმზიდველის მქონე დისიპაციურ სისტემებს (პარამეტრის მნიშვნელობათა მოცემული სიმრავლისთვის) ერთი და იგივე ტიპის სირთულეები ახასიათებთ.

გარდამავალი ტიპის ტრაექტორიებმა (რომლებიც იწყებიან მიმზიდველისაგან შორს, მაგრამ დროთა განმავლობაში მისკენ მიისწრაფვიან) სისტემის დინამიკის შესახებ სასარგებლო ინფორმაცია შეიძლება მოგვაწოდონ. რადგან ასეთი ტრაექტორიები როგორც ექსპერიმენტული, ისე რიცხვითი გამოთვლების თვალსაზრისით ხშირად მეტად „მოუხერხებელია“, ჩვენ შეგვიძლია მსჯელობა დავიყვანოთ ხანგრძლივი ინტერვალისათვის აღებულ ქმედებაზე, რაც დისიპაციური სისტემის მხოლოდ იმ ტრაექტორიებს გულისხმობს, რომლებიც მდგომარეობათა სივრცეში მხოლოდ მიმზიდველის ზედაპირზე მდებარეობენ. ქაოსურ გადასვლებთან დაკავშირებით დროითი მწკრივების შესწავლის ანალიზური მეთოდი JAT94-შია მოცემული.

9.3. ლიაპუნოვის ექსპონენტები

მეოთხე თავში, ახლომდებარე ტრაექტორიების დივერგენციის განსაზღვრის მიზნით ლიაპუნოვის (საშუალო) ექსპონენტას ცნება შემოვიყვანეთ. ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ სისტემის ქმედება ქაოსურია, თუ მისი შესაბამისი ლიაპუნოვის საშუალო ექსპონენტა დადებითი რიცხვია. მეხუთე თავში ვნახეთ, თუ როგორ გამოვთვალოთ ლიაპუნოვის ექსპონენტა ერთგანზომილებიანი იტერაციული ასახვის ფუნქციისთვის. ამ პარაგრაფში, ლიაპუნოვის ექსპონენტის გამოთვლის მეთოდუკას მნიშვნელობათა ერთგანზომილებიანი დროითი მწკრივების თვალსაზრისით აღვწერთ. $x(t_0), x(t_1), x(t_2), \dots$ სიდიდეებს შემდგომში x_0, x_1, x_2, \dots სახით აღვნიშნავთ. სიმარტივისთვის დავუშვებთ, რომ მათ შორის არსებული დროის ინტერვალები თანაბარია. ამიტომ, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$t_n - t_0 = n\tau \quad (9.3-1)$$

სადაც τ მწკრივის ორ მიმდევრო წევრს შორის არსებული დროის ინტერვალია.

თუ სისტემა ქაოსურად იქცევა, ახლომდებარე ტრაექტორიების დივერგენცია შემდგენიარად იჩენს თავს: თუ x -ების მიმდევრობებიდან შევარჩევთ რომელიმე x_i -ს და შემდეგ მოვძებნით x -ის სხვა ისეთ მიმდევრობას, რომელიც შეიცავს x_i -გან მცირედ განსხვავებულ x_j წევრს, მაშინ სხვაობათა შემდეგი მიმდევრობა:

$$\begin{aligned} d_0 &= |x_j - x_i| \\ d_1 &= |x_{j+1} - x_{i+1}| \\ d_2 &= |x_{j+2} - x_{i+2}| \\ &\vdots \\ d_n &= |x_{j+n} - x_{i+n}| \end{aligned} \quad (9.3-2)$$

n -ის ზრდასთან ერთად ექსპონენციალური სახით უნდა იზრდებოდეს, ყოველ შემთხვევაში, საშუალოდ მაინც. ფორმალურად შეგვიძლია ეს ასეთი სახით ჩავწეროთ:

$$d_n = d_0 e^{\lambda n} \quad (9.3-3)$$

ორივე მხარის გალოგარითმების შემდეგ მივიღებთ:

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \frac{d_n}{d_0} \quad (9.3-4)$$

ამრიგად, მივიღეთ ლიაპუნოვის ექსპონენტის პრაქტიკულად განსაზღვრისათვის საჭირო ფორმულა. თუ λ დადებითი რიცხვია, მაშინ ქმედება ქაოსურია.

ზოგიერთი ტექნიკური დეტალი

პრაქტიკაში დროითი მწკრივების მიხედვით ლიაპუნოვის ექსპონენტის დადგენა შესაძლებელია. აქვე აუცილებელია რამდენიმე კომენტარის გაკეთება:

1. ჩვენ **დავუშვით** ორი ტრაექტორიის ერთმანეთისაგან დაშორების ექსპონენციალური სახით ცვლილება. მოცემული დროითი მწკრივებისთვის ამ დაშვების ჭეშმარიტების შემოწმება სიფრთხილეს მოითხოვს. ეს შესაძლებელია გაკეთდეს d_m სხვაობის (ნატურალური) ლოგარითმის მრუდის, როგორც m ინდექსის ფუნქციის, აგების გზით. თუ დივერგენცია ექსპონენციალურია, წერტილები განლაგდებიან წრფეზე (ან მის მახლობლად) რომელთა კუთხური კოეფიციენტი ლიაპუნოვის ექსპონენტის ტოლია. ამ (წრფის გავლება შეგვიძლია უმცირეს კვადრატთა მეთოდის მეშვეობით). თუ წერტილები წრფის მახლობლად არ განლაგდებიან, მაშინ ლიაპუნოვის ექსპონენტი აზრს კარგავს.
2. λ -ს მნიშვნელობა შესაძლებელია (და საზოგადოდ ასეც ხდება) საწყის მნიშვნელობად არჩეული x_i -ის მნიშვნელობაზე იყოს დამოკიდებული. ამრიგად, შეგვეძლო დაგვეწერა $\lambda(x_i)$. მიმზიდველის დახასიათებისთვის გვესაჭიროება λ -ს საშუალო მნიშვნელობა, რომელსაც მიმზიდველზე განაწილებული საწყისი მნიშვნელობების საკმარისად დიდი N რაოდენობისთვის (პრაქტიკაში – 30 ან 40) $\lambda(x_i)$ -ის გამოთვლით ვპოულობთ. შემდეგ მიმზიდველის შესაბამის ლიაპუნოვის საშუალო ექსპონენტას შემდეგი ფორმულის გამოყენებით ვპოულობთ:

$$\lambda = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda(x_i) \quad (9.3-5)$$

შეგვიძლია $\lambda(x_i)$ მნიშვნელობათა გამოთვლა, რაც საშუალო მნიშვნელობასთან დაკავშირებული ცდომილების დადგენაში დაგვეხმარება. მომდევნო თავში ვნახავთ, რომ λ -ების საშუალო

მნიშვნელობის არამდგრადობასთან დაკავშირებული საინტერესო უნივერსალური თვისებები შესაძლებელია არსებობდეს.

შენიშვნა: ჩვენ გვსურს λ სიდიდე ასახავდეს იმ ფაქტს, რომ x_i -ის ზოგიერთი მნიშვნელობასთან „შეხვედრის“ ალბათობა სხვებთან შედარებით დიდია: ტრაექტორიები მდგომარეობათა სივრცის ზოგიერთ არეს გაცილებით ხშირად სტუმრობენ სხვებთან შედარებით. ამ პირობის დაკმაყოფილების უმარტივესი ხერხი დიდი რაოდენობით i ინდექსის მქონე საწყისი წერტილების შერჩევაა.

3. განსახილველი შემოსაზღვრული სისტემების შემთხვევაში, n რიცხვი (9.3-2)-ში ძალიან დიდი ვერ იქნება. რადგან შემოსაზღვრული სისტემის ზომა შეზღუდულია, d_i სხვაობები x -ის უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობებს შორის სხვაობაზე მეტი ვერ იქნება. ამრიგად, d -ის მიხედვით ექსპონენციალური ზრდა სამუდამოდ ვერ გაგრძელდება და ჩვენ n უნდა შევზღუდოთ. d_i -ების მიმდევრობა გვაძლევს იმის შეფასების საშუალებას, თუ რამდენად დიდი შეიძლება იყოს n (იხ. ნახ. 9.2). n ასევე დამოკიდებულია λ -სა და d_0 -ზე. თუ ავიღებთ მცირე d_0 -ს (ე.ი. მოვითხოვთ, რომ x_i ახლოს იყოს x_i -სთან მაშინ ექსპონენციალური დივერგენცია n -ის უფრო დიდი მნიშვნელობების დროსაც გაგრძელდება.

4. თუ x -ის მნიშვნელობათა მიმდევრობა პერიოდულ ქმედებას ესაბამება, მაშინ d -ის მნიშვნელობები ძალიან მცირე ან ნულის ტოლი უნდა იყოს, რადგან ტრაექტორიები მნიშვნელობათა ზუსტად იმავე სიმრავლეს უბრუნდება. ამრიგად, ტრაექტორიათა მეთოდმა უნდა მოგვცეს $\lambda=0$, რაც ასახავს იმ ფაქტს, რომ d -ები არც იზრდება და არც მცირდება. ეს შედეგი გვამცნობს, რომ პერიოდულ ორბიტაზე ტრაექტორიის წერტილები ერთიმეორის მიმართ არც მიიზიდებიან და არც განიზიდებიან. მდგომარეობათა სივრცის იმ მიმართულებით, რომელიც პერპენდიკულარულია სტაბილური პერიოდული ტრაექტორიისა, ლიაპუნოვის ექსპონენტი უარყოფითი უნდა იყოს, რაც იმის მაჩვენებელია, რომ ახლომდებარე ტრაექტორიები მიიზიდებიან სტაბილური ორბიტებისაკენ. მიუხედავად ამისა, თვით ტრაექტორიის მიხედვით აღებულ მნიშვნელობათა დროითი მწკრივები ვერაფერს „გვეტყვიან“ იმის შესახებ, თუ რატომ მიისწრაფვიან ტრაექტორიები მიმზიდველისაკენ. ზოგადი მეთოდები, რომლებიც აღწერილია მე-5 თავში ან მოცემული თავის ბოლოს ციტირებულ ლიტერატურაში, უნდა გამოვიყენოთ ლიაპუნოვის ექსპონენტის განსაზღვრის მიზნით, როდესაც ეს უკანასკნელი უარყოფითი სიდიდეა.

5. არსებობს გარკვეული შეზღუდვები j -ის იმ მნიშვნელობათა დაკავშირებით, რომელიც უნდა გამოვიყენოთ მოცემული x_i -ის მიმართ. თუ დროითი მწკრივები შეიცავენ რაიმე თანაბრად ცვლადი სიდიდის (ვთქვათ, პირველ თავში მოყვანილ დიოდის წრედში გამავალი

დენი) ერთმანეთისაგან მცირედ განსხვავებულ მნიშვნელობებს, მაშინ ვერ ავიღებთ i -სთან ძალიან ახლოს “მყოფ” j -ს, რადგან შესაბამისი დროის მომენტები ერთმანეთთან ძალიან მცირედ იქნებიან განსხვავებული. შესაბამისად, ქმედებებიც თითქმის ერთნაირი ხასიათისა იქნება და საბოლოო ჯამში მივიღებთ ძალიან მცირე $\lambda(x_i)$ -ს. არსებობს არაერთი კრიტერიუმი მინიმალური დროითი ინტერვალის შერჩევისთვის, რომელთაც ამჯერად არ განვიხილავთ. $x_i(t)$ გრაფიკი მისი მიახლოებით განსაზღვრის საშუალებას მოგვცემს. თუ მწკრივის წევრები წარმოადგენენ პუნკარეს კვეთიდან აღებულ წერტილებს, რომლის დროსაც დროითი ინტერვალები ისედაც დიდია, მაშინ, რასაკვირველია, ზემოხსენებული პრობლემა აღარ გვექნება.

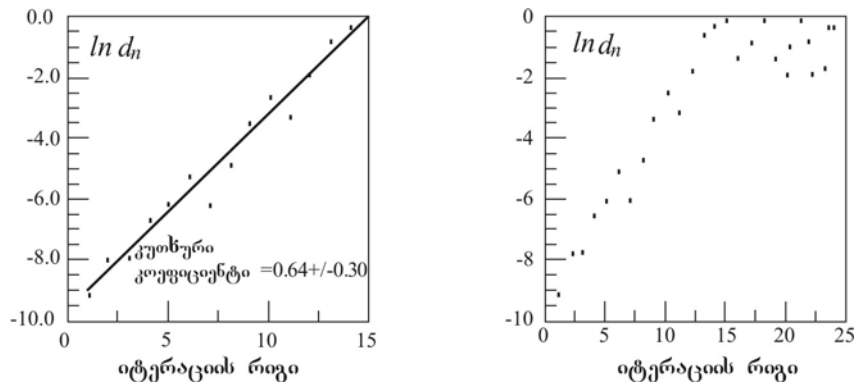
6. ზოგიერთი ავტორი λ -ს განსაზღვრავს შემდეგი ფორმულის გამოყენებით ამჯობინებს

$$d_n = d_0 2^{n\lambda_2}$$

λ_2 განისაზღვრება, როგორც დივერგენციის სიჩქარე, გამოსახული „დროის ერთეულში აღებული ბიტების რაოდენობით“. რიცხვი 2 კი აღებულია ორობით სისტემასთან დაკავშირებით (ანალოგურად მე-5 თავში აღწერილი ბერნულის წანაცვლების ასახვისა). λ_2 გვიჩვენებს, თუ რა სიჩქარით ვკარგავთ (ბიტი/წამში) x -ის საწყის მნიშვნელობაში შემავალ ინფორმაციას (გამოსახულს ორობით ფორმაში).

სავარჯიშო 9.3-1. აჩვენეთ, რომ $\lambda_2 = \lambda / \ln 2$.

7. არსებობს d_0 -ის ქვედა ზღვრის გამოთვლის პრაქტიკული გზები. ვინაიდან x -ები ჩაიწერება მძიმის შემდეგ სასრული რაოდენობის ციფრებით ან ექსპერიმენტის დროს განისაზღვრებიან სასრული სიზუსტით, მძიმის შემდეგ არსებულ ციფრთა რაოდენობა გვექმნის წარმოდგენას ზემოხსენებულ ზღვარზე. მაგალითად, თუ მნიშვნელობები შეიცავენ მძიმის შემდეგ სამ ციფრს, მაშინ 0.001-ზე მცირე სხვაობის აღება შეუძლებელია. რა თქმა უნდა, თუ მონაცემთა რაოდენობა საკმარისად დიდია, მაშინ, სისტემის ქაოსურობის შემთხვევაშიც კი, გვექნება განმეორებადი მნიშვნელობები, თუნდაც მათი ზღვრული სიზუსტის გამო.



ნახ. 9.2. ტრაექტორიათა დივერგენცია, როგორც იტერაციათა რიგის ფუნქცია ლოჯისტიკური ასახვისთვის, როდესაც $A=3.99$ და $x_i=0.1$. $d_0=0.0001$. მარცხნივ გამოყენებულია 15, მარჯვნივ კი 25 იტერაცია. ექსპონენციალური დივერგენციის შემთხვევაში მოსალოდნელია წრფის მიღება. მარცხნივ, წრფის კუთხური კოეფიციენტი ლიაპუნოვის ექსპონენტას გვაძლევს. მარცხნივ ეს სიდიდე ახლოსაა $\ln 2$ -თან, რაც შეესაბამება ლოგიკურ ასახვას $A=4$ პირობებში. მარჯვნივ, სახეზეა „გაჯერება“, როდესაც ტრაექტორიათა შორის არსებული დაშორებები მიისწრაფვიან მიმზიდველის ზომისაკენ.

მაგალითი

მოვიყვანოთ დროითი მწკრივების მეშვეობით ლიაპუნოვის ექსპონენტების დადგენის მაგალითი. 9.2 ნახაზზე მოყვანილია ტრაექტორიათა დივერგენცია, როგორც იტერაციათა რიგის ფუნქცია ლოჯისტიკური ასახვისთვის იტერაციების ორი განსხვავებული რიგის შემთხვევაში, რომელთაც ერთი და იგივე საწყისი x_i წერტილში გააჩნიათ. აქ სახეზეა წერტილთა გაბნევა საშუალო წრფეების მიმართ. ამრიგად, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ახლომდებარე ტრაექტორიების დივერგენცია ექსპონენციალურად მიმდინარეობს, მაგრამ შესაძლოა მნიშვნელოვან ფლუქტუაციებს ადგილი ჰქონდეთ. ამასთან ერთად, საკმარისად ხანგრძლივი დროის შემდეგ დივერგენცია უკვე აღარ მიმდინარეობს ექსპონენციალურად. ამგვარი „გაჯერება“ ყველგან ვლინდება, სადაც ორ ტრაექტორიას შორის არსებული მანძილი მიმზიდველის ზომას უახლოვდება და აჭარბებს მას. როდესაც სისტემა შემოსაზღვრულია, ტრაექტორიებს შორის განსხვავება ამ ზომას ვერ გადააჭარბებს და d_n სიდიდეები აღარ იზრდება (პირიქით, შესაძლებელია შემცირდნენ კიდევ). ამრიგად, წრფივი უბნის ქონისათვის დროის (ან იტერაციათა) ღიაპაზონი უნდა შევზღუდოთ.

დროითი მწკრივების მეშვეობით ლიაპუნოვის ექსპონენტის გამოთვლის განსხვავებული მეთოდიც არსებობს. თუ მონაცემები ეფექტურად ერთგანზომილებიანია, მაშინ x_{n+1} -ისა და x_n -ის დამოკიდებულების გრაფიკმა შესაძლებელია გლუვი ძრუდით დაკავშირებული წერტილების

მიმდევრობა მოგვცეს. ამ მრუდის მიახლოებითი ანალიზური გამოსახულების დასადგენად „მრუდთა მორგების“ სხვადასხვა მიდგომა შეგვიძლია გამოვიყენოთ. როდესაც ასეთი ანალიზური მიახლოება გვაქვს მოცემული, ლიაპუნოვის საშუალო ექსპონენტის დასადგენად (5.4-12) გამოსახულების დიფერენცირების მეთოდი შეგვიძლია გამოვიყენოთ. ამ თავის ბოლოში ციტირებული ლიტერატურა ლიაპუნოვის ექსპონენტების განსაზღვრის პროცედურების დეტალებს გვაძლევს.

სავარჯიშო 9.3-2. გამოიყენეთ 1.2 ცხრილის მონაცემები და ააგეთ ტრაექტორიათა დივერგენციის, როგორც იტერაციათა რიგის ფუნქციის გრაფიკი. ამ გრაფიკის წერტილებზე გაავლეთ წრფე და კუთხური კოეფიციენტის მეშვეობით დაადგინეთ ლიაპუნოვის ექსპონენტი. შეადარეთ მიღებული მნიშვნელობა 9.2 ნახაზზე მოყვანილს. ამასთან ერთად, დაწერეთ კომპიუტერული პროგრამა ლიაპუნოვის ექსპონენტის დასადგენად.

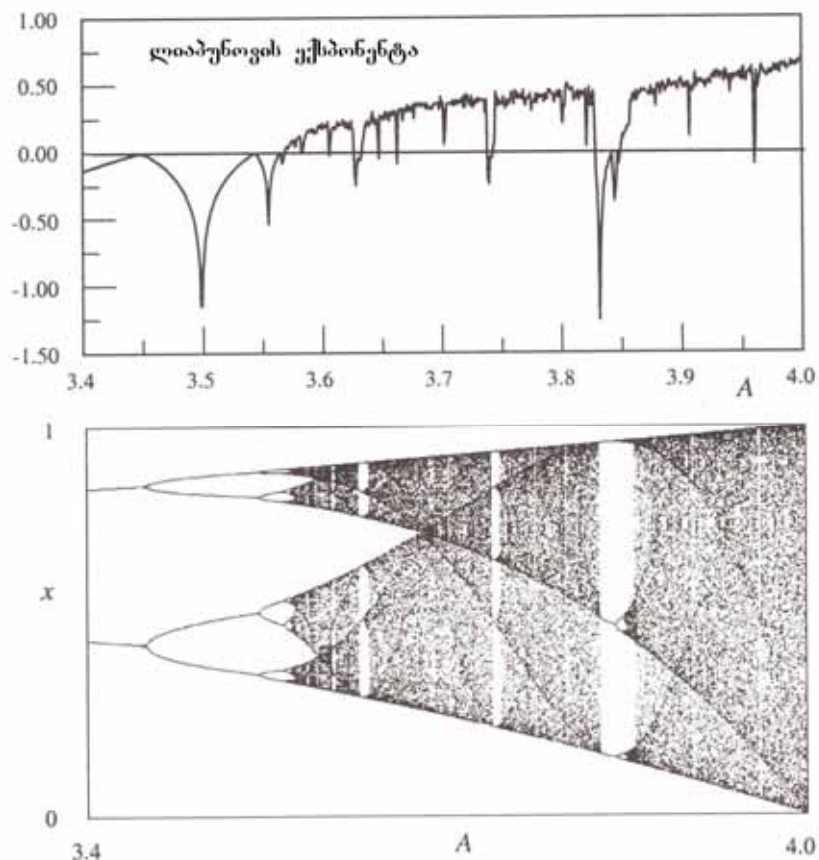
9.4 ლიაპუნოვის ექსპონენტის უნივერსალური ნორმირება

თუ დისიპაციური სისტემა პერიოდის გაორმაგების გზით ხდება ქაოსური, მაშინ შეგვიძლია ვივარაუდოთ, თუ როგორ იცვლება ლიაპუნოვის ექსპონენტი. კონტროლის პარამეტრის ცვლილებასთან ერთად 9.3 ნახაზი წარმოგვიდგენს ლიაპუნოვის საშუალო ექსპონენტას, როგორც A პარამეტრის ფუნქციას ლოჯისტიკური ასახვისთვის. როდესაც $A < 3.5699$. . . = A_{∞} , ლიაპუნოვის ექსპონენტი იქნება უარყოფითი გარდა ბიფურკაციის წერტილებისა, სადაც პერიოდის გაორმაგება იჩენს თავს. ამ წერტილებში ლიაპუნოვის ექსპონენტი ნულის ტოლია. $A > A_{\infty}$ პირობებში ექსპონენტი დადებითია, ოღონდ დროდადრო უარყოფითი ხდება პერიოდულ დიაპაზონებში. თუ ამ „ვარდნებს“ უგულვებელყოფთ, მაშინ დავინახავთ, რომ A -ს ზრდასთან ერთად ლიაპუნოვის ექსპონენტი თანაბრად იზრდება და ვამბობთ, რომ სისტემა უფრო და უფრო ქაოსური ხდება ანუ (ახლომდებარე ტრაექტორიების დივერგენციით გამოხატული) „ქაოსურობის ხარისხი“ A -სთან ერთად იზრდება.

1980 წელს ჰუბერმანმა და რუნდნიკმა (HUR80) დაამტკიცეს, რომ ასეთ შემთხვევაში უნდა არსებობდეს ლიაპუნოვის ექსპონენტის პარამეტრული დამოკიდებულების უნივერსალური გამოსახულება. განვიხილოთ შემდეგი გამოსახულება:

$$\begin{aligned} \lambda(A) &= \lambda_0 (A - A_\infty)^{\frac{\ln 2}{\ln \delta}} \\ &= \lambda_0 (A - A_\infty)^{0.445\dots} \end{aligned} \quad (9.4-1)$$

სადაც λ_0 მუდმივი რიცხვია, რომლის მნიშვნელობასაც შემდგომში დავადგენთ, ხოლო δ ფეიგენბაუმის $\delta = 4.669\dots$ რიცხვია (δ -ს სხვა მნიშვნელობები იმ შემთხვევაში გამოიყენება, როდესაც ასახვის ფუნქციას მაქსიმალური მნიშვნელობის სიახლოვეს კვადრატულისაგან განსხვავებული დამოკიდებულება გააჩნია).



ნახ. 9.3. ზედა ნახაზი წარმოგვიდგენს ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციის ლიაპუნოვის ექსპონენტს, როგორც A პარამეტრის ფუნქციის, (გამოთვლა ემყარება (5.4-12)-ს). ქვედა ნახაზი გვიჩვენებს ბიფურკაციულ დიაგრამას. როდესაც λ უარყოფითია, ქმდება პერიოდულია. როდესაც ექსპონენტი ნულის ტოლია, სახეზეა ბიფურკაცია. როდესაც ექსპონენტი დადებითია, ქმდება ქაოსურია.

(9.4-1) გამოსახულება მნიშვნელოვანი მტკიცებულების მოყვანის შესაძლებლობას გვაძლევს: თუ სისტემა ქაოსურ მდგომარეობაში პერიოდის გაორმაგების მიმდევრობის გზით გადადის, ლიაპუნოვის საშუალო ექსპონენტის, როგორც პარამეტრის ფუნქციის მეშვეობით შეგვიძლია განვსაზღვროთ, თუ რა დონეზე იქნება სისტემა ქაოსური. პირველ თავში

აღწერილი ნახევარგამტარული დიოდის წრედისათვის ჩატარებულმა ექსპერიმენტებმა გვიჩვენა, რომ ნორმირების ამგვარი წესი საკმაოდ კარგად მუშაობს პერიოდის გაორმაგების ზღვრული წერტილის მიდამოდან აღებული პარამეტრის მნიშვნელობებისთვის და რეალური ექსპერიმენტული მნიშვნელობების (JOH88) მიხედვით გამოთვლილი ლიაპუნოვის ექსპონენტის თვისებების აღწერისას.

უნდა აღინიშნოს ასევე, რომ (9.4-1) სახით გამოსახულ ნორმირების წესს იგივე ფორმა აქვს, რაც მეორე რიგის ფაზური გადასვლის სიახლოვეს არსებული ფიზიკური მახასიათებლების ქმედების ამსახველ ნორმირების წესებს სითბურ ფიზიკაში, როგორცაა ფერომაგნიტის დამაგნიტების პროცესის დაწყება. ლიაპუნოვის ექსპონენტა ე.წ. *დალაგების პარამეტრის* როლს ასრულებს, ხოლო $A - A_{\infty}$ სხვაობა რეალური და კრიტიკული (რომელზეც ფაზური გადასვლა ვლინდება) ტემპერატურების სხვაობის ანალოგიურია. დალაგების პარამეტრების ტემპერატურაზე დამოკიდებულება ნორმირების ექსპონენტების მეშვეობით მსგავსი ხარისხოვანი ფუნქციების მეშვეობით აღიწერება. სტატისტიკურ მექანიკასა და დინამიკას შორის არსებულ სხვა მსგავსებებს მე-10 თავში გამოვიკვლევთ.

*** ნორმირების უნივერსალური წესის მიღება ლიაპუნოვის ექსპონენტის მეშვეობით**

ნორმირების (9.4-1) წესი შესაძლებელია შემდეგი ფაქტების მეშვეობით იქნეს მიღებული: (1) $A > A_{\infty}$ შემთხვევაში არსებული ქაოსური დიაპაზონების (იხ. ნახ. 9.3, ნახ. 2.1 და ნახ. 5.9) A კონტროლის პარამეტრის მომდევნო ზრდასთან ერთად ბიფურკაციების მიმდევრობაში ერთმანეთს ერწყმიან: რვა დიაპაზონის გაერთიანება იძლევა ოთხს, ოთხისა- ორს და საბოლოოდ A -ს ზრდასთან ერთად ორი დიაპაზონის შერწყმა იძლევა ერთ განცალკევებულ დიაპაზონს. (2) ქაოსური დიაპაზონების შერწყმის პროცესი A_{∞} -გან მცირედ განსხვავებული A -ს მნიშვნელობებისთვის აღიწერება კრებადობის კოეფიციენტის მეშვეობით, რომელსაც იგივე რიცხვითი მნიშვნელობა გააჩნია რაც ფეიგენბაუმის კრებადობის δ კოეფიციენტს პერიოდის გაორმაგების მიმდევრობის შემთხვევაში. ამრიგად, არსებობს კავშირი პარამეტრის ცალკეული მნიშვნელობისთვის არსებული ქაოსური დიაპაზონების რაოდენობასა და პერიოდის გაორმაგების ზღვრული წერტილის მნიშვნელობიდან პარამეტრის დაშორებას შორის. პარამეტრის ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც 2^m დიაპაზონები ერთმანეთს ერწყმიან და გვაძლევს 2^{m-1} რაოდენობის დიაპაზონს, აღვნიშნოთ A_m სიმბოლოთი. მაგალითად, A_2 მნიშვნელობაზე A -ს ზრდასთან ერთად ოთხი დიაპაზონი ერთიანდება და გვაძლევს ორს.

განვიხილოთ ერთ-ერთი ქაოსური დიაპაზონის ფარგლებში მდებარე, d_0 მანძილით ერთმანეთისაგან დაშორებული ორი ტრაექტორია. ქაოსურობის გამო ეს მანძილი ექსპონენციალურად გაიზრდება:

$$d_n = d_0 e^{\lambda n} \quad (9.4-2)$$

სადაც n იტერაციათა რაოდენობაა. განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც ტრაექტორიები ციკლურად იცვლებიან 2^m დიაპაზონებს შორის. თუ ორი ტრაექტორია იწყება ერთსა და იმავე დიაპაზონში, 2^m იტერაციის შემდეგ ისინი საწყის დიაპაზონს დაუბრუნდებიან. ამ დროს ტრაექტორიათა შორის მანძილი:

$$d_{2^m} = d_0 e^{\lambda 2^m} \quad (9.4-3)$$

დგება გადამწყვეტი მომენტი: ჩვენ შეგვიძლია ეს დივერგენცია ჩავთვალოთ, როგორც შედეგი ლიაპუნოვის ეფექტური λ_0 ექსპონენტის (რომელიც რომელიმე ქაოსურ დიაპაზონს შეესაბამება) მქონე $f^{(2^m)}$ ფუნქციის ერთი რიგის იტერაციად ამრიგად, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$d_{2^m} = d_0 e^{\lambda 2^m} \equiv d_0 e^{\lambda_0} \quad (9.4-4)$$

თუ დავუშვებთ, რომ λ_0 მუდმივია (ანუ ყოველი ქაოსური დიაპაზონისთვის ერთი და იგივეა), (9.4-4)-ის მიხედვით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\lambda(A_m) = \frac{\lambda_0}{2^m} \quad (9.4-5)$$

m ინდექსი A_∞ -სგან დაშორების განსაზღვრის მიზნით შეგვიძლია გამოვიყენოთ. 2.4-1 ამოცანის შედეგს ვიყენებთ შემდეგი სახით:

$$A_m - A_\infty = \left(\frac{1}{\delta}\right)^m \Delta A \quad (9.4-6)$$

სადაც

$$\Delta A = \frac{\delta^2}{\delta - 1} (A_1 - A_2) \quad (9.4-7)$$

(9.4-6) განტოლების m –ის მიმართ ამოხსნით მივიღებთ:

$$m = -\frac{\ln[(A_m - A_\infty) / \Delta A]}{\ln \delta} \quad (9.4-8)$$

ჩავსვათ მიღებული შედეგი (9.4-5) გამოსახულებაში. გვექნება:

$$\lambda(A) = \lambda_0 2^\beta \quad (9.4-9)$$

სადაც

$$\beta = \frac{\ln[(A - A_\infty) / \Delta A]}{\ln \delta} \quad (9.4-10)$$

(9.4-9) ექვივალენტურია (9.4-1) ნორმირების წესისა.

სავარჯიშო 9.4-1. აჩვენეთ, რომ (9.4-9) ექვივალენტურია (9.4-1)-ისა. მინიშნება: გამოთვალეთ ორივე გამოსახულების ნატურალური ლოგარითმი.

აქვე მნიშვნელოვანია აღვნიშნოთ, რომ ლიაპუნოვის ექსპონენტის უნივერსალური ნორმირების წესი გამოდინარეობს ქაოსური დიაპაზონების გაერთიანებების ნორმირებიდან და თითოეული ქაოსური დიაპაზონისთვის ლიაპუნოვის λ_0 ეფექტური ექსპონენტის მუდმივობის დაშვებიდან.

9.5 ინვარიანტული ზომა

მიმზიდველის დახასიათების კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი მეთოდი ალბათობების განაწილების ფუნქციის გამოყენებას ემყარება. ეს საკითხი აქტუალობას იძენს მდგომარეობათა სივრცის განზომილებების რაოდენობის ზრდასთან ერთად. როგორც ვნახეთ, უფრო დიდი რაოდენობის განზომილებების მქონე მდგომარეობათა სივრცეებში მიმზიდველებს მეტი გეომეტრიული „შესაძლებლობები“ გააჩნიათ. ასეთ სივრცეებში მიმზიდველის დახასიათებისთვის მეტად აბსტრაქტული და ნაკლებად გეომეტრიული მეთოდები გაგვაჩნია. ამ შემთხვევაში ალბათობის

განაწილების სხვადასხვა სახეები დაგვჭირდება. რა იგულისხმება მდგომარეობათა სივრცის რაიმე ცალკეულ არეში დინამიკური სისტემის შესაბამისი ტრაექტორიის წერტილის მოხვედრის ალბათობაში?

ალბათობის განსაზღვრა

ჩვენ სიფრთხილე უნდა გამოვიჩინოთ, როდესაც ტერმინ *ალბათობას* ვიყენებთ. ამ ტერმინს „ექსპერიმენტის“ მრავალჯერადი გამეორების შედეგად მიღებული *ფარდობითი სიხშირის* თვალსაზრისით ვიყენებთ, ანუ თუ N შესაძლო შედეგის მქონე ექსპერიმენტს M -ჯერ ვატარებთ (M დიდი რიცხვია), მაშინ i -ური შედეგის მიღების ალბათობა :

$$p_i = \frac{m_i}{M} \quad (9.5-1)$$

ცხადია,

$$\sum_{i=1}^N m_i = M \quad (9.5-2)$$

ამასთან, თუ ცდების M რაოდენობა საკმარისად დიდია, მოსალოდნელია, რომ p_i იქნება მოვლენების ფარდობითი რიცხვის საკმაოდ კარგი წინასწარმეტყველი.

როდესაც ვსაუბრობთ ალბათობების შესახებ მდგომარეობათა სივრცეში, საზოგადოდ, არ შეგვიძლია დავსვათ კითხვა იმის ალბათობის შესახებ, გაივლის თუ არა ტრაექტორია მდგომარეობათა სივრცის რაიმე კონკრეტულ წერტილში, რადგანაც წერტილთა რიცხვი უსასრულოა.

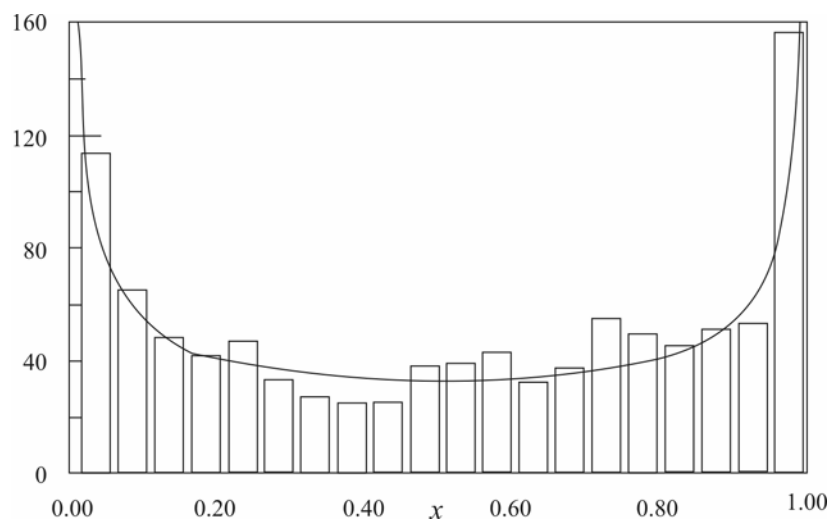
პრაქტიკაში ამ პრობლემას თავს ვარიდებთ შესაძლო შედეგთა დიაპაზონის ინტერვალებად (ან „წყუთებად“, როგორც მათ სტატისტიკოსები უწოდებენ) დაყოფითა და ცალკეულ ინტერვალში სასურველი შედეგის მიღების ალბათობის გამოთვლის გზით. ამ მეთოდს ნებისმიერი რეალური გაზომვისა თუ გამოთვლის ზღვრული სიზუსტის ავტომატური იდენტიფიცირების თვისება გააჩნია.

ინვარიანტული ზომა

დავყოთ მდგომარეობათა სივრცეში მიმზიდველის მიერ დაკავებული არე ინტერვალებად (ერთ განზომილებაში) უჯრედებად ან „ბლოკებად“ (ორ ან მეტ განზომილებაში) და გამოვთვალოთ იმის ალბათობა, რომ ტრაექტორია რომელიმე ინტერვალს ან უჯრედს „ესტუმრება“. თუ ავიღებთ M რაოდენობის ინტერვალს და და დავადგენთ, რომ i -ურ ინტერვალს ტრაექტორია m_i -ჯერ „აკითხავს“, მაშინ $p_i = m_i/M$.

i ფუნქციის სახით გამოსახული p_i -ის გრაფიკი მოგვცემს ალბათობების განაწილებას მიმზიდველისთვის. ბევრ ქაოსურ სისტემაში p_i -ები არაა იმაზე, თუ სად იწყება ტრაექტორია.

ხლომილებათა რაოდენობა



ნახაზი. 9.4. ლოჯისტიკური ასახვის მუდმივი განაწილების მრუდი, როდესაც $A=4.0$. ვერტიკალური ზოლები გვაძლევს x ღერძის თანაბრად დამყოფ 20 „ყუთში“ განთავსებული ტრაექტორიის 1024 წერტილის ჰისტოგრამულ მნიშვნელობებს. უწყვეტი წრფე (9.5-5) განტოლების თანახმად, ალბათობის თეორიული განაწილებაა.

ასეთ შემთხვევებში p_i -ების სიმრავლეს ალბათობის ბუნებრივ ზომას ვუწოდებთ (არსებობს გამონაკლისები: თუ ტრაექტორია იწყება არასტაბილურ პერიოდულ ორბიტაზე, მისი ზომა განსხვავებულია ქაოსური ტრაექტორიის საწყისი წერტილით მიღებული ზომისაგან). ცნება „ზომა“ გამოიყენება წონის ან აქცენტის აზრით. რაც უფრო მეტჯერ გადის უჯრედს ტრაექტორია მით უფრო მეტია მისი ზომა ანუ წონა.

ერთგანზომილებიანი სისტემისათვის ალბათობის ზომას $\mu(x)$ -ის სახით ვადგენთ. თუ სისტემის დინამიკა ასახვის $f(x)$ ფუნქციითაა მოცემული და $\mu(x) = \mu(f(x))$, მაშინ ვამბობთ, რომ $\mu(x)$ არის **ალბათობის ინვარიანტული** ზომა. აქ ტერმინი **ინვარიანტული** ნიშნავს, რომ საბოლოო განაწილება სისტემის დინამიკის პროცესში უცვლელია.

ალბათობების დახასიათებისთვის ზოგჯერ უწყვეტი ფუნქციის გამოყენებაც შეგვიძლია. თუ მდგომარეობათა სივრცეს დავყოფთ მცირე ინტერვალებად (რომელიც აქამდე ზუსტად x ღერძს ემთხვეოდა), მაშინ შეგვიძლია განვაცხადოთ, რომ i -ურ უჯრედში ტრაექტორიის მოხვედრის ალბათობა მოიცემა ალბათობის *განაწილების* რაიმე უწყვეტი $p(x)$ ფუნქციის მეშვეობით შემდეგნაირად:

$$p_i = \mu(x_i) = \int_{cell\ i} p(x)dx \quad (9.5-3)$$

განმარტების მიხედვით, $p(x)dx$ წარმოადგენს იმის ალბათობას, რომ ტრაექტორია მოხვდება x -სა და $x + dx$ -ს შორის.

p_i -ის ვიზუალიზაციის კიდევ ერთი მეთოდი შემდეგში მდგომარეობს: მდგომარეობათა სივრცეში არსებულ მიმზიდველს მივაწეროთ M მასა. შემოვიღოთ მასის სიმკვრივის $\rho(x)$ ფუნქცია, ისე რომ $\rho(x)dx$ x -სა და $x + dx$ -ს შორის არსებული მიმზიდველის მასის ტოლი იყოს. ამ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ $m_i = p_i M$ i -ურ უჯრედთან დაკავშირებული მასაა, ხოლო p_i i -ურ უჯრედში მოხვედრილი მიმზიდველის მასური წილია.

9.4 ნახაზზე გამოსახულია ლოჯისტიკური ასახვის შესაბამისი ტრაექტორიის მნიშვნელობათა ჰისტოგრამა, როდესაც $A=4.0$. მონაცემები $x=0$ და $x=1$ მნიშვნელობებს შორის თანაბრად დანაწილებულ 20 „ყუთშია“ დაკომპლექტებული. როგორც ხედავთ, ჰისტოგრამა გარჩევის ასეთ დონეზე შედარებით გლუვია, სადაც ალბათობა იზრდება x მნიშვნელობებისათვის ნულისა და ერთის სიახლოვეს.

დინამიკური სისტემების უმრავლესობისთვის ალბათობის განაწილება შესაბამისი ტრაექტორიების რიცხვითი გამოთვლებით უნდა დადგინდეს. განსაკუთრებულ შემთხვევაში, როდესაც $A=4$, ალბათობის ინვარიანტული განაწილების ზუსტი სახით გამოთვლა შეგვიძლია. ამისთვის ლოჯისტიკურ ასახვას და ბერნულის წანაცვლებას შორის 6.8 პარაგრაფში მოყვანილი კავშირი უნდა გამოვიყენოთ. ლოჯისტიკური ასახვისთვის $p(x)$ და (5.8-3)-ის მეშვეობით შემოყვანილი θ ცვლადის $P(\theta)$ განაწილებებს შორის კავშირი ასეთია (როდესაც $A=4$):

$$p(x)dx = P(\theta)d\theta \quad (9.5-4)$$

ეს დამოკიდებულება გვამცნობს, რომ x -სა და $x + dx$ -ს შორის x -ის მოხვედრის ალბათობა ლოჯისტიკური ასახვისთვის იგივე უნდა იყოს, რაც ბერნულის ასახვისთვის θ -ს შესაბამისი მნიშვნელობის შემთხვევაში. ბერნულის წანაცვლების ასახვისთვის ტრანექტორიის მნიშვნელობები ერთგვაროვნადაა განაწილებული $0 \leq \theta \leq 1$ დიაპაზონში. ამრიგად, გვექნება $P(\theta)=1$. (5.8-3) განტოლების გამოყენებით შეგვიძლია dx დავუკავშიროთ $d\theta$ -ს. შედეგად მივიღებთ:

$$p(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} \quad (9.5-5)$$

9.4 ნახაზზე გამოსახული უწყვეტი წრფე გვიჩვენებს მოცემულ განაწილებას (სათანადო ნორმალიზაციის შემთხვევაში). ჰისტოგრამის მნიშვნელობები ამ მრუდთან საკმაოდ ახლოსაა (როდესაც ჰისტოგრამა 20 „წყუთში“ დაკომპლექტებული მნიშვნელობების 1024 წერტილითაა შექმნილი, რასაკვირველია, ორ ჰისტოგრამას შორის განსხვავების არსებობა სავსებით მოსალოდნელია)

ამოცანა 9.5-1. მიიღეთ (9.5-5) დეტალური გამოთვლების მეშვეობით.

ერგოდიული ქმედება

მუდმივ განაწილებაზე ყურადღების გამახვილების ერთ-ერთი მიზეზი ის არის, რომ იგი სისტემის გასაშუალოებული მახასიათებლების გამოთვლის განსხვავებულ (ხშირად უფრო მარტივ) ხერხებს გვაწვდის. მაგალითად, თუ სისტემის მდგომარეობათა სივრცის x ცვლადის მნიშვნელობაზე დამოკიდებულ რაიმე B მახასიათებელს განვიხილავთ, B -ს საშუალო დროითი მნიშვნელობა შეგვიძლია შემდეგნაირად განვსაზღვროთ:

$$\langle B \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T B(x(t))dt \quad (9.5-6a)$$

$$\langle B \rangle_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N B(x(t_i)) \quad (9.5-6b)$$

ინტეგრალური ფორმა საჭიროა, როდესაც $x(t)$ -ს დროის უწყვეტი ფუნქციაა (ანალიზური შედეგი). ჯამური ფორმა კი დისკრეტული დროითი მწკრივებისთვის გამოგადგება. უკანასკნელ შემთხვევაში $t_1 = T/N$ და $t_N = T$. B -ს ორივე შემთხვევაში დროის ფუნქციის სახით განვიხილავთ. რასაკვირველია, T დროის ინტერვალი საკმარისად დიდი უნდა იყოს, რათა სისტემის ქმედებათა ყველა სახე შევარჩიოთ. ამრიგად, ხშირად ვამატებთ ზღვარს $T \rightarrow \infty$.

სხვანაირად, საშუალო B -ს განსაზღვრა B -ს, როგორც x -ის ფუნქციის დადგენა და ამ მნიშვნელობის $[x, x + dx]$ ინტერვალში მოხვედრის ალბათობაზე გამრავლების საშუალებით შეგვეძლო:

$$\begin{aligned} \langle B \rangle_p &= \int B(x)p(x) \\ &= \sum_{i=1}^M B(x_i)p_i \end{aligned} \tag{9.5-7}$$

ინტეგრალური ფორმის შემთხვევაში განსაზღვრული გვაქვს (უწყვეტი) $p(x)$ ალბათობის განაწილება. ჯამური ფორმის შემთხვევაში მდგომარეობათა სივრცეში ვახდენთ აჯამვას მიმზიდველის არის M ინტერვალების (ან ბლოკების) მიხედვით (უწყვეტი განაწილება მათემატიკურად ზოგჯერ შესაძლოა არ არსებობდეს. იხ. [Ott, 1993, გვ. 51-55]).

თუ (9.5-6) გამოსახულების საშუალო მნიშვნელობა (9.5-7)-ის ტოლია, მაშინ ვიტყვით, რომ სისტემა ერგოდულია (ანუ დროის მიხედვით გასაშუალოებით იგივე შედეგს ვღებულობთ, როგორც მდგომარეობათა სივრცის მიხედვით გასაშუალებისას, სადაც მდგომარეობათა სივრცის სხვადასხვა არეს განსხვავებული წონები გააჩნიათ მათში ტრაექტორიის მოხვედრის ალბათობის მიხედვით). ტრადიციულ სტატისტიკურ მექანიკაში, ამგვარი ექვივალენტობა შესაძლებელია ე.წ. ერგოდულ **ჰიპოთეზად** მივიღოთ. (ალბათ გახსოვთ, რომ ერგოდულობის ცნება მე-8 თავში მოყვანილ ჰამილტონისეულ სისტემებთან დაკავშირებითაც შეგვხვდა).

ამ ტიპის სისტემის შემთხვევაში გამოვთვალოთ ლიაპუნოვის საშუალო ექსპონენტა ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციისთვის, როდესაც პარამეტრის მნიშვნელობა $A=4$. A -ს ამ მნიშვნელობისას, ალბათობის სიმკვრივე მოცემულია (9.5-5) ფორმულით $x \in (0,1)$ -თვის. (5.4-11)-ის ძალით, ლიაპუნოვის ექსპონენტის „ლოკალური“ მნიშვნელობაა

$$\lambda(x) = \ln |f'(x)| \tag{9.5-8}$$

ლიაპუნოვის საშუალო ექსპონენტის გამოთვლა ალბათობის განაწილების მეშვეობითაც შეგვიძლია:

$$\lambda = \int_0^1 p(x) \ln |f'(x)| dx = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\ln |4(1-2x)|}{\sqrt{x(1-x)}} dx \quad (9.5-9)$$

თუ $x = \sin^2(\pi y/2)$ ჩასმას განვახორციელებთ, გვექნება

$$\begin{aligned} \lambda &= \int_0^1 \ln |4 \cos(\pi y)| dy \\ &= \ln 2 \end{aligned} \quad (9.5-10)$$

არსებობს მოცემული ინტეგრალის მნიშვნელობების შესაბამისი ცხრილი. აქ მთავარი ის არის, რომ ლიაპუნოვის ექსპონენტი დადებითია და ფაქტობრივად $\ln 2$ -ის ტოლია, რაც (5.9-1) განტოლების მიხედვით, ბერნულის წანაცვლების ასახვისა და კარვის ასახვის შემთხვევაში მიღებული მნიშვნელობის ტოლია, როდესაც $r=1$.

მიღებული შედეგი გვამცნობს, რომ ლიაპუნოვის ექსპონენტა *ცვლადების ცვლილებისგან გარდაქმნის მიმართ*. რატომ არის ამგვარი დამოუკიდებლობა მნიშვნელოვანი? ექსპერიმენტული კვლევისას ჩვენ მიერ ჩაწერილი სიგნალი ხშირად უშუალოდ დინამიკურ ცვლადს არ წარმოადგენს. მაგალითად, თუ ლორენცის ტიპის სისტემის ხსნარის ტემპერატურას ვაკონტროლებთ, მაშინ ელექტრულ სიგნალს ვაფიქსირებთ თერმისტორის ან თერმოელემენტის ტემპერატურის მიხედვით. ჩაწერილი ელექტრული სიგნალების გამოყენება სისტემის ლიაპუნოვის ექსპონენტის გამოსათვლელად გამოგადგება, რადგანაც ექსპონენტა ტემპერატურულიდან ძაბვის შესაბამის ცვლადზე გარდასვლის მიმართ დამოუკიდებელია.

ამოცანა 9.5-2. დაიწყეთ (9.3-4) განტოლებაში ლიაპუნოვის ექსპონენტის განსაზღვრით და აჩვენეთ, რომ ცვლადების $u = ax + b$ წრფივი გარდაქმნა ლიაპუნოვის ექსპონენტს არ ცვლის. ცვლადების გარდაქმნების რა ზოგადი კლასები იწვევს λ -ს უცვლელობას?

9.6 კოლმოგოროვ-სინაის ენტროპია

ამ პარაგრაფში წარმოგიდგენთ თერმოდინამიკიდან და სტატისტიკური მექანიკიდან ჩვენთვის კარგად ცნობილ ენტროპიის ცნებაზე აგებული ქაოსური ქმედების ამსახველ რამდენიმე მეთოდს. როგორც მე-10 თავში ვნახავთ, ენტროპიას გამოყენებაზე დამყარებული მეთოდების დინამიკური სისტემების აღწერასთან დაკავშირებული ფორმალიზმის მიღწევის საშუალებას გვაძლევს.

ენტროპიის მოკლე მიმოხილვა

თავდაპირველად ენტროპიის ცნებას სტატისტიკური მექანიკის თვალსაზრისით განვიხილავთ. ყველაზე ფუნდამენტური განსაზღვრების თანახმად, ენტროპია საკვლევი სისტემის „დასაშვებ მდგომარეობათა“ რიცხვია. სტატისტიკური მექანიკა სისტემის მაკროსკოპულ (მსხვილმასშტაბიან) თვისებებს, როგორცაა წნევა, მოცულობა და აირის ტემპერატურა, უკავშირებს აირის შემადგენელი ატომებისა და მოლეკულების მდებარეობებსა და სიჩქარეებს. თითქმის ყველა შემთხვევაში, ერთი და იგივე მაკროსკოპულ მდგომარეობას (ანუ მდგომარეობა, რომლისთვისაც გვაქვს ტემპერატურისა და წნევის კონკრეტული მნიშვნელობები) შეესაბამება მიკროსკოპულ მდგომარეობათა (ინდივიდუალური ატომებისა და მოლეკულების მდებარეობები და სიჩქარეები წარმოადგენს დროის ფუნქციას) დიდი რაოდენობა. შედეგად სისტემის S ენტროპიას ასე განვსაზღვრავთ:

$$S = k \ln N \quad (9.6-1)$$

სადაც N მიღებული მოცემული მაკროსკოპული მდგომარეობის შესაბამისი მიკრო-მდგომარეობათა რაოდენობაა; k ე.წ. ბოლცმანის მუდმივაა და განსაზღვრავს იმ ერთეულებს, რომელშიც ენტროპია იზომება (SI სისტემაში $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ ჯოული/კელვინი).

თერმოდინამიკის მეორე კანონის თანახმად, სპონტანური სითბური პროცესების მომცველი იზოლირებული სისტემის ენტროპია მუდმივია და ან იზრდება. მეორე კანონი გვამცნობს, რომ სისტემა იმ მაკროსკოპულ მდგომარეობათა გავლით განიცდის ევოლუციას,

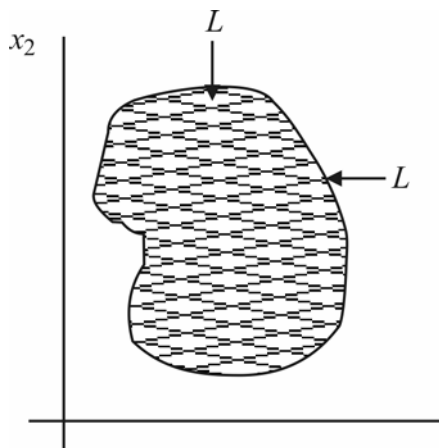
რომელთათვისაც მოცემული მახასიათებლების შესაბამისი დასაშვებ მდგომარეობათა რაოდენობა უდიდესია.

ალბათ შენიშნეთ, რომ ჩვენ გვერდი ავუარეთ რთულ საკითხს, თუ როგორ უნდა გამოვთვალოთ დასაშვებ მდგომარეობათა რაოდენობა. ამ მიზნით განვიხილოთ შემთხვევა, რომელიც გვიჩვენებს არაწრფივ დინამიკასთან დაკავშირებით ენტროპიის გამოყენების მეთოდის გამოყენებას. კვანტურ სტატისტიკურ მექანიკაში, სადაც კვანტურ მექანიკას მიკროსკოპული სისტემის აღწერისთვის ვიყენებთ, გამოთვლის პროცედურა სრულიად განსაზღვრულია, ვინაიდან კვანტური მექანიკა ავტომატურად გულისხმობს დასაშვებ მდგომარეობათა დისკრეტულ სიმრავლეს შემოსაზღვრული სისტემისათვის.

თუ სისტემა იზოლირებული არ არის ან თერმოდინამიკურ წონასწორობაში არ იმყოფება, ყოველი მდგომარეობის ალბათობა თანაბარი არაა. ენტროპიის განსაზღვრების განზოგადება ამ შემთხვევასთან დაკავშირებითაც შეგვიძლია. ამისთვის (9.6-1) გამოსახულება გადაწეროთ თითქმის თანაბარი შემთხვევისათვის და ჩავთვალოთ, რომ განაწილების სისტემის i -ურ დასაშვებ მდგომარეობაში ყოფნას შეესაბამება p_i ალბათობა. თანაბარ ალბათობის შემთხვევაში ნებისმიერი დასაშვები მდგომარეობისთვის $p_i = p = 1/N$. განვიხილოთ სისტემათა ისეთი სიმრავლე, რომელთაც მაკროსკოპული მახასიათებლების ერთი და იგივე მნიშვნელობები შეესაბამება. შემდეგ ვარკვევთ რას უდრის ერთ-ერთი ასეთი სისტემის კონკრეტულ მიკრომდგომარეობაში მოხვედრის ალბათობა. ამ ალბათობათა მიხედვით მიღებული ენტროპიის გამოსახულება შემდეგია:

$$S = -k \ln p \tag{9.6-2}$$

შენიშნეთ, რომ S კვლავ არაუარყოფითია, ვინაიდან $p \leq 1$.



ნახაზი 9.5. ორგანზომილებიანი მდგომარეობათა სივრცე დაყოფილია L ზომის მქონე მცირე ზომის უჯრედებად.

თუ ყოველი ალბათობა ერთი და იგივე \underline{p} არის, მაშინ (9.6-2) განტოლების განზოგადება იქნება

$$S = -k \sum_r p_r \ln p_r \quad (9.6-3)$$

სადაც p_r სისტემის r -მიკრომდგომარეობაში ყოფნის ალბათობაა. (9.6-3)-ის დამტკიცებისთვის იხილეთ მაგალითად [Chandler, 1987].) ჯამი სისტემის ყოველი მდგომარეობის მიხედვით უნდა ავიღოთ (იმ პირობით, რომ მდგომარეობათა ზღვრული რაოდენობა არსებობს). თუ მდგომარეობა არ არის დასაშვები, მაშინ $p_r=0$ და ამ შემთხვევაში მდგომარეობა ენტროპიაში რაიმე როლს აღარ ასრულებს.

ამოცანა 9.6-1. (a) აჩვენეთ, რომ როდესაც $p_r \rightarrow 0$, მაშინ $p_r \ln p_r \rightarrow 0$. (b) აჩვენეთ, რომ როდესაც N რაოდენობის დასაშვებ მდგომარეობებისათვის $p_r=1/N$ და ნებისმიერი არადასაშვები მდგომარეობისათვის $p_r=0$, (9.6-3) დაიყვანება (9.6-2) სახეზე.

ენტროპია მდგომარეობათა სივრცის დინამიკის შემთხვევაში

ამჯერად ენტროპიას მდგომარეობათა სივრცეში დინამიკური სისტემის ქმედების აღწერისათვის გამოვიყენებთ. თავდაპირველად გვსურს გავარკვიოთ, თუ რაშია „თვლადი მდგომარეობების“ არსი. ასეთ „დათვლას“ სივრცის თანაბარი ზომის უჯრედებად დაყოფის გზით ვაწარმოებთ. დისიპაციური სისტემის შემთხვევაში (რომლისთვისაც მიმზიდველი არსებობს), მხოლოდ მიმზიდველის შემცველი არის დაყოფა გვესაჭიროება (კონსერვატიული სისტემის შემთხვევაში, ტრაექტორიების შესაძლო მოხვედრის მთლიან არეს დაყოფთ.) 9.5 ნახაზი წარმოგვიდგენს ასეთ დაყოფას ორგანზომილებიანი მდგომარეობათა სივრცისათვის.

ამის შემდეგ ერთი უჯრედის ფარგლებში განთავსებული საწყისი პირობების გარკვეული სიმრავლის მქონე სისტემის დინამიკას შევისწავლით. დროთა განმავლობაში ტრაექტორიები უჯრედების უფრო და უფრო მეტ რაოდენობაზე „გავრცელდებიან“. დროის n ერთეულის (თითოეული τ ხანგრძლივობისა) გასვლის შემდეგ ვითვლით ფარდობით p_r სიხშირეს (ალბათობას), რომლითაც სისტემა თითოეულ უჯრედს „აკითხავს“. შემდეგ S_n ენტროპიას ამგვარად ვსაზღვრავთ

$$S_n = -k \sum_r p_r \ln p_r \quad (9.6-4)$$

შენიშნეთ, რომ p_r დროის n ერთეულის გასვლის შემდეგ თავდაპირველ უჯრედში დაწყებული ტრაექტორიის r -**UI** უჯრედში მოხვედრის ალბათობაა (მომავალში აღნიშვნის სიმარტივისთვის ჩავთვლით, რომ $k=1$).

ალბათობის არსთან დაკავშირებით კვლავ სიფრთხილე გვმართებს. კერძოდ, განვიხილოთ ტრაექტორიის შემადგენელი M რაოდენობის წერტილი საწყის უჯრედში. დროის n ერთეულის გასვლის შემდეგ მივიღებთ r -ულ უჯრედში ტრაექტორიის შესაბამის M_r წერტილებს. შემდეგ ალბათობას $p_r = M_r / M$ სახით განვსაზღვრავთ ანუ p_r იქნება ამ დროისთვის r -ულ უჯრედში მოხვედრილი ტრაექტორიის წერტილების წილი.

ვიდრე ამ იდეების შემდგომ განვითარებაზე გადავიდოდეთ, განვიხილოთ რამდენიმე მარტივი შემთხვევა იმის საჩვენებლად, თუ რამდენად ვარგისია ენტროპიის ზემოთ მოყვანილი განსაზღვრება. თავდაპირველად დავუშვათ, რომ დროთა განმავლობაში ტრაექტორიები ერთი უჯრედიდან მომდევნოსაკენ ერთად “მიემართებიან”. მაშინ $p_r = 1$ დაკავებული უჯრედისთვის და $p_r = 0$ თავისუფალი უჯრედებისთვის. ამ შემთხვევაში ყოველი n -ისთვის $S_n = 0$. ამრიგად, მუდმივი ენტროპია შეესაბამება რეგულარულ მოძრაობას (ვთქვათ, ზღვრული ციკლის გასწვრივ). მეორე შემთხვევაში დავუშვათ, რომ დროთა განმავლობაში დაკავებული უჯრედების N_n რიცხვი მატულობს და ყოველ დაკავებულ უჯრედს ერთი და იგივე ალბათობა, კერძოდ $1/N_n$, გააჩნია. მაშინ ენტროპია იქნება

$$S_n = +\ln N_n \quad (9.6-5)$$

დაკავებული უჯრედების რაოდენობის ნატურალური ლოგარითმის ზრდასთან ერთად ენტროპიაც იზრდება.

სრულიად უწყესრიგოს ტიპის სისტემის შემთხვევაში ტრაექტორიის შემადგენელი M რაოდენობის წერტილებიდან თითოეული საკუთარ უჯრედში „ჩახტება“ (იმ პირობით, რომ უჯრედები საკმარისად მცირეა ტრაექტორიის სხვადასხვა წერტილის გარჩევისთვის). ამ შემთხვევაში $S_n = \ln M$. მნიშვნელოვანია, რომ M -ის ზრდასთან ერთად ეს რიცხვი უსაზღვროდ მატულობს. მდგომარეობათა სივრცის ცვლადების მცირე რაოდენობის მქონე, ჩვეულებრივი ან ქაოსური დეტერმინისტული სისტემისთვის და დიდი M -ის შემთხვევაში, ენტროპია M -სგან დამოუკიდებელი ხდება.

ამ მაგალითებიდან ერთი მნიშვნელოვანი დასკვნა შესაძლებელია გავაკეთოთ: ჩვენ არა თვით ენტროპიის მნიშვნელობით, არამედ ენტროპიის ცვლილებებით ვინტერესდებით. მაგალითად, თუ ორი უჯრედის მიხედვით საწყისი პირობების სიმრავლეს ვირჩევთ და თუ

მოდრაობა რეგულარულია, მაშინ ენტროპიის მნიშვნელობა ვერ იქნება ნულის ტოლი, მაგრამ სისტემის განვითარებასთან ერთად იგი უცვლელი დარჩება. ენტროპიის კოლმოგოროვ-სინაის სიჩქარე (ზოგჯერ $K-S$ ენტროპიად წოდებული) აღწერს ენტროპიის ცვლილების სიჩქარეს სისტემის განვითარებასთან ერთად. დროის n ერთეულის გასვლის შემდეგ $K-S$ ენტროპია ამგვარად განისაზღვრება:

$$K_n = \frac{1}{\tau} (S_{n+1} - S_n) \quad (9.6-6)$$

ანუ K_n ენტროპიის ცვლილების სიჩქარეა დროის $(n\tau, (n+1)\tau)$ ინტერვალში.

რეალურად გვჭირდება საშუალო $K-S$ ენტროპიის მნიშვნელობა მიმზიდველზე. K -ს საშუალო მნიშვნელობას განვსაზღვრავთ შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} K &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\tau} \sum_{n=0}^{N-1} (S_{n+1} - S_n) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\tau} [S_N - S_0] \end{aligned} \quad (9.6-7)$$

N -ის ძალიან დიდი მნიშვნელობის აღება ნიშნავს ტრაექტორიების ხანგრძლივ ევოლუციას და მთლიანი მიმზიდველის დაფარვისათვის „საშუალების მიცემას“.

ამჯერად შემოვიტანთ ორ დამატებით ზღვარს: პირველი მათგანის შემთხვევაში უჯრედის ზომა ნულისაკენ მიისწრაფვის, ასე რომ მდგომარეობათა სივრცის სულ უფროდაუფრო ფაქიზ დაყოფას მივმართავთ. ამ პროცედურამ K მდგომარეობათა სივრცის დაყოფის დეტალებისგან დამოუკიდებელი უნდა გახადოს. მეორე ზღვარი მიიღება, როდესაც დროის τ ინტერვალის ნულისაკენ მიისწრაფვის ანუ ვიყენებთ სულ უფროდაუფრო მცირე დროის ინტერვალს და დინამიკას უფრო ფაქიზად აღვწერთ. ყველა ზღვარზე ერთდროულად გადასვლით მივიღებთ $K-S$ ენტროპიის შემდეგ განსაზღვრებას:

$$K = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{L \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\tau} [S_N - S_0] \quad (9.6-8)$$

$K-S$ ენტროპიის პუნქარეს კვთებთან და იტერაციულ ასახვებთან დაკავშირებისას ვუშვებთ, რომ $\tau=1$ და გადავდივართ ზღვარზე, როდესაც $\tau \rightarrow 0$.

მოვიყვანოთ კიდევ ერთი მაგალითი. დავუშვათ, რომ დაკავებული N_n უჯრედების რიცხვი დროში ექსპონენციალურად იზრდება

$$N_n = N_0 e^{\lambda n \tau} \quad (9.6-9)$$

და რომ ყოველ უჯრედს ერთიდაიგივე $p_r = 1/N_n$ ალბათობა გააჩნია. ამ შემთხვევაში K–S ენტროპია დაკავებული უჯრედების რაოდენობის ექსპონენციალური ზრდის λ პარამეტრის ტოლია. დაკავებული უჯრედების რაოდენობა, თავდაპირველად ერთი უჯრედის დამკავებელ ტრაექტორიებს შორის არსებულ მანძილისადმი პროპორციულია. ამრიგად λ ლიაპუნოვის (საშუალო) ექსპონენტაა სისტემისათვის. დაკავებული უჯრედების რაოდენობის ექსპონენციალური ზრდისა და დაკავებული უჯრედების თანაბარი ალბათობის შემთხვევაში K–S ენტროპია და ლიაპუნოვის ექსპონენტა ერთი და იგივე სიდიდეა. ერთზე მეტი ლიაპუნოვის ექსპონენტის არსებობის შემთხვევაში აღმოჩნდა, რომ K–S ენტროპია ლიაპუნოვის დადებითი ექსპონენტების ჯამის ტოლია. ეს შედეგი პესინის იგივეობის სახელითაა არის ცნობილი (PES77)(PPV86)(GER90).

ამოცანა 9.6-1. აჩვენეთ, რომ წინა პარაგრაფში მოყვანილი პირობების შემთხვევაში $K_n = \lambda$.

K–S ენტროპიის ალტერნატიული განსაზღვრება

არაწრფივი დინამიკისადმი მიძღვნილ ლიტერატურაში ზოგჯერ K–S ენტროპიის განსხვავებული განსაზღვრება გამოიყენება (იხ. მაგალითად, [Schuster, 1995]). ამგვარი განსაზღვრების მნიშვნელობა მე-10 თავში გახდება ცხადი. მდგომარეობათა სივრცის მიზიდულობის არეს უჯრედებით ვფარავთ. შემდეგ ერთ-ერთ უჯრედში ტრაექტორიას საწყისს მივანიჭებთ და ამ უჯრედს $b(0)$ -ით აღვნიშნავთ. τ დროის შემდეგ ტრაექტორიის წერტილი $b(1)$ უჯრედში, $t = 2\tau$ მომენტისათვის $b(2)$ უჯრედში და ა.შ. იქნება, ხოლო საბოლოოდ $t = N\tau$ უჯრედში აღმოჩნდება. ამრიგად მივიღებთ უჯრედების გარკვეულ $b(0), b(1), \dots, b(N)$ მიმდევრობას

შემდეგ იმავე საწყისი უჯრედიდან მეორე ტრაექტორიას „უშვებთ“. რადგან ზუსტი საწყისი პირობები ერთმანეთისგან ოდნავ განსხვავებულია, მეორე მიმდევრობისთვის უჯრედთა აღნიშვნების განსხვავებული მიმდევრობა გვექნება. ამ პროცესს მრავალჯერ ვიმეორებთ და მიმდევრობების დიდ რაოდენობას ვკმნით.

შემდეგ ვითვლით i -ური მიმდევრობის ფარდობით $p(i)$ სიხშირეს. S_n ენტროპია იქნება

$$S_n = \langle -\sum_i p(i) \ln p(i) \rangle \quad (9.6-10)$$

სადაც ჯამი აღებულია $b(0)$ -ით დაწყებული ყოველი მიმდევრობის მიხედვით. ფრჩხილები $\langle \rangle$ ნიშნავს, რომ მიღებულ ჯამს ვასაშუალოებთ.

საბოლოოდ $K-S$ ენტროპიას ვსაზღვრავთ, როგორც მიმდევრობის სიგრძეზე დამოკიდებული ენტროპიის ზრდის საშუალო სიჩქარეს:

$$K = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} (S_N - S_0) \quad (9.6-11)$$

შევამოწმოთ მოცემული განსაზღვრება ზოგიერთ განსაკუთრებულ შემთხვევაში. თავდაპირველად დავუშვათ, რომ ერთსა და იმავე საწყის უჯრედში საწყისის მქონე ყოველი მიმდევრობა ერთი და იგივე ანუ ჩვენს წინაშე რეგულარული მოძრაობა. ერთსა და იმავე უჯრედში საწყისის მქონე ყოველი ტრაექტორია დროთა დანარჩენების „კვალს გაჰყვება“. მაშინ ნებისმიერი ყოველი N -სთვის $S_N = 0$ და როდესაც S უცვლელია, $K = 0$. მეორე უკიდურესობის სახით დავუშვათ, რომ M რაოდენობის მიმდევრობებიდან თითოეული მხოლოდ ერთხელ ვლინდება (ანუ სისტემა „უკიდურესად შემთხვევითია“). ამ შემთხვევაში $p(i) = 1/M$, $S_n = \ln M$ და M -ის ზრდასთან ერთად, აღინიშნება უსაზღვრო ზრდა. ამრიგად ვხედავთ, რომ შერჩეული ტრაექტორიების რაოდენობის ზრდასთან ერთად, $K-S$ ენტროპიაც იზრდება.

ამჯერად დავუშვათ, რომ მიმდევრობებიათა M_{seq} რაოდენობა N -თან ერთად ექსპონენციალურად იზრდება:

$$M_{seq} = e^{\lambda N} \quad (9.6-12)$$

ცხადია, λ სისტემის ლიაპუნოვის ექსპონენტია. თუ დავუშვებთ, რომ ნებისმიერი მიმდევრობა ერთი და იგივე $p(j) = 1/M_{seq}$ ალბათობით ვლინდება, მაშინ $K-S$ ენტროპიისათვის მივიღებთ, რომ $K = \lambda$.

ამრიგად, კიდევ ერთხელ ვართ K-S ენტროპიისა და ლიაპუნოვის (დადებითი) ექსპონენტის ტოლობის მიმსწრენი. K-S ენტროპიას, ლიაპუნოვის ექსპონენტასა და ტრადიულ თერმოდინამიკულ ენტროპიას შორის კავშირი მრავალი თერმოდინამიკური სისტემისათვის არის შემოწმებული. საბოლოოდ ვასკვნით, რომ მრავალი გარემოების შემთხვევაში ისინი ერთმანეთთან პროპორციულ დამოკიდებულებაში იმყოფებიან. მაგალითად იხილეთ BLR95, DAV98 და LAB99.

ამჯერად K-S ენტროპიის გამოთვლას მე-10 თავისთვის გადავდებთ, სადაც K-S ენტროპიის დადგენის ხერხებს ზოგადი და მძლავრი გამოთვლითი სქემების გამოყენებით განვიხილავთ.

9.7 ფრაქტალური განზომილებები

წინა პარაგრაფში აღწერილი ქაოსის რაოდენობრივი წარმოდგენის ორივე მეთოდი ტრაექტორიების დინამიკურ (დროზე დამოკიდებულ) ასპექტებს ითვალისწინებს. რიცხვითი მახასიათებლების მეორე კატეგორია ყურადღებას მიმზიდველების გეომეტრიულ ასპექტებზე ამახვილებს. ტრაექტორიებს დიდი ხნის განმავლობაში გადაადგილების “საშუალებას ვაძლევთ” და მონაცემთა ხანგრძლივ დროით მწკრივებს ვადგენთ. ამრიგად, ამ მწკრივების მდგომარეობათა სივრცეში განაწილებასთან დაკავშირებით გეომეტრიული შინაარსის შეკითხვების დასმა შეგვიძლია. ჩვენდა მოულოდნელად, გეომეტრია ტრაექტორიის დინამიკის ბუნების კვლევის მძლავრი საშუალება აღმოჩნდა.

რა არის მიმზიდველის ეფექტური განზომილება? მაგალითად, თუ მიმზიდველი ფიქსირებული წერტილია, ვამბობთ, რომ რადგან გეომეტრიაში წერტილი ნულოვანი განზომილების მქონე სხეულია, განზომილება ნულის ტოლია. თუ მიმზიდველი წრფე ან უბრალო ჩაკეტილი მრუდია, ვამბობთ, რომ რადგან წრფე ან ჩაკეტილი მრუდი ერთგანზომილებიანი სხეულია, განზომილება ერთის ტოლია. წრფე თუ ზედაპირი ორგანზომილებიანია, მყარი სხეულის მოცულობის განზომილება 3-ის ტოლი იქნება. ამასთან ერთად, ჩვენ უფრო მეტი განზომილების მქონე „ჰიპერარეებსზე“ შეგვიძლია ვისაუბროთ.

რატომ არის განზომილება მნიშვნელოვანი? როგორც მე-3, მე-4 და მე-8 თავებში ვნახეთ, მდგომარეობათა სივრცის განზომილება მჭიდრო კავშირშია დინამიკასთან. განზომილება მნიშვნელოვან როლს ასრულებს შესაძლო დინამიკური ქმედების დიაპაზონის განსაზღვრაში. მიმზიდველის განზომილება ხანგრძლივი პერიოდის დინამიკის შესახებ

გვაძლევს ინფორმაციას. მაგალითად, მიმზიდველის განზომილება სისტემის თავისუფლების მოქმედი ხარისხების „ნუსხას გვაწვდის“.

აღსანიშნავია ორი მომენტი: (1) დისიპაციური დინამიკური სისტემისთვის მიმზიდველის D განზომილება მდგომარეობათა სივრცის d განზომილებაზე ნაკლები უნდა იყოს, რადგან ვიცით, რომ საწყისი პირობების შესაბამისი d განზომილების მქონე მდგომარეობათა სივრცის მოცულობა ნულამდე განიცდის კოლაფსს (გავიხსენოთ, რომ მდგომარეობათა სივრცის d განზომილება სისტემის მდგომარეობის აღწერისთვის საჭირო ცვლადების მინიმალური რაოდენობით განისაზღვრება). მიმზიდველი $d - 1$ განზომილების მქონე „ზედაპირი“ ან რაიმე უფრო მცირე განზომილების საგანი შესაძლებელია იყოს. ჩვენ მხოლოდ გვესაჭიროება, რომ მდგომარეობათა სივრცეში მიმზიდველმა ნულის ტოლი მოცულობა დაიკავოს. (2) თუ ვიკვლევთ პუანკარეს კვეთას, მაშინ მიმზიდველის პუანკარეს კვეთის D^* განზომილება მთლიანი მდგომარეობათა სივრცის მიმზიდველის D განზომილებაზე 1-ით ნაკლები იქნება ($D = D^* + 1$).

ჰამილტონის სისტემისათვის ტრაექტორიის მიერ შექმნილი წერტილების სიმრავლის განზომილება $d - 1$ -ზე მეტი არ უნდა იყოს, რადგან მე-8 თავში მოყვანილი არგუმენტის თანახმად, ტრაექტორიები მდგომარეობათა სივრცეში მუდმივი ენერჯის „ზედაპირის“ ფარგლებში იმყოფებიან. პუანკარეს კვეთის გამოყენებისას უდიდესი შესაძლო განზომილება მცირდება. მოძრაობის მუდმივების დამატებითი რაოდენობის მქონე სისტემებში განზომილება კიდევ უფრო შემცირებულია.

განზომილებათა შესახებ ზემოთმოყვანილი არგუმენტების დასამტკიცებლად განვიხილოთ მდგომარეობათა სამგანზომილებიანი სივრცე. ვთქვათ, \vec{f} წარმოადგენს სისტემის შესაბამის დროზე დამოკიდებულ ფუნქციას სიმრავლეს (იხ. პარაგრაფი 4.4). თუ მდგომარეობათა სივრცის ნებისმიერი წერტილისთვის $div \vec{f} < 0$, მაშინ მიმზიდველი დაიყვანება წერტილამდე ან მრუდამდე. ასეთ სისტემაში ხანგრძლივი ქმედება კვაზი-პერიოდული ვერ იქნება, რადგან კვაზიპერიოდული ტრაექტორიები თორის ზედაპირზე „ცხოვრობენ“. რატომ ხდება ასე? თუ თორის შიგნით განაწილებული საწყისი წერტილების სიმრავლეს განვიხილავთ და ყველგან $div \vec{f} < 0$ მაშინ ამ წერტილების მიერ დაკავებული მოცულობა ნულამდე უნდა დავიდეს, ხოლო თორი კი უნდა გაქრეს. ეს არგუმენტი გვამცნობს, რომ პირველ თავში აღწერილი ლორენცის მოდელი ვერ აღწერს კვაზი-პერიოდულ ქმედებას, რადგანაც მდგომარეობათა სივრცის ნებისმიერი წერტილისთვის

$$div \vec{f} < 0.$$

მეცნიერებისთვის და მათემატიკოსებისთვის დიდ გამოცანაა, რომ არამთელი განზომილების მქონე გეომეტრიული სხეულები ქაოსური სისტემების დინამიკაში ფუნდამენტურ როლს ასრულებს. ამ გეომეტრიულ სხეულებს **ფრაქტალები** [Mandelbrot, 1982] ეწოდება, რადგან მათი განზომილება, მთელი რიცხვი არ არის. ასეთი ფრაქტალური განზომილებების შესახებ საუბრისას განზომილების რაოდენობრივად განმსაზღვრელი საშუალო სიდიდეები უნდა დავადგინოთ.

თუ დისიპაციური სისტემისთვის მიმზიდველს ფრაქტალური განზომილება აქვს, მაშინ ვამბობთ, რომ სისტემას **უცნაური მიმზიდველი** გააჩნია.

არაწრფივი დინამიკის შესწავლის დამწყებთათვის ავლნიშნავთ, რომ დღესდღეისობით განზომილების არაერთი სხვადასხვა განსაზღვრება არსებობს. მიუხედავად იმისა, რომთითოეული მათგანი განზომილების განსხვავებულ რიცხვით მნიშვნელობებს გვაწვდის, ზოგჯერ ეს ციფრები ერთმანეთთან დაახლოებულია. სირთულეებს კიდევ უფრო ამძაფრებს ტერმინ **ფრაქტალური განზომილების** უაზროდ და უმისამართოდ გამოყენება. ჩვენ მხოლოდ იმ განზომილებების შესახებ მსჯელობით შემოვიფარგლებით, რომლებიც დინამიკური სისტემის კვლევას ყველაზე მეტად მიესადაგებიან. სხვადასხვა სახის განზომილებათა შესახებ საფუძვლიან ინფორმაციას FOY83-ში შევხვდებით. დავიწყოთ მსჯელობა ე.წ. **უჯრედების მთვლელი განზომილების (მოცულობითი განზომილების)** მეშვეობით, რადგან უჯრედების სიმრავლე გამოთვლებში ხშირად გამოიყენება. ეს განზომილება გასაგებად შედარებით ადვილია, მაგრამ ირკვევა, რომ მაღალი განზომილებების მქონე მდგომარეობათა სივრცეებისთვის მისი გამოყენება დიდ სარგებელს ვერ მოგვიტანს. ეს საზომი თავდაპირველად დინამიკასთან დაკავშირებით გამოიყენა კოლმოგოროვმა (KOL58).

გეომეტრიული სხეულის უჯრედების მთვლელი D_b განზომილება საკვლევი გეომეტრიული ობიექტის მიერ დაკავებული სივრცის დამფარავი და R სივრცის მქონე „უჯრედების“ კონსტრუქციაა. ერთგანზომილებიანი სიმრავლის შემთხვევაში (როგორცაა მდგომარეობათა ერთგანზომილებიანი სივრცის ტრაექტორიის x მნიშვნელობათა მწკრივი) უჯრედები პრაქტიკულად წრფეზე განლაგებული R სივრცის მქონე მონაკვეთებია. ორი განზომილების შემთხვევაში ისინი კვადრატები, სამის შემთხვევაში – კუბები და ა.შ. იქნებიან. შემდეგ დავითვლით გეომეტრიული სხეულის ყველა წერტილის „დატევისათვის“ საჭირო უჯრედების $N(R)$ მინიმალურ რაოდენობას. როდესაც თითოეული უჯრედის ზომას შემცირების საშუალებას მივცემთ, R -ის შემცირებასთან ერთად $N(R)$ -ის ზრდას ველით. **უჯრედთა** მთვლელი D_b განზომილება ასე განისაზღვრება

$$N(R) = \lim_{R \rightarrow 0} kR^{-D_b} \quad (9.7-1)$$

სადაც k პროპორციულობის კოეფიციენტია. (9.7-1)-ის ორივე მხრის გალოგარითმების გზით მივიღებთ:

$$D_b = \lim_{R \rightarrow 0} \left\{ -\frac{\log N(R)}{\log R} + \frac{\log k}{\log R} \right\} \quad (9.7-2)$$

როდესაც R ძალიან მცირდება, (9.7-2)-ის უკანასკნელი წევრი ნულისაკენ მიისწრაფვის და გვექნება

$$D_b = -\lim_{R \rightarrow 0} \frac{\log N(R)}{\log R} \quad (9.7-3)$$

რომ დავრწმუნდეთ (9.7-3) განსაზღვრების მიზანშეწონილობაში, იგი კონკრეტულ მაგალითთან დაკავშირებით გამოვიყენოთ. თავდაპირველად ორგანზომილებიანი სივრცე განვიხილოთ და გეომეტრიული ობიექტი წერტილად ჩავთვალოთ. ამ შემთხვევაში უჯრედი R გვერდის მქონე კვადრატია. წერტილის შესადგენად ერთადერთი უჯრედი საკმარისია, ამიტომ R -ის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის $N(R)=1$. ამ შედეგის (9.7-3)-ში ჩასმით მივიღებთ, რომ $D_b = 0$, რასაც ჩვენ წერტილის შემთხვევაში ველოდით.

რა ხდება, როდესაც ობიექტი იზოლირებული წერტილებისაგან შედგება? ამ შემთხვევაში D_b კვლავ 0-ის ტოლია. თუ N იზოლირებული წერტილების რაოდენობაა და R საკმარისად მცირეა, ნებისმიერი წერტილის გარშემო ერთი უჯრედი იარსებებს. როდესაც R ამ მნიშვნელობაზე მცირე გახდება, (9.7-3)-ის მრიცხველი კვლავ იგივე იქნება, ხოლო მნიშვნელი უსასრულოდ გაიზრდება. ამრიგად, $D_b = 0$.

ამოცანა 9.7-1. ალბათ დაგაფიქრათ ფაქტმა, რომ (9.7-3) განტოლება სივრცის ლოგარითმს შეიცავს, რომელიც სხვადასხვა ერთეულით იზომება (მაგ. მეტრი, ფურლონგი (1/8 მილი=201მ.). აჩვენეთ, რომ R -სთვის ერთეულების შერჩევას D_b -ს რიცხვით მნიშვნელობაზე გავლენა არ აქვს.

მეორე შემთხვევაში განვიხილოთ L სიგრძის მქონე წრფის მონაკვეთი. აქ მონაკვეთის დაფარვას $N(R) = L/R$ უჯრედი სჭირდება [როდესაც N საკმარისად დიდია, $N(R)$ -ის გამოთვლისას უჯრედის ნებისმიერი წილი შეგვიძლია უგულვებელყოთ. თუ ამ მნიშვნელობას (9.7-3)-ში ჩავსვამთ, მივიღებთ:

$$D_b = -\lim_{R \rightarrow 0} \frac{\log(L/R)}{\log R} = -\lim_{R \rightarrow 0} \frac{\log L - \log R}{\log R} = 1 \quad (9.7-4)$$

როგორც ველოდით, წრფის სეგმენტის უჯრედთა მთვლელი განზომილება ერთის ტოლი აღმოჩნდა.

ამოცანა 9.7-2. აჩვენეთ, რომ იზოლირებული მონაკვეთების სასრული რაოდენობისგან შემდგარი სხეულისთვის $D_b = 1$.

ამოცანა 9.7-3. აჩვენეთ, რომ თუ გეომეტრიული ობიექტი ზედაპირია, მაშინ $D_b = 2$.

დავრწმუნდით რა, რომ (9.7-3) განზომილების საფუძვლიან განსაზღვრებას გვაძლევს, გამოვიყენოთ იგი წილადი რიცხვის მქონე შედეგის შემთხვევაში. პირველ მაგალითად **კანტორის** ცნობილ **სიმრავლეს** მოვიყვანოთ [გერმანელმა მათემატიკოსმა გეორგ კანტორმა (1845-1918) ასეთი სიმრავლე ტერმინ *ფრაქტალის* გამოგონებამდე დიდი ხნით ადრე შემოგვთავაზა.] კანტორის სიმრავლე შედგება საფეხურებისაგან, რომელიც ერთის ტოლი სიგრძის მქონე მონაკვეთითაა დაწყებული. კონსტრუქციის პირველი საფეხურზე მონაკვეთს შუა მესამედს მოვაცილებთ და დაგვრჩება $1/3$ სიგრძის მქონე ორი მონაკვეთი. მეორე საფეხურზე, თითოეულ ამ მონაკვეთს შუაში მესამედს მოვაცილებთ რის შედეგადაც $1/9$ სიგრძის მქონე ოთხი მონაკვეთი დაგვრჩება. M რიგის საფეხურზე, ნებისმიერი დარჩენილი მონაკვეთის შუა მესამედს $(1/3)^M$ სიგრძის მქონე 2^M მონაკვეთის წარმოქმნისთვის მოვაცილებთ. თუ $M \rightarrow \infty$ -თან ერთად მივიღებთ კანტორის სიმრავლეს. ეს პროცესი 9.6 ნახაზზეა წარმოდგენილი.

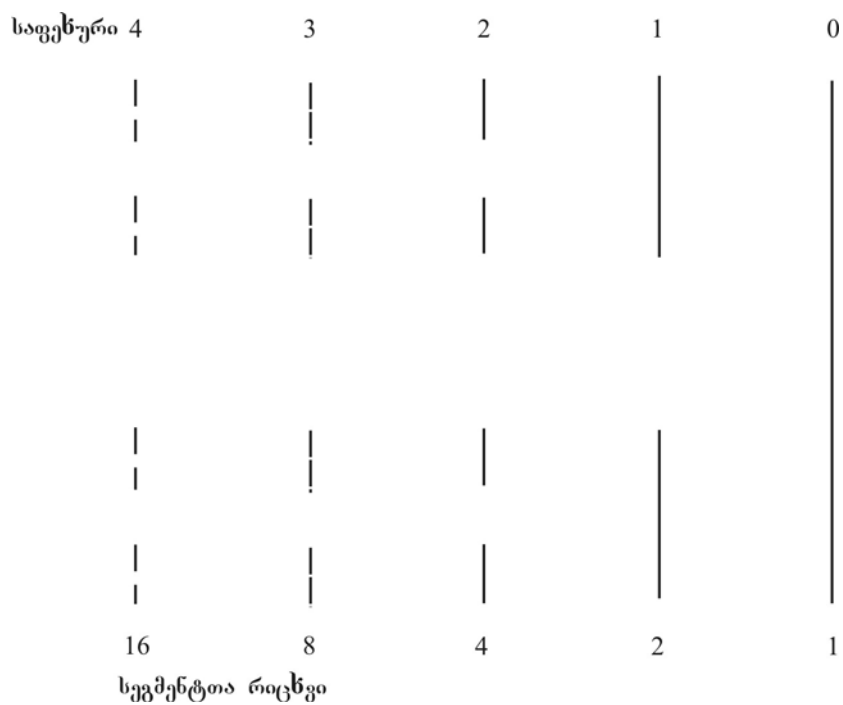
გამოვთვალოთ ამ სიმრავლის უჯრედთა მთვლელი განზომილება. აქ სიფრთხილი გამოჩენა გვმართებს: თუ მონაკვეთის ნაწილის მოცილების რომელიმე სასრულ ეტაპზე შევჩერდებით, დაგვრჩება წრფის 2^M მონაკვეთების მწკრივები, რომელთათვისაც $D_b = 1$. $M \rightarrow \infty$ შემთხვევაში თითქოს წერტილების მწკრივები დაგვრჩება და ამრიგად უნდა ველოდოთ, რომ $D_b = 0$. ამიტომ $M \rightarrow \infty$ და $R \rightarrow 0$ ერთდროულად უნდა შესრულდეს. ამას ჩვენ

ვახერხებთ $N(R)$ -სთვის კონსტრუქციის მოცემულ საფეხურზე სხეულის დაფარვისთვის აუცილებელი უჯრედების მინიმალური რაოდენობის მინიჭების საშუალებით. შემდეგ $N(R)$ -სა და R -ის M -ზე დამოკიდებულების ხასიათს ვსაზღვრავთ. R -ის ძლიერ შემცირებასთან ერთად M ძალიან იზრდება და ორივე ზღვრზე ერთდროულად გადასვლის საშუალება გვეძლევა.

კანტორის სიმრავლის აგებისათვის M -რიგის საფეხურზე $R = (1/3)^M$ -ის მქონე უჯრედებთა 2^M მინიმუმალური რაოდენობა გვესაჭიროება. (9.7-3)-ის გამოყენებით მივიღებთ:

$$D_b = \frac{\log 2^M}{\log (1/3)^M} = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.63\dots \quad (9.7-5)$$

მონაკვეთების რაოდენობა



ნახაზი. 9.6., კანტორის სიმრავლის პირველი ოთხი კონსტრუქციის საფეხურების გამოსახულება. კონსტრუქციის M - რიგის საფეხურზე $(1/3)^M$ სიგრძის მქონე 2^M მონაკვეთი არსებობს.

კანტორის სიმრავლისთვის D_b 0-სა და 1-ს შორის მყოფი წილადი რიცხვია. კანტორის სიმრავლე უფრო მეტია ვიდრე წერტილთა ერთობლიობა, მაგრამ იგი მონაკვეთზე ნაკლებია. იგი ფრაქტალური ობიექტია.

ამოცანა 9.7-4. დაადგინეთ წრფის მონაკვეთის $1/n$ შუალედის მოცილებით აწყობილი კანტორის სიმრავლის D_b (როდესაც $n > 1$).

რამდენი მონაკვეთი დაგვრჩება კანტორის კონსტრუქციის შემთხვევაში, როდესაც $M \rightarrow \infty$? ამ სიგრძეს კანტორის სიმრავლის **ზომა** ეწოდება. ზომის გამოთვლა შესაძლებელია თუ გავითვალისწინებთ, რომ კონსტრუქციის M რიგის საფეხურზე მონაკვეთების სიგრძე:

$$length = 1 - 1\left(\frac{1}{3}\right) - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2^2\left(\frac{1}{3}\right)^3 - \dots - 2^{M-1}\left(\frac{1}{3}\right)^M \quad (9.7-6)$$

ზღვარში დარჩენილი სიგრძე იქნება

$$length = 1 - \frac{1}{3} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i \right] \quad (9.7-7)$$

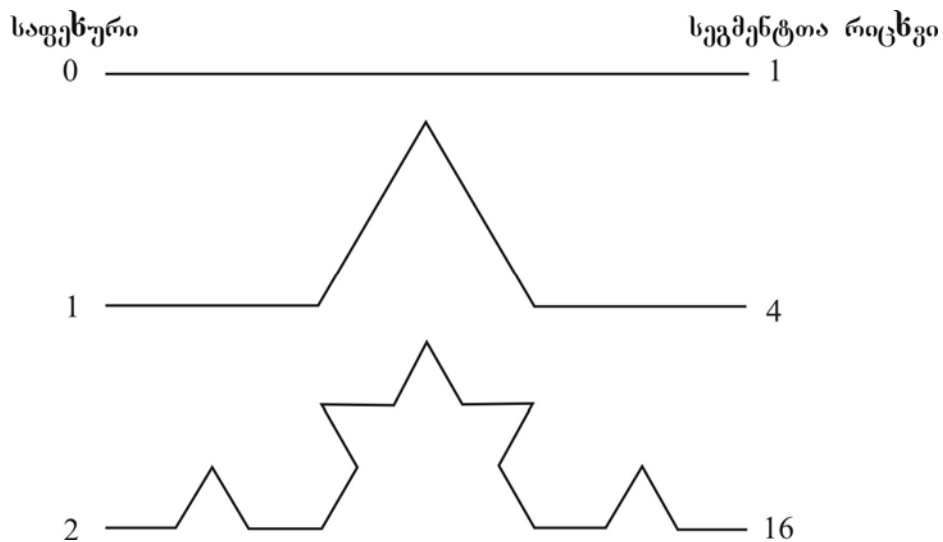
მწკრივის წევრები ქმნიან გეომეტრიული პროგრესიას და ჯამი ზღვარში მიისწრაფვის 3-კენ. ამრიგად ვხედავთ, რომ კანტორის სიმრავლის ზომა ნულის ტოლია.

ამოცანა 9.7-5. ააგეთ ფრაქტალური სიმრავლე კონსტრუქციის M რიგის საფეხურზე დარჩენილი წრფის მონაკვეთების შუა $(1/3)^M$ ნაწილის მოცილებით (M , რათქმაუნდა, დადებითი მთელი რიცხვია.) რას უდრის მიღებული სიმრავლის *უჯრედთა მთვლელი განზომილება*? რა სიგრძისაა დარჩენილი მონაკვეთები?, ამ სიმრავლეს **მსხვილ ფრაქტალს** უწოდებენ, რადგანაც მონაკვეთების ზომა ნულს აღემატება. მსხვილი ფრაქტალები მრავალ დინამიკურ სისტემაში აღძრული ქაოსური დიაპაზონების მნიშვნელოვან მახასიათებელს წარმოადგენს (იხ. UMF85 და EYU86).

ამჯერად დავაკვირდეთ ერთზე მეტი *უჯრედთა მთვლელი განზომილების* მქონე ფრაქტალს. ამ ფრაქტალს **კობის მრუდი** ეწოდება. იგი უწყვეტი, მაგრამ უსაზღვრო სიგრძის მქონე არადიფერენცირებადი მრუდია! კონსტრუქცია ასე იგება: ვიწყებთ

ერთეულოვანი სიგრძის მქონე მონაკვეთით. შემდეგ მონაკვეთის შუალედის $1/3$ -ს მოვაცილებთ და მას $1/3$ სიგრძის მქონე ორი მონაკვეთით შევცვლით (იხ. ნახ. 9.7). მეორე ეტაპზე შედარებით მცირე მონაკვეთებს შუალედის $1/3$ -ს მოვაცილებთ და უფრო დიდი რაოდენობით კარვის ასაგებად მათ კვლავ ორი მონაკვეთით შევცვლით. კონსტრუქციის M რიგის საფეხურზე $(1/3)^M$ სიგრძის მქონე 4^M მონაკვეთი იარსებებს.

თუ კოხის მრუდისთვის D_b -ს დასადგენად (9.7-3) გამოსახულებით ვისარგებლებთ, ვნახავთ, რომ $D_b = \log 4 / \log 3 = 1.26\dots$ ამგვარად ვხედავთ, რომ კოხის მრუდი ჩვეულებრივ მრუდს (რომლის განზომილებაც ერთის ტოლი იქნება) აღემატება, მაგრამ 2-ის ტოლი განზომილების მქონე ზედაპირზე ნაკლებია. ადვილი მისახვედრია, რომ კოხის მრუდს კუთხური კოეფიციენტის ცვლილების უსასრულო რაოდენობა გააჩნია. იგი არსადაა დიფერენცირებადი.



ნახაზი 9.7. კოხის მრუდის კონსტრუქციის საწყისი საფეხურები. ნებისმიერ საფეხურზე მონაკვეთის შუა $1/3$ ნაწილი მოცილებულია და კარვის ასაგებად ორი მონაკვეთით არის შეცვლილი.

ამოცანა 9.7-6. ჩაატარეთ გამოთვლები, რომლებიც გვიჩვენებენ, რომ კოხის მრუდისთვის $D_b = 1.26\dots$ აჩვენეთ, რომ კოხის მრუდი უსაზღვრო სიგრძისაა.

ამოცანა 9.7-7. დაიწყეთ ტოლფერდა სამკუთხედით და ამ სამკუთხედის ყოველ გვერდზე ააგეთ კოხის მრუდი. მიღებულ შედეგს *კოხის ფიფქი* ეწოდება. აჩვენეთ, რომ მისი საზღვარი უსასრულო სიგრძისაა, მაგრამ შემოსაზღვრულ სივრცეს მოიცავს.

აქამდე განსაზღვრული ყველა ფრაქტალურ ობიექტს გააჩნია ე.წ. *ავტომოდელურობის* თვისება. ასეთი ავტომოდელური საგნები ფრაქტალების გამორჩეულ კლასს ქმნის, მაგრამ ნებისმიერი ფრაქტალი ავტომოდელური არ არის. ფრაქტალების კიდევ ერთ კლასს *თვით-აფინური* ეწოდება (MAN85). მათი „ავტომოდელურობა“ მხოლოდ მაშინ ვლინდება, როდესაც სხვადასხვა მიმართულებით გადიდების განსხვავებული კოეფიციენტები გამოიყენება. დაბოლოს, გამოვყოფთ ისეთ ფრაქტალებს, როგორცაა სტოხასტიკური პროცესებით მიღებული *შემთხვევითი ფრაქტალებისაგან* [Mandelbrot, 1982] დეტერმინისტული გზით აგებული კანტორის სიმრავლე. შემთხვევითი ფრაქტალების ავტომოდელურობა სტატისტიკურ აღწერას მოითხოვს. მე-11 თავში სხვადასხვაგვარ შემთხვევით ფრაქტალებს შევხვდებით. შემთხვევითი ფრაქტალები ხმაურის, მუსიკისა და სხვა რეალური ობიექტების ზოგიერთი ასპექტის გაგებაში გვეხმარება (VOS89).

მდგომარეობათა სივრცის მიმზიდველების ფრაქტალური განზომილებები

ამჯერად ყურადღება დავუთმოთ დინამიკური სისტემების მიმზიდველების გეომეტრიულ მახასიათებლებს. თუ უჯრედთა დათვლის პროცედურას ექსპერიმენტული ან თეორიული დინამიკური სისტემიდან აღებული ტრაექტორიის მნიშვნელობებთან დაკავშირებით ვიყენებთ, მაშინ სისტემისათვის *უჯრედთა მთვლელი განზომილების* განსაზღვრასაც შევძლებთ. თუ მიმზიდველის განზომილება მთელი რიცხვი არ არის, მაშინ ვიტყვი, რომ ამ სისტემისთვის არსებობს *უცნაური მიმზიდველი*. განზომილების განსაზღვრება პირდაპირ არ უნდა გავიგოთ. მაგალითად პრაქტიკაში მონაცემთა ზღვრული სიზუსტის გამო თქვენ ვერ აიღებთ $R \rightarrow 0$ ზღვარს. 9.8 პარაგრაფში შემოვიყვანთ კიდევ ერთ განზომილებას, რომლის განსაზღვრა უფრო ადვილია ექსპერიმენტულ მნიშვნელობებზე დაყრდნობით.

უჯრედთა მთვლელი განზომილება ლოჯისტიკური ასახვისთვის პერიოდის გაორმაგების A_∞ ზღვრულ წერტილში მე-5 თავში მოყვანილი რენორმალიზაციის არგუმენტების მიხედვით იქნა გამოთვლილი (GRA81). იგი 0.5388...-ის ტოლია, რომელიც, რენორმალიზაციური გამოთვლების თანახმად, შესაძლოა კვადრატული მაქსიმუმის მქონე ნებისმიერი ერთგანზომილებიანი უნიმოდალური იტერაციული ასახვის ფუნქციის უნივერსალური რიცხვი იყოს.

ჩვენ შეგვიძლია ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციის, *უჯრედთა მთვლელი განზომილების* გამოთვლა $A \rightarrow A_\infty$ პირობებში თუ განვიხილავთ დაშლად ქაოსურ დიაპაზონებს (იხ. ნახ. 2.1 და ნახ. 9.3). პარამეტრის მოცემული მნიშვნელობისთვის ვთვლით, რომ დიაპაზონი ვყოფთ მონაკვეთებად (ვთვლით, რომ თითოეულ დიაპაზონში წერტილების

ალბათური განაწილება თითქმის ერთგვაროვანი და უწყვეტია). როდესაც $A \rightarrow A_\infty$, დიაპაზონების სიმრავლე ორჯერ იზრდება, შესაძლებელია ვიფიქროთ კანტორის კონსტრუქციის გამოყენებაზე თითოეული ქაოსური დიაპაზონის გარკვეული შიდა ნაწილის მოცილების გზით. დიაპაზონების ზომა განისაზღვრება ფეიგენბაუმის ნორმირების იმავე წესით, რომელსაც გავეცანით პერიოდის გაორმაგების მიმდევრობასთან დაკავშირებით $A < A_\infty$ პირობებში და (იხ. ნახ. 2.3), სადაც ყოველი მონაკვეთის სიგრძე $1/\alpha$ -ჯერ მცირეა წინასთან შედარებით.

ვთქვათ, პარამეტრის მოცემული მნიშვნელობის შემთხვევაში გვჭირდება R მინიმალური სიგრძის მქონე 2^n რაოდენობის მონაკვეთი 2^n დიაპაზონის დასაფარად. მაშინ შემდგომ საფეხურზე აგებული დიაპაზონების დასაფარად R/α სიგრძის მქონე 2^{n+1} მონაკვეთი დაგვჭირდება. მაშასადამე, შეგვიძლია დავადგინოთ D_b -ც:

$$D_b = -\frac{\log(2^n / 2^{n+1})}{\log \alpha} = 0.4498... \quad (9.7-8)$$

რომელიც ნაკლებია (GRA81)-ის შედეგზე.

D_b -ის უფრო მაღალი სიზუსტით განსაზღვრას კანტორის უფრო რთული სიმრავლის აგების გზით ვაღწევთ, რომელიც ლოჯისტიკური ასახვისათვის დიაპაზონების დაშლის წესს უფრო წააგავს. ახალი პროცედურის პირობებში 1 და $1/\alpha$ სიგრძის მქონე ორი მონაკვეთით ვიწყებთ და პირველ ვაცილებთ $1/\alpha$ სიგრძის მქონე მონაკვეთს, ხოლო $1/\alpha^2$ -ის სიგრძისას კი - მეორეს. კონსტრუქციის n -ურ საფეხურზე დიაპაზონების დასაფარად R_n სიგრძის მქონე 2^n მონაკვეთი დაგვჭირდება. $(n+1)$ **rigis** საფეხურზე - 2^{n+1} მონაკვეთი, რომელთა სიგრძეა

$$R_{n+1} = \frac{R_n}{2} \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right] \quad (9.7-9)$$

ამ გამოსახულების (9.7-3)-ში ჩასმით მივიღებთ:

$$D_b = -\frac{\log 2}{\log \left(\frac{1}{2} \left[1/\alpha + 1/\alpha^2 \right] \right)} = 0.543 \quad (9.7-10)$$

რაც ახლოსაა ზემოთ მიღებულ შედეგთან.

როდესაც ფრაქტალურ სიმრავლეს უბრალო ავტომოდელური სტრუქტურა არ გააჩნია, მაშინ უჯრედთა მთვლელი განზომილების მნიშვნელობა უჯრედის დაფარვის გამოყენებულ

პროცედურაზე დამოკიდებული. ჩვენ ვვარაუდობთ, რომ შედარებით ზოგადი ობიექტების დახასიათებისთვის განზომილების ერთზე მეტი საზომი დაგვჭირდება. ამ საკითხს მე-10 თავში დავუბრუნდებით.

- *არაერთგვაროვანი ფრაქტალების მსგავსების განზომილება*

წინა პარაგრაფში მოყვანილ მაგალითში ვნახეთ, რომ თუ მოცემულ ფრაქტალურ სიმრავლეს ერთგვაროვანი სტრუქტურა არ გააჩნია, მაშინ უჯრედთა მთვლელი განზომილების მნიშვნელობა სიმრავლის მიმართ გამოყენებულ დაფარვაზე დამოკიდებული. ამ პარაგრაფში უჯრედთა მთვლელი განზომილების განზოგადების ხერხებს განვიხილავთ. განზომილების ახალ ტიპს D_s მსგავსების განზომილებას ვუწოდებთ. განზოგადება პერიოდის გაორმაგების ზღვრულ წერტილზე ლოჯისტიკური ასახვის მიმზიდველისა და სინუსოიდურ-წრიულ ასახვის შესაბამისი კვაზიპერიოდული ქმედების დახასიათებისათვის საჭირო განზომილებას მოგვაწვდის.

არაერთგვაროვანი ფრაქტალის შემთხვევაში საგნების სხვადასხვა r_i ზომის უჯრედებით დაფარვით ვართ დაინტერესებულნი. დავუშვათ, ფრაქტალური სიმრავლის კონსტრუქციის გარკვეულ საფეხურზე ვიყენებთ თითოეულ უჯრედში N_i წერტილებისაგან შემდგარი r_i ზომის მქონე M_i უჯრედს. ამ მეთოდის თანახმად, წერტილების განსხვავებული რაოდენობის შემცველ და ერთი და იგივე r ზომის მქონე სხვადასხვა უჯრედებს სხვადასხვა ინდექსები მიენიჭებათ. $p_i = N_i/N$ ერთ-ერთ i -ურ უჯრედში მყოფი წერტილების ფარდობითი რაოდენობა იყოს. მაშინ მივიღებთ:

$$\sum_i M_i p_i = 1 \tag{9.7-11}$$

კონსტრუქციის ერთი საფეხურიდან მეორეზე გადასვლისას ვუშვებთ, რომ არსებობს ნორმირების ისეთი s_i კოეფიციენტი, რომელიც გვაძლევს უჯრედთა i -ური სიმრავლის r_i ზომას მანძილის გარკვეული R ერთეულთან მიმართებაში ანუ $r_i = R/s_i$, სადაც $s_i > 1$. თუ ეს კონსტრუქცია d განზომილების მქონე მდგომარეობათა სივრცეშია აგებული, მაშინ

უჯრედების ნებისმიერი i -ური სიძრავლის მოცულობა $(R/s_i)^d$ იქნება და გამოყენებული უჯრედების მთლიანმა რაოდენობამ უნდა დააკმაყოფილოს შემდეგი პირობა:

$$\sum_i M_i \left(\frac{R}{S_i} \right)^d < R^d \quad (9.7-12)$$

ანუ

$$\sum_i M_i S_i^{-d} < 1 \quad (9.7-13)$$

როდესაც განსახილველი ფრაქტალური სიძრავლის მოცულობა d განზომილების მქონე მდგომარეობათა სივრცეში ნულის ტოლია. D_s მსგავსების განზომილება ისეთი რიცხვია, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:

$$\sum_i M_i S_i^{-D_s} = 1 \quad (9.7-14)$$

(9.7-14) განტოლებიდან ჩანს, რომ D_s d . ეს განზომილება კავშირშია ჰაუსდორფის განზომილებასთან, რომელიც ცვლადი ზომების მქონე უჯრედებს იყენებს და ნულზე მეტი ჯამის მომცემ უდიდეს ქვედა D საზღვარს მოითხოვს. ამ შემთხვევაში ვვარაუდობთ, რომ ფრაქტალი მსგავსების ნორმირებას აკმაყოფილებს, ამიტომ ნორმირების კოეფიციენტებსა და გარკვეული ზომის უჯრედების რაოდენობას შორის გარკვეული დამოკიდებულება უნდა არსებობდეს. შემდგომში ამგვარი ვარაუდი მსგავსების D_s განზომილებასთან დაკავშირებით არაცხადი სახის (9.7-14) გამოსახულებას გვაძლევს.

ამოცანა 9.7-8. აჩვენეთ, რომ თუ გვაქვს ნორმირების მხოლოდ ერთი კოეფიციენტი (ვთქვათ s_1) და ფრაქტალის დაფარვისთვის საჭიროა M_1 რაოდენობის უჯრედი, მაშინ (9.7-14)-ით განსაზღვრული მსგავსების განზომილება და უჯრედთა მთვლელი D_b განზომილება ერთი და იგივე იქნება.

ზოგიერთი მიმზიდველისთვის მიღებული შედეგის გამოყენებამდე ვნახოთ, თუ როგორ განვავრცობთ D_s -ის ზემოთმოყვანილ განსაზღვრებას უჯრედთა მთვლელი განზომილებისთვის გამოყენებული არგუმენტების ანალოგიურად. დავუშვათ, მთლიანი ფრაქტალური ობიექტი R^d მოცულობის მქონე უჯრედს ავსებს, სადაც d კვლავ მთელი სივრცის განზომილებაა ასევე დავუშვათ, რომ ობიექტს r ზომის უჯრედებით ვფარავთ. თითოეულ უჯრედს ექნება r^d

მოცულობა. კონსტრუქციის ცალკეულ საფეხურზე მიმზიდველის დაფაავისთვის საჭირო r ზომის მქონე n_b უჯრედების რიცხვი ნორმირების s_i კოეფიციენტებზე იქნება დამოკიდებული. ამიტომაც ვწერთ

$$n_b(R, r) = \sum_i M_i n_b \left(\frac{R}{S_i}, r \right) \quad (9.7-15)$$

გამოვიყენოთ ნორმირებასთან დაკავშირებული ორ მნიშვნელოვან დამოკიდებულება. ფრაქტალური ობიექტის ავტომოდელურობის დაშვების გამო:

$$n_b \left(\frac{R}{S_i}, r \right) = n_b(R, s_i r) \quad (9.7-16)$$

ავტომოდელური ფრაქტალებისთვის უჯრედთა მთვლელი განზომილება აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$n_b(R, r) = n_b(R) r^{-D} \quad (9.7-17)$$

პირველ რიგში ვუშვებთ, რომ ნორმირების ყველა კოეფიციენტისთვის მიზანშეწონილია იმავე D -ს გამოყენება, რომელსაც შემდგომში D_s ვუწოდეთ. (9.7-16) და (9.7-17) დამოკიდებულებების (9.7-15)-ში ჩასმა მოგვცემს:

$$n_b(R) r^{-D_s} = \sum_i M_i n_b(R) s_i^{-D_s} r^{-D_s} \quad (9.7-18)$$

ამ გამოსახულების $n_b(R) r^{-D_s}$ -ზე გაყოფა გვაძლევს (9.7-14)-ს.

გამოვიყენოთ (9.7-14) გამოსახულება პერიოდის გაორმაგების ზღვრულ წერტილში ლოჯისტიკური ასახვის მიმზიდველისათვის. თავდაპირველად ნორმირების შესაბამისი კოეფიციენტების დადგენა გეჭირდება. მტკიცდება, რომ პერიოდის გაორმაგების ზღვრული წერტილის მიდამოში არსებობს ნორმირების ორი კოეფიციენტი. ჩვენ ამ კოეფიციენტების დადგენას მე-5 თავსა და F დამატებაში მოყვანილი $g(y)$ უნივერსალური ფუნქციის გამოყენებით შევძლებთ. განვიხილოთ $y = 0$ მნიშვნელობით დაწყებულ $g(y)$ ფუნქციის რამდენიმე მიმდევრობითი იტერაცია [გაიხსენეთ, რომ $g(y)$ ფუნქციის მაქსიმუმი $y = 0$

წერტილშია]. 5.5 პარაგრაფის თანახმად, მოცემული ტრაექტორიის წერტილები ქმნიან იმ არეთა საზღვრებს, რომელთა ფარგლებშიც მიმზიდველის ნებისმიერი წერტილი აღმოჩნდება. $g(y)$ ფუნქციისთვის გვექნება:

$$\begin{aligned} y_1 &= g(0) = 1 \\ y_2 &= g(g(0)) = -1/\alpha \\ y_3 &= g(-1/\alpha) \\ y_4 &= 1/\alpha \end{aligned} \tag{9.7-19}$$

ამრიგად, იმ ორი ინტერვალის სიგრძეები, რომლებშიც მიმზიდველი მდებარეობს, არის $y_1 - y_3 = 1 - g(-1/\alpha)$ და $y_4 - y_2 = 1/\alpha^2 + 1/\alpha$. მიმზიდველის მთლიანი ზომაა $y_1 - y_2 = 1 + 1/\alpha$. ამრიგად, ნორმირების ორი კოეფიციენტი იქნება

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1 + 1/\alpha}{1/\alpha^2 + 1/\alpha} = \alpha = 2.503... \\ s_2 &= \frac{1 + 1/\alpha}{1 - g(-1/\alpha)} = 5.805... \end{aligned} \tag{9.7-20}$$

D განზომილებას შემდეგი განტოლების დამაკმაყოფილებელი რიცხვითი მნიშვნელობის პოვნის გზით ვსაზღვრავთ:

$$(2.503...)^{-D_s} + (5.805...)^{-D_s} = 1 \tag{9.7-21}$$

მივიღებთ, რომ $D_s = 0.537$. უნდა აღვნიშნოთ, რომ ფეიგენბაუმის მიმზიდველი ზუსტად არ გამოხატავს D_s -ის გამოთვლისათვის საჭირო ნორმირების მახასიათებლებს. თუმცა, ეს გადახრა მცირეა და მოცემული გზით მიღებული შედეგი ბევრად რთული მეთოდებით გამოთვლილ შედეგებთან ახლოსაა (GRA81).

ამ არგუმენტიდან გამომდინარე, ნორმირების კოეფიციენტებია α და $\approx \alpha^2$. შენიშნეთ, რომ ჩვენს მიერ ლოჯისტიკური ასახვის მიმართ გამოყენებული საშუალო მანძილის მეთოდი რიცხვითი თვალსაზრისით განზომილების უფრო ზუსტ მნიშვნელობასთან დაახლოებულ შედეგს გვაძლევს, მაგრამ თანხვედრა შემთხვევითია. განზომილების გამოთვლისას საშუალო მანძილის გამოყენების თეორიული მტკიცებულება არ არსებობს.

ამოცანა 9.7-9. F დამატების (F.1-21) განტოლებაში მოცემული უნივერსალური ფუნქციის პოლინომური ფორმის გამოყენებით ჩაატარეთ $g(y)$ -ის დაწყებული პირველი ოთხი ინტეგრაცია $y_0 = 0$ საწყისი მნიშვნელობით. შემდეგ ტექსტში გამოყენებული ნორმირების კოეფიციენტების რიცხვითი მნიშვნელობები შეამოწმეთ და (9.7-21)-ით განსაზღვრულ D_s -ის რიცხვით მნიშვნელობას შეადარეთ.

სინუსოიდურ-წრიულ ასახვასთან დაკავშირებული მსგავსების განზომილების მიახლოებითი მნიშვნელობის დადგენა (9.7-14) ფორმულის გამოყენებითაც შეგვიძლია. მე-6 თავის თანახმად, არაწრფივობის პარამეტრის $K = 1$ კრიტიკულ მნიშვნელობაზე სიხშირეთა სინქრონიზაციის ინტერვალები სავარაუდოდ მთლიან Ω ლერძს ავსებენ. მიუხედავად ამისა, კვაზიპერიოდულობა კვლავ ვლინდება და ამიტომ კვაზიპერიოდული ინტერვალების მსგავსების განზომილების მნიშვნელობის შესახებ შეგვიძლია დავინტერესდეთ. ეს განზომილება დაკავშირებულ სიხშირეთა სინქრონიზაციის „ენებს“ შორის არსებული ხარვეზების ზომებზე დაყრდნობითა და ნორმირების მხოლოდ ორი რიცხვის შემცველი (9.7-14) ფორმულის გამოყენებით ზუსტად შეგვიძლია გამოვთვალოთ. კერძოდ, ვიყენებთ შემდეგ ხარვეზებს $p: q, p' : q'$ და $(p + p'):(q + q')$, რომლებიც 6.14 ნახაზზეა ნაჩვენები. მაგალითად, ავიღებთ $1/(2\pi)$ -ში არსებულ 0:1 ენასა და 0.464-ზე 1:2 ენის მარცხენა კიდეს შორის მანძილს. შემდეგ $s_1=1.71$ -ისა და $s_2=3.14$ -ის განსაზღვრის მიზნით 1:3 ენის კიდეს გამოვიყენებთ, რომლებიც $\Omega = 0.337$ -დან 0.367 -მდე (± 0.0005 ცდომილებით) ვრცელდებიან. ამ შედეგებით (9.7-14) ფორმულა გვაძლევს $D_s = 0.857 \pm 0.001$. მიღებული შედეგი, მიუხედავად იმისა, რომ განზომილების გამოთვლისთვის მხოლოდ ორ ენას იყენებს, სათანადოდ ახლოსაა იენსენის, ბაკისა და ბორის (JBB83) მიერ განსაზღვრულ, 0.87-ის ტოლ მნიშვნელობასთან.

ამოცანა 9.7-10. გამოიყენეთ წინამდებარე პარაგრაფში მოყვანილი რიცხვითი მნიშვნელობები და განსაზღვრეთ D_s მნიშვნელობები სინუსოიდურ-წრიული ასახვისთვის.

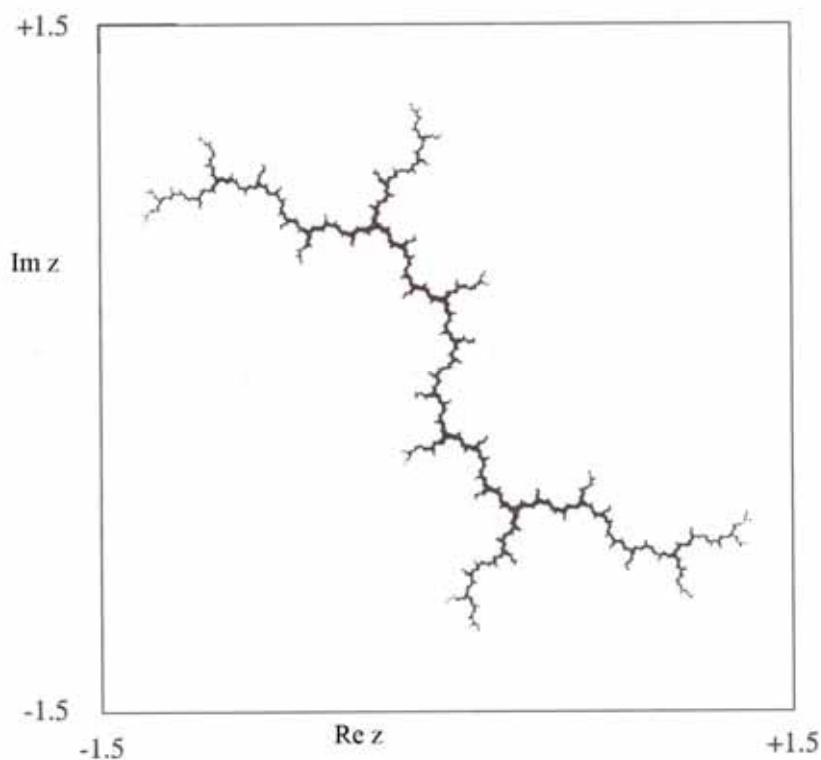
სიხშირეთა სინქრონიზაციის ინტერვალების D_s განზომილება სინუსოიდურ-წრიული ასახვით მოდელირებული სისტემების ექსპერიმენტული მნიშვნელობების მიხედვით არის დადგენილი. თუ დიოდის წრედი სინუსოიდურად მართულია, გვექნება „კონკურენცია“ დიოდის

აგზნების სინშირესა და თავისუფალი რხევის სინშირეს შორის. შესაძლებელია გამოვლინდეს სინშირეთა სინქრონიზაცია და კვაზიპერიოდული ქმედება. მსგავსების განზომილება ისეთი სისტემისთვის არის განსაზღვრული (TES85), რომლის მნიშვნელობაც ახლოსაა ზემოთ მოყვანილ მნიშვნელობასთან. კონტროლის პარამეტრის კრიტიკულ მნიშვნელობის შემთხვევაში მართულ მილევად გენერატორზე (CUL87) ჩატარებულმა ექსპერიმენტმა მოგვცა მსგავსების განზომილების მიახლოებით 0.795 ± 0.005 -ის ტოლი მნიშვნელობა, რაც 0.87 -ისაგან საკმაოდ განსხვავებულია. ამგვარი ცდომილება „ინტეგრებისა და ცეცხლის“ მოდელის (ACL88) გამოყენებით აიხსნება, რომელიც გვიჩვენებს, რომ ექსპერიმენტით დადგენილი განზომილების მნიშვნელობა უნივერსალურად მოსალოდნელი არ ყოფილა. აქედან ვასკვნით, რომ არსებობს კვაზიპერიოდული სისტემების სხვადასხვა კლასები. ნებისმიერი კვაზიპერიოდული სისტემა სინუსოიდურ-წრიული ასახვების კლასს არ განეკუთვნება.

ფრაქტალური განზომილებები და მიზიდულობის არის საზღვრები

ფრაქტალური განზომილებები არაწრფივი დინამიკის კიდევ ერთ ასპექტში ვლინდებიან. როგორც ზემოთ ვახსენეთ, მრავალი არაწრფივი სისტემა *საწყისი პირობების მიმართ მგრძობიარობას იჩენს* და მდგომარეობათა სივრცეში თავდაპირველად ახლომდებარე ტრაექტორიები დისიპაციური სისტემებისთვის განსხვავებული *მიმზიდველების მიმართ* შეიძლება მიისწრაფოდნენ. ზოგჯერ მიმზიდველები ფიქსირებული წერტილებს ან ზღვრულ ციკლებს წარმოადგენენ. სხვა შემთხვევაში კი ისინი ქაოსურ მიმზიდველებია. როგორც ვიცით, ცალკეულ მიმზიდველზე ტრაექტორიების კრებადობის განმაპირობებელი საწყისი პირობების სიმრავლე ქმნის მიზიდულობის არეს. მრავალ არაწრფივ სისტემაში ამ არის საზღვრები ფრაქტალური განზომილებების მქონე საკმაოდ რთული გეომეტრიული ობიექტებია. საწყისი პირობების მიმართ მგრძობიარობის გამომწვევ არეთა საზღვრების ბუნება განსაკუთრებულია: საწყისი პირობების მცირე ცვლილებამაც კი ტრაექტორია მიზიდვის ერთი არიდან მეორეში განსაკუთრებულად არაპროგნოზირებადი გზით შესაძლებელია გადაადგილოს.

მოვიყვანოთ ფრაქტალური არის საზღვრების ორ შემთხვევა. პირველი მათგანი ჩვენთვის კარგად ნაცნობი მილევადი ქანქარაა. საკმარისად დიდი გარე მომენტების შემთხვევაში ქანქარას შეუძლია საათის ისრის ან საწინააღმდეგო მიმართულებით ბრუნვა. იბადება სრულიად ბუნებრივი კითხვა: რომელი საწყისი პირობები იწვევს საათის ისრის მიმართულებით და რომელი საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით ბრუნვას? ამ შეკითხვაზე პასუხის გაცემა საკმაოდ რთულია, რადგან მიზიდვის ორ არეს შორის საზღვარი ფრაქტალური ობიექტია (GWW85, GWW86).



ნახაზი. 9.8. ჟულიეს (Julia) სიმრავლე, როდესაც $c = 0 + i1.0$. ცენტრალური „დენდრიტული“ წერტილები შეესაბამებიან იმ საწყის პირობებს, რომლებიც გვაძლევენ შემოსაზღვრულ ტრაექტორიებს. დანარჩენი ნებისმიერი წერტილი უსასრულობისკენ მიმავალი ორბიტების შესაბამისია.

ფრაქტალური არის საზღვრის მეორე მაგალითია, ფრანგი მათემატიკოსის – გასტონ ჟულიეს მიერ აღმოჩენილი ჟულიეს სიმრავლე. ჟულიეს სიმრავლე ადგენს საზღვარს ორგანზომილებიანი იტერაციული ასახვის ფუნქციის საწყის პირობათა იმ სიმრავლებებს შორის, რომელთაგან ერთი გვაძლევს უსასრულობაში მიმავალ ტრაექტორიებს, მეორე კი მდგომარეობათა სივრცის სასრულ არეში ჩაკეტილ ტრაექტორიებს. ჩვეულებრივი ჟულიეს სიმრავლე z კომპლექსური ცვლადის იტერაციული ასახვის ფუნქციაზეა დამყარებული:

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + C \quad (9.7-22)$$

სადაც C კომპლექსური პარამეტრია. 9.8 ნახაზი ჟულიეს სიმრავლეს $c = 0 + i 1.0$ შემთხვევაში წარმოგვიდგენს.

ჟულიეს სიმრავლის ანალოგიური და არანაკლებ ცნობილი *მანდლებროს სიმრავლე* მსგავს საზღვარს იძლევა, ოღონდ პარამეტრთა სივრცეში. ჟულიეს და *მანდლებროს*

სიმრავლეების შესახებ მეტი ინფორმაციის მისაღებად მკითხველი ამ თავის ბოლოში მოყვანილი კურსებსა და სტატიებს უნდა გაეცნოს.

ფრაქტალური არის საზღვრებთან დაკავშირებით შესაძლებელია შეგვხდეს ისეთი სიტუაციები, როდესაც სხვადასხვა მიმზიდველებთან დაკავშირებული არეები ერთმანეთს ნაწილობრივ ფარავენ (ე.წ. *მესრისებრი არეები*). ამ შემთხვევაში მიზიდულობის არეს ფრაქტალური სტრუქტურა შესაძლებელია აღმოაჩნდეს (მიმზიდველისგან განსხვავებით; იხ. მაგალითად, (SOO93a) და (LAW94).

კომენტარები და დასკვნები ფრაქტალური განზომილებების შესახებ

ფრაქტალური განზომილებების შესახებ დასკვნის გამოსატანად სერიოზული გავაკეთოთ ერთი მნიშვნელოვანი დასკვნა. ჩვენ ერთიმეორისგან განვასხვავოთ უნდა მიმზიდველის გეომეტრიული მახასიათებლები და მისკენ მისწრაფებადი ტრაექტორიასთან დაკავშირებულ მონაცემთა ზღვრული სიმრავლე. მაგალითად $A=3.58$ მნიშვნელობის მქონე ლოჯისტიკური ასახვისთვის მიმზიდველი x ღერძის ოთხი განსხვავებული ინტერვალის შესაბამისი ქაოსური დიაპაზონებისაგან შედგება. თითოეულ დიაპაზონში ნებისმიერი წერტილი მიმზიდველს ეკუთვნის (არასტაბილური პერიოდული წერტილების გარდა). ამრიგად, მიმზიდველის განზომილება ერთის ტოლია, რაც მონაკვეთის განზომილების ტოლია. მეორე მხრივ, თუ $A=3.58$ მნიშვნელობის ტრაექტორიის შესაბამის წერტილთა სიმრავლის განზომილებას ვსაზღვრავთ, ეს უკანასკნელი კი მთელი რიცხვი არ არის.

ფრაქტალური განზომილებების შესახებ აქამდე მიღებული ნებისმიერი განსაზღვრების სრულიად განსხვავებულია ე.წ. *ტოპოლოგიური განზომილებისაგან*. ტოპოლოგიური განზომილება ყოველთვის მთელი რიცხვია და წერტილის ან წერტილთა სიმრავლისთვის იგი ყოველთვის ნულის ტოლია, ხოლო მონაკვეთის ან მრუდისთვის – ერთის და ა.შ. ტოპოლოგიური განზომილება ყოველთვის უჯრედთა მთვლელ (ან სხვა) ფრაქტალურ განზომილებაზე ნაკლები ან ტოლია. მაგალითად, კოხის მრუდის ტოპოლოგიური განზომილება ერთის ტოლია, რადგან იგი მრუდია (ან ტენილი). მეორეს მხრივ ვიცით, რომ კოხის მრუდისთვის უჯრედთა მთვლელი განზომილება ერთზე მეტია.

აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ კიდევ ერთი, კერძოდ ჰაუსდორფის D_H განზომილების განსაზღვრება მსგავსების განზომილების ტიპისაა. ჰაუსდორფის განზომილება გვაძლევს ცვალებადი ზომის უჯრედების მეშვეობით სიმრავლის დაფარვის საშუალებას და არა გვაქვს მსგავსების განზომილებით შემთხვევაში ნორმირების მიმართ დაწესებული შეზღუდვები. მსგავსების განზომილების გამოთვლისას სიმრავლის დაფარვისათვის გამოყენებული R სიდიდე

უდიდესი ზომის მქონე უჯრედის სიგრძეა. სიგრძეს ვზრდით D -ს ხარისხოვანი ფუნქციის მიხედვით და ვკრებთ ყველა სიგრძეს სიმრავლის „საზომის“ დასადგენად. D_H , რომელიც წარმოადგენს D -ების სიმრავლის უდიდესი ქვედა საზღვარს, გვაძლევს, ნულის ტოლ განზომილებას $R \rightarrow 0$ ზღვარში. დეტალებისთვის იხილეთ FOY83 და ESN90.

9.8 კორელაციური განზომილება

მიუხედავად იმისა, რომ წინა პარაგრაფში განხილული უჯრედთა მთვლელი პროცედურა კონცეპტუალურად მნიშვნელოვანია, მისი გამოყენება რეალურ მნიშვნელობებთან და განსაკუთრებით მეტი განზომილების მქონე მდგომარეობათა სივრცეებთან დაკავშირებით წინააღმდეგობებით აღსავსეა. უჯრედთა მთვლელი პროცედურისთვის აუცილებელი გამოთვლების რიცხვი მდგომარეობათა სივრცის განზომილებასთან ერთად ექსპონენციალურად იზრდება.

უჯრედთა დათვლის პროცედურა ითხოვს მდგომარეობათა სივრცის უჯრედებად დაყოფას და შემდეგ ტრაექტორიის წერტილების უჯრედებში განლაგებას, რაც დიდ დროს მოითხოვს. გრასბერგერმა და პროკაკიამ (GRP83a) ე.წ. **კორელაციური ჯამის** (ან **კორელაციური ინტეგრალის**) თვისებებზე დამყარებული უფრო მარტივი განზომილება შემოიღეს. ეს განზომილება ე.წ. D_c **კორელაციური განზომილებაა** და ქაოსური მიმზიდველების დახასიათებისთვის ფართოდ გამოიყენება. მას უპირატესობა გააჩნია გამოთვლითი თვალსაზრისით, რადგან იგი პირდაპირ ტრაექტორიის წერტილებს იყენებს და მდგომარეობათა სივრცის ნაწილებად დაყოფას არ საჭიროებს.

ამ პარაგრაფში წარმოვადგენთ ერთგანზომილებიანი მნიშვნელობებისთვის კორელაციურ განზომილებას. შემდეგ განვიხილავთ გამოთვლის ისტორიას მონაცემთა სხვადასხვა სიმრავლისთვის. ამ თავში ვეცადეთ, რომ ქაოსური ქმედების ნებისმიერ რაოდენობრივ საზომთან დაკავშირებული რიცხვითი შედეგების სანდოობის დადგენის მიზნით ყურადღება გაგვემახვილებინა გარკვეული ინტუიციის გამომუშავების მნიშვნელობაზე. ჩვენ გვჭირდება როგორც სანდოობის, ასევე ცდომილების დადგენა, რათა ჩვენი შედეგები სხვა ექსპერიმენტების მიხედვით მიღებულ შედეგებს შევადაროთ და სისტემის ქმედება ვაკონტროლოთ.

კორელაციური განზომილების განსაზღვრისთვის ტრაექტორიის კონკრეტულ ნაწილს N რაოდენობის წერტილთა შესაბამისი მნიშვნელობების სიმრავლის სახით წარმოვადგენთ. მომდევნო საფეხურზე ტრაექტორიაზე მდებარე თითოეული i წერტილიდან R მანძილის

ფარგლებში მდებარე წერტილების რაოდენობით და თვით i წერტილს ამოვადებთ. ამ რიცხვს $N_i(R)$ -ით აღვნიშნავთ და $p_i(R)$ -ით აღვნიშნავთ მათ ფარდობით რაოდენობას: $p_i(R) = N_i/(N-1)$ ($N-1$ -ზე იმიტომ ვყოფთ, რომ i წერტილის მახლობლად არაუმეტეს $N-1$ წერტილი არსებობს.) საბოლოოდ კორელაციურ ჯამს $C(R)$ შემდეგნაირად წარმოვადგენთ:

$$C(R) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i(R) \quad (9.8-1)$$

შენიშნეთ, რომ $C(R)$ ისეა განსაზღვრული, რომ $C(R)=1$, თუ ნებისმიერი წერტილი ერთიმეორისგან R მანძილის ფარგლებში აღმოჩნდება. თუ R ტრაექტორიის წერტილებს შორის უმცირეს მანძილზე ნაკლებია, მაშინ ნებისმიერი i -სთვის $p_i=0$ და $C(R)=0$.

$C(R)$ -ის უმცირესი არანულოვანი მნიშვნელობა შესაძლებელია $2/[N(N-1)]$ იყოს, თუ წერტილები ერთიმეორისგან R მანძილის ფარგლებშია განლაგებული. თუ წერტილებს ერთი და იგივე რიცხვითი მნიშვნელობები შეესაბამებათ (მაგალითად, დამრგვალების გამო), მაშინ $C(R)$ -ის უმცირესი მნიშვნელობა $N^*(N^*-1)/[N(N-1)]$ იქნება, სადაც N^* ამ მნიშვნელობის მქონე წერტილთა რაოდენობაა (თუ ტრაექტორიის ნებისმიერი სხვა წერტილი განსხვავებულია).

ამასთან ერთად უნდა აღინიშნოს, რომ R მონაკვეთის ფარგლებში მყოფი წერტილების სიმრავლეში თვით i წერტილის ჩართვის შემთხვევაში $C(R)$ კორელაციური ჯამი საკმარისად მცირე R -ისთვის $1/N-i$ ს ტოლი იქნებოდა.

i -ური წერტილის გამორიცხვასთან დაკავშირებით არსებობს გარკვეული სტიმული რიცხვითი გამოთვლების თვალსაზრისით.

p_i ფარდობითი სიდიდე Θ *ჰევისაიდის საფუნქცია* ფუნქციის შემოღებით უფრო ფორმალურად შესაძლებელია შემდეგნაირად გამოისახოს:

$$\begin{aligned} \Theta(x) &= 0 & \text{if } x < 0 \\ \Theta(x) &= 1 & \text{if } x \geq 0 \end{aligned} \quad (9.8-2)$$

ამ ფუნქციის გამოყენებით შესაძლებელია დავწეროთ:

$$p_i(R) = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1, j \neq i}^N \Theta(R - |x_i - x_j|) \quad (9.8-3)$$

ჰევისაიდის საფეხურა ფუნქციის დახმარებით კორელაციური ჯამი შესაძლებელია ასე გამოისახოს:

$$C(R) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \Theta(R - |x_i - x_j|) \quad (9.8-4)$$

ხშირად ამ გამოსახულებაში გადავიდებით ზღვარზე, როდესაც $N \rightarrow \infty$, რადგანაც ჩვენ მთლიან მიმზიდველს ვახსიათებთ.

ამ შემთხვევაში D_c კორელაციური აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:

$$C(R) = \lim_{R \rightarrow 0} kR^{D_c} \quad (9.8-5)$$

გალოგარითმების შემდეგ გვექნება:

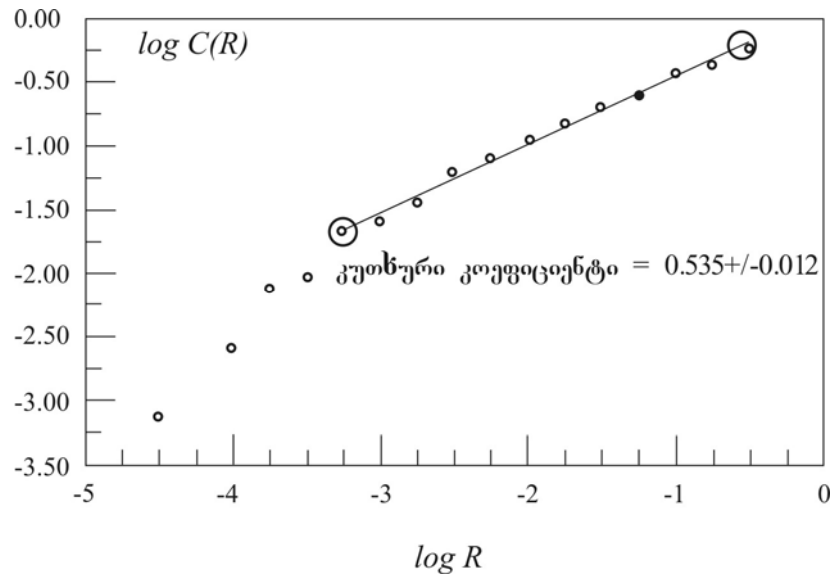
$$D_c = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\log C(R)}{\log R} \quad (9.8-6)$$

სიმარტივისთვის ათობით ლოგარითმებს ვიყენებთ. ზოგიერთი მკვლევარი 2-ის ფუძის მქონე ლოგარითმების გამოყენებას ამჯობინებს.

ტერმინოლოგიის გაურკვეველობის თავიდან აცილების მიზნით ვამჯობინებთ, რომ D_c - ს *კორელაციური ნორმირების ინდექსი* ვუწოდოთ (და არა კორელაციური განზომილება), რადგან იგი რიცხვია, რომელიც გვამცნობს, თუ როგორ ნორმირდება $C(R)$ სიდიდე R -ის მეშვეობით. მიუხედავად ამისა, ტერმინი კორელაციური განზომილება ლიტერატურაში საფუძვლიანად არის დამკვიდრებული. D_c -სა და სხვა „განზომილებებს“ შორის კავშირი მე-10 თავში იქნება განხილული.

კორელაციური განზომილების განსაზღვრასთან დაკავშირებით (9.8-6) განმოსახულებას აშკარა წინააღმდეგობა ახასიათებს: შეუძლებელია ზღვარზე გადასვლა $R \rightarrow 0$ სახით.

რეალური მნიშვნელობების ნებისმიერი სიმრავლე წერტილების ზღვრულ რაოდენობას მოიცავს. ამრიგად, ტრაექტორიის წერტილებს შორის გარკვეული მინიმალური მანძილი არსებობს. როდესაც R ამ მინიმალურ მანძილზე ნაკლებია, კორელაციური ჯამი ნულის ტოლია (9.8-5) აღარ კმაყოფილდება.

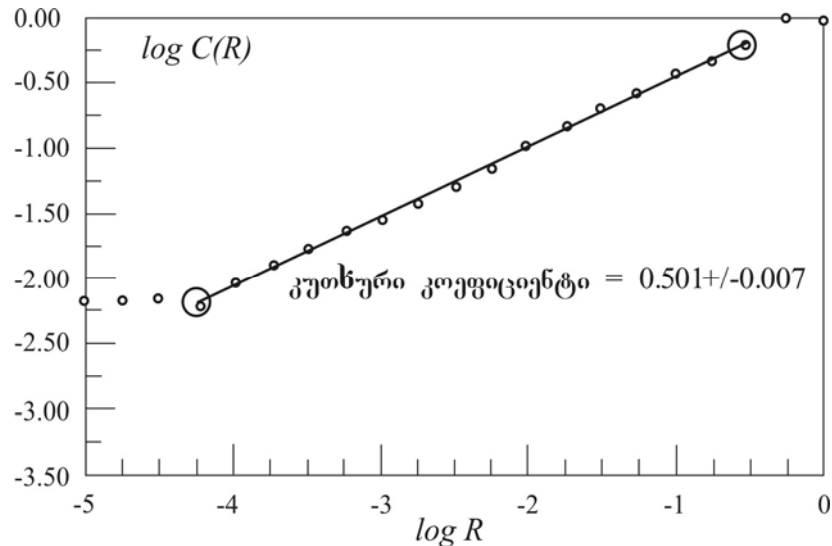


ნახაზი. 9.9. $\log C(R)$ -ის მრუდი ლოჯისტიკური ასახვის ტრაექტორიებისთვის, როდესაც $A=3.56995$. ანალიზის პროცესში გამოყენებულია ასევე წერტილი. R -ის დიდი მნიშვნელობებისთვის მიმზიდველის ზღვრული ზომა $C(R)$ „გაჯერებას“ განაპირობებს. R -ის მცირე მნიშვნელობებისთვის წერტილები $\ln C(R)$ -ის მნიშვნელოვან უარყოფით გადახრას იწვევს. შუალედურ რეგიონს, სადაც მრუდი თითქმის წრფეა (ნახაზზე მრგვალი წერტილებით შემოსაზღვრული), ნორმირების არე ეწოდება. ნორმირების არის კუთხური კოეფიციენტი გვაძლევს D_c კორელაციურ განზომილებას.

პრაქტიკულად შესაძლებელია R -ის მნიშვნელობების გარკვეულ დიაპაზონში $C(R)$ -ის გამოთვლა და შემდეგ 9.9 ნახაზის მიხედვით, $\log C(R)$ -ის მრუდის, როგორც $\log R$ ცვლადის ფუნქციის სახით გამოსახვა.

გამოვიკვლიოთ 9.9 ნახაზი, რომელიც ლოჯისტიკური ასახვის შესაბამისი ტრაექტორიისათვის $C(R)$ სიდიდის გამოთვლის შედეგებს გვიჩვენებს, როდესაც $A=3.56995$, რაც პერიოდის გაორმაგების ზღვრული წერტილის მნიშვნელობასთან ახლოსაა. ამ ნახაზზე გამოყენებული ლოჯისტიკური ასახვის შესაბამისი მნიშვნელობები მიახლოებით 0.90-სა და 0.33-ს შორისაა. ამრიგად R კვლავ აღემატება 0.57-ს და გვექნება $C(R)=1$. ამ შემთხვევას ნახაზის მარჯვენა ზედა ნაწილი შეესაბამება. ამ მნიშვნელობაზე უფრო დიდი R -ის შემთხვევაში $C(R)=1$ დამოუკიდებლად R -ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის.

R -ის მცირე მნიშვნელობებისათვის კორელაციური ჯამი ნულის ტოლია (9.9 ნახაზზე ეს შემთხვევა გამოსახული არ არის). ნახაზზე გამოყენებულია 100 წერტილი. ზემოთ მოყვანილი არგუმენტის თანახმად, $C(R)$ -ის უმცირესი არანულოვანი მნიშვნელობა მიახლოებით $2/104$ -ია. თუ წერტილები მიმზიდველის მთელ არეში თანაბრად განლაგებული, მაშინ მათ შორის საშუალო მანძილი დაახლოებით 0.005 იქნება. ამრიგად, უნდა ველოდოთ, რომ $C(R) = -3.7$, როდესაც R დაახლოებით 0.005-ის ტოლია.



ნახაზი. 9.10. 9.9 ნახაზის იდენტური გამოთვლები, ოღონდ 1000 წერტილის გამოყენებით. R -ის თითოეული მნიშვნელობისთვის აღბათობები 40 წერტილის გასაშუალოების შედეგად არის გამოყვანილი. R -ის მცირე მნიშვნელობებს თან ერთვის წერტილების ზღვრული რაოდენობის შესაბამისი ეფექტები.

$C(R)$ მხოლოდ გარკვეულ შუალედურ არეში ემორჩილება (9.8-5) განტოლებით მოცემულ ნორმირების კანონს, რომელსაც ნორმირების არე ეწოდება და მისი შესაბამისი საშუალო მრუდის კუთხური კოეფიციენტი (9.8-6) განტოლების საშუალებით კორელაციურ განზომილებას განსაზღვრავს $R \rightarrow 0$ ზღვრის გარეშე. 9.9 ნახაზზე მოყვანილი მნიშვნელობებისთვის $D_c = 0.535 \pm 0.012$, რაც სხვა ავტორების (GRP83a) მიერ დადგენილ მნიშვნელობებთან ახლოსაა, მაგრამ სრული თანხვედრა არ გვაძლევს. ცდომილება წრფის 9.9 ნახაზზე მოყვანილი ნორმირების არეში უმცირეს კვადრატთა მეთოდის გამოყენებით დგინდება. შენიშნეთ, რომ აღნიშნული ცდომილება ნორმირების არეში საშუალო წრფის შერჩევით გამოწვეული სტატისტიკური ცდომილებაა. არსებობს ბევრი შესაძლო სისტემატური ეფექტი, რამაც განზომილების გამოთვლილი მნიშვნელობის ცდომილება შეიძლება გამოიწვიოს.

სამწუხაროდ, ექსპერიმენტულ მნიშვნელობათა უმეტესობისათვის ნორმირების არის განსაზღვრა უფრო სუბიექტურია, როდესაც $\log C(R)$ -სა და $\log R$ -ის დამოკიდებულების მრუდი R -ის ვრცელ დიაპაზონში წრფე არ არის. ასეთ დროს გამოთვლილი D_c -ს მნიშვნელობა შედარებით არასანდოა.

9.10 ნახაზი გვიჩვენებს ანალოგიურ გრაფიკს, ოღონდ აქ 1000 წერტილია გამოყენებული. როგორც ვხედავთ, ნორმირების არე ამჯერად R -ის მნიშვნელობების უფრო დიდ დიაპაზონზე ვრცელდება. კორელაციური განზომილების საბოლოო მნიშვნელობა GRP83a-ში მოყვანილ სრულ თანხვედრაშია შედეგთან.

ამკარაა, რომ იდეალური (ხმაურისგან თავისუფალი) მნიშვნელობებისთვის ნორმირების არე 9.10 ნახაზზე მოყვანილი წერტილების უფრო დიდი რაოდენობით გამოყენებისას R -ის უფრო მცირე მნიშვნელობებზეც შესაძლებელია ვრცელდებოდეს. მიუხედავად ამისა, წერტილების დიდი რაოდენობით გამოყენება გამოთვლებისათვის საჭირო დროს საგრძნობლად ზრდის. თუ კორელაციური ჯამის გამოთვლისთვის (9.8-4)-ს ვიყენებთ, მაშინ მოქმედებათა რიცხვი N^2 -ჯერ იზრდება. N -სთვის შესაძლებელია ტრაექტორიის ათასობით წერტილის გამოყენება, მაგრამ $p_i(R)$ -ის გამოთვლა მხოლოდ მათი ნაწილისათვის, მაგალითად, 50 წერტილისთვის ჩავატაროთ. თუ უფრო დიდი რაოდენობის მონაცემებიდან წერტილები „შემთხვევითაა“ შერჩეული, მაშინ საბოლოო კორელაციური ჯამი სრულ კორელაციურ ჯამს თითქმის უტოლდება. მიღებულ შედეგს *წერტილოვანი განზომილება* ეწოდება (FOY83 და [Moon, 1992]).

ამჯერად განვიხილოთ ის ეფექტები, რომლებიც გავლენას ახდენენ კორელაციური განზომილების გამოთვლაზე.

წერტილთა სასრული რაოდენობა

9.9 და 9.10 ნახაზებზე გამოსახულ გამოთვლებს შორის განსხვავება მხოლოდ ანალიზისას გამოყენებული წერტილების რაოდენობითაა გამოწვეული. წერტილების რაოდენობა აწესებს **ზედა ზღვარს** გამოთვლილი D_c მნიშვნელობისთვის. (RUE90)ში მოყვანილია შემთხვევა, რომელიც გვიჩვენებს თუ რატომ უნდა გამოვიჩინოთ ამ დროს სიფრთხილე. ზემოთ ხსენებულ ზღვარს ვუწოდოთ *რუელის ზღვარი*). ზედა ზღვრის არსებობის მიზეზის დადგენის მიზნით განვიხილოთ შემდეგი გამოსახულება:

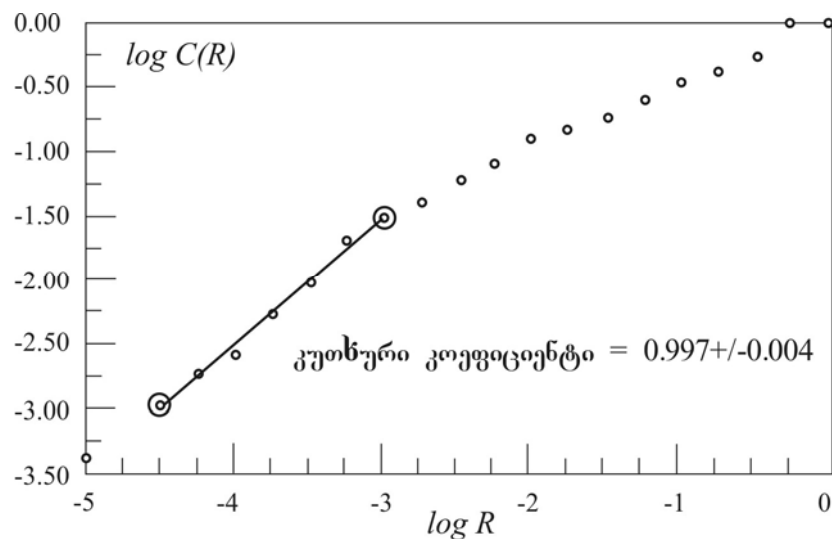
$$D_c = \frac{\log C(R_2) - \log C(R_1)}{\log R_2 - \log R_1} \quad (9.8-7)$$

როგორც უკვე ვნახეთ, უდიდესი $C(R)$ ერთის ტოლია. $C(R)$ -ის უმცირესი არანულოვანი მნიშვნელობა $2/N(N-1)$ ტოლია, სადაც N წერტილების რაოდენობაა. ვთქვათ (9.8-7) გამოსახულების მნიშვნელი ზუსტად q -ს ტოლია. ამრიგად, D_c -ს უდიდესი მნიშვნელობა წერტილთა მოცემული სიმრავლისთვის იქნება:

$$D_c \leq \frac{2 \log N}{q} \quad (9.8-8)$$

სადაც იგულისხმება, რომ $N \gg 1$.

თუ ვიყენებთ ძალიან მცირე რაოდენობით წერტილებს და D_c -ის პოტენციალურად დიდ მნიშვნელობას, მაშინ გამოთვლების შედეგად მიღებული მნიშვნელობა შესაძლებელია ძალზე მცირე იყოს. 9.9 ნახაზის შემთხვევაში $2 \log N = 4$ და $q \approx 4$. ზედა ზღვარი ერთის ტოლი იქნება. ამ შემთხვევაში რეალური კორელაციური განზომილება დაახლოებით 0.5-ის ტოლია, ამრიგად ზედა ზღვარი ძალიან მკაცრად განსაზღვრული არ არის.



ნახაზი. 9.11. $\log C(R)$ -ის გრაფიკი ლოჯისტიკური ასახვისათვის ხელოვნურად შექმნილი ხმაურის პირობებში. $A = 3.56995$. კუთხური კოეფიციენტი აშკარად უფრო დიდია ხმაურიან $\log R < -3$ არეში. ხმაური წარმოადგენს შემთხვევით რიცხვს, რომელიც იმყოფება $+0.001$ -სა და -0.001 -ს შორის. ანალიზისას გამოყენებულია ათასი წერტილი.

მოცემული ზედა ზღვარი განსაკუთრებულ დატვირთვას მე-10 თავში შეიძენს, სადაც ყურადღებას მაღალი განზომილების მქონე სისტემებზე გავამახვილებთ.

თუ კორელაციური განზომილების დასადგენად გასაშუალოების „წერტილოვან“ მეთოდს გამოვიყენებთ, მაშინ კორელაციური განზომილების ზედა ზღვარი მიახლოებით იქნება

$$D_c \leq \frac{\log N + \log N_p}{q} \quad (9.8-9)$$

სადაც N_p წარმოადგენს $p(R)$ -ის საშუალო მნიშვნელობის გამოთვლისას გამოყენებულ წერტილთა რიცხვს. ამ შემთხვევაში ზედა ზღვარი შედარებით მცირეა, რადგან $N_p < N$.

ხმაურით გამოწვეული ეფექტები

კორელაციური განზომილების გამოთვლაზე ზეგავლენა შესაძლებელია ხმაურმაც მოახდინოს. ეს შეიძლება იყოს როგორც ექსპერიმენტული მნიშვნელობების „რეალური“ ხმაური, ასევე რიცხვითი გამოთვლების დამრგვალების ცდომილება. თუ R_n ხმაურის საშუალო „ზომაა“, მაშინ $R < R_n$ შემთხვევაში მიმზიდველის სტრუქტურის ფარგლებში ხმაურის დომინირებას უნდა ველოდოთ. როდესაც ხმაური შემთხვევითი ხასიათისაა, მისი დომინირებისას მონაცემები მდგომარეობათა სივრცეში ერთგვაროვანი გავრცელების ტენდენციას ამჟღავნებს და R -ის მცირე მნიშვნელობებისთვის მდგომარეობათა სივრცის სავარაუდო განზომილებაა $D_c = d$, რაც წარმოადგენს მდგომარეობათა სივრცის განზომილებას R -ის მცირე მნიშვნელობების შემთხვევაში. 9.11 ნახაზი გვიჩვენებს $\log C(R)$ მრუდს ლოჯისტიკური ასახვისათვის, როდესაც დამატებულია ხელოვნურად შექმნილი ხმაური (კომპიუტერის შემთხვევითი რიცხვის გენერატორის მეშვეობით) როდესაც $R_n = 0.001$. $\log R = -3$ სიანლოვეს მრუდის კუთხური კოეფიციენტის ცვლილება ხმაურის არსებობის მაუწყებელია. ხმაურის არეში კუთხური კოეფიციენტია 0.997 ± 0.040 , რაც ისეთი ერთგანზომილებიანი სისტემისათვის, როგორცაა ლოჯისტიკური ასახვა, მოსალოდნელ ერთის ტოლ მნიშვნელობასთან თანხვედრაშია.

როდესაც $C(R)$ -ის განსაზღვრაში ხმაური და ნორმირების არის შერჩევა არსებით როლს ასრულებს, მიზანშეწონილია ნებისმიერი გამოთვლითი სქემის ტესტირება ისეთ მონაცემთა სიმრავლის მიმართ, რომლის მახასიათებლებიც კარგადაა ცნობილი. შენიშნეთ, რომ ხმაურს ახასიათებს $\log C(R)$ მრუდის კუთხური კოეფიციენტის ზრდის ტენდენცია, როდესაც R -ს მცირე მნიშვნელობები აქვს მაშინ, როდესაც წერტილების სასრული რიცხვის შემთხვევაში კუთხური კოეფიციენტის შემცირება დაიკვირვება. შესაძლოა, უეცარ წყვეტასა და ხელოვნური ნორმირების არის წარმოქმნას ჰქონდეს ადგილი. ანალოგიური სქემის გამოყენებით შეგიძლიათ შეისწავლოთ მონაცემთა საკვლევი სიმრავლე ლოჯისტიკური

ასახვის პირობებში, როდესაც $A = 3.56995$, ხმაურის სხვადასხვა დოზის დამატების მეშვეობით. ხმაურის დამატება პერიოდული სიგნალის მიმართაც შეგიძლიათ. იმის გათვალისწინებით, თუ როგორ ზეგავლენას ახდენს ხმაური თქვენს გამოთვლით სქემაზე და როგორ რეაგირებს ეს უკანასკნელი $C(R)$ -ის გამოთვლისას გამოყენებული წერტილების რიცხვზე, კორელაციური განზომილების უფრო სარწმუნო მნიშვნელობა შეგიძლიათ მიიღოთ.

ციფრულ სიდიდეებად წარმოდგენის ზღვრული სიზუსტე

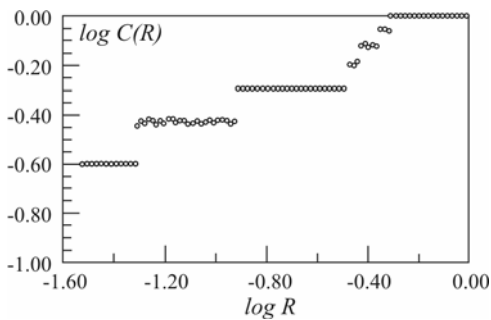
ექსპერიმენტულ მნიშვნელობათა სიმრავლეები და ნებისმიერი რიცხვითი გამოთვლის პროცესი დაკავშირებულია კომპიუტერის მიერ განხორციელებულ რიცხვით ოპერაციებთან. ვინაიდან კომპიუტერი რიცხვებს სასრული რაოდენობის ბიტების მეშვეობით წარმოადგენს, მხედველობაში უნდა მივიღოთ ის ეფექტები, რაც შეიძლება თან ახლდეს კორელაციური განზომილების გამოთვლილ მნიშვნელობებს.

კონკრეტული მაგალითის სახით განვიხილოთ პირველ თავში წარმოდგენილი ნახევარგამტარული დიოდის წრედი. კვლევის შედეგად მიღებული მნიშვნელობები ე.წ. 12-ბიტის ანალოგურ-ციფრულ გარდაქმნელში შედის, რომელიც სიგნალს ნულსა და 4095-ს ($4096=2^{12}$) შორის მდებარე მთელ რიცხვად გარდაქმნის. ცხადია, ამ ერთეულებში ერთზე ნაკლები განსხვავების მქონე ნებისმიერი ორი მნიშვნელობა საბოლოოდ ერთსა და იმავე ციფრს მოგვცემს, მაშინაც კი, როდესაც სიგნალთა შესაბამისი ძაბვები განსხვავებულია. რა სახის ზეგავლენა შეიძლება მოახდინოს ციფრულმა დამრგვალებამ კორელაციური განზომილების გამოთვლაზე?

თუ ორი მნიშვნელობა ერთიმეორისაგან ერთზე ნაკლები მნიშვნელობით განსხვავდება, მაშინ კომპიუტერი „თვლის“, რომ ისინი იდენტური სიდიდეებია. ასე რომ, როდესაც ტრაექტორიებს შორის მანძილი ერთზე ნაკლებია, R -ის მცირე მნიშვნელობებისათვის კორელაციური ჯამის ნორმირების შესახებ განსხვავებულ ინფორმაციას ვერ ვღებულობთ. ამრიგად, დისკრეტიზაციის მთავარი შედეგებია R -ის ქვედა ზღვარის დაწესება, რომელსც მასშტაბის განსაზღვრისათვის ვიყენებთ, და, აგრეთვე, კორელაციის ჯამის რიცხობრივი სიდიდის ქვედა ზღვრის დაწესება. ამის საპირისპიროდ (THE90), თუ $\log C(R)$ -ს გამოვსახავთ $\log(R+s/2)$ ცვლადის ფუნქციის სახით, სადაც s ბიჯის სიდიდეა, მაშინ ბიჯის სიდიდესთან დაკავშირებული თითქმის ყველა ეფექტი ქრება.

პერიოდული მნიშვნელობები

რა არის პერიოდულ მნიშვნელობათა დროითი მწკრივების კორელაციური განზომილება? ამ შემთხვევის ილუსტრაციისათვის 9.12 ნახაზზე წამოღებულია $\log C(R)$ -ის (როგორც $\log R$ ცვლადის ფუნქციის) გრაფიკი, როდესაც $A = 3.5$ (რაც პერიოდი-4 ტიპის ქმედებას შეესაბამება). როგორც ხედავთ, მრუდი საფეხურა მწკრივებს გვიჩვენებს.



ნახ. 9.12. პერიოდული სიგნალის ლოჯისტიკური ასახვის მეშვეობით მიღებული კორელაციური ჯამის შესაბამისი მრუდი $A = 3.5$ მნიშვნელობისათვის, როდესაც ქმედება პერიოდი-4 ტიპისაა. გრაფიკი გვიჩვენებს ექვს განსხვავებულ საფეხურს პერიოდ-4-ის განსხვავებული სივრცული განაწილების გამო.

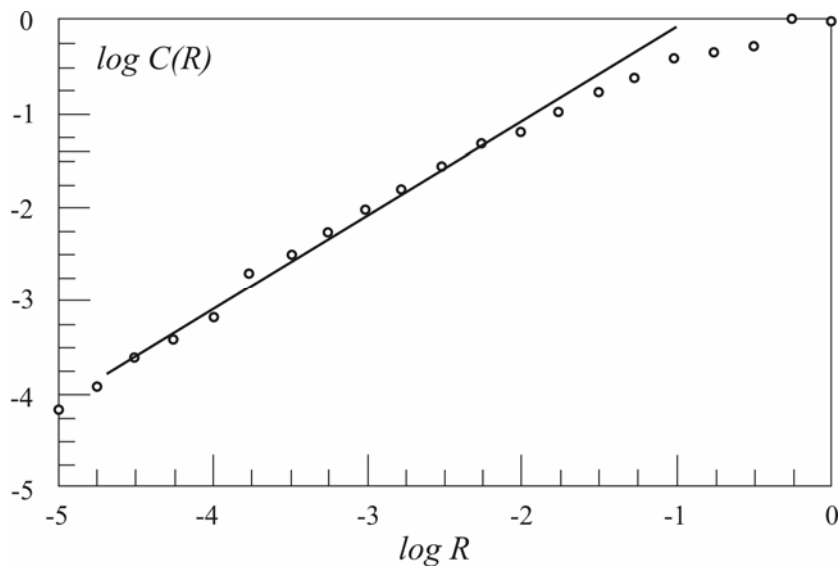
ასეთი შედეგის ახსნა საკმაოდ მარტივია. თუ R სიდიდე ოთხ პერიოდულ წერტილს შორის არსებულ უმცირეს ინტერვალზე მცირეა, მაშინ $C(R) = \log(1/4) = -0.602...$ (ყოველი წერტილის წინ წერტილთა მეოთხედი მდებარეობს). R -ის ზრდასთან ერთად ოთხი პერიოდული წერტილიდან ორი ერთიმეორის R -ში აღმოჩნდება (ლოჯისტიკური ასახვის შესაბამისი მნიშვნელობებისთვის ოთხი პერიოდული წერტილი თანაბრად დაშორებული არ იქნება). R -ის ასეთი მნიშვნელობისთვის $C(R) = \log(1/2)$. R -ის შემდგომი ზრდისას $C(R)$ -ის ნახტომისებური ზრდა გვექნება, ვიდრე R არ მიიღებს ისეთ მნიშვნელობას, როდესაც იგი მოიცავს ოთხივე რიცხვით წერტილს. ამის შემდეგ $\log C(R) = 0$. ამრიგად, $A=3.5$ შემთხვევაში ლოჯისტიკური ასახვისთვის ექვსი განსხვავებული წერტილთშორისი მანძილი იარსებებს (ნახ. 9.12).

ამოცანა 9.8-1. გამოიყენეთ 1.4 პარაგრაფში მოყვანილი რიცხვითი მნიშვნელობები (ან $A = 3.5$ მნიშვნელობისათვის თქვენ თვითონ ჩაატარეთ გამოთვლები) ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციის პერიოდი-4 შემთხვევაში, რათა დარწმუნდეთ 9.12 ნახაზზე მოყვანილი საფეხურების მართებულობაში.

წყვეტილი სახის მონაცემები

ანალიზისათვის გამოყენებული მონაცემთა მწკრივი ხშირად განიცდის წყვეტას განსხვავებული დიაპაზონების სახით. მაგალითად, თუ მონაცემები შეესაბამება ლოჯისტიკურ ასახვას $A = 3.6$ მნიშვნელობის მიდამოში (იხ. ნახ. 9.3), მაშინ ისინი ორ ქაოსური დიაპაზონში აღმოჩნდებიან განაწილებული. ასე რომ, გვაქვს „ხარვეზი“ მონაცემთა მწკრივში. რა ეფექტები განაპირობებენ ამ ინტერვალთა არსებობას, რომლებიც, თავის მხრივ, D_c -ის განსაზღვრაზე ახდენენ გავლენას? ავარჩიოთ R -ის მცირე მნიშვნელობებისთვის ერთსა და იმავე დიაპაზონის ფარგლებში მყოფი წერტილები. თუ ორივე დიაპაზონს ერთი და იგივე კორელაციური განზომილება აქვს, მაშინ კორელაციური ჯამის ნორმირება R -ით იქნება შესაძლებელი (თუ ორი დიაპაზონის კორელაციური განზომილება განსხვავებულია, მაშინ სტანდარტული კორელაციური გაზომვის პროცედურა საშუალო კორელაციურ განზომილებას გვაძლევს). როდესაც R საკმარისად დიდია ორივე დიაპაზონის გაერთიანებისთვის, $\log C(R)$ მრუდის კუთხურ კოეფიციენტთან დაკავშირებით მოსალოდნელია ნახტომისებრი ცვლილებები (იხ. ნახ. 9.13).

ამოცანა 9.8-2. გამოთვალეთ ლოჯისტიკური ასახვის კორელაციური ჯამი, როდესაც $A = 3.6$. შეგიძლიათ თუ არა ტრაექტორიათა ორ-დიაპაზონიანი სტრუქტურის თანმდევი ეფექტების გამოკვლევა?



ნახ. 9.13. კორელაციური ჯამის მრუდი ლოჯისტიკური ასახვის შესაბამისი ორი ქაოსური დიაპაზონის შემთხვევაში, როდესაც $A = 3.6$. როდესაც R ორი დიაპაზონის

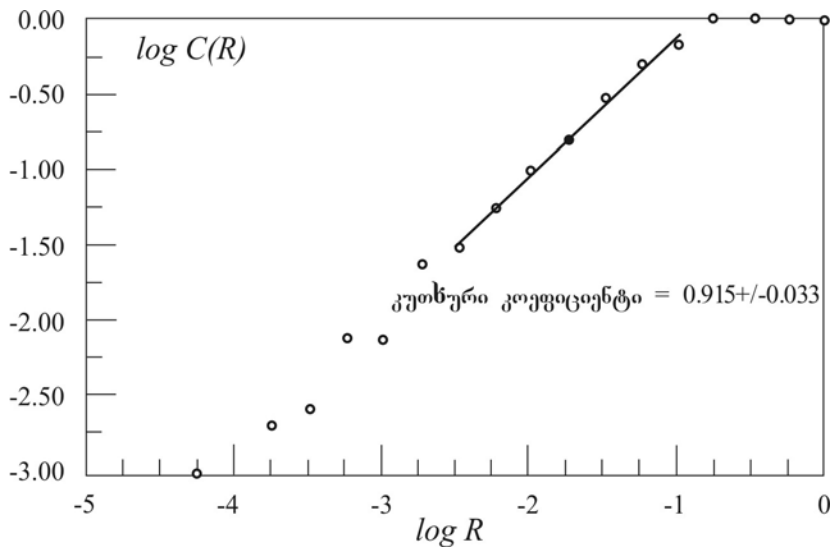
გაერთიანებისთვის საკმარისად დიდია, კორელაციური ჯამის მრუდი იცვლის კუთხურ კოეფიციენტს. ანალიზისათვის გამოყენებულია 1000 წერტილი.

შემთხვევითი ტიპის მონაცემები

რას უდრის სრულიად „შემთხვევითი“ ტიპის მონაცემთა კორელაციური განზომილება? 9.14 ნახაზზე ნაჩვენებია QuickBASIC ენის შემთხვევითი რიცხვის გენერატორის მეშვეობით შედგენილ მონაცემთა სიმრავლის შესაბამისი $\log C(R)$ მრუდი. მონაცემთა მნიშვნელობები -0.1 -დან $+0.1$ მდეა.

მოცემული მრუდი თვისობრივად ლოჯისტიკური ასახვისათვის აგებული გრაფიკის მსგავსია. R -ის დიდი მნიშვნელობის შემთხვევაში, როდესაც იგი მოიცავს ყველა წერტილს, სახეზეა „გაჯერების“ ეფექტი. R -ის მცირე მნიშვნელობებისათვის, როდესაც იგი წერტილთა შორის არსებულ ინტერვალზე მცირეა, $C(R)$ ნულისაკენ მიისწრაფვის. ამ უკიდურესობებს შორის ვხედავთ შუალედს, რომელიც ნორმირების არეს უნდა შეესაბამებოდეს. სრულიად შემთხვევითი მნიშვნელობებისთვის უნდა ველოდოთ კორელაციურ განზომილებას, რომელიც მდგომარეობათა სივრცის განზომილებას გაუტოლდება და მოცემულ შემთხვევაში ერთის ტოლი იქნება. 9.14 ნახაზზე ნაჩვენები ნორმირების არეში უმცირეს კვადრატთა მეთოდის გამოყენება 0.914 ± 0.033 მნიშვნელობის ტოლ კორელაციურ განზომილებას იძლევა, რაც სტატისტიკური ცდომილების ფარგლებში ერთზე ნაკლებია. მონაცემთა უფრო დიდი სიმრავლეები ერთთან დაახლოვებულ მნიშვნელობებს გვაძლევენ (იხ. ნახ. 9.15, სადაც იგივე ანალიზი 1000 წერტილის მიხედვით არის ჩატარებული).

ამრიგად, კორელაციური განზომილება ერთმანეთისაგან არ განასხვავებს შემთხვევით და ქაოსურ მნიშვნელობათა სიმრავლეებს, რომელთა კორელაციური განზომილება მდგომარეობათა სივრცის განზომილებასთან ახლოსაა. 9.14 ნახაზის შემთხვევაში გამოყენებული ანალიზისას, რუელის ზღვარი ერთზე ნაკლებია და ჩვენ მიერ გამოთვლილი კორელაციური განზომილება ამ მნიშვნელობის მეშვეობით ზემოდან შემოსაზღვრულია. 9.15 ნახაზზე წარმოდგენილი მნიშვნელობებისთვის რუელის ზღვარი ერთს აღემატება და გამოთვლილი კორელაციური განზომილება მოსალოდნელ ერთის ტოლ მნიშვნელობასთან თანხვედრაშია.



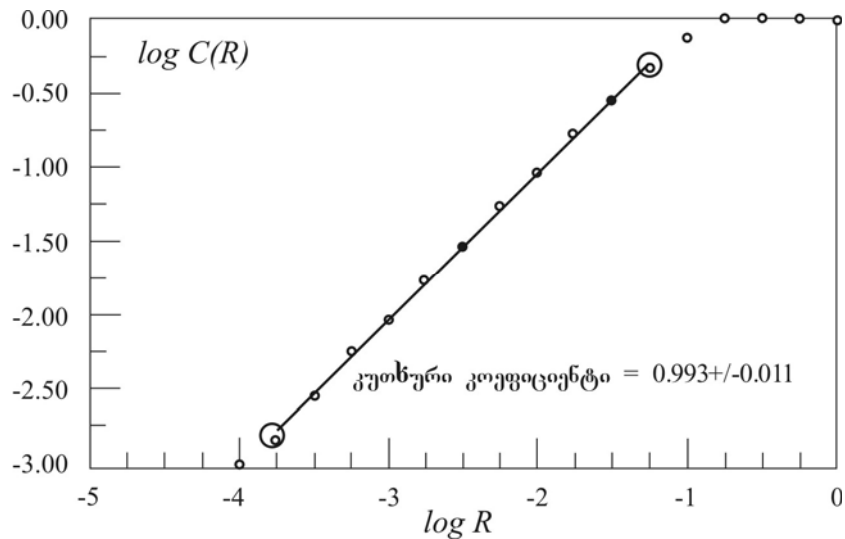
ნახაზი. 9.14. კორელაციური ჯამის გრაფიკი -0.1 -სა და $+0.1$ -ს შორის მყოფ შემთხვევით მნიშვნელობათა სიმრავლისთვის (აღებულია ასი წერტილი). კორელაციური ჯამის გამოთვლისთვის ოცი შემთხვევითი წერტილია არჩეული. გრაფიკი თვისობრივად ლოჯისტიკური ასახვის შესაბამის მნიშვნელობათა გრაფიკის მსგავსია, მაგრამ ნორმირების არეში გრაფიკის კუთხური კოეფიციენტით მოცემული კორელაციური განზომილება მდგომარეობათა სივრცის ერთის ტოლ განზომილებაზე ნაკლებია.

უწყვეტი სახის მონაცემები

გამოვთვალთ კორელაციური განზომილება ზოგიერთი ანალოგური (არაქაოსური) ფუნქციის შესაბამისი მონაცემებისთვის. 9.16 ნახაზზე გამოსახულია კორელაციური ჯამი $0.5\sin(2\pi n/N) + 0.5$ ფუნქციის შესაბამის მნიშვნელობათა სიმრავლისთვის, სადაც N წერტილთა რაოდენობაა და $n=1, 2, \dots, N$.

გამოკვეთილია ნორმირების არე 0.876 ± 0.021 -ის ტოლი კუთხური კოეფიციენტით, რაც წმინდა უწყვეტი სიგნალისთვის მოსალოდნელ ერთის ტოლ მნიშვნელობაზე საგრძნობლად მცირეა. დამოუკიდებელი ცვლადის მნიშვნელობები ერთგვაროვნადაა განაწილებული, მაგრამ ფუნქციის მნიშვნელობების განაწილება, რასაკვირველია, არათანაბარია. მოცემული ფუნქციისთვის ისინი ნულსა და ერთს შორის იყრიან თავს. მეტი რაოდენობის წერტილთა გამოყენების შემთხვევაში ნორმირების არის კუთხური კოეფიციენტი ერთისაკენ მიისწრაფვის.

წრფივი $y=kx$ ფუნქციის გამოყენებისას, სადაც k წერტილთა რაოდენობის შებრუნებული სიდიდეა, ნორმირების არეში კორელაციური ჯამის შესაბამისი მრუდის კუთხური კოეფიციენტი ერთთან ახლოსაა.

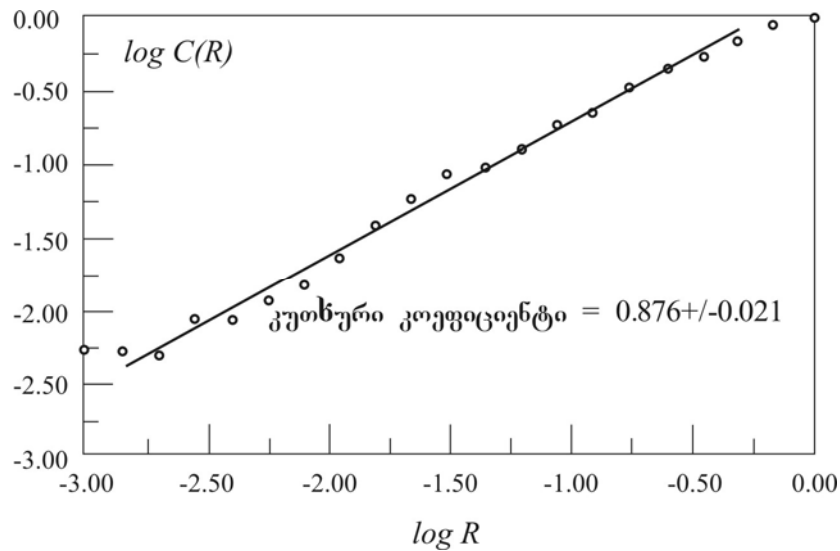


ნახაზი. 9.15. კორელაციური ჯამი გამოთვლილია 9.14 ნახაზზე გამოყენებული იმავე შემთხვევითი სიგნალისათვის, მაგრამ ანალიზისათვის გამოყენებულია 1000 წერტილი. კორელაციური ჯამის გამოსათვლელად ორმოცი წერტილია გამოყენებული. ამჯერად კუთხური კოეფიციენტი ერთის ტოლია (გამოთვლების სიზუსტის ფარგლებში).

ფილტრაციის ეფექტი

გაფრთხილების სახით უნდა აღვნიშნოთ, რომ ბევრი ექსპერიმენტული სიგნალი გარკვეული ფილტრაციის თანხლებითაა ჩაწერილი. მაგალითად, ელექტრულ გაზომვათა უმეტესობის შემთხვევაში გამოყენებულია „დაბალსიხშირული ფილტრის“ მეთოდი, რათა მოხდეს სიგნალიდან ელექტრული ხმაურის გამორიცხვა. ეს ფილტრები აძლიერებს ან ასუსტებს სიგნალს სიხშირეთა შერჩეულ დიაპაზონებში. მაგალითად, თუ შევისწავლით ნელა ცვლად სიგნალს, მაშინ სიგნალის ნებისმიერი უეცარი ცვლილება შესაძლებელია ხმაურს მიეწეროს. ფილტრებს იყენებენ ჩაწერილ სიგნალში ხმაურის უეცარი ცვლილების წილის მოსაცილებლად (ან შესამცირებლად). რა ეფექტს ახდენს ფილტრაციის პროცესი ფრაქტალური განზომილებების ან ნორმირების ექსპონენტების რიცხვით მნიშვნელობებზე? აღიღებს თუ ამცირებს ხელოვნურად ფილტრაცია განზომილების გამოთვლილ მნიშვნელობას? მეცნიერები ამ პრობლემას მხოლოდ ბოლო ხანებში შეისწავლიან, ამიტომ ზემოთ მოყვანილ შეკითხვებზე საფუძვლიანი პასუხი ჯერჯერობით არ არსებობს. ფილტრაციის ზოგიერთი სახეობა გამოთვლილ განზომილებას თითქოს ზრდის, სხვები კი მისი შემცირებისკენ მიგვანიშნებენ. ზოგადი ტენდენცია იმის მაუწყებელია, რომ ფილტრაციის პროცესების

უმრავლესობა ფრაქტალურ განზომილებათა უფრო მცირე რიცხვით მნიშვნელობას გვაძლევს, რადგან ფილტრაცია სიგნალში ხმაურის სიდიდეს ამცირებს.

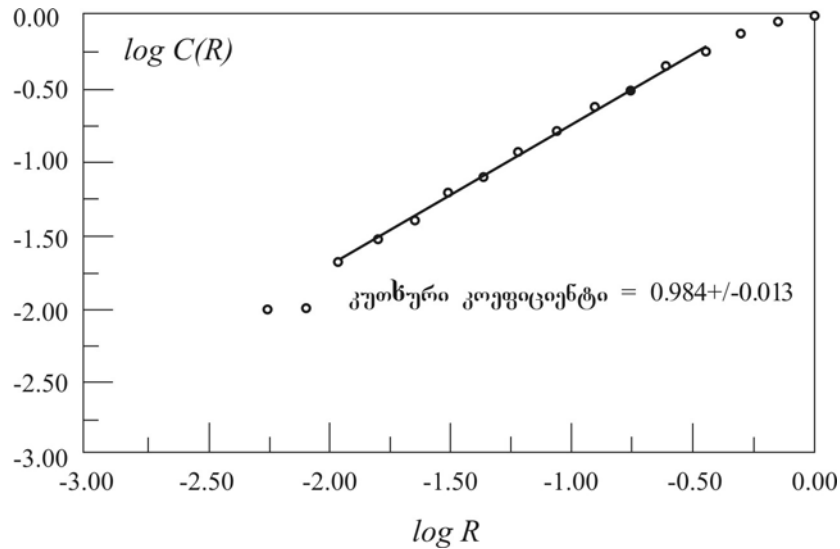


ნახაზი. 9.16. კორელაციური ჯამის მნიშვნელობები უწყვეტი ფუნქციის შესაბამისი წერტილების სიმრავლისთვის. ამ შემთხვევაში $0.5\sin(2\pi x) + 0.5$ ფუნქციის x არგუმენტი მნიშვნელობებს ღებულობს $1/200$ -დან ერთამდე. ანალიზი 200 წერტილზეა დამყარებული. კორელაციური ჯამის გამოთვლისათვის შემთხვევით არჩეული 40 წერტილია გამოყენებული. გამოთვლილი კუთხური კოეფიციენტი უწყვეტ მნიშვნელობათათვის მოსალოდნელ ერთის ტოლ მნიშვნელობაზე საგრძნობლად მცირეა.

ფილტრაციის ერთ-ერთი ნიმუში (BBD88) დინამიკურ სისტემას თავისუფლების კიდევ ერთ ხარისხს უმატებს. დაბალსიხშირიანი ფილტრის გამოყენება დამყარებულია ლიაპუნოვის ექსპონენტებზე. შედეგად სიხშირეთა ფართო დიაპაზონიდან ხდება მხოლოდ სისტემის შესაბამის სიხშირეთა „გატარება“ და ამ პროცესს განზომილების გამოთვლაზე არანაირი ზეგავლენა არ აქვს. თუ გამავალი სიხშირეების დიაპაზონს შევამცირებთ, მაშინ ფილტრის დინამიკა დინამიკური სისტემის ნაწილად გარდაქმნება და თავისუფლების დამატებითი ხარისხი განზომილების მოქმედი მნიშვნელობის გაზრდისკენ მიისწრაფვის. ფილტრების არსებობა სიგნალის რეაქციას ანელებს, ამიტომ ეფექტური სიგნალი მიმზიდველზე სწრაფად არ განიცდის კოლაფსს და მდგომარეობათა სივრცეში უფრო მაღალი განზომილების არეს იკავებს (ROC94).

ადვილი საჩვენებელია, რომ დაბალსიხშირიანი ფილტრების გამოყენება სიგნალს წმინდა შემთხვევით რიცხვთა მიმდევრობად გარდაქმნის, რომელიც მსგავსია მცირე განზომილების მქონე დინამიკური სისტემებიდან მიღებული სიგნალებისა. ამ შემთხვევაშიც

დიდი სიფრთხილის გამოჩენა გემაართებს. ამ დროს ოპტიმალური გზა მდგომარეობს ფილტრაციის პარამეტრების ცვლაში, რათა შემოწმდეს ფილტრაციის შესაძლო გავლენა ფრაქტალური განზომილების გამოთვლაზე ან ნორმირების ინდექსის მნიშვნელობებზე.



ნახაზი. 9.17. კორელაციური ჯამის მნიშვნელობები წრფივი ფუნქციისთვის. ანალიზისათვის ზუსტად 200 წერტილია გამოყენებული. ამ შემთხვევაში ნორმირების არეში კუთხური კოეფიციენტი მოსალოდნელ ერთის ტოლ მნიშვნელობასთან ახლოსაა.

დასკვნა

რა დასკვნა გამოგვაქვს ზემოთ მოყვანილი მსჯელობიდან? მთავარი შედეგი ის არის, რომ რეალური მონაცემების საფუძველზე წარმოებული გამოთვლისას მიღებული კორელაციური განზომილების რიცხვითი მნიშვნელობის ინტერპრეტაციასთან დაკავშირებით სიფრთხილე უნდა გამოვიჩინოთ. არსებობს როგორც მონაცემთა შესაბამისი წერტილების ზღვრული რაოდენობის, ასევე რეალური მნიშვნელობების მისაღებად გამოყენებული საბოლოო გადაწყვეტილების და ფილტრაციის პროცესის შესაბამისი მნიშვნელოვანი ეფექტები. ამასთან ერთად, არსებული ხმაური გამოთვლილი კორელაციური განზომილების სიდიდის გაზრდისკენ მიისწრაფვის. ამ პროცესების ერთობლიობამ განზომილების რეალურ მნიშვნელობაზე საგრძნობი ზეგავლენა შესაძლებელია მოახდინოს. კორელაციური განზომილების რიცხვითი მნიშვნელობიდან მნიშვნელოვანი დასკვნების გამოტანამდე სასურველია ამ მნიშვნელობის გამოყენებულ წერტილების რაოდენობაზე, მონაცემებში შემავალი ხმაურის სიდიდეზე, მონაცემების არითმეტიკულ სიზუსტეზე, ფილტრაციის

მონაცემებსა და კორელაციური ჯამის მისაღებად გამოყენებულ შემზღუდველ პროცესზე დამოკიდებულება გამოიკვლიოთ.

ასევე უნდა გადაამოწმოთ თქვენ მიერ მიღებული შედეგების სამართლიანობა მონაცემთა ალტერნატიულ სიმრავლეზე დაყრდნობით (TGL91). მათ ფურიეს იგივე სპექტრი გააჩნიათ, მაგრამ დეტერმინისტული ხასიათი დაკარგული აქვთ. ეს მეთოდი დაგეხმარებათ იმის გააზრებაში, თუ რა შემთხვევაში წარმოაჩენს თქვენს მონაცემებს საუკეთესოდ დეტერმინისტული ქაოსის ან სრულიად შემთხვევითი პროცესების შესაბამისი მოდელები.

ჩვენ სხვადასხვა მეცნიერების მიერ მიღებული განზომილებებისა და ექსპონენტების განსაზღვრის შედეგების „მომხმარებლები“ ვართ, ამიტომ სისტემატური ეფექტის კვლევის გარეშე მიღებულ შედეგებს სკეპტიკურად უნდა შევხედოთ. კორელაციურ განზომილებასთან დაკავშირებული გამოთვლითი ხასიათის რჩევებისთვის იხილეთ ASV88, THE90, CGM90 და TGL91.

9.9 კომენტარები და დასკვნები

მოცემულ თავში განვიხილეთ ქაოსური სისტემის რაოდენობრივი დახასიათების რამდენიმე მეთოდი და არსებითი ყურადღება ქაოსური სისტემის ხასიათის განსაზღვრის ზოგიერთ რიცხვით მეთოდს დავუთმეთ. ლიაპუნოვის ექსპონენტები და კოლმოგოროვ-სინაის ენტროპია სისტემის ქმედებას დროის ფუნქციის სახით წარმოგვიდგენენ. სხვადასხვაგვარი ფრაქტალური განზომილებები მდგომარეობათა სივრცეში მიმზიდველების გეომეტრიული სტრუქტურის შესახებ გვიქმნიან წარმოდგენას. თუ სისტემას ლიაპუნოვის ერთი დადებითი ექსპონენტა მაინც გააჩნია, ვამბობთ, რომ სისტემის ქმედება ქაოსურია. თუ მიმზიდველი წილადი რიცხვის მქონე განზომილებით გამოხატულ ნორმირებას ამჟღავნებს, მაშინ ვამბობთ, რომ მიმზიდველი უცნაურია.

არიან თუ არა ეს მახასიათებლები ერთიმეორესთან კავშირში? თუ სისტემის ქმედება ქაოსურია, არის თუ არა შესაბამისი მიმზიდველი (დისიპაციური სისტემის შემთხვევაში) უცნაური? თუკი დავასკვნით, რომ მიმზიდველი უცნაურია, არიან თუ არა მიმზიდველის ფარგლებში ტრაექტორიათა ქმედებები ქაოსური ხასიათის მქონე? თქვენმა ინტუიციამ ამ შემთხვევაში შესაძლებელია ჰიპოთეზათა შექმნამდე მიგვიყვანოს. მაგალითად, ქაოსური ტრაექტორიებისთვის დამახასიათებელმა დივერგენციამ და მოკეცვამ შესაძლებელია უცნაური გეომეტრიის მქონე მიმზიდველის არსებობის შესაძლებლობა შექმნას. ამის საპირისპიროდ, უცნაური მიმზიდველის რთული გეომეტრია თითქოს დინამიკის ქაოსურობისკენ გვიბიძგებს.

ამგვარ კავშირებში გამონაკლისებიც არსებობს. მაგალითად, ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციის (ან კვადრატული მაქსიმუმის მქონე სხვა ნებისმიერი ცალსახა ასახვის ფუნქციის) პერიოდის გაორმაგების ზღვრულ წერტილში მიმზიდველი უცნაურია (9.8 პარაგრაფის თანახმად, როდესაც $D_c = 0.501 \pm 0.007$), მაგრამ ქმედება ქაოსური არ არის: პერიოდის გაორმაგების ზღვრულ წერტილში ლიაპუნოვის ექსპონენტა ნულის ტოლია.

არაქაოსური უცნაური მიმზიდველების შემთხვევაში უნდა შევთანხმდეთ, რომ ამგვარი ქმედება პარამეტრის მხოლოდ ერთი მნიშვნელობისათვის (პერიოდის გაორმაგების ზღვრული წერტილი) ვლინდება. მდებარეობს თუ არა, უცნაური, მაგრამ არაქაოსური მიმზიდველები პარამეტრის მნიშვნელობათა გარკვეულ დიაპაზონში? გრებოვიმ, ოტმა, პელიკანმა და იორკმა (GOP86) გვიჩვენეს, რომ ორ არათანაზომად სიხშირეზე გარე ძალების მიერ მართულ არაწრფივ ოსცილატორებს პარამეტრის მნიშვნელობათა გარკვეულ ზღვრულ დიაპაზონში შესაძლებელია უცნაური, მაგრამ არაქაოსური მიმზიდველები აღმოაჩნდეთ. მათ აგრეთვე დაამტკიცეს, რომ დროზე უწყვეტი სახით დამოკიდებულ სისტემებს (ანუ უფრო დიფერენციალური განტოლებებით და არა იტერაციული ასახვებით მოდელირებულ სისტემებს), რომლებიც ორი არათანაზომადი სიხშირით არ იმართებიან, არაქაოსური, უცნაური მიმზიდველები შესაძლებელია არ აღმოაჩნდეთ. ასეთი სისტემების უმრავლესობისთვის მიმზიდველები უცნაურობის შემთხვევაშია ქაოსური.

ჩვენ ამ თავს ვასრულებთ იმის აღნიშვნით, რომ არც ერთი რიცხვითი მახასიათებელი არაწრფივი სისტემის მახასიათებელ „საუკეთესო“ მეთოდს არ წარმოადგენს. ნებისმიერი მათგანი მოითხოვს შრომატევადი გამოთვლითი პროცესის ჩატარებას საძიებელი რიცხვითი მნიშვნელობების დადგენისათვის. ოდნავი უპირატესობა ლიაპუნოვის ექსპონენტებს უნდა მივანიჭოთ, რადგან ლიაპუნოვის დადებითი ექსპონენტა წარმოაჩენს ქაოსური დინამიკის მთავარ მახასიათებელ ნიშანს: ახლომდებარე ტრაექტორიათა სწრაფ დივერგენციას. მომდევნო თავში ვნახავთ, რომ მდგომარეობათა მრავალგანზომილებიანი სივრცის შემთხვევაში ლიაპუნოვის ექსპონენტები წილადურ განზომილებებსაც შეგვიძლია დაუუკავშიროთ. შედარებით დიდი განზომილების მქონე მდგომარეობათა სივრცეების შემთხვევაში ლიაპუნოვის ექსპონენტების გამოთვლა საკმაოდ გართულებულია და ბევრი მკვლევარი ფრაქტალური გაზომვის რაიმე სხვა საშუალებას იყენებს (ყველაზე ხშირად – კორელაციურ გაზომვას).

9.10 დამატებითი ლიტერატურა

ზოგადი კურსები ქაოსის რიცხვითი სახით წარმოდგენის შესახებ

N. Gershenfeld, "An Experimentalist's Introduction to the Observation of Dynamical Systems." in [Hao, 1988], pp. 310-84. ექსპერიმენტული მონაცემების საფუძველზე ქაოსის რიცხვითი წარმოდგენის ტექნიკის გაცნობა.

J.-P. Eckmann and D. Ruelle, "Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors," *Rev. Mod. Phys.* 57, 617-56 (1985). უფრო რთულ დონეზეა წარმოდგენილი ქაოსის კვანტიფიცირების მრავალი მეთოდის მიმოხილვა.

H. D. I. Abarbanel, R. Brown, J. J. Sidorowich, and L. Sh. Tsimring, "The analysis of observed chaotic data in physical systems," *Rev. Mod. Phys.* 65, 1331—92 (1993). არაწრფივი სისტემების მონაცემთა ანალიზის მრავალი მეთოდის მიმოხილვა.

[Ott, Sauer, and Yorke, 1994]. მოიცავს 41 სტატიას სხვადასხვა სფეროებში ქაოსის მონაცემთა ანალიზის შესახებ.

Garnett P. Williams, *Chaos Theory Tamed* (National Academy Press, Washington, DC, 1997).

R. Hegger, H. Kantz, and T. Schreiber, "Practical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package," *Chaos* 9, 413-35 (1999).

ქაოსში გარდამავალი სტადიები

I. M. Janosi and T. Tel, "Time-Series Analysis of Transient Chaos," *Phys. Rev.* 49, 2756-63 (1994).

ლიაპუნოვის ექსპონენტები

E. N. Lorenz, "The Local Structure of a Chaotic Attractor in Four Dimensions," *Physica D* 13, 90-104 (1984).

J. Wright, "Method for Calculating a Lyapunov Exponent," *Phys. Rev. A* 29, 2924-27 (1984).

J.-P. Eckmann, S. O. Kamphorst, D. Ruelle, and S. Ciliberto, "Lyapunov Exponents from Time Series," *Phys. Rev. A* 34, 4971-79 (1986).

A. Wolf, "Quantifying Chaos with Lyapunov Exponents." in [Holden, 1986], pp. 273-90.

S. DeSouza-Machado, R. W. Rollins, D. T. Jacobs, and J.L. Hartman, "Studying Chaotic Systems Using Microcomputer Simulations and Lyapunov Exponents," *Am. J. Phys.* 58, 321-29 (1990).

M. T. Rosenstein, J. J. Collins, and C. J. DeLuca, "A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets." *Physica D* 65, 117-34 (1993).

S. Ellner and P. Turchin, "Chaos in a Noisy World: New Methods and Evidence from Time-Series Analysis," *The American Naturalist* 145, 343-75 (1995). სტატიაში განხილულია ლიაპუნოვის ექსპონენტების შეფასების მეთოდები ეკოლოგიურ სისტემებში არსებულ პოპულაციათა დინამიკის შესახებ.

B. A. Huberman and J. Rudnick, "Scaling Behavior of Chaotic Flows," *Phys. Rev. Lett.* 45, 154-56 (1980).

S. C. Johnston and R. C. Hilborn, "Experimental Verification of a Universal Scaling Law for the Lyapunov Exponent of a Chaotic System," *Phys. Rev. A* 37, 2680-82 (1988).

ინვარიანტული განზომილება

E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 1993). 51-55 გვერდებზე მოცემულია მსჯელობა ინვარიანტული განზომილებებისა და განაწილებების შესახებ.

K-S ენტროპია

D. Chandler, *Introduction to Modern Statistical Mechanics* (Oxford University Press, New York, 1987).

J. D. Farmer, "Information Dimension and Probabilistic Structure of Chaos," *Z Naturforsch.* 37a, 1304 (1982).

P. Grassberger and I. Procaccia, "Estimation of the Kolmogorov Entropy from a Chaotic Signal," *Phys. Rev. A* 28, 2591-93 (1983).

G. Benettin, L. Galgani, and J.-M. Strelcyn, "Kolmogorov Entropy and Numerical Experiments," *Phys. Rev. A* **14**, 2338-45 (1976). Reprinted in [Hao, 1985].

Ya. B. Pesin, *Russ. Math. Surveys* **32**, 55 (1977). The Kolmogorov entropy equals the sum of the positive Lyapunov exponents.

G. Paladin, L. Peliti, and A. Vulpiani, "Intermittency as multifractality in history space," *J. Phys. A* **19**, L991-6 (1986). მეტი ინფორმაცია Pesin relation-ის შესახებ.

A. Bonasera, V. Latora, and A. Rapisarda, "Universal Behavior of Lyapunov Exponents in Unstable Systems," *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3434-37 (1995).

M. Dzugutov, E. Aurell, and A. Vulpiani, "Universal Relation between the Kolmogorov-Sinai Entropy and the Thermodynamic Entropy in Simple Liquids," *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1762-65 (1998).

V. Latora and M. Baranger, "Kolmogorov-Sinai Entropy Rate versus Physical Entropy," *Phys. Rev. Lett.* **82**, 520-23 (1999).

E. Cohen and L. Rondoni, "Comment on 'Universal Relation between the Kolmogorov-Sinai Entropy and the Thermodynamic Entropy in Simple Liquids,'" *Phys. Rev. Lett.* **84**, 394 (2000).

M. Dzugutov, "Dzugutov Replies," *Phys. Rev. Lett.* **84**, 395 (2000).

ფრაქტალები

ამ ნაშრომებში მოცემულია არაჩვეულებრივი შესავალი კურსები ფრაქტალური გეომეტრიული ობიექტების შესახებ:

B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature* (W. H. Freeman, San Francisco, 1982).

H.-O. Peitgen and P. H. Richter, *The Beauty of Fractals* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1986).

M. Barnsley, *Fractals Everywhere* (Academic Press, San Diego, 1988). fractals მათემატიკური თვალსაზრისით უფრო რთული შესავალი კურსი.

H. Jurgens, H.-O. Peitgen, and D. Saupe, "The Language of Fractals," *Sci. Am.* **263**, 60-67 (1990). საინტერესო შესავალი სტატია.

E. Guyon and H. E. Stanley, *Fractal Forms* (Elsevier, New York, 1991).

D. K. Umberger and J. D. Farmer, "Fat Fractals on the Energy Surface", *Phys. Rev. Lett.* **55**, 661-64 (1985).

R. Eykholt and D. K. Umberger, "Characterization of Fat Fractals in Nonlinear Dynamical Systems," *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2333-36 (1986).

B. B. Mandelbrot, "Self-Affine Fractals and Fractal Dimension," *Phys. Scr.* **32**, 257-60 (1985).

M. A. Rubio, C. A. Edwards, A. Dougherty, and J. P. Gollub, "Self-Affine Fractal Interfaces from Immiscible Displacements in Porous Media," *Phys. Rev. Lett.* **63**, 1685-87 (1989).

ფრაქტალური განზომილებები

A. N. Kolmogorov, "A New Invariant for Transitive Dynamical Systems," *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **119**, 861-64 (1958).

P. Grassberger, "On the Hausdorff Dimension of Fractal Attractors," *J. Stat. Phys.* **26**, 173-79 (1981).

J. D. Farmer, E. Ott, and J. A. Yorke, "The Dimension of Chaotic Attractors," *Physica D* **7**, 153-80 (1983).

განზომილებათა სხვადასხვა ფორმების შედარებისა და მათი პრაქტიკული გამოთვლის მიმოხილვა მოცემულია [Moon, 1992] მე-7 თავში.

D. Ruelle, *Chaotic Evolution and Strange Attractors* (Cambridge University Press, New York, 1989).

H. Hentschel and I. Procaccia, "The Infinite Number of Generalized Dimensions of Fractals of Strange Attractors," *Physica D* 8, 435-444 (1983).

C. Essex and M. Nerenberg, "Fractal Dimension: Limit Capacity or Hausdorff Dimension?" *Am. J. Phys.* **58**, 986-88 (1990).

M. H. Jensen, P. Bak, and T. Bohr, "Complete Devil's Staircase, Fractal Dimension and Universality of Mode-Locking Structure in the Circle Map," *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1637-39 (1983).

J. Testa, "Fractal Dimension at Chaos of a Quasiperiodic Driven Tunnel Diode," *Phys. Lett. A* **111**, 243-5 (1985).

A. Cumming and P. S. Linsay, "Deviations from Universality in the Transition from Quasi-Periodicity to Chaos," *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1633-36 (1987).

P. Alstrom, B. Christiansen, and M. T. Levinsen, "Nonchaotic Transition from Quasi-periodicity to Complete Phase Locking," *Phys. Rev. Lett.* **61**, 1679-82 (1988).

C. Grebogi, E. Ott, S. Pelikan, and J. A. Yorke, "Strange Attractors that are not Chaotic," *Physica D* **13**, 261-68 (1984). ქაოსურია თუ არა ყველა უცნაური მიმზიდველი? როგორც ჩანს, არა.

R. F. Voss, "Random Fractals, Self-Affinity in Noise, Music, Mountains, and Clouds," *Physica D* **38**, 362-71 (1989).

არის ფრაქტალური საზღვრები

E. G. Gwinn and R. M. Westervelt, "Intermittent Chaos and Low-Frequency Noise in the Driven Damped Pendulum," *Phys. Rev. Lett.* **54**, 1613-16 (1985).

E. G. Gwinn and R. M. Westervelt, "Fractal Basin Boundaries and Intermittency in the Driven Damped Pendulum," *Phys. Rev. A* **33**, 4143-55 (1986).

J. C. Sommerer and E. Ott, "A physical system with qualitatively uncertain dynamics," *Nature* **365**, 136-140 (1993).

Y.-C. Lai and R. L. Winslow, "Riddled Parameter Space in Spatiotemporal Chaotic Dynamical Systems," *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1640-43 (1994).

კორელაციური განზომილებები

P. Grassberger and I. Procaccia, "Characterization of Strange Attractors," *Phys. Rev. Lett.* **50**, 346-49 (1983).

N. B. Abraham, A. M. Albano, B. Das, G. De Guzman, S. Yong, R. S. Gioggia, G. P. Puccioni, and J. R. Tredicce, "Calculating the Dimension of Attractors from Small Data Sets," *Phys. Lett. A* **114**, 217-21 (1986).

H. Atmanspacker, H. Scheingraber, and W. Voges, "Global Scaling Properties of a Chaotic Attractor Reconstructed from Experimental Data," *Phys. Rev. A* **37**, 1314-22 (1988). ექსპერიმენტულ მონაცემებში განზომილების დადგენის მეთოდოლოგია.

J. W. Havstad and C. L. Ehlers, "Attractor Dimension of Nonstationary Dynamical Systems from Small Data Sets," *Phys. Rev. A* **39**, 845-53 (1989).

J. Theiler, "Estimating Fractal Dimension," *J. Opt. Soc. Am. A* **7**, 1055-73 (1990).

M. Moller, W. Lange, F. Mitschke, N. B. Abraham, and U. Hiibner, "Errors from Digitizing and Noise in Estimating Attractor Dimensions," *Phys. Lett. A* **138**, 176-82 (1989).

R. Badii, G. Broggi, B. Derighetti, M. Ravani, S. Ciliberto, A. Politi, and M. A. Rubio, "Dimension Increase in Filtered Chaotic Signals," *Phys. Rev. Lett.* **60**, 979-82 (1988).

F. Mitschke, M. Moller, and W. Lange, "Measuring Filtered Chaotic Signals," *Phys. Rev. A* **37**, 4518-21 (1988).

D. Ruelle, "Deterministic Chaos: The Science and the Fiction," *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **427**, 241-48 (1990).

C. Essex and M. A. H. Nerenberg, "Comments on 'Deterministic Chaos: the Science and the Fiction' by D. Ruelle," *Proc. Roy. Soc. London A* **435**, 287-92 (1991)

J. Theiler, B. Galdrikian, A. Longtin, S. Eubank, and J. D. Farmer, in *Nonlinear Modeling and Forecasting*, Santa Fe Institute Studies in the Sciences of Complexity, Proc. Vol.

XII, pp. 163-88. M. Casdagli and S. Eubank (eds.) (Addison-Wesley, Reading, MA, 1991).
გვთავაზობს "სუროგატული მონაცემების" გამოყენებას ფრაქტალურ გამოთვლებში.

A. K. Agarwal, K. Banerjee, and J. K. Bhattacharjee, "Universality of Fractal Dimension at the Onset of Period-Doubling Chaos," *Phys. Lett. A* **119**, 280-83 (1986).

M. T. Rosenstein and J. J. Collins, "Visualizing the Effects of Filtering Chaotic Signals," *Computers and Graphics* **18**, 587-92 (1994).

9.11 კომპიუტერული ამოცანები

CE9-1. გამოთვალეთ ლიაპუნოვის საშუალო ექსპონენტა ლოჯისტიკური ასახვის შემთხვევაში, როდესაც $A = 4$ და აჩვენეთ, რომ იგი 9.5 პარაგრაფში ანალიზურად გამოთვლილი $\ln 2$ -ის ტოლია.

CE9-2. გამოიყენეთ *Chaos Demonstrations* ლოჯისტიკური ასახვის შემთხვევაში ლიაპუნოვის ექსპონენტის გამოსახვისთვის. შეამოწმეთ, ემორჩილება თუ არა ლიაპუნოვის ექსპონენტა 9.4 პარაგრაფში მოყვანილ ნორმირების კანონს.

CE9-3. (მოითხოვს ძალისხმევას, მაგრამ ძნელი არ არის) შეადგინეთ მონაცემთა დროითი მწკრივებისთვის კორელაციური ფუნქციის გამოთვლის კომპიუტერული პროგრამა. ააგეთ $\log C(R)$ -ის გრაფიკი და შეამოწმეთ 9.8 პარაგრაფში მოყვანილი შედეგები.

CE9-4. ისარგებლეთ CE9-3-თვის თქვენ მიერ შედგენილი კორელაციური გაზომვის პროგრამით და გამოიკვლიეთ ჰიპოთეზა (ABB86), D განზომილება პერიოდის გაორმაგების ზღვრული წერტილის მიღმა A -სთან ერთად იზრდება შემდეგი სახით:

$$D(A) - D(A_\infty) = k |A - A_\infty|$$

სადაც k მუდმივი რიცხვია.

CE9-5. პროგრამა FRACTINT-ის საცდელი ვერსია ფრაქტალის წარმომქმნელი პროგრამების დიდ სპექტრს ამზადებს, რომელიც სხვებთან ერთად ისეთ ცნობილ სიმრავლებებს მოიცავს, როგორცაა *მანდლებროს* ან *ჟულიეს* სიმრავლე.

CE9-6. გამოიყენეთ *Chaos Demonstrations* ჟულიესა და *მანდლებროს* სიმრავლეების გამოკვლევისთვის.

მრავალი განზომილება და მულტიფრაქტალები

ბედისწერა დაემორჩილება ცვალებად გარემოებას, ხოლო ქაოსი განსჯის მტრობას. Milton, *Paradise Lost*, ii.232.

10.1 ზოგადი კომენტარები და შესავალი

მოცემულ თავში აღწერთ ქაოსის რიცხვითი სახით წარმოდგენის მე-9 თავში შემოთავაზებული მეთოდების ზოგიერთ განზოგადებას. თავდაპირველად ვაჩვენებთ, თუ ცალკეული დინამიკური ცვლადის მეშვეობით როგორ ვღებულობთ მდგომარეობათა სივრცის დინამიკის მრავალგანზომილებიან სურათს. ე.წ. ჩადგმის (ან რეკონსტრუქციის) სქემას, რომელიც ასეთ პროცესს მართავს, უმნიშვნელოვანესი წვლილი შეიტანა ბოლო ათწლეულის განმავლობაში არაწრფივი დინამიკის კვლევის თვალსაზრისით. იგი იქცა არაწრფივი სისტემების ანალიზის მეთოდიკის არჩევის გზამკვლევად.

როდესაც ჩვენს ხელთაა ჩადგმის (რეკონსტრუქციის) სქემა, ქაოსური ქმედების რაოდენობრივი გაზომვის სხვადასხვა ხერხების დანერგვის საშუალება გვებეჭება. ჩვენ ყურადღებას კორელაციური განზომილებისა და მისი განზოგადებების, აგრეთვე კოლმოგოროვის ენტროპიის კონცეფციის განვრცობაზე გავამახვილებთ. ამგვარი წარმოდგენა მოითხოვს მკითხველის დაახლოებას ქაოსის რიცხვითი წარმოდგენის ამსახველ ლიტერატურასთან.

ამ თავის ბოლო პარაგრაფებში დინამიკის დახასიათების სამ მძლავრ, მაგრამ საკმაოდ აბსტრაქტულ ხერხს მოვიყვანთ. ერთ-ერთი მეთოდის დანიშნულებაა მდგომარეობათა სივრცეში ფრაქტალური განზომილებების სპექტრის და ლიაპუნოვის ექსპონენტების განვრცობა. მეორე მეთოდი ახდენს მიმზიდველთა კლასიფიკაციას მათზე მყოფი არასტაბილური პერიოდული ორბიტების ტოპოლოგიური მახასიათებლების მიხედვით. მესამე მეთოდი სისტემის დინამიკური ქმედების შესწავლის მიზნით სტატისტიკურ მექანიკისათვის ჩვეულ ფორმალურ მიდგომას იყენებს.

მკითხველი, ვინც მათემატიკურ მიდგომასთან დაკავშირებით აღფრთოვანებას არ გამოხატავს, აუცილებლად უნდა გაეცნოს 10.2 პარაგრაფის ჩადგმის ტექნიკას და თავის დარჩენილი ნაწილი გამოტოვოს. მეორე მხრივ, ქაოსის ანალიზის გამოყენებით

დაინტერესებულ პირებს ზოგადი განზომილებებისა და ენტროპიის დეტალური შესწავლა დიდ დახმარებას გაუწევს.

10.2 ჩადგმული სივრცეები

მე-9 თავში ლიაპუნოვის ექსპონენტების, განზომილებებისა და ენტროპიების შესახებ განხილვისას მივმართავდით ერთი ცვლადის (ვთქვათ, x -ის) მნიშვნელობებს, რომლის დროსაც $\{x_i\}$ მნიშვნელობებს შევეუსაბამებდით დროის $\{t_i\}$ სიმრავლეს. ჩვენ ვივარაუდეთ, რომ რიცხვების ასეთი ცალკეული სიმრავლის მიხედვით სისტემის დინამიკაზე სრულყოფილი წარმოდგენა შეგვექმნებოდა. ამრიგად, სისტემის დინამიკის შესწავლის მიზნით მივმართავთ ერთგანზომილებიან მოდელს.

ამჯერად დღის წესრიგში დგას ამგვარი ერთგანზომილებიანი შეზღუდვის მოხსნა. პროცესის წარმართვის ერთ-ერთი მეთოდი, რასაკვირველია, სისტემისთვის დინამიკურ ცვლადთა მნიშვნელობების სინქრონულ გაზომვაში მდგომარეობს. პირველ თავში მოყვანილი ლორენცის მოდელის ტიპის სამგანზომილებიანი სისტემისთვის დაგვჭირდება სამი მნიშვნელობის (ვთქვათ $X(t)$, $Y(t)$ და $Z(t)$) დადგენა. მდგომარეობათა სივრცის განზომილებების რაოდენობის მატებასთან ერთად, გასაზომი მნიშვნელობების რაოდენობაც გაიზრდება. ერთი შეხედვით, ამ პროცედურის ჩატარება მარტივია, მაგრამ ერთი პრობლემა მაშინვე იჩენს თავს. ხსნარისა და მრავალრეჟიმიანი ლაზერის ტიპის ბევრი სისტემისთვის ჩვენ შესაძლოა არ ვიცოდეთ თავისუფლების რეალური ხარისხების რაოდენობა. წინასწარ არც ცვლადების საჭირო რაოდენობა ვიცით. მეტიც, პრაქტიკაში ზოგიერთი ცვლადი სხვებზე მეტი სიზუსტით იზომება. რა თქმა უნდა, შესაძლებელებლობისდა მიხედვით ანალიზს დავამყარებთ უფრო ზუსტად გაზომილი ცვლადების სიმრავლეზე.

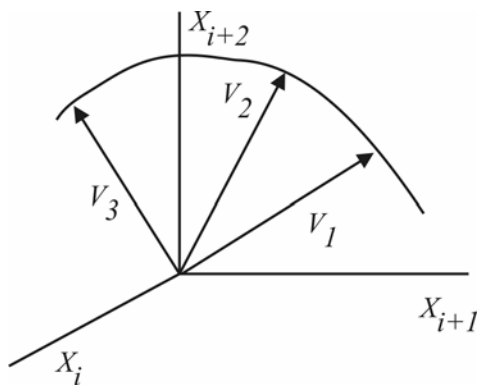
ორივე წინააღმდეგობის დაძლევა იმ მეთოდის საშუალებით ხდება, რომელიც ქაოსის კვლევის ერთ-ერთი უმთავრესი ტექნიკურ საშუალებაა. ამ მეთოდს საფუძვლად უდევს მოსაზრება, რომლის თანახმადაც მრავალგანზომილებიანი დინამიკური სისტემის შემთხვევაშიც კი ცალკეული ცვლადის დროითი მწკრივების ჩანაწერი ხშირად საკმარისია ამ სისტემის მთლიანი დინამიკის მრავალი მახასიათებელი თვისების განსაზღვრისთვის. ცალკეული მწკრივების გამოყენება შეგვიძლია სისტემის განზომილებების, ენტროპიებისა და ლიაპუნოვის ექსპონენტების „რეკონსტრუქციასთან“ დაკავშირებით.

ძირითადი იდეა მეტად მარტივია. ვიყენებთ ერთი ცვლადის დროით მწკრივებს. მრავალგანზომილებიანი ჩადგმული სივრცის მისაღებად (უკეთესი ტერმინი რეკონსტრუქციის

სივრცეა, მაგრამ არაწრფივ დინამიკაში ჩადგმული სივრცე უფრო ხშირად გამოიყენება). თუ ჩადგმული სივრცე სათანადოდაა აგებული, მასში არსებულ ტრაექტორიებს სისტემის შესაბამის მდგომარეობათა მრავალგანზომილებიან სივრცეში მდებარე რეალური ტრაექტორიების მახასიათებლების მსგავსი დინამიკური და გეომეტრიული თვისებები ექნებათ. ტრაექტორიების ევოლუცია ჩადგმის სივრცეში გარკვეულწილად წააგავს რეალური ტრაექტორიების ქმედებას მდგომარეობათა სრულ სივრცეში.

რეკონსტრუქციის სივრცის შექმნისთვის ცალკეული დროითი მწკრივების გამოყენება 1980 წელს პაკარდმა, კრაჩფილდმა, ფერმერმა და შოუმ (PCF80) დაანერგეს. 1981 წელს ფ. თეიქენსმა (TAK81) შექმნა შესაბამისი საფუძვლიანი თეორიული ბაზა.

ჩადგმის პროცედურის პირველ საფეხურზე ვუშვებთ, რომ მოცემული დინამიკური სისტემისთვის გვაქვს X ცვლადის მნიშვნელობათა მწკრივი X_1, X_2, X_3, \dots რომელიც გვსურს გამოვიყენოთ სისტემის სრული დინამიკის რეკონსტრუქციის მიზნით. ამას მნიშვნელობების ვექტორული წარმოდგენის გზით ვახერხებთ. ვთქვათ, გვსურს მოვახდინოთ d -განზომილებიანი ჩადგმის განხორციელება.



ნახაზი. 10.1. სამგანზომილებიანი ჩადგმული სივრცის შექმნისთვის ცალკეული დროითი მწკრივების გამოყენების სქემა. თითოეული ვექტორის ბოლო აღნიშნავს ტრაექტორიის წერტილს ჩადგმულ სივრცეში. ვექტორები აღნიშნულია V_1, V_2 და V_3 სიმბოლოებით.

ამისათვის დაგვადგვით d რაოდენობის მნიშვნელობები, მაგალითად (X_1, X_2, \dots, X_d) . ვექტორის თითოეული რიცხვი, რომელიც d -განზომილებიან სივრცეში ერთ-ერთი ღერძის გასწვრივ მდებარე ვექტორის „კომპონენტის“ მნიშვნელობას გვაძლევს, შეესაბამება კონკრეტული წერტილის კოორდინატებს d -განზომილებიან სივრცეში (შეიძლება ითქვას, რომ ვახდენთ d -განზომილებიან ქმედების რეკონსტრუქციას ერთი ცვლადის მეშვეობით).

სისტემის ევოლუციასთან ერთად ვხედავთ, თუ როგორ მოძრაობენ $(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots, X_{n+d})$ ვექტორები d -განზომილებიან სივრცეში (ქვემოთ ვნახავთ, რომ ვექტორის კომპონენტებსა და მიმდევრულ ვექტორებს შორის ინტერვალები თანაბარი არ არის). ჩვენი მთავარი დაშვება იმაში მდგომარეობს, რომ ამ გზით მიღებული ვექტორების გეომეტრია და დინამიკა სისტემის მდგომარეობათა სრული სივრცის ტრაექტორიების გეომეტრიისა და დინამიკის მსგავსია. ნახ. 10.1. წარმოგვიდგენს ჩადგმის კონსტრუქციის სქემატურ გამოსახულებას, როდესაც $d = 3$.

რატომაა მიზანშეწონილი ჩადგმის პროცედურის განხორციელება? პასუხი იმაში მდგომარეობს, რომ სისტემის სრული დინამიკის ხასიათი ნებისმიერი დინამიკურ ცვლადზე უნდა აისახებოდეს. მაგალითად, თუ მთლიანი ქმედება პერიოდულია, თითოეული ცვლადისგან ასევე პერიოდულ ქმედებას უნდა ველოდოთ. ხოლო თუ მთლიანი ქმედება ქაოსურია, ახლომდებარე ტრაექტორიების დივერგენცია ცალკეული ცვლადის „ქმედებაშიც“ უნდა გამოვლინდეს. მოცემული მეთოდის მიზანშეწონილობის კიდევ ერთი არგუმენტის მოყვანის მიზნით 3.3 პარაგრაფში დინამიკური განტოლებების პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებების სიმრავლემდე დაყვანასთან დაკავშირებით ჩატარებულ მოქმედებებს უნდა დაუბრუნდეთ. თუ პროცედურას საპირისპირო მიმართულებით ჩავატარებთ, შევძლებთ დინამიკის ჩაწერას ერთი ცვლადის მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლებების მეშვეობით. შემდეგ გამოვიყენებთ ერთი ცვლადის დროით მწკრივებს დიფერენციალური განტოლების შემადგენელი სხვადასხვა რიგის წარმოებულების მიახლოებითი გამოთვლისათვის.

იბადება რამდენიმე კითხვა:

1. რამდენი განზომილების გამოყენების საშუალება გვქვია ჩადგმის სივრცეში?
2. როგორ უნდა შევარჩიოთ დროის ინტერვალები შერჩეულ მნიშვნელობებს შორის?
3. როგორ ვირჩევთ მიმდევრობით ვექტორებს შორის დროის n ინტერვალს?
4. რომელი ცვლადი სიდიდე უნდა განვსაზღვროთ?
5. რამდენი მნიშვნელობის შერჩევა გვესაჭიროება?
6. როგორ ვიყენებთ ჩადგმულ ტრაექტორიებს სისტემის დინამიკის შესახებ რაოდენობრივი ხასიათის ინფორმაციის მისაღებად?

სამწუხაროდ, ამ კითხვებზე ამომწურავი პასუხების გაცემა რთულია, რადგან დღეისათვის ჩადგმის მეთოდის თეორიული საფუძვლები ჯერ განვითარების საწყის ეტაპზეა და პასუხები დამოკიდებულია საკვლევი სისტემის კონკრეტულ მახასიათებლებზე, მნიშვნელობების სიზუსტეზე, არსებული ხმაურის სიდიდეზე და ა. შ.. ექსპერიმენტის მსვლელობისას ჩვენ უნდა დავადგინოთ, თუ რა დამოკიდებულებაშია კონკრეტულ სისტემასთან დაკავშირებული შედეგები ჩადგმის განზომილებასთან, შერჩეულ მნიშვნელობებს შორის არსებულ დროის ინტერვალთან, შერჩეული მნიშვნელობების რაოდენობასთან და ა.შ. ყოველთვის გვესაჭიროება რაიმე სახის მეცნიერული დებულება, რათა გადავწყვიტოთ, თუ რა მნიშვნელობები ან მნიშვნელობათა დიაპაზონი გვაძლევს „მისაღებ“ შედეგებს. ქვემოთ მოგაწვდით სათანადო მნიშვნელობების შერჩევის ზოგიერთ ინსტრუქციას რეალური სისტემების ანალიზის საფუძველზე.

თეიქენსმა (TAK81) დაამტკიცა, რომ თუ სისტემის ძირითად მდგომარეობათა სივრცეს გააჩნია d_s განზომილება, ხოლო ჩადგმის სივრცეს - $2d_s+1$ განზომილება, მაშინ შევძლებთ ჩადგმის სივრცის ვექტორების საშუალებით სისტემის სრული დინამიკის აღწერას. სხვაგვარად მიმზიდველის „პროექციას“ ნაკლები განზომილების მქონე სივრცეში მიმზიდველის განზომილება შეიძლება შეემცირებინა: თუ მდგომარეობათა სივრცეს d_s განზომილება გააჩნია, მაშინ რომელიმე ცვლადის მეშვეობით სისტემის დინამიკის გამოსახვა შეგვიძლია d_s -რიგის დიფერენციალური განტოლების საფუძველზე. წარმოებულების რიცხვითი გამოთვლისათვის გვესაჭიროება მოცემული ცვლადის დროის ორი სხვადასხვა და მიმდინარე მომენტების შესაბამისი მნიშვნელობები. ამრიგად, საერთო ჯამში დაგვჭირდება $2d_s+1$ მნიშვნელობა.

პრაქტიკიდან ვიცით, რომ დისიპაციური სისტემების ხანგრძლივი ქმედების ეფექტური განზომილება ემთხვევა მიმზიდველის (ან მიმზიდველები) განზომილებას. ეს განზომილება მდგომარეობათა საწყისი სივრცის განზომილებაზე ბევრად მცირე შეიძლება აღმოჩნდეს. ამრიგად, მიმზიდველის დინამიკის იმიტაციისათვის შეგვიძლია მიმზიდველის (შესაძლო ფრაქტალურ) განზომილებაზე ორჯერ მეტი განზომილების მქონე ჩადგმების გამოყენება.

ჩადგმის მეთოდით დინამიკური სისტემების დახასიათების შესახებ უახლესი ნაშრომი ყურადღებას ამახვილებს მე-9 თავში წარმოდგენილი გრასბერგერ-პროკაკიას კორელაციური ჯამის გამოთვლის გზით ფრაქტალური განზომილებების განსაზღვრაზე. განვიხილოთ კორელაციური ჯამის შემდეგი ფორმა:

$$C^{(d)}(R) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i,j=1, i \neq j}^N \Theta \left[R - |\bar{x}_i - \bar{x}_j| \right] \quad (10.2-1)$$

ალბათ შენიშნეთ, რომ (10.2-1) გამოსახულება თითქმის (9.8-4)-ის იდენტურია. მიუხედავად ამისა, კორელაციური ჯამი ჩადგმის d განზომილებებზეა დამოკიდებული და ამიტომ C -სთან შესაბამისი ინდექსი გვაქვს დამატებული. გარდა ამისა, ჩადგმულ სივრცეში ვიყენებთ ისრებს იმის აღსანიშნად, რომ x -ის მნიშვნელობებს ვიხილავთ როგორც ვექტორებს. თუ ჩადგმის სივრცეში ვექტორებს წერტილის კოორდინატებად განვიხილავთ, მაშინ კორელაციური ჯამი წარმოდგენას შეგვიქმნის წერტილთა ისეთი წყვილების ფარდობითი რაოდენობის შესახებ, რომელთა შორის მანძილი ასეთ სივრცეში R -ს არ აღემატება.

ვექტორების აღნიშვნა ოდნავ დამაბნეველია, მაგრამ ვნახოთ, თუ რა იგულისხმება მათში. d -განზომილებიანი ვექტორი წარმოადგენს d რაოდენობის კომპონენტთა ერთობლიობას:

$$\vec{x}_i = (x_i, x_{i+t_L}, x_{i+2t_L}, \dots, x_{i+(d-1)t_L}) \quad (10.2-2)$$

სადაც t_L -ს **დროის ინტერვალი** ეწოდება. იგი x_i (ვექტ)-ის აგებისთვის გამოყენებულ მიმდევრულად არჩეულ მნიშვნელობებს შორის არსებულ დროის ინტერვალს გამოსახავს. მოგვიანებით t_L -ის შერჩევის ხერხების შესახებაც ვიმსჯელებთ.

ორი ვექტორის სხვაობის მოდული, რომელსაც „**ევკლიდესეულ მანძილსაც**“ უწოდებენ, განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$|\vec{x}_i - \vec{x}_j| = \sqrt{\sum_{k=0}^{d-1} (x_{i+kt_L} - x_{j+kt_L})^2} \quad (10.2-3)$$

ზოგიერთი ავტორი სხვაობის გასაზომად „**კოორდინატთა შორის მაქსიმალურ სხვაობას**“ ამჯობინებს (გამოთვლისათვის საჭირო დროის დაზოგვის მიზნით):

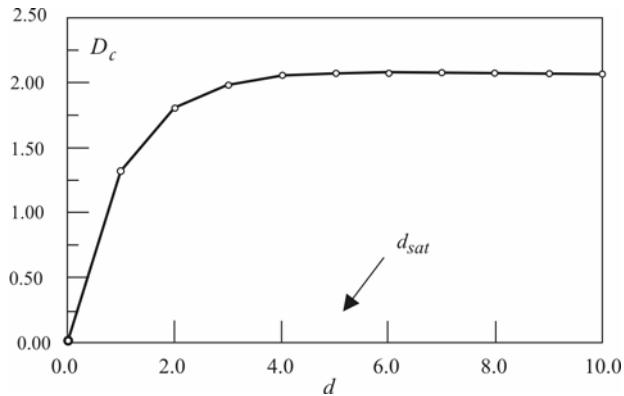
$$|\vec{x}_i - \vec{x}_j| = \text{Max}_k |x_{i+kt_L} - x_{j+kt_L}| \quad (10.2-4)$$

ჩვენ შესაბამის კომპონენტებს შორის უდიდეს სხვაობას ვპოულობთ და ამ სხვაობას ორ ვექტორს შორის სხვაობის დასადგენად ვიყენებთ. კორელაციური განზომილება (ნორმირების ექსპონენტა) ერთი შეხედვით არ ავლენს მგრძობიარე დამოკიდებულებას ვექტორთა სხვაობის გამოთვლისას გამოყენებული მეთოდის მიმართ. კოორდინატების მაქსიმალურ სხვაობას (**მაქსიმუმ-ნორმას**) ის უპირატესობა აქვს, რომ ჩადგმის ყოველი განზომილებისთვის უდიდესი სხვაობა ერთი და იგივე იქნება, რაც ჩადგმის განსხვავებული განზომილებების შემთხვევაში შედეგების შედარების პროცესს ამარტივებს.

უკვე მზად ვართ, რომ სისტემის კორელაციური განზომილება (ნორმირების ექსპონენტა) წინა თავის მსგავსად დავადგინოთ. ჩვენ მას განვსაზღვრავთ, როგორც ისეთ $D_c(d)$ -ს რიცხვს, რომელიც დააკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:

$$C^{(d)}(R) = kR^{-D_c(d)} \quad (10.2-5)$$

R -ის მნიშვნელობების გარკვეული დიაპაზონისთვის, რომელსაც კვლავაც ნორმირების არეს ვუწოდებთ. D_c მნიშვნელობა შესაძლოა ჩადგმის სივრცის განზომილებაზე იყოს დამოკიდებული.

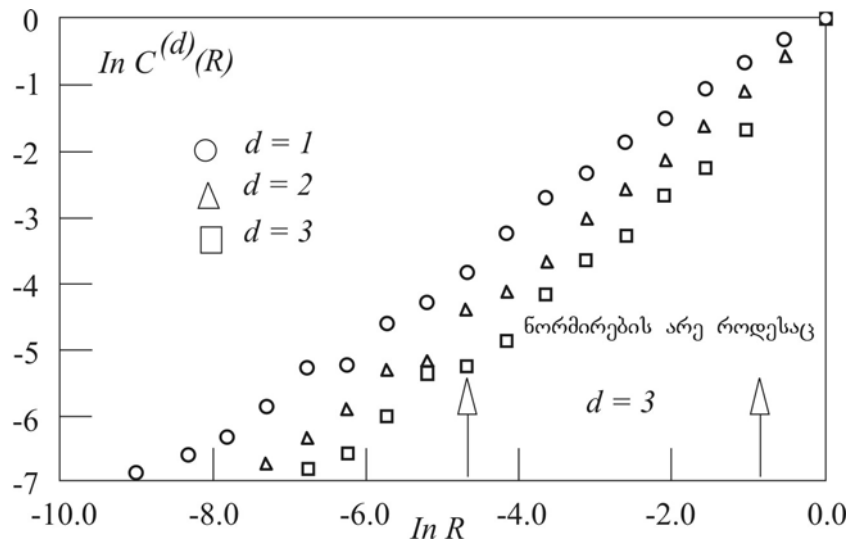


ნახაზი. 10.2. კორელაციური განზომილება, როგორც ჩადგმის განზომილების ფუნქცია. როდესაც ჩადგმის განზომილება მდგომარეობათა სივრცის მიმზიდველის განზომილებას (d_{sat}) ორჯერ აღემატება, მაშინ $D_c(d)$ კორელაციური განზომილება d -საგან დამოუკიდებელი ხდება. მოცემულ შემთხვევაში მიმზიდველის კორელაციური განზომილება დაახლოებით 2.1-ის ტოლია.

პრაქტიკაში საჭიროა $D_c(d)$ -ს გამოთვლა $d=1, 2, 3$, პირობებში და D_c -ს მნიშვნელობების მრუდის აგება d -ს ფუნქციის სახით. D_c იზრდება მანამ, ვიდრე d სისტემის მდგომარეობათა სივრცის მიმზიდველის განზომილების ტოლი არ გახდება. $d > d_{sat}$ („გაჯერების“ მნიშვნელობა) პირობებში D_c d ჩადგმის განზომილებისგან დამოუკიდებელი ხდება. ამრიგად, მივიღებთ 10.2 სახის გრაფიკს, სადაც მიმზიდველის კორელაციური განზომილება დაახლოებით 2.1-ის ტოლია. ამგვარად, ერთი ცვლადის მნიშვნელობათა მიხედვით მდგომარეობათა სივრცის მიმზიდველის კორელაციური განზომილების დადგენა შეგვიძლია. ამ ინფორმაციამ შესაძლოა სისტემის დინამიკის ამსახველი მათემატიკური მოდელების აგებაში გაგვიწიოს დახმარება.

როდესაც კორელაციური განზომილების დადგენას ჩადგმის განზომილების ფუნქციის სახით ვაპირებთ, ნორმირების არის ზომა და მდებარეობა (R -ის ფუნქციის სახით) ასევე დამოკიდებულია ჩადგმის განზომილებაზე. ამრიგად, ხშირ შემთხვევაში ჩადგმის განზომილების ყოველი მნიშვნელობისთვის ნორმირების არისა და კორელაციური განზომილების მნიშვნელობის დადგენისთვის $\ln C(R)$ -ის გრაფიკის აგება გვჭირდება (მოცემულ თავში გამოვიყენებთ ნატურალურ ლოგარითმებს, რომელთაც გარკვეული უპირატესობა გააჩნიათ).

ნორმირების არესთან დაკავშირებული პრობლემის მაგალითია 10.3 ნახაზი, რომელიც ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციის მნიშვნელობების მიხედვით გამოთვლილ $\ln C(R)$ -ის გრაფიკს წარმოგვიდგენს ($A=3.99$). სისტემის ერთგანზომილებიანობის გამო, კორელაციური განზომილება (ნორმირების არეში გრაფიკების დახრით განსაზღვრული) ჩადგმის ნებისმიერი განზომილებისთვის ერთი და იგივე იქნება. ირკვევა, რომ ნორმირების არის სივრცე ჩადგმის განზომილებაზე ყოფილა დამოკიდებული. ამრიგად, კუთხური კოეფიციენტის განსაზღვრისას R -ის მნიშვნელობების არჩევისას სიფრთხილე უნდა გამოვიჩინოთ. ჩადგმის განზომილებასთან ერთად D_c -ს ცვლილების ხასიათის დეტალური ანალიზი DGO93a-სა და DGO93b-შია მოცემული.

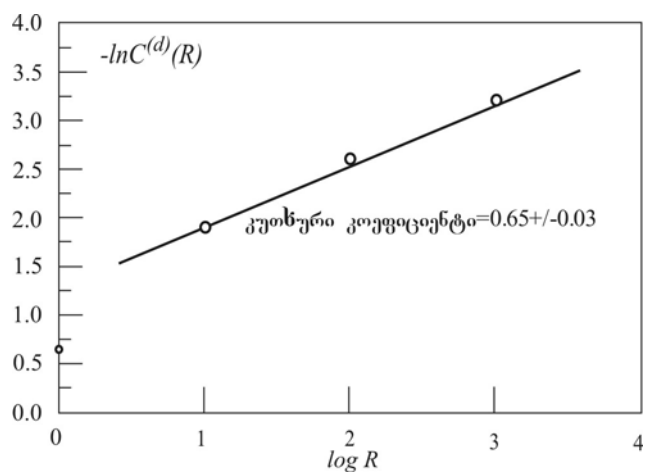


ნახაზი. 10.3. კორელაციური ჯამის ნატურალური ლოგარითმის გრაფიკი ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციის ($A = 3.99$) მნიშვნელობების მიხედვით გამოთვლილი ჩადგმის სხვადასხვა განზომილებებისთვის. შენიშნეთ, რომ ნორმირების არეებში გრაფიკების კუთხური კოეფიციენტი თითქმის ერთი და იგივეა, მაგრამ ჩადგმის განზომილებასთან ერთად ნორმირების არის სივრცე იცვლება.

არსებობს ჩადგმის სათანადო განზომილების შერჩევის კიდევ ერთი მეთოდი. ამ მეთოდს „უახლოესი ცრუ მეზობლები“ ეწოდება [Abarbanel, 1996] და მისი შინაარსი შემდეგია: მდგომარეობათა სივრცის ტრაექტორიების უფრო მცირე განზომილებიან „ზედაპირზე“ დაგეგმილებისას მდგომარეობათა სივრცეში ერთიმეორისგან დიდი მანძილით დამორებული ტრაექტორიის ორი წერტილი საბოლოოდ ერთიმეორის მახლობლად აღმოჩნდება უფრო მცირეგანზომილებიან ზედაპირზე. ჩადგმის განზომილების ზრდასთან ერთად ჩადგმის სივრცეში კონკრეტული წერტილის უახლოესი მეზობლების რიცხვი

შეიძლება შემცირდეს მანამ, ვიდრე ჩადგმის განზომილება მიმზიდველის გეომეტრიის ზუსტი გამოხატვის თვალსაზრისით საკმარისად დიდი არ იქნება.

$C^{(d)}(R)$ -დან სხვა სახის ინფორმაციის მიღება შეგვიძლია. d -ს ზრდისას მოსალოდნელია $C^{(d)}(R)$ -ის შემცირება R - ის ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის. რატომ? $C^{(d)}(R)$ -ის გამოთვლისას ჩვენ გვანტერესებს იმის ალბათობა, რომ ჩადგმულ სივრცეში ტრაექტორიის წერტილებს შორის მანძილი არ აღემატება R -ს. d -ს ზრდასთან ერთად ტრაექტორიის სეგმენტების სიგრძესაც ვზრდით. თუ დავუბრუნდებით მე-9 თავში K-S ენტროპიის შესახებ მოყვანილ მსჯელობას, გავიხსენებთ, რომ K-S ენტროპია მოცემული ალბათობის ცვლილების სიჩქარეს ზომავს.



ნახაზი. 10.4. $-\ln C^{(d)}(R)$ -ის, როგორც 10.3 ნახაზზე მოყვანილი მნიშვნელობების ჩადგმის განზომილების ფუნქციის, მრუდი. წრებით აღნიშნულია ნორმირების არეში მყოფი გასაშუალებული წერტილები. წრფის კუთხური კოეფიციენტი K - S ენტროპიის მაჩვენებელია. აქ მიღებული მნიშვნელობა ახლოსაა ლოჯისტიკური ასახვისთვის მოსალოდნელ $\ln 2$ -ის ტოლ მნიშვნელობასთან, როდესაც $A = 4$.

ამრიგად, მოსალოდნელია, რომ

$$C^{(d)}(R) = be^{-dKt_L} \tag{10.2-6}$$

სადაც K-S კოლმოგოროვის ენტროპიაა, ხოლო t_L კი ჩადგმის სივრცის ვექტორის თანმიმდევრულ კომპონენტებს შორის არსებული დროის ინტერვალია. ამრიგად, $\ln C^{(d)}(R)$ -ის მრუდის მეშვეობით შეგვიძლია K - S ენტროპიის განსაზღვრა (რასაკვირველია, R - ის მნიშვნელობას ნორმირების არეებში d -ს ყოველი მნიშვნელობისთვის ვირჩევთ). 10.3 ნახაზზე მოყვანილ მნიშვნელობებების შესაბამის შედეგებს 10.4 ნახაზი წარმოგვიდგენს. კუთხური

კოეფიციენტი ლოჯისტიკური ასახვისთვის, როდესაც $A = 4$, $K - S$ ენტროპიის მოსალოდნელ $\ln 2$ -ის ტოლ მნიშვნელობასთან (სადაც $t_L = 1$) მიახლოებულია.

ჩადგმის მეთოდით გამოთვლილი კორელაციური ჯამი, როგორც მიმზიდველის კორელაციური განზომილების, ასევე დინამიკის $K - S$ ენტროპიის განსაზღვრის საშუალებას გვაძლევს. ამჯერად, ფრაქტალურ განზომილებასა და ლიაპუნოვის ექსპონენტებთან დაკავშირებულ ჰიპოთეზებს დავუბრუნდეთ.

კაპლან-იორკის ჰიპოთეზა: ლიაპუნოვის განზომილება

კაპლანმა და იორკმა (KAY79) იგარაუდეს რომ მდგომარეობათა (ან რეკონსტრუქციის) მრავალგანზომილებიან სივრცეში მიმზიდველის განზომილება ლიაპუნოვის გასაშუალებული ექსპონენტების მეშვეობით შეიძლება განისაზღვროს. გავიხსენოთ, რომ მდგომარეობათა სივრცის განზომილებების ზრდასთან ერთად ლიაპუნოვის ექსპონენტების რაოდენობაც მატულობს. d -განზომილებიანი სივრცის შემთხვევაში უდიდესი λ_1 -დან უმცირეს λ_d -მდე ლიაპუნოვის ექსპონენტები ისე დავალაგოთ, რომ ლიაპუნოვის ექსპონენტების $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_d$. სპექტრი წარმოიქმნას, ხოლო იყოს j ისეთი უდიდესი მთელი რიცხვი, რომ შესრულდეს პირობა:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j > 0.$$

(გავიხსენოთ, რომ დისიპაციური სისტემის შესაბამისი ყველა ლიაპუნოვის ექსპონენტის ჯამი უარყოფითი სიდიდე, ხოლო ჰამილტონისეული სისტემისთვის ნულის ტოლია.)

მაშინ ლიაპუნოვის D_L განზომილება ასე განისაზღვრება:

$$D_L = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{-\lambda_{j+1}} \tag{10.2-7}$$

ჯექსონს [Jackson, 1992, ტომი 2, გვ. 217-222] (10.2-7) შედეგთან დაკავშირებით მარტივი არგუმენტი მოჰყავს. არსებობს გარკვეული შეხედულება (იხ. მაგალითად RHO80), რომ რაოდენობრივად D_L ახლოსაა როგორც უჯრედთა მთვლელ, ასევე კორელაციურ განზომილებასთან. კონსტანტინმა და ფოიასმა (COF85) დაამტკიცეს, რომ $D_L \geq D_H$ (ჰაუსდორფის განზომილება). თავის ბოლოში მოყვანილ ლიტერატურაში დაწვრილებითაა განხილული ლიაპუნოვის ექსპონენტების სპექტრის განსაზღვრის მეთოდები.

10.3 პრაქტიკული მოსაზრებები ჩადგმის მეთოდთან დაკავშირებული გამოთვლების შესახებ

მოცემულ პარაგრაფში უფრო დაწვრილებით ვიმსჯელებთ წინამდებარე პარაგრაფში აღწერილ ჩადგმის მეთოდთან დაკავშირებული ზოგიერთი პრაქტიკული დეტალის შესახებ. ასევე შევეცდებით წერტილთა რაოდენობისა და ვექტორების „კომპონენტებს“ შორის არსებული დროის ინტერვალის შერჩევის ზოგიერთი ემპირიული წესის დადგენას. თუ გვექნებოდა ექსტრემალურად სწრაფი კომპიუტერი, მონაცემთა განუსაზღვრელი რაოდენობა და უამრავი თავისუფალი დრო, უბრალოდ გამოვიყენებთ მილიონობით მნიშვნელობას და დროითი ინტერვალების ცვლის მეშვეობით გამოთვლას მრავალჯერ გავიმეორებთ. მაგრამ პრაქტიკაში გამოთვლის დროსა და მიღებული შედეგების სიზუსტეს შორის კომპრომისი უნდა მოინახოს.

ვთქვათ, ჩვენს განკარგულებაშია სისტემის შესაბამისი კონკრეტული დინამიკური ცვლადის მნიშვნელობათა დროითი მიმდევრობა. საზოგადოდ დავუშვათ, რომ შეგვიძლია ვცვალოთ მიმდევრობის წევრებს შორის არსებული t_s ინტერვალი (პუნკარეს მონაკვეთის კვეთის მეთოდის გამოყენების შემთხვევაში t_s -ს განსაზღვრავს დინამიკა. იმისათვის რომ დავრწმუნდეთ, დამოკიდებულია თუ არა ჩვენს მიერ მიღებული შედეგები მდგომარეობათა სივრცეში პუნკარეს კვეთის „მდებარეობაზე“, საჭიროა რამდენიმე საცდელი ნიმუშის გამოყენება).

სისტემის ქმედების ფუნდამენტური დროითი მახასიათებელია **ავტოკორელაციური დროდ** წოდებული ინტერვალი, რომელიც შესაძლებელია განისაზღვროს შემდეგი **ავტოკორელაციური ფუნქციის** მეშვეობით:

$$g(n) = \frac{\sum_k x_k x_{k+n}}{\sum_k |x_k|^2} \quad (10.3-1)$$

$g(n)$ ფუნქცია ახდენს მწკრივის იმ წევრთა შედარებას, რომლებიც ერთმანეთისაგან დროის n რაოდენობის ინტერვალით არიან დაშორებული. თუ ისინი საშუალოდ ურთიერთკორელაციაში არ იმყოფებიან, მაშინ $g(n) = 0$. თუ მწკრივის წევრთა მნიშვნელობები პრაქტიკულად ერთი და იგივეა, მაშინ $g(n) = 1$. შემთხვევითი ხასიათის ან ქაოსური მნიშვნელობების სიმრავლეებისთვის ავტოკორელაციური ფუნქციის დროის მიხედვით ექსპონენციალური კლებაა მოსალოდნელი: $g(n) = ae^{-n\tau}$, სადაც τ -ს

ავტოკორელაციის დრო ეწოდება. ეს უკანასკნელი დიდ დახმარებას გაგვიწევს ჩადგმის სხვადასხვა სქემისათვის პარამეტრთა შერჩევაში.

ავტოკორელაციური ფუნქციის გამოთვლისას მონაცემთა სიმრავლის თითოეულ წევრს აკლებენ მათ საშუალო მნიშვნელობას. ეს ნიშნავს, რომ არაკორელირებადი მნიშვნელობებისთვის $g(n)$ ნულისაკენ მიისწრაფვის.

კონტროლის მომდევნო პარამეტრია დროის t_L ინტერვალი, რომლითაც ჩადგმული სივრცის ვექტორის კომპონენტები (მაგალითად, $(x_4, x_9, x_{14}, \dots)$) ერთიმეორისაგან არიან დაშორებული, ცხადია, $t_L = Lt_s$ როდესაც $L = 1, 2, \dots$ სიმრავლის დროითი განვცრობა იქნება $(d-1)Lt_s$. თუ ეს უკანასკნელი ძალიან მცირე ან ძალიან დიდია, მაშინ კორელაციური ჯამის ნორმირების არე ძალიან მცირე იქნება. ავტოკორელაციურ დროზე ორჯერ ან სამჯერ მეტი ხანგრძლივობის მქონე დროითი მწკრივის გამოყენება ყველაზე ფართო ნორმირების არეს იძლევა კორელაციური ჯამისთვის.

ჩვენ თანმიმდევრულ ვექტორებს შორის არსებულ დროის ინტერვალსაც ვირჩევთ, რომელსაც **ნახტომის დროს** ვუწოდებთ (აღინიშნება t_j სიმბოლოთი). აუცილებელია, რომ ნახტომის დრო რაც შეიძლება მცირე იყოს, რათა მიმზიდველის გეომეტრიის დეტალების უმრავლესობის ასახვა შეგვეძლოს. t_j სიდიდეს ხშირად ისე ვირჩევთ, რომ ვექტორები დროის მიხედვით თანაბრად იყვნენ განაწილებული.

დროის მეოთხე ტიპის ინტერვალი, რომელსაც კორელაციურ ჯამში შემავალი ვექტორების შედარებისათვის ვიყენებთ, არის ვექტორებს შორის არსებული დროის მინიმალური ინტერვალი. ანუ, ეს ნიშნავს, რომ შედარებისთვის მხოლოდ \bar{x}_i და \bar{x}_j ვექტორები შეგვიძლია ავირჩიოთ, თუ შესაბამის კომპონენტებს შორის არსებული დროის ინტერვალი, რომელსაც **შედარების t_c დროს** ვუწოდებთ, მინიმალურია. მინიმალური ინტერვალი „გადაჭარბებული“ კორელაციისგან დაგვიცავს, რაც თავს იჩენს ერთმანეთთან მეტად ახლოს მყოფი მნიშვნელობების არჩევის შემთხვევაში (პუანკარეს კვეთების გამოყენებისას ეს პრობლემა თითქმის ყოველთვის ავტომატურად გვარდება). THE86 განიხილავს პრობლემებს, რომლებიც თავს იჩენს, როდესაც შედარების დრო მეტად მცირეა „ავტოკორელირებადი“ მნიშვნელობების მქონე მონაცემთა სიმრავლისთვის. ამ პრობლემის მოგვარებას ავტოკორელაციურ დროსთან შედარებით დიდი შედარების დროის არჩევის გზით შევძლებთ.

დაბოლოს, გვესაჭიროება ანალიზისათვის გამოყენებადი წერტილების სრული N რაოდენობის შერჩევა. ცხადია, რაც მეტია ეს რაოდენობა, მით უფრო ზუსტ შედეგებს

მივიღებთ, მაგრამ N -ის ზრდასთან ერთად გამოთვლებისათვის საჭირო დროც მკვეთრად მატულობს, ამიტომ კომპრომისული ვარიანტი უნდა მოვძებნოთ.

პირველ რიგში ვადგენთ d -განზომილებიან ვექტორთა სიმრავლეს, რომელთაგან თითოეულს \vec{V} სიმბოლოთი აღვნიშნავთ. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, t_L ინტერვალი ჯერადაა მიმდევრობის ორ მომდევნო წევრს შორის არსებული დროის ინტერვალისა: $t_L = Lt_s$. t_j სიდიდე ასევე t_s -ის ჯერადის სახით მოიცემა: $t_j = Jt_s$. როგორც L , ასევე J დადებითი მთელი რიცხვებია. x_n წარმოადგენს ცვლადის მნიშვნელობას დროის $t = nt_s$ მომენტში. ამრიგად, ვექტორთა სიმრავლე მიიღებს შემდეგ სახეს:

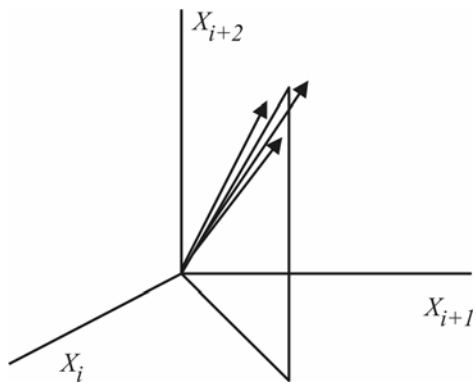
$$\begin{aligned} \vec{V}_0 &= (x_0, x_L, \dots, x_{(d-1)L}) \\ \vec{V}_1 &= (x_j, x_{j+L}, \dots, x_{(d-1)(j+L)}) \\ &\vdots \\ \vec{V}_p &= (x_{pJ}, x_{pJ+L}, \dots, x_{(d-1)(pJ+L)}) \end{aligned} \quad (10.3-2)$$

ჩვენ მიერ არჩეული t_s -ის, t_L -ის, t_j -სა და N -ის ასარჩევად გვჭირდება მიმზიდველის მახასიათებლების მინიმუმ უხეში შეფასება მაინც. უმეტეს შემთხვევაში, ამ ამოცანის გადაჭრა თვით მონაცემთა საკვლევი სიმრავლის მიხედვითაა შესაძლებელი. უპირველეს ყოვლისა, საჭიროა განვსაზღვროთ დროის ის ინტერვალი, რომელიც ტრაექტორიას მიმზიდველის „შემოვლისათვის დასჭირდება“. ვინაიდან ეს უკანასკნელი პუანკარეს კვთის მოცემულ წერტილში ორ მომდევნო გავლას შორის არსებული დროის ინტერვალის ექვივალენტურია, ამიტომ მას t_p („პუანკარეს დრო“) სიმბოლოთი აღვნიშნავთ (თუ საკვლევი მნიშვნელობები ემთხვევა პუანკარეს კვთის წერტილებს, მაშინ $t_s = t_p$). შემდეგ უნდა შევაფასოთ მიმზიდველის „ზომა“. ეს უკანასკნელი აღვნიშნოთ A სიმბოლოთი. მაშინ d -განზომილებიან ჩადგმულ სივრცეში მიმზიდველის მიერ დაკავებული „მოცულობა“, როდესაც $d < D_c$, პრაქტიკულად მიმზიდველის კორელაციური A^d განზომილების ტოლი იქნება ($d > D_c$ შემთხვევაში მიმზიდველის მოცულობაა D_c). დაბოლოს, ავტოკორელაციური დროისა და ახლომდებარე ტრაექტორიების წერტილების დივერგენციის ხარისხის დადგენაც გვესაჭიროება (უკანასკნელი პრობლემის გადაჭრა მონაცემთა საკვლევის სიმრავლის შესაბამისი) ლიაპუნოვის ექსპონენტების მეშვეობით არის შესაძლებელი).

მიმზიდველის მახასიათებლების აქამდე მოყვანილ შეფასებებთან ერთად საკვლევი მნიშვნელობების სიზუსტეც უნდა გავითვალისწინოთ, რომელსაც ჩაწერისათვის გამოყენებული ორობითი ბიტების რაოდენობის მიხედვით ვადგენთ. ექსპერიმენტულად ამ ციფრის

განსაზღვრა შეიძლება კომპიუტერის ანალოგურ-ციფრული გარდაქმნის მეშვეობით. თუ ჩვენ წინაშე რაიმე განტოლებების კომპიუტერული ამოხსნის გზით მიღებული მნიშვნელობები, მაშინ ბიტების რაოდენობას პროგრამული უზრუნველყოფა განსაზღვრავს (ტიპიურ ექსპერიმენტებში მნიშვნელობები 8-ბიტიანი სისტემის მეშვეობით არის ჩაწერილი. მაღალი სიზუსტის გაზომვებისთვის კი 14 ან 16-ბიტიან თანრიგებსაც იყენებენ.

ჩადგმის მეთოდის გამოყენების არსი მიმზიდველის დახასიათებისას საჭირო რაოდენობით მონაცემთა გამოყენებასა და ამავდროულად ცრუ-კორელაციების თავიდან აცილების მიზნით დროის ინტერვალისა და ნახტომის დროის შერჩევაში მდგომარეობს. ჩვენ მონაცემთა ისეთი რაოდენობა გვესაჭიროება, რომელიც d -განზომილებიან ჩადგმულ სივრცეში თითოეული ვექტორის სიანგლოვეს კორელაციური ჯამის ზუსტი შეფასებისთვის საჭირო ვექტორების საკმარისი რაოდენობა გვქონდეს.



ნახაზი. 10.5. ვექტორების სქემატური გამოსახულება სამგანზომილებიან სივრცეში. თუ ვექტორის კომპონენტებს შორის განსხვავება ძალზე მცირეა, მაშინ იგი კოორდინატთა სათავეს მიმართ დაახლოებით 45^0 -იანი კუთხით არის მიმართული.

თავდაპირველად განვიხილოთ დროის შერჩევის საკითხი. მიმდევრობის „მეზობელ“ წევრებს შორის იტერვალის მიმზიდველის „გარშემოვლის“ t_p დროზე ნაკლები უნდა იყოს. ამ შემთხვევაში მონაცემთა შესაბამისი წერტილები მიმზიდველის თითქმის ყველა მიდამოში მოხვდებიან.

რა შეგვიძლია ვთქვათ ვექტორის მიმდევრობით კომპონენტებს შორის t_L ინტერვალის შერჩევის შესახებ? სასურველია დიდი ინტერვალის შერჩევა, რათა ეს კომპონენტები წრფივად დამოუკიდებელი იყვნენ. დამოუკიდებლობისთვის საჭირო დრო ლიაპუნოვის λ (დადებითი) ექსპონენტის შებრუნებული სიდიდეა. ემპირიული წესის თანახმად, ზემოთ ხსენებულ ინტერვალს ისე ვირჩევთ, რომ დროის სრული $(d-1)t_L$ ინტერვალის აღემატებოდეს $3\lambda^{-1}$ სიდიდეს (ზოგიერთი სისტემის შემთხვევაში ავტოკორელაციური τ დრო იგივეა რაც λ^{-1}). თუ შერჩევას იმგვარად მოვახდენთ, რომ $(d-1)t_L < \lambda^{-1}$, მაშინ 10.5 ნახაზის თანახმად, ვექტორებს „ 45^0 -იანი მონაკვეთის“ გარშემო დაგროვების ტენდენცია აქვთ, რადგანაც მათი ყველა კომპონენტის რიცხვითი მნიშვნელობები პრაქტიკულად ერთნაირია. ამ შემთხვევაში ვექტორები მდგომარეობათა საწყის სივრცეში მიმზიდველის გეომეტრიას სათანადოდ ვერ ასახავენ (თუ წარმოვიდგენთ, რომ გვაქვს დიდი რაოდენობისა და უსასრულოდ მაღალი

სიზუსტის მქონე მონაცემთა სიმრავლე, ამ ვექტორებიდან კვლავ კორელაციურ განზომილებებს შევარჩევთ. პრაქტიკულად კი ექსპერიმენტული ხმაურის ან კომპიუტერული დამრგვალების ფონზე შესაძლოა ფაქიზი სტრუქტურა იკარგებოდეს). ინტერვალის შერჩევასთან დაკავშირებული კვლევების დეტალური ანალიზი იხილეთ RCD94-ში.

რაც შეეხება t_J სიდიდეს, იგი იმდენად მცირე უნდა იყოს, რომ შევძლოთ მიმზიდველის გარშემო ტრაექტორიის „მოდრაობის მართვა“. თუ t_J -ს ძალიან შევამცირებთ, აღმოჩნდება, რომ მონაცემთა შესაბამის წერტილთა საჭირო სრული რაოდენობა ძალიან დიდი გახდება. ამასთან, თუ t_J დაახლოებით ავტოკორელაციური დროის ტოლია, მაშინ ვექტორთა შედარება ინფორმაციას პრაქტიკულად ვერ მოგვცემს, რადგან ისინი თითქმის იდენტურნი არიან. ამრიგად, t_J -ს ავტოკორელაციურ დროსთან შედარებით რამდენჯერმე დიდს ვირჩევთ.

როგორ ვირჩევთ მონაცემთა შესაბამის წერტილთა სრულ რაოდენობას? ზემოთ აღნიშნულის თანახმად, მიმზიდველის საფუძვლიანი დახასიათებისთვის თითოეული ვექტორის სიახლოვეს ვექტორთა საკმარისად დიდი რაოდენობა გვესაჭიროება. წერტილების რაოდენობის დადგენას შემდეგი გზით შევძლებთ: d -განზომილებიანი ჩადგმული სივრცითვის მიმზიდველის მოცულობა თითქმის A^d -ს ტოლი იქნება. M ვექტორების მთლიანად გამოყენების შემთხვევაში ჩადგმული სივრცის მოცულობის ერთეულზე $m = M/A^d$ რაოდენობის ვექტორი (ან ტრაექტორიის წერტილები) მოვა. ტრაექტორიის მოცემული წერტილის გარშემო შემოწერილ R რადიუსის მქონე სფეროში საშუალოდ მოსალოდნელია $R^d = (R/A)^d M$ რაოდენობის ტრაექტორიის სხვა წერტილების მოხვედრა. თუ მნიშვნელობები b თანრიგის ბიტის მიხედვით გვაქვს აღებული, მაშინ კორელაციურ ჯამში გამოყენებული უმცირესი სასურველი R -ის მნიშვნელობა იქნება $R_{min} = A/2b$ (ციფრულ დამრგვალებასთან დაკავშირებული ეფექტებისგან თავის დაზღვევის მიზნით, ოდნავ დიდი, მაგალითად $R_{min} = A/(2b-2)$ მნიშვნელობა უნდა გამოვიყენოთ.) ამჯერად დავუშვათ, რომ კორელაციური ჯამის შეფასებისთვის, ერთიმეორის მახლობლად განლაგებული N რაოდენობის წერტილები დაგვჭირდება. ამიტომ ვირჩევთ ისეთ M -ს, რომელიც დააკმაყოფილებს შემდეგ ტოლობას:

$$N = \left(\frac{R_{min}}{A} \right)^d M = \left(\frac{1}{2^{b-2}} \right)^d M \quad (10.3-3)$$

მაგალითად, $N=2$ (ერთიმეორის მახლობლად განლაგებული ორი წერტილი), $b = 8$ და $d = 3$ მნიშვნელობებისათვის მივიღებთ, რომ საჭიროა შესრულდეს პირობა $M=524,288$. ამრიგად, ზომიერ შემთხვევაშიც კი საკმაოდ ბევრი წერტილი გვესაჭიროება. პრობლემას ქმნის ის

გარემოებაც, რომ ჩადგმული სივრცის განზომილების ზრდასთან ერთად კვლევისათვის საჭირო წერტილთა რაოდენობა ექსპონენციალურად იზრდება.

წერტილთა რაოდენობის შერჩევის კიდევ ერთი შესაძლებელი მეთოდი M -ის იქამდე გაზრდაა, ვიდრე მოცემული ტრაექტორიის სიახლოვეს მონაცემთა შესაბამისი იმდენივე წერტილი არ გვექნება, რამდენიც თვით ტრაექტორიაზეა. ამ შემთხვევაში მიმზიდველის გეომეტრიული მახასიათებლების გამოთვლას მაღალი სიზუსტით შევძლებთ (დეტალებისთვის იხილეთ AMS88).

განზომილებების, ენტროპიისა და ა.შ. გამოთვლისთვის სასურველია რაც შეიძლება მეტი რაოდენობის წერტილები გვექონდეს. მაგრამ რეალურად ეს რაოდენობა შეიძლება შეიზღუდოს როგორც ხელსაწყოს მიერ მონაცემთა დაფიქსირების ზღვრული უნარით (მაგალითად, ზოგიერთ ციფრულ ოსცილოსკოპს მხოლოდ 1000 ან 2000 მიმდევრობითი მონაცემის ჩაწერა შეუძლია), ისე გამოთვლებისათვის საჭირო დროის სიდიდით. ხშირად გვსურს ვნახოთ, თუ როგორ იცვლება კორელაციური განზომილება პარამეტრის ცვლილებასთან ერთად. საავადმყოფოებში პაციენტის სტატუსის რეალური დროის მეტ-ნაკლები კონტროლისთვის სასურველია, რომ ელექტრო-კარდიოგრამის სიგნალის რაოდენობრივი მახასიათებელი გამოვიყენოთ. ასეთ შემთხვევებში სიზუსტესა და გამოთვლის დროს შორის გარკვეული კომპრომისი უნდა მოვძებნოთ. პრაქტიკაში რამდენიმე ათასი წერტილისგან შემდგარი მნიშვნელობები მცირეგანზომილებიანი სისტემების დინამიკის ამსახველი კორელაციური განზომილების (AAD86) „საფუძვლიანი“ შეფასებისთვის პრაქტიკულად საკმარისია. თუ თქვენ წინაშეა დიდი განზომილების მქონე სისტემა (თავისუფლების მრავალი მოქმედი ხარისხი), კორელაციური ჯამის ნორმალიზაცია დეტერმინისტულ ქაოსსა და შემთხვევით ხმაურს შორის განსხვავების დადგენაში დაგეხმარებათ (BHM93).

როდესაც სისტემა გარე პერიოდული ძალის მიერ იმართება, მაშინ ეს უკანასკნელი განსაზღვრავს სისტემის დინამიკას. ასეთ შემთხვევაში ავარჩევთ გარეშე ძალის რომელიმე ფაზის შესაბამის კონკრეტულ ცვლადს პუანკარეს კვეთის შექმნის მიზნით. ამ დროს t_s სიდიდე გარე ძალის პერიოდს წარმოადგენს და ტოლია პუანკარეს დროისა. მიზანშეწონილია, რომ ვექტორის კომპონენტებს შორის არსებული ინტერვალი და ნახტომის დრო თამიმდევრულ ვექტორებს შორის t_s -ის ტოლი იყოს. მიღებული შედეგების ფაზაზე დამოკიდებულების საჩვენებლად საჭიროა ანალიზის ჩატარება განსხვავებული ფაზებისათვის. განსხვავებული ფაზები პუანკარეს კვეთას მიმზიდველის სხვადასხვა ნაწილში განათავსებს და კორელაციური განზომილება მიმზიდველის ნებისმიერ წერტილში, საზოგადოდ, ერთი და იგივე არ იქნება.

დასკვნები ჩადგმის მეთოდის გამოყენების შესახებ

1. ერთი ცვლადის მნიშვნელობათა სიმრავლის მიხედვით ვადგენთ შემდეგ სიდიდეებს: A (მიმზიდველის ზომა), λ (ლიაპუნოვის უდიდესი დადებითი ექსპონენტი), τ (ავტოკორელაციური დრო) და t_p (პუნკარეს ინტერვალი).
2. შევარჩევთ t_s ინტერვალს, რომელიც უნდა აკმაყოფილებდეს პირობას $t_s \ll t_p$. (პუნკარეს კვეთის წერტილების შემთხვევაში $t_s = t_p$. იხ. პარაგრაფი 6.)
3. ვარჩევთ t_L სიდიდეს (ინტერვალი ჩადგმული სივრცის ვექტორის თანმიმდევრულ კომპონენტებს შორის) ისე, რომ $(d-1)t_L$ ინტერვალი დახლოებით სამჯერ აღემატებოდეს λ^{-1} სიდიდეს ან ავტოკორელაციურ τ დროს.
4. შევარჩიოთ t_I სიდიდე (ინტერვალი თანმიმდევრულ ვექტორთა შორის) იმდენად მცირე, რომ შესაძლებელი იყოს მიმზიდველის ფაქიზ სტრუქტურაზე დაკვირვება (პუნკარეს კვეთის წერტილთათვის $t_I = t_p$.)
5. შევარჩიოთ საკვლევ წერტილთა სრული რაოდენობა იმგვარად, რომ დაკმაყოფილდეს (10.3-3) პირობა.
6. შეამოწმეთ თქვენ მიერ მიღებული შედეგები წერტილების სხვადასხვა რაოდენობის შემთხვევაში. თუ პუნკარეს კვეთის წერტილებს იყენებთ, გაიმეორეთ გამოთვლები მდგომარეობათა სივრცეში პუნკარეს კვეთის სხვადასხვა მდებარეობებისთვის. ეს პროცესი დიდ დროს მოითხოვს, მაგრამ აუცილებელია მოხდეს მიღებულ შედეგებთან დაკავშირებული ცდომილებების შეფასება.
7. შეამოწმეთ თქვენ მიერ მიღებული შედეგები მნიშვნელობათა მოდიფიცირებული სიმრავლის ანალიზის მეშვეობით. ეს მეთოდი იყენებს **სუროგატულ ("შემცვლელი") მნიშვნელობებს** (TEL92, PRT94, SCS96, [Abarbanel, 1996], CAR97), რომელთა მისაღებად ჯერ საწყის მნიშვნელობათა მიმართ ფურიეს გარდაქმნის გამოყენება ხდება, შემდეგ ვასაშუალოებთ ფაზებს და ბოლოს ფურიეს შებრუნებული გარდაქმნის მეშვეობით ვღებულობთ საძიებელ სუროგატულ მნიშვნელობებს.

გაეცანით თავის ბოლოში მოყვანილ ლიტერატურას, სადაც მოყვანილია ჩადგმის მეთოდის მეშვეობით წარმართული რამდენიმე ექსპერიმენტის აღწერა. გამოიყენეთ ეს

შედგები თქვენი მონაცემების კვლევისას. განსაკუთრებული ყურადღება მიაქციეთ JBT94-ს.

10.4 განზოგადებული განზომილებები და კორელაციური ჯამები

მე-9 თავში აღვწერეთ მდგომარეობათა სივრცის მიმზიდველის „განზომილების“ სხვადასხვა ტიპი. ყოველი მათგანი გასაშუალოებულია მთლიან მიმზიდველზე და, ცხადია, ლოკალური გეომეტრიის შესახებ სრულ ინფორმაციას ვერ მოგვცემს. ამ პარაგრაფში ჩვენ ე.წ. **განზოგადებული განზომილებების** სიმრავლეს წარმოგიდგინებთ, რომლებიც მიმზიდველის გეომეტრიასთან დაკავშირებით უფრო დაწვრილებით ინფორმაციის წარმოგიდგინებენ.

განზოგადებული განზომილებების შემოტანის მიზეზის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ რაიმე სიდიდის (მაგალითად, ოჯახის შემოსავლის) ორი სტატისტიკური განაწილება. ორ სხვადასხვა საზოგადოებას შეიძლება ერთი და იგივე საშუალო შემოსავალი აღმოაჩნდეს, მაგრამ 10.6 ნახაზის თანახმად, ამ შემოსავალს განსხვავებულად ანაწილებდეს.

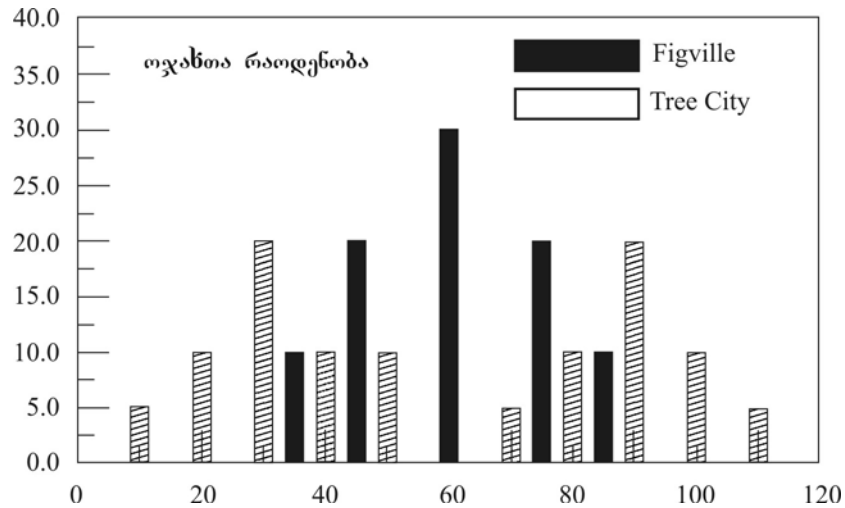
რა სახის საზომით შეიძლება განვასხვავოთ ეს განაწილებები? ცხადია, რომ ორივე განაწილების დეტალური ცოდნისას, უბრალოდ განვსაზღვრავთ განაწილებათა მახასიათებლებს და ვადგენთ მათ შორის არსებულ განსხვავებებს. სტატისტიკაში განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ე.წ. **განაწილების მომენტების** გამოთვლა. განაწილების q რიგის მომენტი განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$M_q \stackrel{def}{=} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^q \quad (10.4-1)$$

სადაც $\langle x \rangle$, როგორც წესი, x სიდიდის საშუალო მნიშვნელობაა. სხვადასხვა რიგის მომენტები ორ განაწილებას შორის არსებული სხვაობის რაოდენობრივი განსაზღვრის საშუალებას გვაძლევს. M_2 ჩვენთვის კარგად ცნობილი საშუალო კვადრატული ცდომილებაა. 10.6 ნახაზზე ვხედავთ, რომ ფიგვილის მნიშვნელობების კვადრატული ცდომილება მცირეა *სამი ქლაქის* შემთხვევასთან შედარებით.

მიმზიდველის გეომეტრიის დახასიათებისთვის იმავე სქემის გამოყენებაა შესაძლებელი. ჩავატაროთ მე-9 თავში უჯრედთა მთვლელი განზომილებისთვის გამოყენებული პროცედურის მსგავსი პროცედურა. დავუშვათ, რომ მიმზიდველზე

შევარჩიეთ N რაოდენობის წერტილი. მდგომარეობათა სივრცის მიმზიდველის არეს დავყოფთ R ზომის უჯრედებად, რომელთაც $i=1, 2, 3, \dots, N(R)$ სიმბოლოებით გადავნიშნავთ. ზოგადად, $N \neq N(R)$. ჰამილტონისეული სისტემისთვის ვიყენებთ მდგომარეობათა სივრცის ყველა არეს, სადაც ტრაექტორია „სტუმრობს“.



ნახაზი. 10.6

N_i -ით აღვნიშნოთ i -ური უჯრედში შემავალი ტრაექტორიის წერტილთა რაოდენობა. p_i წარმოადგენს ამ წერტილთა ფარდობით რაოდენობას: $p_i = N_i/N$. D_q (უჯრედთა მთვლელი) განზოგადებული განზომილება შემდეგნაირად განისაზღვრება:

$$D_q = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\ln \sum_{i=1}^{N(R)} P_i^q}{\ln R} \quad (10.4-2)$$

შენიშნეთ, რომ D_q განზოგადებული განზომილება q რიგის ხარისხში აყვანილ ალბათობებს მოიცავს (მე-9 თავში აღვნიშნეთ, $R \rightarrow 0$ ზღვარზე გადასვლას ვერ ვახერხებთ. სანაცვლოდ, ვიყენებთ (10.4-2) გამოახულების მნიშვნელის გრაფიკის კუთხურ კოეფიციენტს). $q = 0$ მნიშვნელობისთვის გვექნება:

$$D_0 = -\lim_{R \rightarrow 0} \frac{\ln N(R)}{\ln R} \quad (10.4-3)$$

მივიღეთ (9.7-3) გამოსახულება, ამიტომ D_0 იგივეა, რაც უჯრედთა მთვლელი განზომილება.

დავადგინოთ ამ განზომილებათა ზოგიერთი საერთო მახასიათებელი. როდესაც $q \rightarrow \infty$, ალბათობის უდიდესი p_{max} მნიშვნელობა აჯამვისას დომინირებს და გვექნება:

$$D_\infty = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\ln p_{\max}}{\ln R} \quad (10.4-4)$$

ანალოგიურად, როდესაც $q \rightarrow -\infty$, მივიღებთ:

$$D_{-\infty} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\ln p_{\min}}{\ln R} \quad (10.4-5)$$

ამრიგად, D_∞ მიმზიდველის ყველაზე მჭიდროდ „ათვისებულ“ არესთან, ხოლო $D_{-\infty}$ ყველაზე „უკაცრიელ“ არესთან არის ასოცირებული.

შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ $D_{-\infty} \geq D_\infty$ და საზოგადოდ $D_q \geq D_{q'}$ როდესაც $q < q'$. ყველა უჯრედისთვის ტოლი ალბათობების მქონე ავტომოდელური ფრაქტალისთვის $p_i = 1/N(R)$ და ნებისმიერი q -თვის გვექნება $D_q = D_0$.

ამოცანა 10.4-1. გამოიყენეთ (10.4-2) და აჩვენეთ, რომ ავტომოდელური ფრაქტალის შემთხვევაში $D_q = D_0$ ნებისმიერი q -თვის.

ამჯერად დავუბრუნდეთ $q=1$ შემთხვევას, რომელიც გარკვეულ მათემატიკურ ძალისხმევას მოითხოვს, რადგან $q=1=0$ და ამ გარემოებამ (10.4-2)-ში შესაძლოა პრობლემები შეგვიქმნას ნულზე გაყოფის თვალსაზრისით. გამოსავალი ახალი $y(q)$ ფუნქციის შემოღებაში მდგომარეობს:

$$y(q) \stackrel{def}{=} \ln \sum_{i=1}^{N(R)} p_i^q \quad (10.4-6)$$

შემდეგ $y(q)$ -ს წარმოვადგენთ ტეილორის მწკრივის მეშვეობით $q=1$ წერტილის მიდამოში:

$$y(q) = y(1) + \frac{dy}{dq}(q-1) + \dots \quad (10.4-7)$$

შემდეგ განსაზღვრავთ პირველი რიგის წარმოებულს:

$$\frac{dy}{dq} = \frac{\sum_i p_i^q \ln p_i}{\sum_i p_i^q} = \sum_i p_i \ln p_i \quad (10.4-8)$$

სადაც ვიყენებთ გაწარმოების ელემენტალურ ფორმულას:

$$\frac{da^x}{dx} = a^x \ln a \quad (10.4-9)$$

ზემოთ მოყვანილი შედეგების საფუძველზე, როდესაც $q \rightarrow 1$, მივიღებთ:

$$D_1 = \lim_{R \rightarrow 0} \lim_{q \rightarrow 1} \frac{q-1}{q-1} \frac{\sum_i p_i \ln p_i}{\ln R} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\sum_i p_i \ln p_i}{\ln R} \quad (10.4-10)$$

D_1 სიდიდეს *ინფორმაციული განზომილება* ეწოდება, რადგან იგი ალბათობის სიმკვრივის „ინფორმაციის“ ჩვეულებრივ განსაზღვრებასთან ასოცირებულ $p \ln p$ ფორმას იყენებს.

ვაჩვენოთ, რომ D_2 კორელაციური განზომილებაა. ამისათვის განვიხილოთ ალბათობათა შემდეგი ჯამი:

$$S_q(R) = \sum_{i=1}^{N(R)} p_i^q \quad (10.4-11)$$

გავიხსენოთ, რომ (10.4-11)-ში აჯამვა მდგომარეობათა სივრცის მიმზიდველის ზედაპირზე ერთგვაროვნად განაწილებული $N(R)$ უჯრედების მიხედვით ხდება. ჩავწეროთ ჯამი ტრაექტორიის წერტილების მიმართ ცენტრირებული უჯრედების მიხედვით (გაიხსენეთ, რომ ასეთ უჯრედებს კორელაციური ჯამის გამოთვლისას ვიყენებდით). თავდაპირველად, ალბათობის ჯამს ხელახლა შევადგენთ:

$$S_q(R) = \sum_{i=1}^{N(R)} p_i p_i^{q-1} \quad (10.4-12)$$

შენიშნეთ, რომ თუ სინამდვილეში ტრაექტორია i -ურ უჯრედს არ „აკითხავს“, მაშინ p_i ალბათობა ნულის ტოლია. ამიტომ i -ზე გავრცელებული ჯამი სინამდვილეში ტრაექტორიის მიერ „მონახულებული“

უჯრედების მიხედვითაა აღებული. ამასთან, p_i მამრავლს $1/N$ სახით ჩავწერთ, სადაც N ტრაექტორიის წერტილთა რაოდენობაა. აქედან გამომდინარე, აჯამვას (j და k ინდექსებით აღნიშნულ) ტრაექტორიის წერტილებზე გავრცელებით და ტრაექტორიის თითოეულ წერტილს საკუთარი $1/N$ წვლილი შეაქვს ალბათობაში. თუმცა, ალბათობის სხვა მამრავლისათვის (რომელიც $q - 1$ ხარისხშია აყვანილი) $1/N$ გამოსახულებას არ გამოვიყენებთ. საბოლოოდ, (10.4-12)-ში p_i^{q-1} ალბათობას $q - 1$ ხარისხში აყვანილი ჰევისაიდის ფუნქციით ვცვლით:

$$p_j^{q-1} = \left[\frac{1}{N-1} \sum_{k=1, k \neq j}^N \Theta(R - |x_j - x_k|) \right]^{q-1} \quad (10.4-13)$$

შედეგად მივიღებთ:

$$S_q(R) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left[\frac{1}{N-1} \sum_{k=1, k \neq j}^N \Theta(R - |x_j - x_k|) \right]^{q-1} \quad (10.4-14)$$

განზოგადებულ კორელაციურ $C_q(R)$ ჯამს განვსაზღვრავთ შემდეგნაირად:

$$C_q(R) = \sum_{j=1}^N p_j p_j^{q-1} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left[\frac{1}{N-1} \sum_{k=1, k \neq j}^N \Theta(R - |x_j - x_k|) \right]^{q-1} \quad (10.4-15)$$

შენიშნეთ, რომ $q = 1$ შემთხვევაში $C_2(R)$ სიდიდე $C_1 = 1$ და $q = 2$ მნიშვნელობისთვის (9.8-4)-ით წარმოდგენილ კორელაციურ ჯამს მოგვაგონებს. აქედან გამომდინარე, C_q და S_q ჯამები, მეტ-ნაკლებად, ერთიმეორეს ჩაანაცვლებს. ისინი ერთმანეთისაგან განსხვავდება, რადგან S_q სიდიდე უჯრედში გავლის ალბათობას, ხოლო C_q ტრაექტორიის წერტილებს შორის არსებულ კორელაციას ემყარება. ჩვენ მხოლოდ მოვითხოვთ, რომ R -ზე მათი დამოკიდებულება ერთი და იგივე იყოს.

(10.4-14) გამოსახულების (10.4-2)-ში ჩასმა განზოგადებულ D_q განზომილებას გამოსახავს განზოგადებული კორელაციური ჯამის მეშვეობით:

$$D_q = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\ln C_q(R)}{\ln R} \quad (10.4-16)$$

ამრიგად, $D_2 = D_c$.

ამოცანა 10.4-2. შეამოწმეთ, რომ $C_1 = 1$ და რომ C_2 იგივეა, რაც მე-9 თავში მოყვანილი კორელაციური ჯამი.

აღსანიშნავია სამი მომენტი: 1) ექსპერიმენტული მნიშვნელობების მიხედვით D_q -ს გამოთვლა უჯრედთა თვლის მეთოდზე მეტად განზოგადებულ კორელაციურ ჯამს საჭიროებს. 2) D_q განზომილების გამოთვლისას $1/(q-1)\ln C_q(R)$ სიდიდეს $\ln R$ -ის ფუნქციის სახით წარმოვადგენთ და შევისწავლით ნორმირების არეს; 3) მაღალი განზომილების მქონე მდგომარეობის სივრცის შემთხვევაში D_q სიდიდის განსაზღვრისათვის 10.2 პარაგრაფში წარმოდგენილი ჩადგმის მეთოდი შეგვიძლია გამოვიყენოთ. ფორმალურად (10.4-15) გამოსახულებაში x_j -სა და x_k -ს მათი შესაბამისი d -განზომილებიანი ვექტორებით ვცვლით. არის ამგვარი განვრცობა 10.6 პარაგრაფში იქნება განვიხილული.

10.5 მულტიფრაქტალები და ნორმირების ინდექსების $f(\alpha)$ სპექტრი

წინა პარაგრაფის თანახმად, მიმზიდველის სხვადასხვა ნაწილები განსხვავებული ფრაქტალური განზომილებების მეშვეობით შეგვიძლია დავახასიათოთ. ასეთ შემთხვევაში ფრაქტალური განზომილების ცალკეული მნიშვნელობა მიმზიდველის ადეკვატური დახასიათებისათვის საკმარისი არ არის. მაგალითად, ორ სხვადასხვა მიმზიდველს შეიძლება ერთი და იგივე, მაგრამ „გარეგნული“ თვალსაზრისით მეტად განსხვავებული კორელაციური განზომილება გააჩნდეს. ფრაქტალური განზომილებების მრავალგვარობით გამორჩეულ ობიექტს *მულტიფრაქტალი* ეწოდება. კონკრეტული ობიექტი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ, როგორც საკუთარი ფრაქტალური განზომილების მქონე ფრაქტალური ობიექტების ერთობლიობა. ფრაქტალების ზოგიერთი გამოყენება აღწერილი იქნება მე-11 თავში.

იბადება ბუნებრივი კითხვა: რამდენ „არეს“ გააჩნია ფრაქტალური განზომილების საკუთარი მნიშვნელობა ან მნიშვნელობათა სიმრავლე? ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად არსებობს ძალზედ მნიშვნელოვანი, ოღონდ აბსტრაქტული სქემა. იგი გვთავაზობს განაწილების $f(\alpha)$ ფუნქციას, რომელიც გვაძლევს α „ნორმირების ექსპონენტების“ განაწილებას (არ აგვერიოს ფეიგენბაუმის α -ში).

კვლავ დავეყოთ მდგომარეობათა სივრცის მიმზიდველი R ზომის მქონე i ($i = 1, 2, \dots, N(R)$) ინდექსებით აღნიშნულ უჯრედებად. ადრინდელის მსგავსად, ტრაექტორიას დიდი ხნის განმავლობაში „ვაკვირდებით“ და შემდეგ ვპოულობთ ალბათობას იმისა, რომ ტრაექტორიის წერტილები i -ურ უჯრედში აღმოჩნდეს. ეს ალბათობაა $p_i(R) = N_i/N$, სადაც N_i i -ურ უჯრედში მდებარე ტრაექტორიის წერტილების რაოდენობაა, ხოლო N ტრაექტორიის წერტილების სრული რაოდენობა. თუ გეომეტრიულ ობიექტს ვიკვლევთ, მას R ზომის მქონე უჯრედებით ვფარავთ და ვაკვირდებით, მისი მასის რა ნაწილი აღმოჩნდება i უჯრედის შიგნით.

დავუშვათ, რომ სრულდება ნორმირების შემდეგი დამოკიდებულება:

$$p_i(R_i) = kR_i^{\alpha_i} \quad (10.5-1)$$

სადაც k პროპორციულობის მუდმივაა, ხოლო R i -ური უჯრედის ზომაა. α_i -ს i უჯრედის ნორმირების ინდექსი ეწოდება. R -ის შემცირებასთან ერთად უჯრედების $N(R)$ რაოდენობას ვზრდით და ვსვამთ კითხვას: რა რაოდენობის უჯრედი არსებობს, რომელსაც გააჩნია α -სა და $\alpha + d\alpha$ შორის არსებულ დიაპაზონში მყოფი ნორმირების ინდექსი? ეს რაოდენობა $n(\alpha)d\alpha$ სიმბოლოს მეშვეობით აღვნიშნოთ.

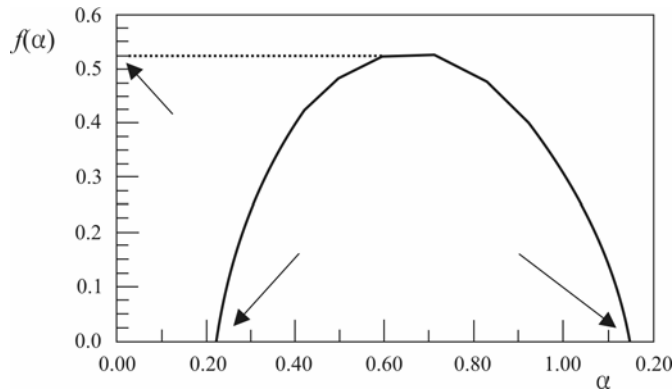
მახასიათებელი $f(\alpha)$ ექსპონენტა ფორმალურად შემდეგნაირად განისაზღვრება:

$$n(\alpha) = KR^{-f(\alpha)} \quad (10.5-2)$$

სადაც $n(\alpha)$ უდრის იმ უჯრედების რაოდენობას, რომელთათვისაც α სიდიდე α -სა და $\alpha + d\alpha$ შორის იმყოფება. მე-9 თავში მოყვანილი მსჯელობის მიხედვით, $f(\alpha)$ ასრულებს ფრაქტალური განზომილების როლს. $f(\alpha)$ -ს ინტერპრეტაცია შეგვიძლია α ნორმირების ინდექსის მქონე წერტილების სიმრავლის ფრაქტალური განზომილების მეშვეობით.

თუ $f(\alpha)$ -ს ფუნქციის გრაფიკს ავაგებთ, მულტიფრაქტალისთვის 10.7 ნახაზზე წარმოდგენილის მსგავს მრუდს მივიღებთ. $f(\alpha)$ -ს მაქსიმალური მნიშვნელობა სხეულის

(საშუალო) უჯრედთა მთვლელ განზომილებას შეესაბამება. ჭეშმარიტად ერთ-განზომილებიანი მიმზიდველისთვის, როგორცაა ლოჯისტიკური ასახვის მიმზიდველი, პერიოდის გაორმაგების ზღვრულ წერტილში უნდა ველოდეთ $f(\alpha)$ -ს ერთზე მცირე მნიშვნელობას, როდესაც ვიცით, რომ მიმზიდველი ფრაქტალია. ჰენონის ტიპის ორგანზომილებიანი ასახვებისათვის $f(\alpha)$ -ს 2-ზე მცირე მნიშვნელობას უნდა ველოდეთ.



ნახაზი. 10.7. $f(\alpha)$ -ს გრაფიკი ორმასშტაბიანი კანტორის (მულტიფრაქტალური) სიმრავლისთვის. (იხ. ნახ. 10.8 და (10.5-4) ამოცანაში მოყვანილი ტექსტი. $f(\alpha)$ -ს მაქსიმალური მნიშვნელობა სიმრავლის შესაბამის უჯრედთა მთვლელი (საშუალო) განზომილების ტოლია. აქ $p_1=0.7$, $L_1= 0.2$, $p_2= 0.3$ და $L_2= 0.35$.

10.7 ნახაზზე მოყვანილ კონკრეტულ შემთხვევას ზოგიერთი ფორმალის შემოღების შემდეგ უფრო დეტალურად გავარჩევთ.

წინა თავში წარმოდგენილი განზოგადებული განზომილებები და $f(\alpha)$ სიდიდე აღწერს მულტიფრაქტალთა თვისებებს. ლოგიკურად ამ სიდიდეებს შორის კავშირს უნდა ველოდეთ. $f(\alpha)$ -ს თავდაპირველად განზოგადებული განზომილებების დადგენის, ხოლო შემდეგ ქვემოთ აღწერილ მოქმედების ჩატარების მეშვეობით ვპოულობთ.

$f(\alpha)$ -სა და D_q -ს შორის კავშირი ყველაზე მარტივად (10.4-11)-ში მოყვანილი

$$S_q(R) = \sum_{i=1}^{N(R)} p_i^q \quad (10.5-3)$$

ალბათობათა ჯამის მეშვეობით დგინდება, სადაც აჯამვა i ინდექსით აღნიშნული უჯრედების მიხედვითაა ჩატარებული. $S_q(R)$ -ს, სტატისტიკურ მექანიკაში გამოყენებული დაყოფის ფუნქციების მსგავსად, ზოგჯერ q რიგის **სტატისტიკურ ჯამს** უწოდებენ.

$f(\alpha)$ -სთან კავშირის დასამყარებლად ალბათობებს α -ს მეშვეობით ჩავწერთ და სტატისტიკური ჯამის მისაღებად ინტეგრალს ავიღებთ α -ს მიმართ:

$$S_4(R) = C \int d\alpha R^{-f(\alpha)} R^{q\alpha} \quad (10.5-4)$$

სადაც C პროპორციულობის კოეფიციენტია. ინტეგრალქვეშა გამოსახულების პირველი მამრავლი გვაუწყებს, თუ რამდენ უჯრედს გააჩნია ნორმირების α ინდექსი. მეორე მამრავლი α ინდექსთან დაკავშირებული ალბათობის q რიგის ხარისხს წარმოადგენს.

თუ დავუშვებთ, რომ R უსასრულოდ მცირეა, მაშინ ინტეგრალქვეშა გამოსახულების რიცხვითი მნიშვნელობა მაქსიმალურია, როდესაც R -ის ხარისხი, კერძოდ $q\alpha - f(\alpha)$, უმცირესია. ეს ნიშნავს, რომ q -ს თითოეული მნიშვნელობისთვის იარსებებს α -ს ისეთი $\alpha_*(q)$ მნიშვნელობა, რომელისთვისაც შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{d\alpha} (q\alpha - f(\alpha)) \right]_{\alpha=\alpha_*} &= 0 \\ \left[\frac{d^2}{d\alpha^2} (q\alpha - f(\alpha)) \right]_{\alpha=\alpha_*} &< 0 \end{aligned} \quad (10.5-5)$$

პირველი განტოლებიდან გამოდინარეობს, რომ:

$$q = \left. \frac{df(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_*} \quad (10.5-6)$$

საიდანაც ვპოულობთ, რომ $f(\alpha)$ მრუდის კუთხური კოეფიციენტი $q=1$ მნიშვნელობის შესაბამისი α -სათვის ერთის ტოლია. გარდა ამისა,

$$\left. \frac{d^2 f(\alpha)}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=\alpha_*} < 0 \quad (10.5-7)$$

საიდანაც ვადგენთ, რომ $f(\alpha)$ მრუდი ჩაზნექილია.

დავუბრუნდეთ ინტეგრალის განსაზღვრის საკითხს. მარტივი გარდაქმნების გზით მივიღებთ:

$$S_q(R) = C' R^{q\alpha - f(\alpha)} \quad (10.5-8)$$

თუ გავიხსენებთ D_q -ს (10.4-2) მნიშვნელობას და შევადარებთ მას (10.5-3) და (10.5-8) გამოსახულებებს, გვექნება:

$$(q-1)D_q = q\alpha - f(\alpha) \quad (10.5-9)$$

სადაც α ცვლადს მოვაცილეთ * სიმბოლო.

ამოცანა 10.5-1. გამოიყვანეთ (10.5-9) ფორმულა.

პრაქტიკაში, მოდელირებული დინამიკური სისტემის შესაბამისი ტრაექტორიის ან რაიმე ექსპერიმენტით მიღებული მნიშვნელობებისთვის ვადგენთ D_q სიდიდეს 10.4 პარაგრაფში აღწერილი მეთოდების მეშვეობით. შემდეგ თითოეული q -ს შესაბამისი α და $f(\alpha)$ მნიშვნელობების განსაზღვრის მიზნით თავდაპირველად (10.5-9)-ს ვაწარმოებთ q -ს მიმართ:

$$\frac{d}{dq}[(q-1)D_q] = \alpha + q \frac{d\alpha}{dq} - \frac{df}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dq} \quad (10.5-10)$$

რაც (10.5-6)-თან ერთობლიობაში ვკადღევს α -ს მნიშვნელობას :

$$\alpha(q) = \frac{d}{dq}[(q-1)D_q] \quad (10.5-11)$$

შემდეგ (10.5-9) განტოლებას ხსნით $f(\alpha)$ -ს მიმართ:

$$f(\alpha) = q \frac{d}{dq}[(q-1)D_q] - (q-1)D_q \quad (10.5-12)$$

საბოლოოდ, D_q -ს დადგენისა და (10.5-11)-(10.5-12) გამოსახულების მეშვეობით $f(\alpha)$ -სა და α -ს გამოთვლასაც შევძლებთ. q და D_q ცვლადების α -სა და $f(\alpha)$ -ში გარადაქმნა თერმოდინამიკაში ხშირად გამოყენებული *ლეჟანდრის გარდაქმნის* მაგალითია. იხილეთ მაგალითად [Morse, 1964] ან [Chandler, 1987].

როდესაც $f(\alpha)$ და α განსაზღვრულია D_q სიდიდეების მეშვეობით, რატომ ვაწყდებით დამატებით გამოთვლით პრობლემებს? პირველ რიგში არსებობს $f(\alpha)$ მრუდის სხვადასხვა ასპექტების შედარებით მარტივი ინტერპრეტაცია და გარდა ამისა, ეს მრუდი ზოგიერთ უნივერსალურ თვისებას ამჟღავნებს.

$f(\alpha)$ -ს არსის გააზრების მიზნით, თავდაპირველად გამოვთვალოთ ეს რაოდენობა ალბათობის განაწილების მეშვეობით. ამისათვის მივმართოთ (10.5-1) გამოსახულებას. დავუშვათ, x -სთვის 0-სა და 1-ს შორის ალბათობის სიმკვრივის განაწილების ფუნქცია მოცემულია შემდეგი სახით:

$$\rho(x) = kx^{-1/2} \quad (10.5-13)$$

სადაც k პროპორციულობის კოეფიციენტია. R ($R \ll 1$) სიგრძის მქონე მონაკვეთის ფარგლებში ნაწილაკის პოზიციის ალბათობა მოცემულია შემდეგი ინტეგრალის მეშვეობით:

$$p(R) = \int_{x_0}^{x_0+R} \rho(x) dx \quad (10.5-14)$$

რომელიც გვაძლევს:

$$\begin{aligned} p(R) &= kR^{1/2} \text{ for } x_0 = 0 \\ p(R) &= kR \text{ for } x_0 > 0 \end{aligned} \quad (10.5-15)$$

როდესაც მხოლოდ ერთ ($x_0=0$) წერტილს გააჩნია $\alpha = 1/2$ ნორმირების ინდექსი, შესაბამისი ფრაქტალური განზომილება იქნება $f(\alpha = 1/2)=0$. მეორე მხრივ, x მნიშვნელობების უწყვეტ, ერთგანზომილებიან სეგმენტს გააჩნია $f(\alpha) = 1$ მნიშვნელობის შესაბამისი ფრაქტალური განზომილების მქონე ნორმირების $\alpha = 1$ ინდექსი.

განზოგადებული სტატისტიკური ჯამები და $f(\alpha)$ სიდიდე კანტორის აწონილი და ასიმეტრიული სიმრავლეებისათვის

რეკურსიული პროცედურების მეშვეობით განსაზღვრული სხვადასხვა ფრაქტალისთვის სასურველია განზოგადებული სტატისტიკური ჯამების განსაზღვრა, რომლებიც უჯრედების ცვლადი ზომის ეფექტებსაც მოიცავენ. განზოგადებული სტატისტიკური ჯამი განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\Gamma(q, \tau) = \sum_i \frac{p_i^q}{R_i^\tau} \quad (10.5-16)$$

q -ს ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის τ პარამეტრი ისეა არჩეული, რომ შესრულდეს პირობა $\Gamma(q, \tau) = 1$. τ პარამეტრის არსი ცხადი გახდება, თუ გამოვთვლით Γ სიდიდეს $R_i = R$ თანაბარი ზომის უჯრედების შემთხვევაში. (10.5-16) გამოსახულების ორივე მხარის გალოგარითმებით მივიღებთ:

$$\tau = \frac{\ln \sum_i p_i^q}{\ln R} \quad (10.5-17)$$

ამ უკანასკნელის (10.5-16)-თან შედარება მოგვცემს:

$$\tau = (q - 1)D_q \quad (10.5-18)$$

ამრიგად, განზოგადებული D_q განზომილება (ან უფრო კონკრეტულად $(q - 1)D_q$) ის რიცხვია, რომელიც q -ს მოცემული მნიშვნელობისთვის ერთის ტოლ განზოგადებულ სტატისტიკურ ჯამს იძლევა.

რეკურსიულად წარმოქმნილი ფრაქტალისთვის განზოგადებული სტატისტიკური ჯამის მეშვეობით $f(\alpha)$ -ს განსაზღვრის მეთოდის გაცნობის მიზნით განვიხილოთ კანტორის „წონილი“ სიმრავლის შემთხვევა. მე-9 თავში ვნახეთ, რომ კანტორის სტანდარტული სიმრავლე იქმნება ერთეულოვანი მონაკვეთის ცენტრალური ნაწილიდან სიგრძის ერთი მესამედის ამოღებისა და იგივე სიგრძის მქონე ორი მონაკვეთის ჩამატების გზით. კანტორის სიმრავლის განზოგადება შეგვიძლია ჩამატებული მონაკვეთებისთვის განსხვავებული p_1 და p_2 „წონების“ მინიჭების გზით, როდესაც $p_1 + p_2 = 1$. წონის მინიჭება ნიშნავს, რომ ორ მონაკვეთს შორის წერტილთა განაწილების პირველ საფეხურზე წერტილების p_1 წილს „გადავცემთ“ მარცხენა მონაკვეთს, ხოლო p_2 წილს – მარჯვენას.

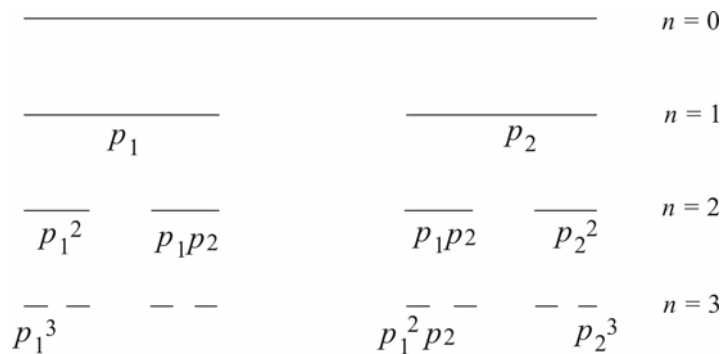
მეორე საფეხურზე გვექნება ოთხი მონაკვეთი: ერთი p_1^2 , ორი p_2^2 და ორიც p_1p_2 წონებით (პროცედურის მსვლელობა გამოსახულია 10.8 ნახაზზე). n -ური რივის განზოგადებული სტატისტიკური ჯამი შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$\Gamma_n(q, \tau) = \frac{1}{R^{n\tau}} (p_1^q + p_2^q)^n \quad (10.5-19)$$

სადაც სტანდარტული კანტორის სიმრავლისთვის $R=1/3$. q -ს კონკრეტული მნიშვნელობისთვის τ პარამეტრი ისეა შერჩეული, რომ განზოგადებული სტატისტიკური ჯამი ერთის ტოლია.

განზოგადებული სტატისტიკური ჯამის განსაზღვრისას უნდა ვიხელმძღვანელოთ HJK86-ში მოყვანილი არგუმენტის მეშვეობით. (10.5-19)-ში მოყვანილ ბინომურ გამოსახულებას ექნება შემდეგი სახე:

$$\Gamma_n(q, \tau) = \frac{1}{R^{n\tau}} \sum_{w=0}^{w=n} \frac{n!}{(n-w)!w!} p_1^{qw} p_2^{q(n-w)} \quad (10.5-20)$$



ნახაზი. 10.8. კანტორის აწონილი სიმრავლის კონსტრუქციის გენერაციის სქემა. $n=3$ შემთხვევაში მხოლოდ რამდენიმე „აწონვა“ არის გამოსახული.

სადაც ფაქტორიალთა კომბინაცია გვაუწყებს, თუ რამდენ მონაკვეთს გააჩნია w -ს კონკრეტული მნიშვნელობის შესაბამისი წონა.

დიდი n -ების შემთხვევაში, (10.5-20) გამოსახულებაში შედის უდიდესი აბსულუტური სიდიდის მქონე ერთ-ერთი წევრი, რომელიც ფაქტიურად ჯამის უდიდეს ნაწილს შეადგენს. w -ს შესაბამისი მნიშვნელობის (აღენიშნოთ w^* -ით) განსაზღვრას გამოსახულების ორივე მხარის ნატურალური ლოგარითმის დიფერენცირებით და შემდეგ

მიღებული წარმოებულის ნულთან გატოლების გზით შევძლებთ (ნატურალურ ლოგარითმს ვიყენებთ იმის გამო, რომ გვეძლევა სტირლინგის ფორმულის

$$n! \approx n \ln n - n$$

გამოყენების საშუალება). თუ ლოგარითმს გააჩნია მაქსიმუმი, მაშინ ვპოულობთ w_* -ს ისეთ მნიშვნელობას, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:

$$\frac{n}{w_*} = 1 + \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^q \quad (10.5-21)$$

ამასთან ერთად, τ -ს შესაბამისი მნიშვნელობის დადგენაც შეგვიძლია შემდეგი განტოლების მეშვეობით:

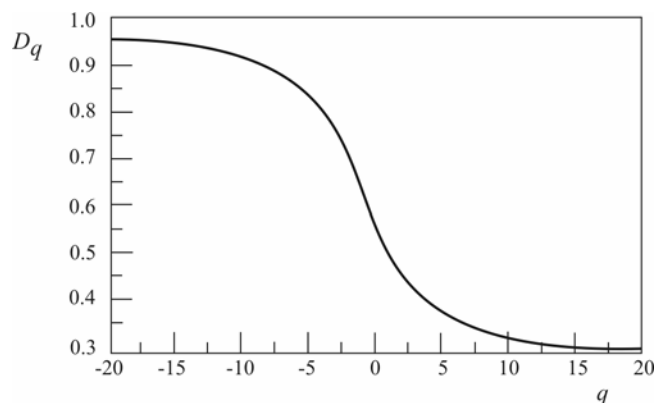
$$\frac{1}{R^{n\tau}} \frac{n!}{(n-w_*)! w_*!} p_1^{q w_*} p_2^{q(n-w_*)} = 1 \quad (10.5-22)$$

ყოველგვარი სირთულის გარეშე შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ უკანასკნელ განტოლებას აკმაყოფილებს $\tau = (q-1)D_q$ მნიშვნელობა.

10.9 ნახაზი წარმოგვიდგენს $D_q(q)$ ფუნქციის გრაფიკს კანტორის აწონილი სიმრავლისთვის, როდესაც $p_1 = 0.7$ და $p_2 = 0.3$.

$f(a)$ სიდიდესთან კავშირის დამყარების მიზნით გამოვიყენოთ შემდეგი გამოსახულება:

$$p_{w_*} = p_1^{w_*} p_2^{(n-w_*)} = R_n^\alpha \quad (10.5-23)$$



ნახაზი. 10.9. $D_q(q)$ ფუნქციის გრაფიკი კანტორის აწონილი სიმრავლისთვის, როდესაც $p_1 = 0.7$ და $p_2 = 0.3$

სადაც $R_n = (R=1/3)^n$ წარმოადგენს ჩამატებული მონაკვეთის სიგრძეს პროცედურის n -ურ საფეხურზე. ამრიგად, გვექნება:

$$\alpha = \frac{w_* \ln p_1 + (n - w_*) \ln p_2}{n \ln R} \quad (10.5-24)$$

შენიშნეთ, რომ α სიდიდე მხოლოდ n/w_* ფარდობაზეა დამოკიდებული. $f(\alpha)$ -ს ვპოულობთ შემდეგი დამოკიდებულების მეშვეობით:

$$\frac{n!}{(n - w_*)! w_*!} = R_n^{-f(\alpha)} \quad (10.5-25)$$

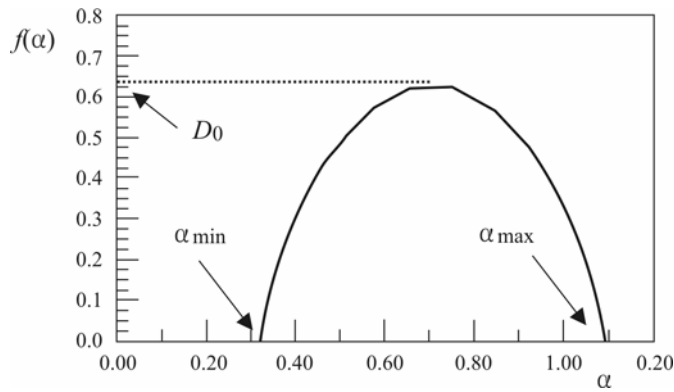
ფაქტორიალებისთვის სტირლინგის მიახლოების გამოყენება და განტოლების $f(\alpha)$ -ს მიმართ ამოხსნა გვაძლევს:

$$f(\alpha) = \frac{\ln\left(1 - \frac{w_*}{n}\right) - \frac{w_*}{n} \ln\left(\frac{w_*}{n} - 1\right)}{\ln R} \quad (10.5-26)$$

რომელიც α -ს მსგავსად მხოლოდ n/w_* ფარდობაზეა დამოკიდებული.

$f(\alpha)$ მრუდის სრულყოფილად განსაზღვრის მიზნით, p_1 -ისა და p_2 -ის ფიქსირებული მნიშვნელობებისათვის ვირჩევთ q -ს მნიშვნელობებს (-40 -დან $+40$ -მდე დიაპაზონში) და (10.5-21) გამოსახულების მეშვეობით ვპოულობთ n/w_* ფარდობას. შემდეგ (10.5-24) და (10.5-26) გამოსახულებების საშუალებით α -სა და $f(\alpha)$ -ს ვპოულობთ. $p_1 = 0.7$ და $p_2 = 0.3$ პირობებში მიღებული შედეგები 10.10 ნახაზზეა ნაჩვენები.

როდესაც $q \rightarrow \infty$, (10.5-21) გამოსახულების თანახმად, $w_* \rightarrow n$. (10.5-26) გამოსახულებიდან ვაღვანთ, რომ ასეთ შემთხვევაში $f(\alpha) \rightarrow 0$ და ვღებულობთ α -ს უმცირეს მნიშვნელობას, კერძოდ $\alpha_{\min} = (\ln p_1) / (\ln R) = 0.324\dots$ (10.10) ნახაზზე მოყვანილი მნიშვნელობისათვის. როდესაც $q \rightarrow -\infty$, მაშინ $f(\alpha) \rightarrow 0$, მაგრამ ამ დროს α -ს უდიდესი მნიშვნელობა $\alpha_{\max} = (\ln p_2) / (\ln R) = 1.095\dots$ $f(\alpha)$ -ს უდიდესი მნიშვნელობა მიიღება $q = 0$ პირობებში, როდესაც $n/w_* = 2$.



ნახაზი. 10.10. $f(\alpha)$ ფუნქციის გრაფიკი კანტორის აწონილი სიმრავლისთვის, როდესაც $p_1 = 0.7$, $p_2 = 0.3$ და $R=1/3$.

(10.5-26) გამოსახულების მეშვეობით ვაღგენტ, რომ $f_{\max} = \ln 2 / \ln 3$, რაც კანტორის სიმრავლისთვის უჯრედთა მთვლელი D_0 განზომილებაა $R=1/3$ მნიშვნელობის შემთხვევაში.

(10.5-9) გამოსახულებიდან ჩანს, რომ α -ს უდიდესი მნიშვნელობა $D_{-\infty}$ -ს, ხოლო უმცირესი მნიშვნელობა $D_{+\infty}$ -ის ტოლია. 10.9 ნახაზი. გვიჩვენებს, თუ როგორ მიისწრაფვის D_q ამ მნიშვნელობებისაკენ.

$q \rightarrow +\infty$ შემთხვევა განზოგადებულ სტატისტიკურ ჯამში უდიდეს ალბათობას წარმოადგენს და α_{\min} შეესაბამება ფრაქტალის ყველაზე მჭიდროდ შევსებულ უბანს (უდიდესი ალბათობის ან წონის მქონე ნაწილს). α_{\max} მნიშვნელობა შეესაბამება $q \rightarrow -\infty$ შემთხვევას და ფრაქტალის უმცირესი ალბათობის მქონე ნაწილს განასახიერებს. ამგვარი ინტერპრეტაცია ვრცელდება ნებისმიერ $f(\alpha)$ მრუდის შემთხვევაში.

ამოცანა 10.5-2. განიხილეთ კანტორის აწონილი სიმრავლის გამოსახულებათა ალგებრული დეტალები. გადაამოწმეთ რიცხვითი დამოკიდებულებები ტექსტში მოყვანილი შემთხვევისათვის.

ამოცანა 10.5-3. კანტორის აწონილი სიმრავლისათვის $f(\alpha)$ -ს მიღება ასევე შესაძლებელია (10.5-17) გამოსახულების მეშვეობით, რომელიც $(q-1)D_q$ მნიშვნელობას გვაძლევს ალბათობათა ჯამისა და (10.5-11), (10.5-12) გამოსახულებების მიმართ ლეჟანდრის გარდაქმნის გამოყენებით. ჩაატარეთ შესაბამისი გამოთვლები და შეადარეთ მიღებული შედეგები 10.10 ნახაზს.

დავუბრუნდეთ 10.7 ნახაზზე წარმოდგენილ შემთხვევას. ეს შედეგები ე.წ. კანტორის ორმასშტაბიანი სიმრავლისთვის (რომელიც ადრე შემოთავაზებული ასიმეტრიული და აწონილი კანტორის სიმრავლეა) არის გამოთვლილი. კონსტრუქციის ყოველ საფეხურზე გამოიყენება განსხვავებული R_1 , R_2 და p_1 , p_2 წონების მქონე მონაკვეთები. HJK86-ში დამტკიცებულია, რომ ამ სიმრავლისათვის α -სა და $f(\alpha)$ -ს დადგენა პირდაპირი ხერხით არის შესაძლებელი. მეცნიერებმა აგრეთვე უჩვენეს, რომ ზემოთ მოყვანილი მაგალითიდან გავიგებთ, რომ α_{\max} შეესაბამება უფრო დიდ $\{\ln p_1 / \ln R_1\}$ -ს ან $\{\ln p_2 / \ln R_2\}$ -ს, ხოლო α_{\min} კი უფრო მცირე მნიშვნელობებს.

ამოცანა 10.5-4. კანტორის ასიმეტრიული სიმრავლის შექმნა შესაძლებელია ყოველ საფეხურზე სხვადასხვა R_1 და R_2 სიგრძის მქონე მონაკვეთების გამოყენებით. სიმარტივისთვის დაუშვათ, რომ მონაკვეთებისათვის მინიჭებული წონა $p_1 = p_2 = 1/2$. ჩატარეთ ზემოთ აღწერილის ანალოგიური მოქმედებები და გამოიყვანეთ განზოგადებული სტატისტიკური ჯამის, α -სა და $f(\alpha)$ -ს გამოსახულებები. ააგეთ $f(\alpha)$ მრუდი, როდესაც $R_1 = 0.2$ და $R_2 = 0.4$.

კანტორის ორმასშტაბიანი სიმრავლის ელემენტათვის, როდესაც ორი მანძილი და ორი ალბათობა გაგვაჩნია, $f(\alpha)$ მრუდის სრულყოფილი სახით აგება მიახლოებით მაინც შეგვიძლია. ორი მანძილი და ორი ალბათობა α -ს იმ მნიშვნელობებს გვაძლევს, რომელთა შემთხვევაშიც $f(\alpha) \rightarrow 0$. $f(\alpha)$ -ს მაქსიმალური მნიშვნელობის დადგენას, 9.7 პარაგრაფის ანალოგიურად, მსგავსების განზომილების დახმარებით შევძლებთ. ჩვენ ასევე ვიცით, რომ $f(\alpha)$ მრუდი ჩაზნექილი უნდა იყოს. ეს ინფორმაცია მთლიანი მრუდის მიახლოებითი სურათის შესახებ წარმოდგენის შექმნის თვალსაზრისით საკმარისია.

ამოცანა 10.5-5. 10.7 ნახაზზე მოყვანილი რიცხვითი მნიშვნელობების გამოყენებით გადაამოწმეთ წინა პარაგრაფში მიღებული შედეგები.

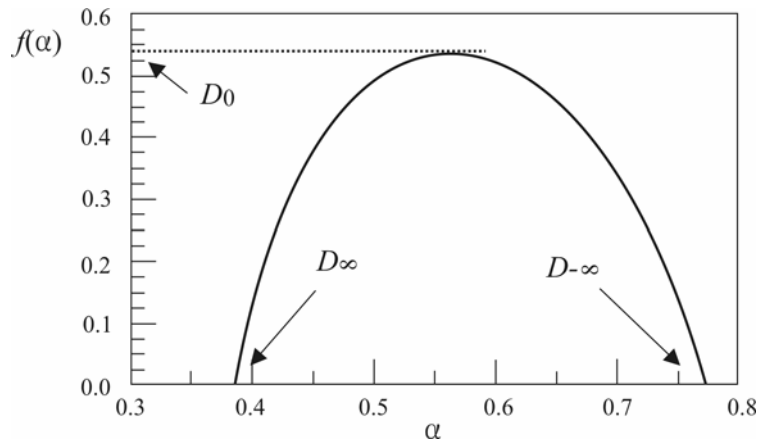
განვიხილოთ კიდევ ერთი შემთხვევა, როდესაც გვაქვს ლოჯისტიკური ასახვის განაწილება პერიოდის გაორმაგების ზღვრულ წერტილში. მიღებული შედეგები 10.11 ნახაზზეა ნაჩვენები. ლოჯისტიკური ასახვის შესაბამისი მნიშვნელობები თვალნათლივ წარმოაჩენს $f(\alpha)$ სიდიდის განაწილების ძირითად თვისებებს. α -ს ის მნიშვნელობები, რომლებისთვისაც $f(\alpha) \neq 0$, მიეკუთვნება $(0,1)$ ინტერვალს. ჩვენ ამას ლოჯისტიკური

ასახვის შემთხვევაში ველოდით, რადგან 9.7 პარაგრაფის თანახმად, პერიოდის გაორმაგების ზღვრულ წერტილში მიმზიდველზე სხვადასხვა მოქმედებების ჩატარება შეგვიძლია ნორმირების ორი სხვადასხვა ($1/\alpha_F$ და $1/\alpha^2_F$) ფაქტორის მქონე კანტორის სიმრავლესთან მიმართებაში, სადაც α_F არის ფეიგენბაუმის α ($=2.502\dots$). $f(\alpha)$ -ს რიცხვითი მნიშვნელობა მაქსიმუმში შეესაბამება უჯრედთა მოვლელ განზომილებას, რომელიც ამ შემთხვევაში დაახლოებით 0.5388...-ის ტოლია.

ამოცანა 10.5-6. გამოიყენეთ წინა პარაგრაფში $D_{-\infty}$ -სა და $D_{+\infty}$ -ის გამოთვლის მოყვანილი მეთოდები ლოჯისტიკური ასახვისთვის. შეადარეთ თქვენ მიერ მიღებული მნიშვნელობები 10.11 ნახაზზე მოყვანილ შედეგებს.

დაბოლოს, მულტიფრაქტალურ განაწილებებთან დაკავშირებული მაგალითის სახით განვიხილოთ სინუსოიდურ-წრიული ასახვის [(განტ. 6.7-6)] მნიშვნელობების მიხედვით გამოთვლილ $f(\alpha)$ სიდიდის განაწილება, როდესაც $K=1$ და Ω ნახვევთა რაოდენობა ოქროს კვეთის ტოლია. მე-6 თავის თანახმად, პირობების მოცემული სიმრავლე ქაოსური ქმედების საწყის ეტაპს შეესაბამება. შესაბამისი განაწილება 10.12 ნახაზზეა ნაჩვენები.

მოცემული განაწილების თვისებები საერთო ჯამში წააგავს ლოჯისტიკური ასახვის შესაბამისი განაწილების თვისებებს. α -ს უდიდესი მნიშვნელობა ანალიზურად შესაძლებელია შემდეგნაირად გამოისახოს:



ნახაზი.10.11. ლოჯისტიკური ასახვის მიმზიდველის შესაბამისი $f(\alpha)$ სიდიდის განაწილების გრაფიკი პერიოდის გაორმაგების ზღვრულ წერტილში. $f(\alpha)$ -ს მაქსიმალური რიცხვითი მნიშვნელობა შეესაბამება მიმზიდველის უჯრედთა მოვლელ განზომილებას.

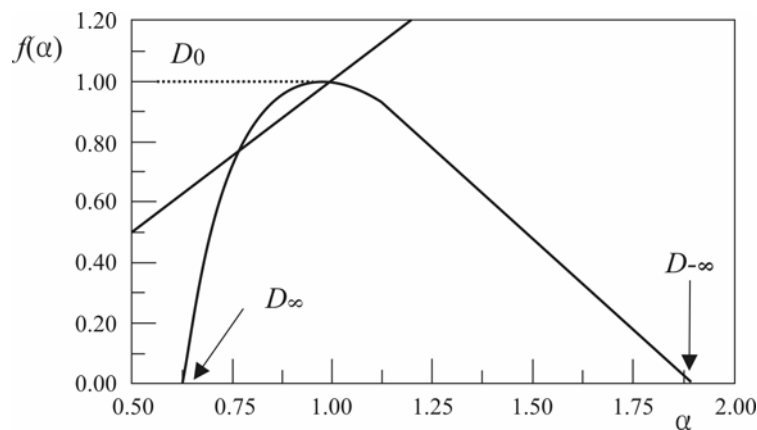
$$\alpha_{\max} = \frac{\ln G}{\ln \beta^{-1}} = 1.8980... \quad (10.5-27)$$

სადაც $\beta=1.2885$ წარმოადგენს ნორმირების კოეფიციენტს სინუსოიდურ-წრიული ასახვისთვის $\theta=0$ მნიშვნელობის მიდამოში (HJK86). α -ს უმცირესი მნიშვნელობისათვის გვექნება:

$$\alpha_{\min} = \frac{\ln G}{\ln \beta^{-3}} = 0.6326... \quad (10.5-28)$$

განაწილების მაქსიმუმი, მოლოდინისამებრ, გვექნება $f(\alpha)=1$ შემთხვევაში, რადგან სინუსოიდურ-წრიული ასახვის იტერაციები მთლიანად მოიცავს $\theta = [0, 2\pi]$ ინტერვალს და, ამრიგად, გვაძლევს ერთის ტოლ უჯრედთა მთვლელ ექსპონენტას.

მრავალი ექსპერიმენტის კვლევა არის ჩატარებული (α) ფორმალიზმის გამოყენებით (რამდენიმე ციტირება თავის ბოლოშია მოყვანილი). ამგვარი მიდგომის მნიშვნელობა მდგომარეობს იმის უნარში, რომ დადგინდეს უნივერსალური კლასები დინამიკური სისტემების მრავალსახეობისათვის მაშინაც კი, როდესაც მიმზიდველები ერთი შეხედვით განსხვავებულია. მაგალითად, (HJK86)-მა რელი-ბენარდის კონვექციური ექსპერიმენტის შედეგად მიღებული მნიშვნელობები გამოიკვლია და დაადგინა, რომ ექსპერიმენტული ცდომილების ფარგლებში შესაბამისი $f(\alpha)$ -ს განაწილება თანხვედრაშია 10.12 ნახაზზე მოყვანილი სინუსოიდურ-წრიული ასახვის განაწილებასთან. (SRH87)-მა მსგავსი სახის კვლევა ნახევარგამტარული დიოდის ოსცილატორთა წყვილისაგან შემდგარი სისტემისათვის ჩატარა. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, კორელაციური ჯამი განზოგადებული D_q განზომილებების გამოთვლისათვის გამოიყენება, ხოლო $f(\alpha)$ ფუნქციას (10.5-11) და (10.5-12) გამოსახულებების მიმართ ლეჟანდრის გარდაქმნის გზით პოულობენ.

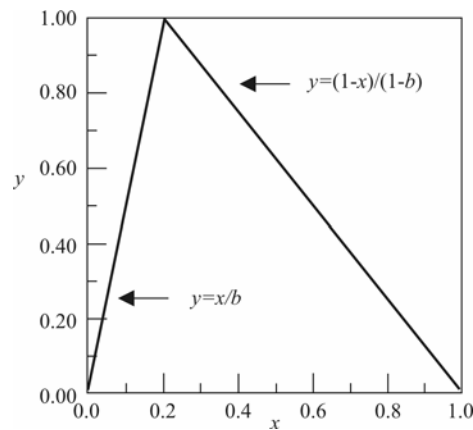


ნახაზი. 10.12. სინუსოიდურ-წრიული ასახვის მიხედვით მიღებული მნიშვნელობების შესაბამისი $f(\alpha)$ სიდიდების განაწილების მრუდი, როდესაც $K=1$ და ნახვევთა Ω რიცხვი ოქროს შუალედის ტოლია. α_{\max} და α_{\min} მნიშვნელობების განსაზღვრა ანალიზურად ხდება (როგორც ეს ზემოთ გვაქვს აღწერილი).

10.6 განზოგადებული ენტროპია და $g(\Delta)$ სპექტრი

10.4 პარაგრაფში გავეცანით, თუ როგორ უნდა განვაზოგადოთ განზომილების ცნება განზომილებათა მთელი სპექტრის შესწავლის მიზნით. ანალოგიურად, ჩვენ შეგვიძლია განვაზოგადოთ კოლმოგოროვის ენტროპია სისტემის დინამიკის შესახებ უფრო დეტალური რაოდენობრივი ინფორმაციის მომცემი ენტროპიის ფუნქციითა სიმრავლის მისაღებად.

დაუბრუნდეთ (9.6-11) გამოსახულებას, რომელიც გვაძლევს $K - S$ ენტროპიის განსაზღვრებას მიმდევრობის ალბათობის ჯამის სახით. განვიხილოთ ერთგანზომილებიანი სისტემა და უჯრედთა მიმდევრობების ალბათობები წარმოვადგინოთ განვრცობილი $p(i_1, i_2, \dots, i_d)$ ფორმით, რათა (9.6-11) გამოსახულებაში N -ის მაგივრად d სიდიდე გვქონდეს (ქვემოთ d -ს იდენტიფიკაციას ჩადგმული სივრცის განზომილებასთან მოვახდენთ. ჯერჯერობით იგი უჯრედთა მიმდევრობის სიგრძის საზომია). ყოველი ტრაექტორიის ერთი უჯრედიდან დაწყების შემთხვევაში გვექნება $S_0=0$.



ნახაზი. 10.13. გადახრილი კარვის ასახვის გრაფიკი $b=0.2$ მნიშვნელობისათვის

შემდეგ, (10.4-10) გამოსახულების ანალოგიურად, $K - S$ ენტროპიას გამოვსახავთ შემდეგი სიდიდის მეშვეობით:

$$K_1 = \frac{-\sum_i p(i_1, i_2, \dots, i_d) \ln p(i_1, i_2, \dots, i_d)}{d}$$

შედეგად მივიღებთ K_q განზოგადებული ენტროპიის შემდეგ განსაზღვრებას:

$$K_q = \frac{-\ln \sum_i p(i_1, i_2, \dots, i_d)}{(q-1)d} \quad (10.6-1)$$

K_q სიდიდეებისა და $p(i_1, i_2, \dots, i_d)$ ალბათობების არსის გარკვევის მიზნით განვიხილოთ ე.წ. გადახრილი კარვის ასახვა, რომელიც მოიცემა შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} f_b(x) &= \frac{x}{b} \quad \text{for } 0 < x < b \\ f_b(x) &= \frac{1-x}{1-b} \quad \text{for } b < x < 1 \end{aligned} \quad (10.6-2)$$

შესაბამისი მრუდი გამოსახულია 10.13 ნახაზზე.

ალბათობების განსაზღვრისთვის გავიხსენოთ, რომ მდებარე ტრაექტორიის x წერტილის უკრედში მოხვედრის ალბათობა ამ წერტილთან ასოცირებული ლიაპუნოვის ექსპონენტის მეშვეობით შემდეგნაირად გამოისახება:

$$p(i_1) = e^{-\lambda(x)} = e^{-\ln|f'(x)|} \quad (10.6-3)$$

ანუ თუ ლიაპუნოვის ექსპონენტი დადებითია და გააჩნია დიდი აბსოლუტური მნიშვნელობა, მაშინ ზემოთ ხსენებული ალბათობა მცირე იქნება, რადგანაც ტრაექტორიები მდგომარეობათა სივრცის მოცემული არიდან სწრაფად გადიან. ამრიგად, კარვის დახრილი ასახვის შემთხვევაში ვასკვნით, რომ თუ $x \in [0, b]$, მაშინ ტრაექტორიის სეკვენტებთან დაკავშირებული ალბათობა კონკრეტულ საფეხურზე იქნება $p(i_1)=b$, ხოლო თუ $x \in [b, 1]$, მაშინ $p(i_1)=1-b$. სიმარტივისთვის და 10.5 პარაგრაფში გამოყენებული ანალოგიური გამოსახულებების მიღების მიზნით შემოვიტანოთ აღნიშვნები: $p_1=b$ და $p_2=1-b$. მაშინ:

$$\sum_{i_1} p(i_1)q \equiv S_q^1 = p_1^q + p_2^q \quad (10.6-4)$$

სადაც S_q^1 წარმოადგენს ალბათობათა ჯამს.

ორსაფეხურიანი ტრაექტორიის სეგმენტებისათვის არსებობს ოთხი შესაძლო შემთხვევა: (1) ორივე წერტილი $[0,b]$ ინტერვალშია; (2) ორივე წერტილი $[b,1]$ ინტერვალშია; (3) პირველი წერტილი $[0,b]$ ინტერვალშია, ხოლო მეორე კი $[b,1]$ ინტერვალში; (4) პირველი წერტილი $[b,1]$ ინტერვალშია, ხოლო მეორე კი $[0,b]$ ინტერვალში. p_1^2 , p_2^2 , $p_1 p_2$, და $p_2 p_1$ სიდიდეები წარმოადგენს შესაბამის ალბათობებს. ალბათობათა ჯამი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\sum_{i_1, i_2} p(i_1, i_2)^q \equiv S_q^2 = (p_1^q + p_2^q)^2 \quad (10.6-5)$$

ჩავწეროთ ეს უკანასკნელი განზოგადებული სახით:

$$\sum_{i^s} p(i_1, \dots, i_d)^q \equiv S_q^d = (p_1^q + p_2^q)^d \quad (10.6-6)$$

(10.6-1) გამოსახულებაში (10.6-6)-ის ჩასმით, K_q განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$K_q = -\frac{1}{q-1} \ln(p_1^q + p_2^q) \quad (10.6-7)$$

იგივე მეთოდის გამოყენებით, რაც გვექონდა (10.4-10) გამოსახულების შემთხვევაში, შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ

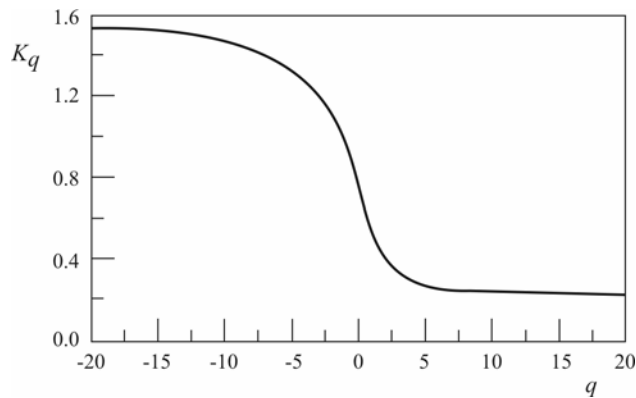
$$K_1 = p_1 \ln\left(\frac{1}{p_1}\right) + p_2 \ln\left(\frac{1}{p_2}\right) \quad (10.6-8)$$

თუ (9.5-9)-ის პირველი გამოსახულების გამოყენების გზით გადახრილი კარვის ასახვისთვის გამოვთვლით ლიაპუნოვის საშუალო ექსპონენტას, როდესაც $p(x)=1$, აღმოჩნდება, რომ K_1 წარმოადგენს სისტემის შესაბამის ლიაპუნოვის საშუალო ექსპონენტას.

ამოცანა 10.6-1. გამოიყენეთ (9.5-9)-ის პირველი გამოსახულება, როდესაც გადახრილი კარვის ასახვისთვის $p(x)=1$ და შეამოწმეთ, რომ K_1 მართლაც სისტემის ლიაპუნოვის ექსპონენტაა.

ამოცანა 10.6-2. აჩვენეთ, რომ თუ ნებისმიერი q -სთვის $p_1 = p_2$, მაშინ $K_q = K_1 = \ln 2$. თუ სისტემის ნებისმიერი ლოკალური ლიაპუნოვის ექსპონენტა ერთნაირია, მაშინ ნებისმიერი q -სთვის $K_q = K_1$.

(10.6-7) გამოსახულების მეშვეობით ვპოულობთ, რომ $K_0 = \ln 2$. K_0 -ს, რადგანაც იგი სისტემის ფიქსირებულ წერტილთა რაოდენობის ნატურალური ლოგარითმითაა მოცემული (ტოპოლოგიური მახასიათებელი), ტოპოლოგიური ენტროპია ეწოდება.



ნახაზი 10.14. K_q სიდიდის გრაფიკი გადახრილი კარვის ასახვისათვის, როდესაც $b=0.2$.

როდესაც $q \rightarrow +\infty$, (10.6-7) გამოსახულებაში დომინირებს p_1 და p_2 - სიდიდეებს შორის უდიდესი და, აქედან გამომდინარე, $K_\infty = -\ln p_{\max}$. როდესაც $q \rightarrow -\infty$, დომინირებს ამ ორ ალბათობას უმცირესი და, $K_{-\infty} = -\ln p_{\min}$. 10.14 ნახაზი გვიჩვენებს K_q ფუნქციის გრაფიკს მოცემულ გადახრილი კარვის ასახვისთვის, როდესაც $b=0.2$.

ამოცანა 10.6-3. გადაამოწმეთ 10.14 ნახაზის რიცხვითი მნიშვნელობები.

განზოგადებული ენტროპიები და კორელაციური ჯამები

ალბათობების გამოთვლის გზით ენტროპიების დადგენა პრაქტიკულად შეუძლებელია. მიუხედავად ამისა, შეგვიძლია K_q ენტროპიები დავუკავშიროთ C_q კორელაციურ ჯამებს, რომელთა გამოთვლაც გაცილებით იოლია. შევამოწმოთ, თუ როგორ იმუშავებს მოცემული მეთოდი $q = 2$ შემთხვევაში, შემდეგ კი მიღებული შედეგი q -ს სხვა მნიშვნელობების მიმართაც განვაზოგადოთ. როგორც წესი, ამ მიზნით ვიყენებთ K_2 -ს, რადგან მისი გამოთვლა გარკვეულწილად იოლია. (10.6-1) გამოსახულების გამოყენებით მივიღებთ :

$$K_2 = -\frac{1}{d} \ln \sum_{i_1, i_2, \dots} p(i_1, \dots, i_d)^2 \quad (10.6-9)$$

$d=1$ შემთხვევაში, (GRA83)-ს მიხედვით ვასკვნი, რომ $p(i_1)^2$ სიდიდეთა ჯამი (10.4-15) გამოსახულებით განსაზღვრული $C_2(R)$ კორელაციური ჯამის სახით შეიძლება გამოისახოს ანუ კორელაციური ჯამი ნიშნავს იმის ალბათობას, რომ ტრაექტორიის ორი მოცემული წერტილი R ზომის მქონე უჯრედის ფარგლებში აღმოჩნდება. ეს ალბათობა მიახლოებით ტოლია იმის ალბათობის კვადრატის, რომ ცალკეული წერტილი მოხვდება მოცემულ უჯრედში (იმ დაშვებით, რომ „ხდომილებები“ ერთიმეორისაგან დამოუკიდებელია).

$d>1$ შემთხვევაში ტრაექტორიის წერტილთა შემცველი უჯრედების მიმდევრობა ეკვივალენტურია d -განზომილებიანი ჩადგმული სივრცის ვექტორისა. დაუკავშიროთ $p(i_1, \dots, i_d)$ სიდიდე $C_2^{(d)}(R)$ კორელაციურ ჯამს, რაც (10.2-1) და (10.4-15) გამოსახულებების განზოგადების გზით განვახორციელოთ:

$$\sum_{i^s} p(i_1, \dots, i_d)^2 \approx C_2^{(d)}(R) \quad (10.6-10)$$

როგორც ვხედავთ, $d=1$ შემთხვევაში (10.6-10) დაიყვანება (10.4-15) გამოსახულების მეშვეობით განსაზღვრულ კორელაციურ ჯამზე.

პრაქტიკაში K_2 -ის გამოთვლა $C_2^{(d)}(R)$ -ისა და ჩადგმული სივრცის განზომილების ურთიერთდამოკიდებულების ხასიათის დადგენის გზითაა შესაძლებელი. როგორ გამოიყენება ეს მეთოდი? ჩადგმული სივრცის განზომილების ზრდა დროითი მწკრივების „ვექტორის“ ელემენტების რაოდენობის გაზრდასაც ნიშნავს ანუ ჩვენ ვზრდით გამოთვლისას გამოყენებულ მნიშვნელობათა მიმდევრობის დროში განვრცობასაც. თუ სისტემის ქმედება ქაოსურია, მაშინ ხანგრძლივობის ზრდასთან ერთად ტრაექტორიის შესაბამისი ელემენტების (საშუალოდ) დივერგენციასაც უნდა ველოდოთ. ამრიგად, თუ ჩადგმის განზომილების გაზრდის გზით განვსაზღვრავთ კორელაციური ჯამის შემცირების ხასიათს, შესაბამისი K_2 -ის მნიშვნელობის დადგენასაც მოვახერხებთ.

(10.6-1) გამოსახულების თანახმად:

$$\sum_{i^s} p(i_1, \dots, i_d)^2 = e^{-dK_2} \quad (10.6-11)$$

გავიხსენოთ, რომ განზოგადებული კორელაციური D_2 ჯამი დაკავშირებულია $C_2^{(d)}(R) \sim R^{D_2}$ კორელაციურ განზომილებასთან. შედეგად ვღებულობთ:

$$C_2^{(d)}(R) = AR^{D_2} e^{-dK_2} \quad (10.6-12)$$

გამოსახულების ორივე მხრის გალოგარითმება მოგვცემს:

$$\ln C_2^{(d)}(R) \approx D_2 \ln R - dK_2 \quad (10.6-13)$$

სადაც ჩვენ უგულებელყოფთ მცირე $\ln A$ წევრს. (10.6-13) გამოსახულება K_2 -ის განსაზღვრის გზას გვიჩვენებს: R -ის ფიქსირებული მნიშვნელობის მეშვეობით ვაგებთ $C_2^{(d)}(R)$ -ის, როგორც ჩადგმის d განზომილების ცვლადის ფუნქციის, გრაფიკს ამ მრუდის კუთხური კოეფიციენტი იქნება K_2 .

პაველზიკისა და შუსტერის (PAS87) თანახმად, შეგვიძლია განვსაზღვროთ ახალი კორელაციური ჯამი. სიმარტივისთვის, შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა:

$$R_{ij}(d) \equiv \sqrt{\sum_{m=0}^{d-1} (x_{i+m} - x_{j+m})^2} \quad (10.6-14)$$

(ზემოთ აღნიშნულის თანახმად, ორ ვექტორს შორის სხვაობის სახით მაქსიმალურ კომპონენტებს შორის არსებული სხვაობაც შეგვიძლია გამოვიყენოთ). d -განზომილებიანი ჩადგმული სივრცისთვის განზოგადებული კორელაციური ჯამი განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$C_q^{(d)}(R) = \left\{ \frac{1}{N} \sum_i \left[\frac{1}{N-1} \sum_{j, j \neq i} \Theta(R - R_{ij}) \right]^{q-1} \right\}^{\frac{1}{q-1}} \approx \sum_{i's} p(i_1, \dots, i_d)^q \quad (10.6-15)$$

Tu D_q განზოგადებულ განზომილებასა და C_q განზოგადებულ კორელაციურ ჯამს შორის არსებულ კავშირს გავიხსენებთ, (10.6-13)-ის ანალოგიურად გვექნება:

$$\ln C_q^{(d)}(R) \approx (q-1)D_q \ln R - d(q-1)K_q \quad (10.6-16)$$

ამრიგად, თუ ავაგებთ $\ln C_2^{(d)}(d)$ ფუნქციის გრაფიკს, მაშინ კუთხური კოეფიციენტი (ნორმირების არეში) უნდა იყოს $-(q-1)K_q$.

განვიხილოთ რამდენიმე კონკრეტული შემთხვევა c და K_q სიდიდეებთან დაკავშირებით. $q=0$ შემთხვევაში K_0 ტოპოლოგიური ენტროპია უბრალოდ მიმზიდველის ტოპოლოგიურ თვისებებს განსაზღვრავს. (10.6-15)-ის მეორე გამოსახულებიდან ვხედავთ, რომ $C_0^{(d)}$ სიდიდე მდგომარეობათა სივრცის უჯრედების ყველა იმ მიმდევრობის ჯამია, რომლებისთვისაც ტრაექტორიის “სტუმრობის” ალბათობა არ არის ნულის ტოლი. ამრიგად, K_0 გვაუწყებს, თუ როგორ იზრდება ამგვარი მიმდევრობების რაოდენობის ლოგარითმი მიმზიდველის ტოპოლოგიურ მახასიათებელთან – ჩადგმული სივრცის d განზომილებასთან ერთად. ქვემოთ ვნახავთ, რომ ეს რიცხვი პერიოდის ხანგრძლივობასთან ერთად (არასტაბილური) პერიოდული ტრაექტორიების რაოდენობის ზრდის ხასიათს შეგვიძლია დაუკავშიროთ.

განსაკუთრებულად გამოვიკვლიოთ $q=1$ შემთხვევა. D_1 ინფორმაციული განზომილების ანალოგიურად, K_1 -ს ზოგჯერ *ინფორმაციულ ენტროპიას* უწოდებენ. D_1 -ის კვლევისას გამოყენებულის იდენტური არგუმენტების მეშვეობით თავდაპირველად განვსაზღვრავთ კორელაციურ ჯამს:

$$C_1^{(d)}(R) = \frac{1}{N} \sum_i \ln \left[\frac{1}{N-1} \sum_{j, j \neq i} \Theta(R - R_{ij}) \right] \quad (10.6-17)$$

თუ გამოვიყენებთ (10.6-1) ფორმულას და ჩავატარებთ იმავე მოქმედებებს, რაც გამოვიყენეთ (10.4-10) გამოსახულების შემთხვევაში, მივიღებთ, რომ K_1 შეიძლება გამოისახოს შემდეგნაირად:

$$K_1 = -\frac{1}{d} \frac{1}{N} \sum_i \ln \left[\frac{1}{N-1} \sum_{j, j \neq i} \Theta(R - R_{ij}) \right] \quad (10.6-18)$$

ამრიგად,

$$C_1^{(d)}(R) = -dK_1 \quad (10.6-19)$$

თუ ავაგებთ $C_1^{(d)}(d)$ -ს გრაფიკს d -ს ფუნქციის სახით გამოვსახავთ, კუთხური კოეფიციენტი აღმოჩნდება $-K_1$ -ის ტოლი.

ამოცანა 10.6-4. აჩვენეთ, რომ (10.6-18) გამოსახულება გამომდინარეობს (10.6-1)-დან $q \rightarrow 1$ ზღვარში.

$g(\Lambda)$ დინამიკური სპექტრი

განზოგადებულ ენტროპიებს მივყავართ იმ მოსაზრებამდე, რომ უნდა არსებობდეს განზოგადებული განზომილებების $f(\alpha)$ სპექტრის ანალოგიური ნორმირების დამოკიდებულებათა სიმრავლე. ამ მოსაზრების დამტკიცებისთვის გავიხსენოთ განზოგადებული ენტროპიების განმსაზღვრელი (10.6-1) გამოსახულება და $T = e^{-d}$ ჩასმის გამოყენებით ხელახლა დავწეროთ:

$$K_q = -\frac{1}{q-1} \frac{1}{\ln T} \ln \sum_{i's} p^q(i_1, \dots, i_d) \quad (10.6-20)$$

ეს ფორმა განზოგადებული განზომილებებისთვის მიღებული (10.4-2) გამოსახულების ანალოგია.

10.5 პარაგრაფში მოყვანილ არგუმენტებზე დაყრდნობით, შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ არსებობს (10.6-21) გამოსახულებით მოცემული $p(i_1, \dots, i_d)$ ალბათობების მსგავსად განსაზღვრული $\Lambda(i_1, \dots, i_d)$ ნორმირების ექსპონენტა:

$$p(i_1, \dots, i_d) = T^{\Lambda(i_1, \dots, i_d)} \quad (10.6-21)$$

$(\Lambda, \Lambda + d\Lambda)$ ინტერვალში მყოფი $\Lambda(i_1, \dots, i_d)$ -ს მნიშვნელობათა რაოდენობისათვის გვექნება:

$$n(\Lambda)d\Lambda = T^{-g(\Lambda)}d\Lambda \quad (10.6-22)$$

მიღებული გამოსახულება განსაზღვრავს ნორმირების ექსპონენტების $g(\Lambda)$ სპექტრს.

ახლა არგუმენტი ზუსტად ისე გრზელდება, როგორც ეს 10.5 პარაგრაფშია, როდესაც $f(\alpha)$ ცვლის $g(\Lambda)$ -ს. (10.5-9) განტოლების მსგავსად, ვიღებთ

$$K_q = \frac{1}{q-1}[\Lambda q - g(\Lambda)] \quad (10.6-23)$$

$g(\Lambda)$ ფუნქციის მნიშვნელობების გამოთვლამდე, უპირველეს ყოვლისა, ხდება განზოგადებული კორელაციური ჯამისა და განზოგადებული ენტროპიის დადგენა. შემდეგ ვპოულობთ დამხმარე სიდიდეს:

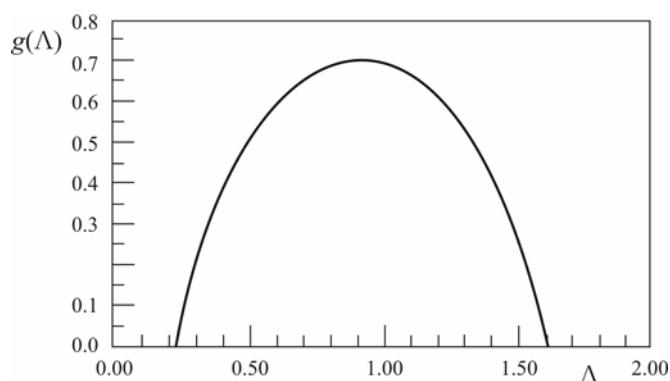
$$\tau(q) = (q-1)K_q = \Lambda q - g(\Lambda) \quad (10.6-24)$$

საბოლოოდ [(10.5-11) და (10.5-12) გამოსახულებების ანალოგიურად], ლეჟანდრის გარდაქმნის გამოყენებით ვღებულობთ:

$$\Lambda(q) = \frac{d}{dq}[(q-1)K_q] \quad (10.6-25)$$

$$g(\Lambda) = q \frac{d}{dq}[(q-1)K_q] - (q-1)K_q$$

$g(\Lambda)$ -ის გამოთვლის ზოგიერთი შედეგის შემოწმებამდე, დავუკავშიროთ Λ სიდიდე ისეთ მნიშვნელოვან მახასიათებელს, როგორცაა ლიაპუნოვის ექსპონენტი. $f(x)$ იტერაციული ფუნქციის მიერ ასახული ერთგანზომილებიანი სისტემისთვის, x_1 -ის შემცველი R ზომის მქონე უჯრედიდან დაწყებული ტრაქტორიების კონა ერთ იტერაციული საფეხურის შემდეგ $|f^q(x_1)|$ მნიშვნელობის შესაბამის უჯრედებში განაწილება.



ნახაზი. 10.15. $g(\Lambda)$ განაწილების გრაფიკი გადახრილი კარვის ასახვისათვის, როდესაც $b=0.2$.

ამრიგად, ტრაექტორიის მიერ უჯრედების მოცემული მიმდევრობის გავლის ალბათობა ასე შეიძლება გამოისახოს:

$$p(i_1, \dots, i_d) = \frac{p(1)}{|f'(x_1)f'(x_2)\dots f'(x_{d-1})|} \quad (10.6-26)$$

სადაც $p(1)$ პირველ უჯრედში გავლის ალბათობაა. ალბათობის ლოგარითმთან დაკავშირებით ვაღგნთ, რომ

$$\ln p(i_1, \dots, i_d) = \ln p(1) - \sum_{j=1}^{d-1} \ln |f'(x_j)| \quad (10.6-27)$$

d -ს დიდი მნიშვნელობების შემთხვევაში შეგვიძლია (10.6-27) გამოსახულების მარჯვენა მხარეს მდებარე მეორე წევრთან შედარებით $p(1)$ სიდიდის შემცველი წევრის უგულებელყოფა და გვექნება:

$$p(i_1, \dots, i_d) \approx e^{-\sum_j \ln |f'(x_j)|} = T^{\frac{1}{d} \sum_j \ln |f'(x_j)|} \quad (10.6-28)$$

ამრიგად, მივიღეთ ასახვის ფუნქციის წარმოებულების აბსოლუტური მნიშვნელობების ლოგარითმების ჯამი, რომელიც განსაზღვრავს (ლოკალურ) ლიაპუნოვის ექსპონენტას (i_1, \dots, i_d) უჯრედების მიმდევრობაზე გამავალი ტრაექტორიის სეგმენტისთვის. ამრიგად, $g(\Lambda)$ ფუნქცია აღწერს ლიაპუნოვის ექსპონენტების განაწილებას მიმზიდველზე.

$g(\Lambda)$ განაწილების გამოთვლა 10.5 პარაგრაფში აღწერილი $f(\alpha)$ -ს გამოთვლის პროცედურის ანალოგიურად მიმდინარეობს. კარვის დახრილი ასახვის შემთხვევაში (10.6-7) გვადლევს ზუსტ გამოსახულებას K_q -თვის. ამ უკანასკნელის გამოყენებით (10.6-25) გამოსახულებაში ვანსორციელებთ ლეჟანდრის გარდაქმნებს და ვღებულობთ:

$$\Lambda(q) = \frac{-p_1^q \ln p_1 - p_2^q \ln p_2}{p_1^q + p_2^q} \quad (10.6-29)$$

$$g(\Lambda(q)) = \ln(p_1^q + p_2^q) + q\Lambda(q)$$

10.15 ნახაზი გვიჩვენებს $g(\Delta)$ სიდიდის განაწილების მრუდს კარვის დახრილი ასახვისთვის, როდესაც $b=0.2$ შენიშნეთ, რომ $g(\Lambda)$ -ის უდიდესი მნიშვნელობა შესაბამისია K_0 -ისა და რომ განაწილების კიდურა წერტილები, $f(\alpha)$ -ს გრაფიკების ანალოგიურად, K_∞ -ის და $K_{-\infty}$ მნიშვნელობებს შეესაბამება.

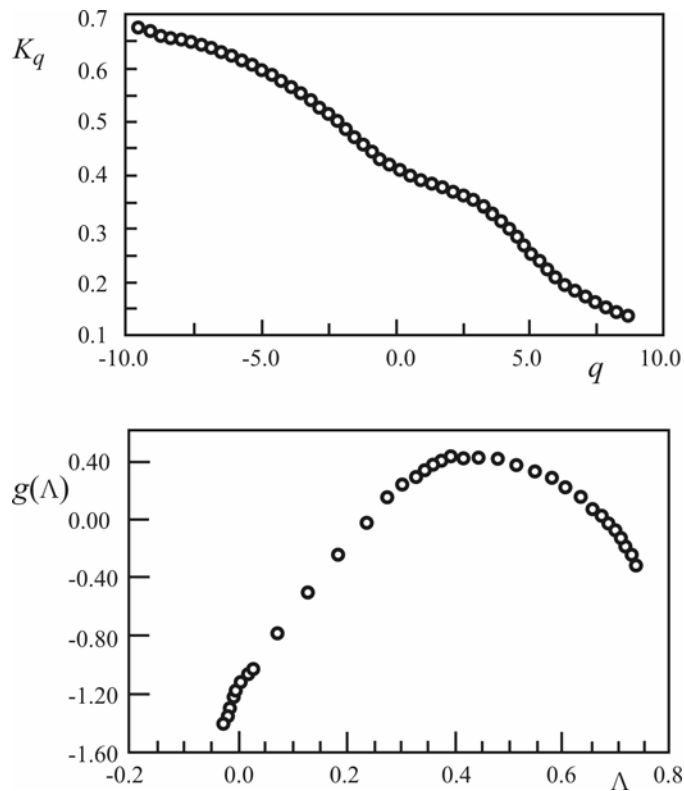
ამოცანა 10.6-5. მიიღეთ (10.6-29) გამოსახულება და 10.15 ნახაზზე წარმოდგენილი რიცხვითი მნიშვნელობები.

10.16 ნახაზი გვიჩვენებს K_q სიდიდისა და პირველ თავში აღწერილი ნახევარგამტარული დიოდის წრედიდან აღებული მნიშვნელობებისთვის $g(\Lambda)$ განაწილების შედეგებს. ტრაექტორიები ქაოსურია და ლიაპუნოვის საშუალო ექსპონენტი მიახლოებით 0.5-ია. როგორც ვხედავთ, არსებობს Λ მნიშვნელობების განაწილება. უდიდესი მნიშვნელობა ყველაზე სწრაფი დივერგენციის მქონე ახლომდებარე ტრაექტორიების მქონე მიმზიდველის არეებს შეესაბამება. და პიროქით, Λ -ს უმცირესი მნიშვნელობა მიმზიდველის ყველაზე მცირე დივერგენციის მქონე არის შესაბამისია. $g(\Lambda)$ სიდიდის განაწილების სხვა მაგალითები PAS87-სა და [Schuster, 1995]-შია მოცემული.

ამოცანა 10.6-6. გამოიყენეთ (10.6-15) გამოსახულების ანალოგიური ფუნქცია:

$$\Gamma(q, \tau, d) = \frac{\sum_i p^q(i_1, \dots, i_d)}{T^\tau}$$

სადაც $T=e^{-d}$, და განსაზღვრეთ $g(\Lambda)$ კანტორის აწონილი სიმრავლისთვის 10.5 პარაგრაფში გამოყენებული მეთოდის მეშვეობით. შეადარეთ თქვენს მიერ მიღებული შედეგები ლეგენდრის გარდაქმნის მეშვეობით მიღებულ შედეგებს.



ნახაზი. 10.16. K_q -სა და $g(\Delta)$ -ის მნიშვნელობები პირველ თავში წარმოდგენილი ნახევარგამტარული დიოდის წრედისათვის.

10.7 ქაოსის დახასიათება პერიოდული ორბიტების მეშვეობით

განვიხილოთ ქაოსური ქმედების რაოდენობრივი განსაზღვრის კიდევ ერთ მეთოდი. მიუხედავად იმისა, რომ ეს მეთოდი სრულიად ახალია და ზოგიერთი ზემოთ განხილული მეთოდის მსგავსად მრავალჯერ არ არის შემოწმებული, ვფიქრობთ, რომ იგი ბევრ ისეთ შესაძლებლობას ფლობს, რაც სხვა სტატისტიკურ მეთოდებისათვის "აქილევსის ქუსლს" წარმოადგენს.

ახალი მეთოდის გაცნობამდე გავიხსენოთ, რომ ქაოსური ქმედების შემთხვევაში მდგომარეობათა სივრცის მიზიდულობის არე ქაოსური ორბიტის შემაღენელ წერტილებთან ერთად პერიოდული ტრაექტორიის წერტილების განუსაზღვრელ რაოდენობას მოიცავს. მაგალითად, ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციისთვის არსებობს პერიოდის გაორმაგების ბიფურკაციების შედეგად მიღებული პერიოდული წერტილების უსასრულო რაოდენობა, როდესაც $A > A_{\infty}$. მიუხედავად ამისა, პერიოდული ტრაექტორიები, საზოგადოდ, არასტაბილურია (პერიოდული დიაპაზონების გამოკლებით). ერთ-ერთი წერტილის მიდამოში

მდებარე ტრაექტორია ამ წერტილის მიერ განიზიდება. ახალი მეთოდის არსი მდგომარეობს არასტაბილური პერიოდული წერტილების ქაოსური მიმზიდველის თვისებების (მაგალითად, მახასიათებელი ექსპონენტების) მეშვეობით დახასიათებაში.

ეს იდეა სრულებითაც არაა ნოვატორული. მაგალითად, ლორენცის მოდელის შემთხვევაში მოცემული მიმზიდველის შესაბამისი ლიაპუნოვის დადებითი ექსპონენტა არასტაბილურ ფიქსირებულ წერტილებთან დაკავშირებული დადებითი მახასიათებელი ექსპონენტის მიხედვით შეიძლება შეფასდეს. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, ტრაექტორიების ექსპონენციალური დივერგენციაში არსებით როლს ასრულებს სისტემის შესაბამისი „უნაგირის“ წერტილების გარე სიმრავლესთან დაკავშირებული დადებითი მახასიათებელი ექსპონენტა. აცნობიერებდა რა პერიოდული წერტილების მნიშვნელობას, პუანკარემ თქვა [Poincare, 1892, ნათარგმნია DHB92-დან): „ჩვენთვის პერიოდული ტრაექტორიები იმიტომაც ასე ძვირფასი, რომ აქამდე მიუწვდომელ ციხესიმაგრეში შეღწევის ერთადერთ გზას გვიჩვენებს“.

მეთოდის სიახლე იმაში მდგომარეობს, რომ არასტაბილური პერიოდული წერტილები დაბალი რიგის პერიოდულობის შემთხვევაში ქაოსური ტრაექტორიების შესაბამისი დროითი მწკრივების მეშვეობით შესაძლებელია პირდაპირ დადგინდეს და დიფერენციალური განტოლებებისა თუ ასახვის ფუნქციის სახის ცოდნის აუცილებლობა არ არსებობს. ამასთან ერთად, როდესაც პერიოდული წერტილები დადგენილია, მათი მახასიათებელი მნიშვნელობების განსაზღვრა შეგვიძლია უშუალოდ ქაოსური ტრაექტორიის დროითი მწკრივების მიხედვით (ხშირად საკმაოდ ზუსტად; იხილეთ ამ თავის ბოლოში მოყვანილი ცნობები.) არსებობს აგრეთვე პერიოდული წერტილების განსაზღვრის ძლიერი მეთოდები, როდესაც დინამიკური განტოლებების სახე ცნობილია (DHB92).

პერიოდული ორბიტების ანალიზზე დამყარებული მეთოდის კიდევ ერთი უპირატესობა იმაში მდგომარეობს, რომ იგი ქაოსური მიმზიდველების დახასიათების იერარქიულ პროცედურას გვაძლევს. პერიოდის გაორმაგების ზღვრულ წერტილში ან ოქროს შუალედის ნახვევთა რიცხვის მქონე კვაზიპერიოდულობის შემთხვევაში მიმზიდველის დეტალური შესწავლის უნარი გამომდინარეობს მისი პერიოდული მიმზიდველების მიმდევრობის ზღვრის სახით წარმოდგენის შესაძლებლობიდან. მე-5 და მე-6 თავების რენორმალიზაციური ფორმალიზმი გვაძლევს მიმზიდველის თვისებების რაოდენობრივად წარმოდგენის საშუალებას. ქაოსური მიმზიდველი შეგვიძლია აღვწეროთ მზარდი სიგრძის მქონე (არასტაბილური) პერიოდული ორბიტების იერარქიის მეშვეობით.

როგორ უნდა აღმოვაჩინოთ პერიოდული წერტილები, თუ გავაჩნია მხოლოდ ქაოსური ტრაექტორიის შესაბამისი მნიშვნელობები, რომლებიც, განსაზღვრების თანახმად,

არაპერიოდულია? ერთგანზომილებიანი მნიშვნელობების შემთხვევაში, ძირითადი იდეა გასაგები ხდება უშუალოდ ექსპერიმენტული მნიშვნელობების მიხედვით შექმნილი პუნკტარეს ასახვის კვლევის მეშვეობით. მაგალითად, მე-5 თავში ვიხილეთ, რომ პირველ თავში განხილული ნახევარგამტარული დიოდის წრედისთვის $I_{n+1}(I_n)$ ფუნქციის გრაფიკი ერთგანზომილებიან მრუდს გვაძლევს (თუ დისიპაცია საკმარისად ძლიერია ; 5.3 ნახაზი). $I_{n+1}=I_n$ წრფესთან ამ მრუდის გადაკვეთა პერიოდი-1-ის ტიპის ტრაექტორიის წერტილის მდებარეობას გვაძლევს. ეს წერტილი არასტაბილურია. თუ ავაგებთ $I_{n+2}(I_n)$ ფუნქციის გრაფიკს, მაშინ $I_{n+2}=I_n$ წრფესთან ამ მრუდის გადაკვეთა პერიოდი-2-ის არასტაბილური წერტილების მდებარეობას მოგვცემს და ა.შ. ამ გზით ჩვენ შევძლებთ სულ უფრო მაღალი რიგების პერიოდული წერტილების აღმოჩენას. ამასთან, მრუდების კუთხური კოეფიციენტების მეშვეობით შევძლებთ ამ წერტილების შესაბამისი ლიაპუნოვის ექსპონენტების განსაზღვრასაც. ცხადია, დაბალი რიგის პერიოდული წერტილების დადგენისას, მნიშვნელობათა სიზუსტის თვალსაზრისით, შეზღუდული ვართ.

მაღალი განზომილების მქონე სისტემების შემთხვევაშიც იმავე გზით უნდა ვიმოქმედოთ. ცალკეული ცვლადის დროითი მწკრივების მეშვეობით შეგვიძლია ჩადგმული სივრცის აგება. მწკრივის შესწავლის შედეგად ერთმანეთისაგან დროის გარკვეული n ინტერვალის შესაბამისი მანძილით დაშორებული წერტილების დაგენა ხდება შესაძლებელი. ამ პროცედურას ზოგჯერ „მიჯრით შერჩევის მეთოდსაც“ უწოდებენ. ვახდენთ დაშვებას, რომ ეს წერტილები ჩადგმის სივრცეში არასტაბილური პერიოდი- n წერტილების მახლობლად არიან განლაგებული. როდესაც პარამეტრის მნიშვნელობების მოცემული სიმრავლისთვის ერთზე მეტი პერიოდი- n ციკლი არსებობს, პერიოდი- n ტიპის წერტილები ინდივიდუალურ ციკლებში ნაწილდება. პერიოდი- n ციკლების დადგენის შემთხვევაში ციკლის შემადგენელ წერტილთა შესაბამისი მახასიათებელი მნიშვნელობები ამ წერტილების მიმართ ტრაექტორიის წერტილთა დივერგენციის ხასიათის მეშვეობით შეიძლება განისაზღვროს. ამჯერად დეტალურ ანალიზს გვერდს ავუვლით, ხოლო მეტი ინფორმაციით დაინტერესებული მკითხველი ACE87-ს, CVI88a-სა და MHS90-ს უნდა გაეცნოს.

რაოდენობრივი ექსპერიმენტები (ACE87) გვიჩვენებს, რომ $n=10$ მნიშვნელობის ჩათვლით აღმოჩენილი ორბიტები საკმარისად მიმზიდველის K_0 ტოპოლოგიური ენტროპიისა და D_0 უჯრედთა მთვლელი განზომილების რამდენიმე პროცენტის სიზუსტით განსაზღვრისთვის. მაგალითად, პერიოდული წერტილების რაოდენობასა და K_0 ტოპოლოგიურ ენტროპიას შორის კავშირი შემდეგნაირია (BIW89):

$$K_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_2 [N(n) - 1] \quad (10.7-1)$$

სადაც $N(n)$ n -ისა და მისი გამყოფების რიგის პერიოდული ორბიტების შესაბამისი წერტილების რაოდენობაა.

გარდა იმისა, რომ პერიოდული ორბიტის კვლევის მეთოდი გვაძლევს ქაოსური მიმზიდველის ზოგიერთი სტატისტიკური მახასიათებლის განსაზღვრის ალტერნატიულ გზას. იგი ახდენს ქაოსური მიმზიდველების კლასიფიკაციას და ერთმანეთისაგან განასხვავებს ერთი და იგივე სტატისტიკური მახასიათებლების მქონე მიმზიდველებს (MHS90). ქაოსური მიმზიდველების სტატისტიკური დახასიათებისას ყურადღებას ვამახვილებთ ისეთ ტოპოლოგიურ მახასიათებლებზე, როგორცაა ლიაპუნოვის ექსპონენტები და წილაღური განზომილებები. როგორც ვნახეთ, ეს მახასიათებლები იცვლება პარამეტრის მნიშვნელობებთან ერთად. ამიტომ მათი გამოყენება ამა თუ იმ მოდელის ვარგისიანობის შემოწმებისთვის სირთულეებთანაა დაკავშირებული. აღწერის კიდევ ერთი ტიპი აქცენტს აკეთებს პერიოდული ორბიტების ტოპოლოგიურ მახასიათებლებზე (SOG88, CGP88, GLV89). ტოპოლოგიური მახასიათებლები განსაზღვრავს მდგომარეობათა სივრცის მიზიდულობის ქაოსურ არეში პერიოდული ორბიტების განლაგების ხასიათს. ტოპოლოგიური ინფორმაცია მიმზიდველის „კონსტრუქციას“ უკავშირდება და როგორც მდგომარეობათა სივრცის აღწერისთვის გამოყენებული კოორდინატების, ასევე პარამეტრის მნიშვნელობების მიმართ დამოუკიდებელია. პერიოდული ორბიტები ჩნდება ან ქრება პარამეტრების ცვლილებასთან ერთად, მაგრამ დარჩენილი ორბიტების ტოპოლოგიური მახასიათებლები ამ მხრივ რაიმე ზეგავლენას არ განიცდის.

(MHS90)-ში მოყვანილია ტოპოლოგიური კლასიფიკაცია პერიოდული ორბიტების ცირკულაციის ფარდობით სიხშირეზე დაყრდნობით. ცირკულაციის ფარდობითი სიხშირე განსაზღვრავს პერიოდის განმავლობაში ერთი ორბიტის მიერ მეორე ორბიტის გარშემო ბრუნვის რაოდენობას. ცირკულაციის სიხშირე ორი პერიოდული ორბიტის მიმართ პუანკარეს კვეთის გამოყენებით შეიძლება განისაზღვროს ანუ პუანკარეს სიბრტყესთან ერთი ორბიტის გადაკვეთის წერტილიდან მივმართავთ ვექტორს ამავე სიბრტყესთან მეორე ორბიტის გადაკვეთის წერტილამდე. ტრაექტორიების მსვლელობასთან ერთად ეს ვექტორი ბრუნვას იწყებს. თუ ერთ ორბიტას გააჩნია n_A პერიოდი (დროის ინტერვალი პუანკარეს კვეთის კონკრეტულ წერტილში ტრაექტორიის ორ თანმიმდევრულ გავლას შორის), ხოლო მეორეს – n_B , მაშინ ვექტორი საწყის მდებარეობას დროის $n_A X n_B$ ინტერვალის გავლის შემდეგ

დაუბრუნდება. ცირკულაციის ფარდობითი სიზშირე წარმოადგენს ვექტორის ბრუნვათა სრულ რაოდენობას $n_A X n_B$ ინტერვალის განმავლობაში.

10.8 *სტატისტიკურ-მექანიკური და თერმოდინამიკური ფორმალიზმი

მოცემულ თავში წარმოდგენილი მეთოდი ერთმანეთთან აკავშირებს გარკვეულ სტრუქტურებს, რითაც შეგვიძლია პარალელი გავავლოთ სტატისტიკური მექანიკისა და თერმოდინამიკის ზოგიერთ ცნებას შორის არსებული კავშირის მიმართ. რადგან განზოგადებული განზომილებებისა და ენტროპიების მიზანი მიმზიდველებისა და ტრაექტორიების დეტალური სტატისტიკური აღწერაა, ამგვარი კავშირის აღმოჩენა გაკვირვებას არ იწვევს. უპირველეს ყოვლისა, წარმოვიდგინოთ სტატისტიკური მექანიკისა და თერმოდინამიკის ფორმალური მხარეების მოკლე აღწერას. იმ მკითხველს, ვინც სტატისტიკურ მექანიკაში კარგად ვერ ერკვევა, ეს პარაგრაფი შეუძლია გამოტოვოს.

სტატისტიკურ მექანიკაში თერმოდინამიკურ წონასწორობაში მყოფი სისტემის კვლევისას ფუნდამენტური ცნებაა ენერგეტიკულ დონეთა შესაბამისი წონების სტატისტიკური ჯამი:

$$Z = \sum_n g_n e^{-\beta E_n} \quad (10.8-1)$$

სადაც g_n წარმოადგენს n -ური დონის გადაგვარების მაჩვენებელს ანუ g_n განსაზღვრავს E_n –ის შესაბამის ქვედონეთა რაოდენობას. როგორც წესი, β სიდიდე სისტემის აბსოლუტური (კელვინის) ტემპერატურისადმი უკუპროპორციულია. ყოველი თერმოდინამიკური მახასიათებლის გამოთვლა შესაძლებელია სტატისტიკური ჯამის მეშვეობით.

ვაჩვენოთ, თუ როგორ ხდება სხვადასხვა თერმოდინამიკური სიდიდეების გამოთვლა სტატისტიკური ჯამის მეშვეობით. მაგალითად, სისტემის შინაგანი ენერგია განისაზღვრება შემდეგნაირად :

$$E(\beta) = - \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \quad (10.8-2)$$

ხოლო ჰელმჰოლცის თავისუფალი ენერგია (ენერგია, რომლის ამოღება სისტემიდან შესაძლებელია მუდმივი

ტემპერატურის პირობებში):

$$E(\beta) = -\frac{\ln Z}{\beta} \quad (10.8-3)$$

დაბოლოს, სისტემის უგანზომილებო ენტროპია იქნება

$$S(\beta) = \beta^2 \frac{\partial F}{\partial \beta} = \beta \{E(\beta) - F(\beta)\} \quad (10.8-4)$$

დინამიკური სისტემებისთვის შესაძლებელია Z_m და $\Gamma(q, \tau)$ სტატისტიკური ფუნქციების განსაზღვრა. პირველი მათგანი m რიგის ყოველი პერიოდული წერტილის შესაბამისი ლიაპუნოვის ლოკალური ექსპონენტის მეშვეობით ანუ იმ წერტილებით მოიცემა, რომლებიც პერიოდი- m ტიპის ტრაექტორიას მიეკუთვნებიან (ენერგეტიკულ ღონეებსა და პერიოდულ წერტილებთან დაკავშირებულ ტრაექტორიებს შორის ამგვარი ანალოგია მე-12 თავში კვანტურ მექანიკასა და ქაოსურ დინამიკურ სისტემებს შორის არსებული კავშირის განხილვისას კვლავ იჩენს თავს). პირველ ფუნქციას ვუწოდოთ **დინამიკური სტატისტიკური ჯამი**, რადგანაც იგი სისტემის დინამიკაზე აკეთებს აქცენტს. მეორე ფუნქცია სივრცითი ნორმირების ექსპონენტებს მოიცავს და მას სტრუქტურულ სტატისტიკურ ჯამს ვუწოდებთ.

დინამიკური სტატისტიკური ჯამი

დინამიკური სტატისტიკური ჯამი განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$Z_m = \sum_{x_m} e^{-\beta \lambda(x_m)} \quad (10.8-5)$

ამ გამოსახულებაში β ტემპერატურის შებრუნებული სიდიდეა. x_m წარმოადგენს m სივრცის მქონე პერიოდული ციკლის შესაბამისი ტრაექტორიის წერტილს. აჯამვა ხდება ყველა ასეთი წერტილის მიხედვით. მოცემული მეთოდის შემთხვევაში სისტემის დახასიათებისთვის ვიყენებთ (არასტაბილურ) პერიოდულ წერტილებს. როდესაც სისტემა განიხილება მრავალგანზომილებიან მდგომარეობათა სივრცეში, მაშინ $\lambda(x_m)$ წარმოადგენს ლიაპუნოვის უდიდეს (დადებით) ექსპონენტას x_m წერტილში.

თუ სისტემის მოდელირება შესაძლებელია ერთგანზომილებიანი იტერაციული ფუნქციის მეშვეობით, მაშინ Z_m სტატისტიკური ჯამი გამოისახება შემდეგი სახით:

$$Z_m = \sum_{x_m} e^{-\beta \ln |f^{(m)}(x_m)|} \quad (10.8-6)$$

სადაც $f^{(m)}(x_m)$ წარმოადგენს m რიგის იტერაციის წარმოებულს ერთ-ერთ ფიქსირებულ x_m წერტილში. გადახრილი კარვის ასახვისთვის განვიხილოთ შემდეგი ფუნქცია (იხ. ნახ. 10.13).

$$\begin{aligned} f_p(x) &= \frac{x}{b} \quad \text{for } 0 < x < b \\ f_p(x) &= \frac{1-x}{1-b} \quad \text{for } b < x < 1 \end{aligned} \quad (10.8-7)$$

სტატისტიკური ჯამის განსაზღვრისთვის საჭიროა ფუნქციის კუთხური კოეფიციენტის მნიშვნელობების ცოდნა ფიქსირებულ წერტილებში. 10.13 ნახაზის მეშვეობით ვპოულობთ, რომ ფუნქციას გააჩნია ორი ფიქსირებული წერტილი. პირველი მათგანი მდებარეობს $x=0$ წერტილში და მისი კუთხური კოეფიციენტია $1/b=1/p_1$, ხოლო მეორე წერტილი b -სა და ერთს შორის იმყოფება და 10.6 პარაგრაფში გამოყენებული სისტემის შესაბამისია). მეორე რიგის იტერაციას გააჩნია ოთხი ფიქსირებული წერტილი (ერთ-ერთი მათგანის კუთხური კოეფიციენტია $(1/p_1)^2$, მეორისა $-(1/p_2)^2$ და დანარჩენი ორისა - $\pm 1/(p_1 p_2)$).

განვსაზღვროთ Z_1 და Z_2 სტატისტიკური ჯამები. (10.8-6) განტოლებიდან გამომდინარე, Z_1 -ს შემდეგნაირად ჩავწერთ:

$$Z_1 = e^{-\beta \ln \frac{1}{p_1}} + e^{-\beta \ln \frac{1}{p_2}} \quad (10.8-8)$$

მარტივი ალგებრული გარდაქმნების მეშვეობით მივიღებთ:

$$Z_1 = p_1^\beta + p_2^\beta \quad (10.8-9)$$

Z_2 სიდიდის განსაზღვრისას გავიხსენოთ ის ფაქტი, რომ $f^{(2)}$ -ს გააჩნია ოთხი ფიქსირებული წერტილი. ამრიგად, გვექნება:

$$Z_2 = e^{-\beta \ln\left(\frac{1}{p_1}\right)^2} + e^{-\beta \ln\left(\frac{1}{p_2}\right)^2} + 2e^{-\beta \ln\left(\frac{1}{p_1 p_2}\right)} \quad (10.8-10)$$

შედეგად მივიღებთ:

$$Z_2 = (p_1^\beta + p_2^\beta)^2 \quad (10.8-11)$$

Z_m სიდიდის განზოგადებული სახე ასეთი იქნება:

$$Z_m = (p_1^\beta + p_2^\beta)^m \quad (10.8-12)$$

(შენიშნეთ ანალოგია მიღებულ შედეგსა და 10.5 პარაგრაფში განხილული კანტორის სიმრავლეების შესაბამის განზოგადებულ სტატისტიკურ ჯამს შორის.)

ამოცანა 10.8-1. შეამოწმეთ (10.8-12) დამოკიდებულების მართებულობა $m=3$ შემთხვევაში.

მას შემდეგ, რაც სტატისტიკური ფუნქციები ცნობილია, შევძლებთ სხვა თერმოდინამიკური მახასიათებლების გამოთვლასაც. სისტემის (საშუალო) შინაგანი ენერგია მოიცემა შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} E(\beta) &= -\frac{1}{m} \frac{\partial \ln Z_m}{\partial \beta} \\ &= -\frac{p_1^\beta \ln p_1 + p_2^\beta \ln p_2}{p_1^\beta + p_2^\beta} \end{aligned} \quad (10.8-13)$$

$E(\beta=0)$ შემთხვევაში გვექნება:

$$E(0) = \frac{-\ln p_1 - \ln p_2}{2} \quad (10.8-14)$$

ამრიგად, $E(0)$ წარმოადგენს სისტემის შესაბამის ლიაპუნოვის საშუალო ექსპონენტას (წონის გარეშე). ექსპერიმენტები გვიჩვენებს, რომ

$$\frac{e^{-\lambda(x_m)}}{Z_m} \quad (10.8-15)$$

სიდიდე უნდა განვიხილოთ, როგორც ფიქსირებულ x_m წერტილთან დაკავშირებული ალბათობა. ლიაპუნოვის უდიდესი (დადებითი) ექსპონენტის შემთხვევაში ტრაექტორიის მიერ ფიქსირებული წერტილის მიდამოში გავლის ალბათობა უმცირესი იქნება. გარდა ამისა შევნიშნოთ, რომ ლიაპუნოვის (აწონილ) ექსპონენტას ექნება $E(1) = -p_1 \ln p_1 - p_2 \ln p_2$ სახე.

განვსაზღვროთ სისტემის შესაბამისი ჰელმჰოლცის თავისუფალი ენერგია:

$$\begin{aligned} F(\beta) &= -\frac{1}{m\beta} \ln Z_m(\beta) \\ &= -\frac{1}{\beta} \ln(p_1^\beta + p_2^\beta) \end{aligned} \quad (10.8-16)$$

განსაკუთრებულ ინტერესს სხვადასხვა ტიპის უგანზომილებო ენტროპიები იწვევს, რომელთათვისაც თავისუფალი ენერგიის β -ს მიმართ გაწარმოების შედეგად მივიღებთ:

$$S(\beta) = \beta^2 \frac{\partial F}{\partial \beta} \quad (10.8-17)$$

რაც გადახრილი კარვის ასახვის შემთხვევაში მოგვცემს:

$$S(\beta) = \frac{(p_1^\beta + p_2^\beta) \ln(p_1^\beta + p_2^\beta) - \beta(p_1^\beta \ln p_1^\beta + \ln p_2)}{p_1^\beta + p_2^\beta} \quad (10.8-18)$$

გამოვიკვლიოთ მიღებული გამოსახულების არსი კონკრეტული β -ს კონკრეტული მნიშვნელობების შესაბამისი ენტროპიების საფუძველზე. მაგალითად, $\beta = 0$ შემთხვევაში გვექნება:

$$S(0) = \ln 2 \quad (10.8-19)$$

რაც წარმოადგენს ასახვის შესაბამის ტოპოლოგიურ ენტროპიას (ანუ ასახვის ფუნქციის პირველი რიგის იტერაციის შესაბამისი ფიქსირებული წერტილების რაოდენობის ნატურალურ ლოგარითმს).

$\beta = 1$ შემთხვევაში (10.8-18) დამოკიდებულების მეშვეობით ვღებულობთ:

$$S(1) = -p_1 \ln p_1 - p_2 \ln p_2 \quad (10.8-20)$$

რაც წარმოადგენს სისტემის $K - S$ ენტროპიის K_1 მნიშვნელობას. გადახრილი კარვის ასახვისთვის K_1 სიდიდე წარმოადგენს ლიაპუნოვის ექსპონენტს.

ამრიგად, კარვის დახრილი ასახვის ფუნქციის შემთხვევაში, რომლისთვისაც ფიქსირებული წერტილების მიხედვით აღებული ჯამი (10.8-5) განტოლებით შეგვიძლია გამოვსახოთ, შესაძლებელია განზოგადებული სტატისტიკური Z_m ჯამის, შედეგად კი სისტემის განზოგადებული ენტროპიების გამოთვლა. ჩვენდა გასაოცრად, β პარამეტრი შეესაბამება განზოგადებული ენტროპიის q რიგს.

ამოცანა 10.8-2. დაადგინეთ კავშირი (10.8-19) და (10.6-7) განსაზღვრებებს შორის.

სტრუქტურული სტატისტიკური ჯამი

სტატისტიკური ჯამის მეორე ტიპი აქცენტს აკეთებს დინამიკური სისტემის მიმზიდველის სივრცით სტრუქტურაზე. მას **სტრუქტურულ სტატისტიკურ ჯამს** ვუწოდებთ. (10.5-16)-ის შეესაბამისად, გვექნება:

$$\Gamma(q, \tau) = \sum_i \frac{p_i^q}{R_i^\tau} = 1 \quad (10.8-21)$$

სადაც p_i წარმოადგენს ტრაექტორიის i უჯრედზე გავლის ალბათობას. გავიხსენოთ, რომ $\tau(q)$ პარამეტრი ისეა შერჩეული, რომ შესრულდეს პირობა $\tau = (q-1)D_q$.

თერმოდინამიკური მოსაზრებებიდან გამომდინარე, $\tau(q)$ უნდა წარმოადგენდეს სტატისტიკური ჯამის ლოგარითმის პროპორციულ სიდიდეს. ამრიგად, იგი თავისუფალი

ენერჯის როლს ასრულებს. (10.5-9)-ის მიხედვით ვხედავთ, რომ $\tau(q)$ სიდიდე ნორმირების $f(\alpha)$ სპექტრთან დაკავშირებულია შემდეგნაირად:

$$\tau(q) = q\alpha - f(\alpha) \quad (10.8-22)$$

თუ მიღებულ შედეგს შევადარებთ E შინაგან ენერჯიას, ჰელმჰოლცის F ენერჯიასა და S ენტროპიას შორის არსებულ თერმოდინამიკურ კავშირს (კერძოდ, $F = E - S/\beta$), ვნახავთ, რომ $f(\alpha)$ სიდიდე წარმოადგენს ენტროპიას, ხოლო α -შინაგანი ენერჯიას.

ასეთ შემთხვევაში იბადება კითხვა: რაში გვჭირდება ზემოთ მოყვანილი თერმოდინამიკური ფორმალური ანალოგია? პასუხი მდგომარეობს იმაში, რომ თერმოდინამიკაში მიღებული გამოცდილების გამოყენებით შეგვიძლია $g(\Delta)$ და $f(\alpha)$ სიდიდეების გამოყენება დინამიკურ სისტემებთან დაკავშირებით. მაგალითად, ზოგიერთი დინამიკური სისტემა გვიჩვენებს წყვეტას $f(\alpha)$ სიდიდის თვალსაზრისით. $f(\alpha)$ -ს მიხედვით ნახტომისებრ ცვლას, თერმოდინამიკაში არსებული პირველი რიგის ფაზური გადასვლების ანალოგიურად, ფაზური გადასვლა ეწოდება. თუ $f(\alpha)$ მრუდს გააჩნია წყვეტა, შეგვიძლია ვიფიქროთ, რომ არსებობს განსხვავებული ინტენსივობის მქონე ორი (ან ზოგჯერ მეტი) სხვადასხვა ფაზის მქონე მიმზიდველთა კომბინაცია, წყლის წვეთებისა და ორთქლის ნარევის ანალოგიურად. უფრო მეტიც, თერმოდინამიკურ სისტემათა დახასიათების ზოგიერთი მეთოდი გვიჩვენებს დინამიკური სისტემების შესწავლის ახლებურ მიდგომებს. ჩვენი არსებული ცოდნა დინამიკური სისტემების შესახებ დიდად წაგვადგება თერმოდინამიკისა და სტატისტიკური მექანიკის კვლევის თვალსაზრისით. უახლესი ანალიზისთვის მიმართეთ ZAS99-ს.

10.9 იმპულსის ანალიზი, q -არიცხვა და მომიჯნავე საკითხები

განვიხილოთ არაწრფივ სისტემებთან დაკავშირებული დროითი მწკრივების ანალიზის კიდევ რამდენიმე მეთოდი. პირველი მათგანი იყენებს **იმპულსის ანალიზის** მათემატიკურ მეთოდს. ეს უკანასკნელი ფურიეს ანალიზის განზოგადებული ფორმაა. A დამატების თანახმად, ფურიეს ანალიზი გვიჩვენებს, თუ რამდენად შესაძლებელია ჩვენი მონაცემების წარმოდგენა სხვადასხვა პერიოდის მქონე სინუსებისა და კოსინუსების წრფივი კომბინაციის მეშვეობით. ანალოგიურად, იმპულსის ანალიზი გვამცნობს თუ რამდენად ვარგისია ექსპერიმენტის შედეგების წარმოდგენა ისეთი „ტალღების“ მეშვეობით, რომლებიც წარმოადგენენ სხვადასხვა „სიგანის“ პიკების მქონე იმპულსთა ერთობლიობას. თავის

ბოლოში მოყვანილი ცნობები ასახავს არაწრფევ მნიშვნელობებთან დაკავშირებით გამოყენებული იმპულსის ანალიზის კერძო შემთხვევებს. დაწვრილებითი ინფორმაციისათვის იხილეთ B0N98.

q-ანალიზად ან q-აღრიცხვად წოდებული კიდევ ერთი მათემატიკური მეთოდი ჩვეულებრივი დიფერენციალური ანალიზის განზოგადებული ფორმაა. პირველი, მეორე და ა.შ. რიგის წარმოებულების ნაცვლად ვპოულობთ წილადური q-რიგის წარმოებულს:

$$\partial_x^{(q)} f(x, y, \dots) \equiv \frac{f(qx, y, \dots) - f(x, y, \dots)}{(q-1)x} \quad (10.9-1)$$

q-რიგის წარმოებული გვამცნობს, თუ როგორ იცვლება f ფუნქცია x კოორდინატის q-ზე გამრავლების შემთხვევაში (გაიხსენეთ, რომ ჩვეულებრივი წარმოებული გვამცნობს, თუ როგორ იცვლება ფუნქცია x კოორდინატის უსასრულოდ მცირე ნაზრდის შემთხვევაში). q → 1 ზღვარში q-წარმოებული ჩვეულებრივი წარმოებულის მსგავსია. ირკვევა, რომ q-აღრიცხვა შეგვიძლია გამოვიყენოთ მულტიფრაქტალურ სიმრავლეთა დახასიათებისთვისაც (ERE97).

ცალისმა (TSA88) წარმოადგინა თერმოდინამიკის ახალი ვერსია – ე. წ. **არასივრცული თერმოდინამიკა**, სადაც ენტროპია, თავისუფალი ენერგია და ა.შ., არაა სისტემის ზომისადმი პროპორციული (როგორც ეს ჩვეულებრივ თერმოდინამიკაშია). ეს მოდელი ახდენს მოცემულ თავში განხილული ენტროპიისა და მულტიფრაქტალური განაწილებების შემდგომ განზოგადებას, რაც არაწრფივი სისტემების დახასიათებისთვის შეიძლება გამოგვადგეს (CLP97, LYT98, ANT98).

10.10 დასკვნები

შევაჯამოთ მოცემულ თავში შესწავლილი მასალა. ერთი სისტევით, ხელთ გვაქვს ქაოსური სისტემების რიცხვითი აღწერის არაერთი მეთოდი. ზოგიერთი მეთოდი მდგომარეობათა სივრცის დახასიათებლებს განზოგადებული (ფრაქტალური) განზომილებების გამოყენების გზით შეისწავლის. სხვა ისეთი მეთოდები, როგორებიცაა განზოგადებული ენტროპიები, აქცენტს სისტემის დროით დინამიკაზე აკეთებენ. როგორც განზოგადებული განზომილებების, ასევე ენტროპიების გამოთვლა, განზოგადებულ კორელაციურ ჯამთან კომბინაციაში, კონკრეტული დინამიკური ცვლადის დროითი მწკრივების გამოყენებით არის შესაძლებელი.

ყველა ზემოთ ხსენებული მეთოდი აღწერილობით ხასიათს ატარებს. ისინი სისტემის დინამიკის ამსახველი სიდიდეების რიცხვით მნიშვნელობებს გვაწვდიან. იშვიათ შემთხვევებში გვხვდება უნივერსალობის ნიშნებიც. მაგალითად, სინუსოიდურ-წრიული ასახვის შემთხვევაში ქაოსის საწყის ეტაპზე კრიტიკულ წერტილში $f(x)$ სპექტრი უნივერსალურია. სამწუხაროდ, ეს მეთოდები ნებისმიერ დონეზე პროგნოზირების საშუალებას არ იძლევა. უფრო მეტიც, მიუხედავად იმისა, რომ განზომილებებისა და ენტროპიების გამოთვლის გამარტივებისა და სიჩქარის გაზრდის თვალსაზრისით პროგრესი სახეზეა, გამოთვლები კვლავ აურაცხელ დროს მოითხოვს და ასეთი სიტუაცია გვაქვს მონაცემთა მცირე სიმრავლის შემთხვევაშიც კი. თუ ქაოსური დინამიკური სისტემის კონტროლისთვის უბრალოდ რაიმე რაოდენობრივი მახასიათებელი საზომი გვჭირდება, მაშინ ლიაპუნოვის უდიდესი ექსპონენტის, უჯრედთა მთვლელი განზომილების ან კორელაციური განზომილების დადგენა სავსებით საკმარისია. ნებისმიერ შემთხვევაში, დინამიკური სისტემის რაოდენობრივი გაზომვის მიზანი ამ სისტემის დინამიკის გააზრებაა. გამოთვლა თავისთავად მიზანი არ არის. პერიოდული ორბიტების მიხედვით დინამიკის ტოპოლოგიურ კლასიფიკაციას დიდი მომავალი აქვს, მაგრამ ეს სფერო ჯერჯერობით განვითარების საწყის ეტაპზეა.

საბოლოო დასკვნის გამოტანამდე უნდა აღინიშნოს, რომ მე-9 და მე-10 თავებში მოყვანილი ანალიზი სისტემის მახასიათებელი პარამეტრების მუდმივობის დაშვებას ეყრდნობოდა. რეალური ექსპერიმენტული სისტემების შემთხვევაში ამ დაშვების ჭეშმარიტება საეჭვოა. ბევრი ქიმიური თუ ფიზიკური სისტემის ლაბორატორიულ განხორციელებაში ამგვარი დაშვება წინააღმდეგობას არ ქმნის, მაგრამ ცოცხალ ბიოლოგიურ თუ არაკონტროლირებად სისტემებში, როგორცაა ცვალებადი ვარსკვლავები ან საფონდო ბირჟა, ამგვარი დაშვების ჭეშმარიტება კითხვის ნიშნის ქვეშ დგება. ასეთ შემთხვევაში ჩვენ წინაშე სერიოზული პრობლემა წამოიჭრება. რა აზრი აქვს კორელაციური განზომილების ტიპის ნებისმიერ რიცხვით მახასიათებელს, როდესაც იგი გამოთვლილია სისტემის პარამეტრების ცვლილების პროცესში ჩაწერილი მნიშვნელობათა დროითი მწკრივების მიხედვით? ყველაზე უარეს შემთხვევაში მათ არანაირი მნიშვნელობა არ გააჩნიათ, რადგან სისტემის ქმედება მდგომარეობათა სივრცის მიმზიდველის არეში არ არის შესწავლილი და გამოთვლილი სიდიდეები სისტემის გარდამავალი ქმედების შესაბამისი მახასიათებლებია. ზოგიერთ შემთხვევაში თვით გარდამავალი ქმედების ანალიზია საინტერესო. ასეთ შემთხვევებში დროითი მწკრივების მეთოდიკამ შესაძლოა დიდი სამსახური გაგვიწიოს (JAT94).

არსებობს არასტაციონარული სისტემების კვლევის არაერთი მეთოდი. ისინი აქცენტს *რეკურენტულობის დროის* განსაზღვრაზე აკეთებენ, რომელიც მდგომარეობათა სივრცის გარკვეულ მიდამოში ტრაექტორიის ხელმეორე ”ვიზიტის“ სიხშირის გაზომვაში გვეხმარება.

ამგვარი სტატისტიკა შესაძლოა არასტაციონარულობის პირობების დადგენაშიც დაგვეხმაროს. უახლესი კვლევების გაცნობის მიზნით იხილეთ GAO99.

10.11 დამატებითი ლიტერატურა

დროითი მწკრივების ჩაღმა

N. H. Packard, J. P. Crutchfield, J. D. Farmer, and R. S. Shaw, "Geometry from A Time Series," *Phys. Rev. Lett.* 45,712-15 (1980).

F. Takens in *Dynamical Systems and Turbulence*. Vol. 898 of Lecture Notes in Mathematics, D. A. Rand and L. S. Young, eds. (Springer Verlag, Berlin, 1981).

M. Casdagli, S. Eubank, J. D. Farmer, and J. Gibson, "State Space Reconstruction in the Presence of Noise," *Physica D* 51, 52-98 (1991).

T. Sauer, J. A. Yorke, and M. Casdagli, "Embedology," *J. Stat. Phys.* 65, 579-616(1991).

H. D. I. Abarbanel, R. Brown, J. J. Sidorowich, and L. Sh. Tsimring, "The analysis of observed chaotic data in physical systems," *Rev. Mod. Phys.* 65, 1331—92(1993).

M. T. Rosenstein, J. J. Collins, and C. J. De Luca, "Reconstruction expansion as a geometry-based framework for choosing proper delay times," *Physica D* 73, 82-98 (1994).

H. Abarbanel, *Analysis of Observed Chaotic Data* (Springer, New York, 1996). ძალზე სასარგებლოა მრავალი ანალიზური ტექნიკის ენციკლოპედიური მიმოხილვის თვალსაზრისით.

[Williams, 1997]-ში მოყვანილია ვრცელი მსჯელობა დროითი მწკრივების ანალიზის შესახებ მოცემულ თავში აღწერილი მეთოდოკის გამოყენებით.

R. Hegger, H. Kantz, and T. Schreiber, "Practical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package," *Chaos* 9, 413-35 (1999). აღწერილია პროგრამა პაკეტი TISEAN დროითი მწკრივების ანალიზის ბევრი ნიუანსით.

განზოგადებული განზომილებები

P. Grassberger, "Generalized Dimensions of Strange Attractors," *Phys. Lett. A* 97,227-30 (1983).

H. Hentschel and I. Procaccia, "The Infinite Number of Generalized Dimensions of Fractals and Strange Attractors," *Physica D* 8,435-44 (1983).

კაპლან-იორკის ჰიპოთეზა, ლიაპუნოვის სპექტრი და ლიაპუნოვის განზომილება

J. Kaplan and J. A. Yorke, *Springer Lecture Notes in Mathematics* 730, 204 (1979).

D. A. Russell, J. D. Hansen, and E. Ott, "Dimensions of Strange Attractors," *Phys. Rev. Lett.* 45,1175-78 (1980).

P. Constantin and C. Foias, *Commun. Pure Appl. Math.* 38, 1 (1985). ამ სტატიაში დამტკიცებულია რომ D_L განზომილება ყოველთვის მეტეაან ტოლია ჰაუსდორფის D_H -განზომილებაზე.

X. Zeng, R. Eykholt, and R. Pielke, "Estimating the Lyapunov-Exponent Spectrum from Short Time Series of Low Precision," *Phys. Rev. Lett.* 66, 3229- 32 (1991).

J. C. Sommerer and E. Ott, "Particles Floating on a Moving Fluid: A Dynamical and Comprehensible Physical Fractal," *Science* 259, 335-39 (1993).

დროითი მწკრივების მეშვეობით ლიაპუნოვის ექსპონენტთა სპექტრის განსაზღვრის მეთოდები

U. Parlitz, "Identification of True and Spurious Lyapunov Exponents from Time Series," *Int. J. Bifur. Chaos*, 2,155-65 (1992).

Th.-M. Krueel, M. Eiswirth, and F. W. Schneider, "Computation of Lyapunov spectra: Effect of interactive noise and application to a chemical oscillator," *Physica D* 63,117-37 (1993).

T. D. Sauer, J. A. Tempkin, and J. A. Yorke, "Spurious Lyapunov Exponents in Attractor Reconstruction," *Phys. Rev. Lett.* 81,4341-44 (1998).

R. Hegger, "Estimating the Lyapunov spectrum of time delay feedback systems from scalar time series," *Phys. Rev. E* 60, 1563-66 (1999).

K. Ramasubramanian and M. S. Sriram, "Alternative algorithm for the computation of Lyapunov spectra of dynamical systems," *Phys. Rev. E* 60, R1 126-29(1999).

მონაცემთა ანალიზი ჩადგმისა და კორელაციური განზომილებების მეშვეობით

იხ. მე-9 თავის ბოლოს მოცემული ლიტერატურის სია.

N. B. Abraham, A. M. Albano, B. Das, G. De Guzman, S. Yong, R. S. Gioggia, G. P. Puccioni, and J. R. Tredicce, "Calculating the Dimension of Attractors from Small Data Sets," *Phys. Lett A* 114,217-21 (1986).

J. W. Havstad and C. L. Ehlers, "Attractor Dimension of Nonstationary Dynamical Systems from Small Data Sets," *Phys. Rev. A* 39, 845-53 (1989).

A. M. Albano, J. Muench, C. Schwartz, A. I. Mees, and P. E. Rapp, "Singular-Value Decomposition and the Grassberger-Procaccia Algorithm," *Phys. Rev. A* 38, 3017-26 (1988).

J. Theiler, "Spurious Dimension from Correlation Algorithms Applied to Limited Time-Series Data," *Phys. Rev. A* 34, 2427-32 (1986)..

J. P. Eckmann and D. Ruelle, "Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors," *Rev. Mod. Phys.* 57,617-56 (1985). ქაოსის რიცხვითი წარმოდგენის მეთოდებისა და თეორიის საინტერესო მიმოხილვა.

E. N. Lorenz, "Dimension of Weather and Climate Attractors," *Nature* 353, 241-44 (1991).

M. Ding, C. Grebogi, E. Ott, T. Sauer, and J. A. Yorke, "Plateau Onset for Correlation Dimension: When Does It Occur?" *Phys. Rev. Lett.* 70, 3872-75 (1993).

M. Ding, C. Grebogi, E. Ott, T. Sauer, and J. A. Yorke, "Estimating correlation dimension from a chaotic time series: when does plateau onset occur?" *Physica D* 69,404-24 (1993).

M. Ding and R. C. Hilborn, "Optimal Reconstruction Space for Estimating Correlation Dimension," *Int. J. Bifur. Chaos* 6, 377-381 (1996). M. Bauer, H. Heng, and W. Martienssen, "Characterizing of Spatiotemporal Chaos from Time Series," *Phys. Rev. Lett.* 71, 521-24 (1993). გვთავაზობს გროსბერგ-პროკაცას მეთოდის მცირე მოდიფიკაციას, რომელიც მაღალგანზომილებიანი სისტემის ანალიზის საშუალებას გვაძლევს.

სუროგატული მონაცემები

იხ. მე-9 თავის ბოლოს მოცემული ლიტერატურის სია.

J. Theiler, S. Eubank, A. Longtin, B. Galdrikian, and J. D. Farmer, "Testing for nonlinearity in time series: the method of surrogate data," *Physica D* 58, 77-94 (1992).

D. Prichard and J. Theiler, "Generating Surrogate Data for Time Series with Several Simultaneously Measured Variables," *Phys. Rev. Lett.* 73,951-54 (1994).

T. Schreiber and A. Schmitz, "Improved Surrogate Data for Nonlinearity Tests," *Phys. Rev. Lett.* 11, 635-38 (1996).

C. Cellucci, A. Albano, R. Rapp, R. Pittenger, and R. Josiassen, "Detecting noise in a time series," *Chaos* 7, 414-22 (1997).

მულტიფრაქტალები და $f(\alpha)$

T. C. Halsey, M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, I. Procaccia, and B. I. Schraiman, "Fractal Measures and Their Singularities: The Characterization of Strange Sets," *Phys. Rev. A* 33, 1141-51 (1986).

M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, A. Libchaber, I. Procaccia, and J. Stavans, "Global Universality at the Onset of Chaos: Results of a Forced Rayleigh-B,nard Experiment," *Phys.*

Rev. Lett. **55**, 2798-801 (1985). $f(\alpha)$ მეთოდი გამოიყენება რელეი-ბენარის ექსპერიმენტის შედეგად მიღებული მონაცემების აღწერისათვის.

Z. Su, R. W. Rollins, and E. R. Hunt, "Measurements of $f(\alpha)$ Spectrum of Attractors at Transitions to Chaos in Driven Diode Resonator Systems," *Phys. Rev. A* **36**, 3515-17 (1987).

A. Chhabra and R. V. Jensen, "Direct Determination of the $f(\alpha)$ Singularity Spectrum," *Phys. Rev. Lett.* **62**, 1327-30 (1989). $f(\alpha)$ spectrum-ის გამოთვლის უფრო პირდაპირი მეთოდი.

B. B. Mandelbrot, "A Multifractal Walk down Wall Street," *Scientific American* **280** (2), 70-73 (February, 1999).

B. B. Mandelbrot, *Fractals and Scaling in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk* (Springer-Verlag, New York, 1997).

B. B. Mandelbrot, *Multifractals and 1/f Noise: Wild Self-Affinity in Physics* (Springer-Verlag, New York, 1999).

ლენჯანდრის გარდაქმნები

P. M. Morse, *Thermal Physics* (W. A. Benjamin, New York, 1964).

D. Chandler, *Introduction to Modern Statistical Mechanics* (Oxford University Press, New York, 1987).

განზოგადებული ენტროპიები და $g(\Lambda)$

A. Renyi, *Probability Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1970).

P. Grassberger and I. Procaccia, "Estimation of the Kolmogorov Entropy from a Chaotic Signal." *Phys. Rev. A* **28**, 2591-93 (1983).

P. Grassberger and I. Procaccia, "Dimensions and Entropies of Strange Attractors from a Fluctuating Dynamics Approach," *Physica D* **13**, 34-54 (1984).

J.-P. Eckmann and I. Procaccia, "Fluctuations of Dynamical Scaling Indices in Nonlinear Systems," *Phys. Rev. A* **34**, 659-61 (1986).

G. Paladin, L. Peliti, and A. Vulpiani, "Intermittency as multifractality in history space," *J. Phys. A* **19**, L991-6 (1986).

G. Paladin and A. Vulpiani, "Intermittency in chaotic systems and Renyi entropies," *J. Phys. A* **19**, L997-1001 (1986).

T. Tel, "Dynamical Spectrum and Thermodynamic Functions of Strange Sets from an Eigenvalue Problem," *Phys. Rev. A* **36**, 2507-10 (1987).

D. Beigie, A. Leonard, and S. Wiggins, "Statistical Relaxation under Nonturbulent Chaotic Flows: Non-Gaussian High-Stretch Tails of Finite-Time Lyapunov Exponent Distributions," *Phys. Rev. Lett.* **70**, 275-78 (1993).

R. Badii, "Generalized entropies of chaotic maps and flows: A unified approach," *Chaos* **7**, 694-700 (1997).

განზოგადებული კორელაციური ჯამები

K. Pawelzik and H. G. Schuster, "Generalized Dimensions and Entropies from a Measured Time Series," *Phys. Rev. A* **35**, 481-84 (1987).

ექსპერიმენტები, რომელთა ანალიზი ხდება ჩადგმის მეთოდის გამოყენებით

G. P. Puccioni, A. Poggi, W. Gadomski, J. R. Tredicce, and F. T. Arecchi, "Measurement of the Formation and Evolution of a Strange Attractor in a Laser," *Phys. Rev. Lett.* **55**, 339-41 (1985).

A. Brandstater and H. L. Swinney, "Strange Attractors in Weakly Turbulent Couette-Taylor Flow," *Phys. Rev. A* **35**, 2207-20 (1987).

J. Kurths and H. Herzel, "An Attractor in a Solar Time Series," *Physica D* **25**, 165-72 (1987). Are the pulsations in radio emissions from the Sun describable by a model with a chaotic attractor? Calculations of the generalized dimensions, Lyapunov exponents, and Kolmogorov entropies do not provide convincing evidence. ნაშრომში შეჯამებულია განზოგადებულ

განზომილებათა, ლიაპუნოვის ექსპონენტებისა და კოლმოგოროვის ენტროპიის გამოთვლის ალგორითმები.

J. K. Cannizzo and D. A. Goodings, "Chaos in SS Cygni?" *Astrophys. J.* **334**, L31-34 (1988).

J. K. Cannizzo, D. A. Goodings, and J. A. Mattei, "A Search for Chaotic Behavior in the Light Curves of Three Long-Period Variables," *Astrophys. J.* **357**, 235-42 (1990).

A. Jedynek, M. Bach, and J. Timmer, "Failure of dimension analysis in a simple five-dimensional system," *Phys. Rev. E* **50**, 1170-80 (1994). დეტალური შესწავლა იმისა, თუ როგორ შეიძლება წარიმართოს არასწორად კორელაციურ განზომილებათა გამოთვლა.

J. R. Buchler, T. Serre, and Z. Kollath, "A Chaotic Pulsating Star: The Case of R Scuti," *Phys. Rev. Lett.* **73**, 842-5 (1995).

D. K. Ivanov, H. A. Posch, and Ch. Stumpf, "Statistical measures derived from the correlation integrals of physiological time series," *Chaos*, **6**, 243-53 (1996).

A. Provenzale, E. A. Spiegel, and R. Thieberger, "Cosmic lacunarity," *Chaos* **7**, 82-88 (1997). კოსმოსში გალაქტიკების გამაწილება გაანალიზებულია განზოგადებული განზომილებების გამოყენებით.

K. Lehnertz and C. E. Elger, "Can Epileptic Seizures be Predicted? Evidence from Nonlinear Time Series Analysis of Brain Electrical Activity," *Phys. Rev. Lett.* **80**, 5019-22 (1998).

არასტაბილურ პერიოდულ ორბიტათა ანალიზი

H. Poincare, *Les Methodes Nouvelles de la Mechanique Celeste*, Vol. I, Chap. III, Art. 36. (Gauthier-Villars, Paris, 1892). Translated in H. Poincare, *New Methods of Celestial Mechanics* (American Institute of Physics, Woodbury, NY, 1993).

D. Auerbach, P. Cvitanovic, J.-P. Eckmann, G. Gunaratne, and I. Procaccia, "Exploring Chaotic Motion Through Periodic Orbits," *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2387-89 (1987).

P. Cvitanovic, "Invariant Measurement of Strange Sets in Terms of Cycles," *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2729-32 (1988).

H. G. Solari and R. Gilmore, "Relative Rotation Rates for Driven Dynamical Systems," *Phys. Rev. A* **37**, 3096-109 (1988).

P. Cvitanovic, "Topological and Metric Properties of Henon-Type Strange Attractors," *Phys. Rev. A* **38**, 1503-20 (1988).

G. H. Gunaratne, P. S. Linsay, and M. J. Vinson, "Chaos beyond Onset: A Comparison of Theory and Experiment," *Phys. Rev. Lett.* **63**, 1-4 (1989).

O. Biham and W. Wentzel, "Characterization of Unstable Periodic Orbits in Chaotic Attractors and Repellers," *Phys. Rev. Lett.* **63**, 819-22 (1989).

G. B. Mindlin, X.-J. Hou, H. G. Solari, R. Gilmore, and N. B. Tufillaro, "Classification of Strange Attractors by Integers," *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2350-3 (1990).

K. Davies, T. Huston, and M. Baranger, "Calculations of Periodic Trajectories for the Henon-Heiles Hamiltonian Using the Monodromy Method," *Chaos* **2**, 215-24 (1992).

[Tufillaro, Abbott, and Reilly, 1992]. წიგნში მოცემულია attractors ტოპოლოგიური ანალიზის შესავალი.

P. So, E. Ott, S. J. Schiff, D. T. Kaplan, T. Sauer, and C. Grebogi, "Detecting Unstable Periodic Orbits in Chaotic Experimental Data," *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4705-8 (1996).

B. R. Hunt and E. Ott, "Optimal Periodic Orbits of Chaotic Attractors," *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2254-57 (1996).

P. Schmelcher and F. K. Diakonov, "Detecting Unstable Periodic Orbits of Chaotic Dynamical Systems," *Phys. Rev. Lett.* **78**, 4733-36 (1997).

Y.-C. Lai, Y. Nagai, and C. Grebogi, "Characterization of the Natural Measure by Unstable Periodic Orbits in Chaotic Attractors," *Phys. Rev. Lett.* **79**, 649-52 (1997).

F. K. Diakonov, P. Schmelcher, and O. Biham, "Systematic Computation of the Least Unstable Periodic Orbits in Chaotic Attractors," *Phys. Rev. Lett.* 81, 4349-52(1998).

N. S. Simonovic, "Calculations of periodic orbits: The monodromy method and application to regularized systems," *Chaos* 9, 854-64 (1999).

თერმოდინამიკური ფორმალიზმი

T. Bohr and T. Tel, "The Thermodynamics of Fractals." In B. Hao (ed.) *Chaos*, Vol. 2 (World Scientific, Singapore, 1988). თერმოდინამიკური ფორმალიზმის განხილვა (თუმცა შემოფარგლილია ერთგანზომილებიანი სისტემებით).

G. M. Zaslavsky, "Chaotic Dynamics and the Origin of Statistical Laws," *Physics Today* 52 (8), 39[^]15 (1999).

ტალღური ანალიზი, q -გამოთვლები და არაექსტენსიური თერმოდინამიკა

J. F. Muzy, E. Bacry, and A. Arneodo, "Wavelets and Multifractal Formalism for Singular Signals: Application to Turbulence Data," *Phys. Rev. Lett.* 67, 3515-18(1991).

A. Arneodo, E. Bacry, P. V. Graves, and J. F. Muzy, "Characterizing Long-Range Correlations in DNA Sequences from Wavelet Analysis," *Phys. Rev. Lett.* 74,3293-96(1995).

A. Arneodo, E. Bacry, and J. F. Muzy, "Oscillating Singularities in Locally Self-Similar Functions," *Phys. Rev. Lett.* 74, 4823-26 (1995).

G. Kaiser, *A Friendly Guide to Wavelets* (Springer, New York, 1994).

C. S. Burrus, R. A. Gopinath, and H. Guo, *Introduction to Wavelets and Transforms: A Primer* (Prentice-Hall, 1997).

C. Bowman and A. C. Newell, "Natural patterns and wavelets," *Rev. Mod. Phys.* 70, 289-301 (1998).

A. Erzan and J.-P. Eckmann, " q -analysis of Fractal Sets," *Phys. Rev. Lett.* 78, 3245-48 (1997).

C. Tsallis, "Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs Statistics," *J. Stat. Phys.* 52,479-87 (1988).

U. M. S. Costa, M. L. Lyra, A. R. Plastino, and C. Tsallis, "Power-law sensitivity to initial conditions within a logisticlike family of maps: Fractality and nonextensivity," *Phys. Rev. E.* 56, 245-50 (1997).

M. L. Lyra and C. Tsallis, "Nonextensivity and Multifractality in Low-Dimensional Dissipative Systems," *Phys. Rev. Lett.* 80,53-56 (1998).

C. Anteneodo and C. Tsallis, "Breakdown of Exponential Sensitivity to Initial Conditions: Role of the Range of Interactions," *Phys. Rev. Lett.* 80, 5313-16 (1998).

ქაოსში გარდამავალი მდგომარეობა და რეკურენტული დროითი ანალიზი არასტაციონარული სისტემებისათვის

I. M. Janosi and T. Tel, "Time-series Analysis of Transient Chaos," *Phys. Rev. E* 49, 2756-63 (1994).

J. B. Gao, "Recurrence Time Statistics for Chaotic Systems and Their Applications," *Phys. Rev. Lett.* 83, 3178-81 (1999).

D. Yu, W. Lu, and R. G. Harrison, "Detecting dynamical nonstationarity in time series data," *Chaos* 9, 865-70 (1999).

10.12 კომპიუტერული ამოცანები

CE10-1. შეადგინეთ 10.6 პარაგრაფში აღწერილი კანტორის აწონილი სიმრავლის $f(\alpha)$ -ს გამოთვლისა და გრაფიკული გამოსახვის პროგრამა.

CE10-2. შეადგინეთ 10.5-4 ამოცანის კანტორის ასიმეტრიული სიმრავლისთვის $f(\alpha)$ -ს გამოთვლისა და გრაფიკული გამოსახვის პროგრამა. მინიშნება: n/w^* -სთან დაკავშირებით განტოლების ამოხსნის მიზნით გამოიყენეთ ნიუტონის მეთოდი.

CE10-3. იხელმძღვანელოთ HJK86-ის მიხედვით და კანტორის ორმასშტაბიანი სიმრავლისათვის ააგეთ $f(\alpha)$ ფუნქციის გრაფიკი. ჩაატარეთ მიღებული შედეგების ანალიზი.

CE10-4. გაეცანით ჰ. გულდისა და ე. ტობონიკის ნაშრომს “ფრაქტალებისა და ქაოსის შესახებ: მულტიფრაქტალები“, *კამომთვლელი მანქანები ფიზიკაში* 4(2), 202-7 (მარტი/აპრილი 1990) და შეამოწმეთ პროგრამირებასთან დაკავშირებული ზოგიერთი რეკომენდაცია.

IV

რჩეული პრობლემები

11

სტრუქტურის წარმოქმნა და დრო-სივრცეში გამოხატული ქაოსი

ადამიანის ინტელექტის გაღვივება შესაძლოა განტოლებების თვისობრივი შემადგენლობის შეცნობის მეთოდის შემუშავებასა და განვითარებას უკავშირდებოდეს. ამის გაკეთებას ჯერჯერობით ვერ ვახერხებთ. დღესდღეობით ჩვენ ვერ აღვიქვამთ, რომ წყლის ნაკადის განტოლებები ისეთ რამეებს შეიცავს, როგორცაა ტურბულენტობის სტრუქტურა, რაც ადამიანმა მბრუნავ ცილინდრებს შორის შეიძლება შენიშნოს. ასევე არ ვიცით, ურევია თუ არა ამ ყოველივეში შემოქმედის ხელი. რ.პ. ფეინმანი [Feinman, Leighton, Sands, 1964]-ში, ტომი II, გვ. 41-12.

11.1 შესავალი

რთული, მაქმანისებრი ფორმის ყინულის კრისტალები გრიგალისებრი ღრუბლებისგან წარმოიქმნება. ღრუბლებს ასობით კილომეტრზე გავრცელებული რეგულარული, პერიოდული სტრუქტურა გააჩნიათ. წესრიგი (მოჩვენებითი) მოუწესრიგებლობიდან, ხოლო სირთულე ერთგვაროვნებიდან გამომდინარეობს. მაშინაც კი, როდესაც ყველაზე ნაკლებად ველით, ბუნება წესრიგსა და სივრცით სტრუქტურებს წარმოქმნის. როგორ ხდება ყოველივე ეს?

ეს საკითხები მახასიათებელი თვისებების მნიშვნელოვანი სივრცითი ცვლილების მქონე სისტემებს ეხება. ამრიგად, სისტემის დინამიკა როგორც სივრცითი, ისე დროითი თვალსაზრისით უნდა განვიხილოთ, რაც მოცემული კურსის უმთავრეს მიზანს წარმოადგენს.

ფუნდამენტური ფიზიკის თვალსაზრისით, ნამდვილი თავსატეხის წინაშე აღმოჩნდით. მიკროსკოპულ, ატომურ და მოლეკულურ დონეზე ვიცით, რომ ატომთაშორისი და მოლეკულათაშორისი ურთიერთქმედება (ან ძალები) საკმაოდ მცირე, მიახლოებით 10 \AA (5-დან 10-მდე ატომური დიამეტრი) რიგის მანძილებზე ვრცელდება. უფრო დიდი მანძილების შემთხვევაში ატომებს შორის ურთიერთქმედება შემთხვევითი სახის სითბურ აგზნებასთან შედარებით უმნიშვნელო ხდება ნებისმიერი, მაგრამ არა უმცირესი ტემპერატურების შემთხვევაში. ჩვენ ფაქტობრივად, ძალზე დიდ მანძილებზე გავრცელებული მოლეკულური წესრიგის პრობლემის წინაშე ვდგავართ. მანძილების ყინულის კრისტალების შემთხვევაში

რამდენიმე მილიმეტრის, ხოლო ღრუბლების შემთხვევაში კილომეტრებში აისახება. რა გზით უკავშირდება მოკლე მანძილებზე არსებული ურთიერთქმედება დიდი მანძილების შესაბამის ურთიერთქმედების კანონებს?

ერთ-ერთი ახსნა იმაში მდგომარეობს, რომ დიდი მანძილების შემთხვევაში არსებობს ურთიერთქმედებები, რომლებიც მოლეკულებს ერთიმეორესთან „კომუნიკაციის“ საშუალებას აძლევენ. ამიტომ წყლის მოლეკულამ „იცის“, თუ სად უნდა აღმოჩნდეს თოვლის ფიფქის სტრუქტურის მისაღებად. ასეთი კომუნიკაცია თითქოს ჯადოსნურია და სპეციალურად ამ მიზნის მისაღწევად არსებობს.

ჩვენ, როგორც მეცნიერები, წესრიგის ახსნას ცნობილი ძალებისა და შესაბამისი დინამიკის საფუძველზე ვცდილობთ ანუ იმედი გვაქვს, რომ დიდ მანძილებზე მოქმედი წესრიგის შედეგების ახსნას ფიზიკის ცნობილი კანონების გამოყენებით შევძლებთ. ბოლო ოცი წლის განმავლობაში დინამიკის სფეროში გარკვეული პროგრესი სახეზეა. ალბათ საკვირველია, რომ სითბური ქაოსური ქმედების გააზრებაში დამხმარე მრავალი კონცეფცია წესრიგისა და სირთულის აღქმაშიც გვეხმარება.

რა საერთო თვისებები გააჩნიათ წესრიგის დამამყარებელ სისტემებს? ყველაზე მნიშვნელოვანია, რომ ისინი თერმოდინამიკური წონასწორობიდან დაშორებულ მდგომარეობაში მოქმედებენ. განსაზღვრების თანახმად, თერმოდინამიკურ წონასწორობაში მყოფ სისტემას ერთგვაროვანი ტემპერატურა გააჩნია და არ ხდება მის სხვადასხვა „ნაწილებს“ შორის ენერჯის გაცვლა. ენერჯის ნაკადი და არაწონასწორული პირობები წესრიგის გამოვლენისთვის აუცილებელია. გარდა ამისა, დისიპაცია მნიშვნელოვანია არაწონასწორულ სისტემებში ამა თუ იმ სტრუქტურების ჩამოყალიბებისთვის. ასევე გავიხსენოთ, რომ დისიპაცია სისტემის დინამიკურ ტრაექტორიებს მდგომარეობათა სივრცეში მიმზიდველზე განთავსების საშუალებას აძლევს. ცნობილმა ფიზიკოსმა და ნობელის პრემიის ლაურეატმა ილია პრიგოგინმა არაწონასწორულ დისიპაციურ სისტემებში გამოვლენილ მოწესრიგებულ სივრცით სტრუქტურებთან დაკავშირებით ტერმინი „დისიპაციური სტრუქტურები“ შემოიღო.

ამგვარი სტრუქტურის წარმოქმნელ სისტემებს კიდევ ერთი „თვისება“ – არაწრფივობა აერთიანებს. არაწრფივობის გარეშე არანაირი სტრუქტურა არ წარმოიქმნება. ამავე დროს წონასწორობის დარღვევაც მნიშვნელოვანია, რადგან სისტემათა უმრავლესობისთვის თერმოდინამიკური წონასწორობისას ან მასთან მჭიდრო სიახლოვისას არაწრფივობა „დამალულია“. არაწრფივობის ეფექტი საგრძნობი მხოლოდ იმ შემთხვევაშია, როდესაც სისტემა წონასწორობიდან გადახრილ მდგომარეობაში იმართება.

არაწრფივობის შესახებ მოყვანილი განცხადებები საკმაოდ შთამბეჭდავია. მაგალითად, ნახვრეტში, გისოსში თუ წყლის წვეთში გამავალი სინათლის სხივის მსგავსი ბევრი წრფივი სისტემა საინტერესო სტრუქტურებს გვაძლევს. ამ სტრუქტურებს ნახვრეტების, გისოსებისა და წყლის წვეთების გეომეტრია განსაზღვრავს. სისტემის არაწრფივობის წყალობით წარმოქმნილ სტრუქტურებს ხშირად მათი კონტურების მახასიათებლებისაგან დამოუკიდებელი გეომეტრიული ფორმები გააჩნიათ. სისტემის ყველა პარამეტრისა და საზღვრის დროისგან დამოუკიდებლობის შემთხვევაშიც კი არაწრფივი სტრუქტურები ხშირად დროზე დამოკიდებული ხდებიან. ორივე თვისება – კონტურების გეომეტრიისგან დამოუკიდებლობა და დროზე დამოკიდებულება *არაწრფივი სტრუქტურის წარმოქმნის* ნიშნებია.

არაწრფივი სისტემების კიდევ ერთი ნიშანთვისება *კოჰერენტული სტრუქტურებია*. მათ შესაძლოა დროში მდგრადი და ხშირად სტრუქტურის წარმოქმნის არის გარშემო მოძრავი ლენტის, ადგილობრივი იმპულსის ან წყლის ნაკადის მორევის ფორმა და ა.შ. აღმოაჩნდეთ. ამგვარ სტრუქტურებს სხვადასხვაგვარი ფიზიკური, ქიმიური, თუ ბიოლოგიური სისტემები ქმნიან. SHO93-მა და RTV99-მა მათი შეცნობის მეთოდების ნუსხა შემოგვთავაზეს.

მიუხედავად იმისა, რომ სივრცითი სტრუქტურების შესახებ ბევრი რამ არის ცნობილი, ეს საკითხი სრულად შესწავლილი არ არის. ამ თავში სტრუქტურის წარმოქმნის და დრო-სივრცეში მიმდინარე ქაოსის ზოგიერთ ასპექტს წარმოგიდგენთ (რასაკვირველია, ქაოსური ქმედება სივრცითი სტრუქტურის მქონე სისტემების არაწრფივი დინამიკის ერთ-ერთი თვისებაა, მაგრამ სტრუქტურების წარმოქმნელმა არაწრფივობებმა ქაოსური შეიძლება გამოიწვიოს). მომდევნო პარაგრაფებში, სივრცე-დროის არაწრფივ დინამიკასთან დაკავშირებით მაგალითების მთელ სპექტრს მოვიყვანთ. ისინი, რა თქმა უნდა, საკვლევ მოვლენებს სრულად ვერ ასახავენ, მაგრამ ამ მოვლენების შესახებ ძირითად მინიშნებებს, კონცეფციებს, ფორმალურ მიდგომებს და გამოყენების სფეროს საფუძვლიანად გავეცნობით. ჩვენ ვეცდებით არაწრფივი დინამიკის სფეროში შესწავლილი კონცეფციების საინტერესო სივრცითი სტრუქტურის მქონე სისტემებზე გავრცელების გზები გიჩვენოთ. რეალურ სივრცით სტრუქტურებთან დაკავშირებით გამოყენებული ფრაქტალური განზომილებები მრავალი სისტემის დახასიათებისას მნიშვნელოვანია.

ამ პარაგრაფებში სითხის ნაკადისა და გადატანის მოვლენებთან დაკავშირებით ფიზიკისა და ფორმალური მეთოდის ზოგიერთ ასპექტს წარმოგიდგენთ. საბედნიეროდ თუ საუბედუროდ, ეს საკითხები ფიზიკის შესავალი კურსების უმრავლესობისათვის შეუქმნევლი დარჩა, რამაც ფიზიკაში არასასურველი ჩავარდნა გამოიწვია. ჩვენი მიზანია საკმარისი

წარმოდგენა შეგიქმნათ ამ საკითხების შესახებ, ისე რომ მოვლენის აღწერისთვის გამოყენებულ ფორმალურ მეთოდებს შორის კავშირის შემჩნევა შეგვეძლოს.

დრო-სივრცეში არსებული სტრუქტურები მაგალითებია იმისა, თუ როგორ შეიძლება გამოდინარეობდეს მარტივი წესრიგი კომპლექსური ქმედებიდან. როგორც უკვე ვთქვით, ქაოსი (საკმაოდ ხშირად) მარტივი სისტემებიდან წარმოქმნილი რთული ქმედებაა. არსებობს თუ არა მათი დამაკავშირებელი თეორია (ან მოსაზრება მაინც), რომელიც ბიოლოგიური და სოციალური სისტემების შემცველი რთული სისტემების დინამიკის შეცნობას უზრუნველყოფს? ჯერჯერობით ამ კითხვას ადვილად ვერ ვუპასუხებთ. თავის ბოლოში ციტირებული ლიტერატურიდან გაიგებთ, თუ როგორ წარმოუდგენია ზოგიერთ მეცნიერს და მათემატიკოსს „*კომპლექსურობის* თეორია“. მოცემულ თავში მოყვანილია რამდენიმე პრობლემის ამსახველი შემთხვევა, რომელთა გადაჭრას კომპლექსურობის თეორია უნდა შეეცადოს.

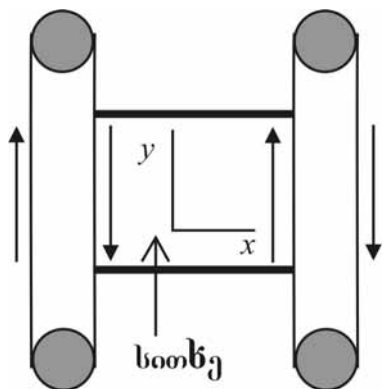
11.2 სითხის ორგანოზომილებიანი ნაკადი

სივრცითი დამოკიდებულების პირველი მაგალითია სითხის ორგანოზომილებიანი ნაკადის ზოგიერთი ასპექტი. ცხადია იბადება პირველი კითხვა, თუ რას ვგულისხმობთ სითხის ორგანოზომილებიან ნაკადში. სინამდვილეში ხომ სითხეები სამგანზომილებიანია? სითხის ორგანოზომილებიანი ნაკადი მაშინ დაიკვირვება, როდესაც სითხეში არსებული ფიზიკური პირობები ერთი მიმართულებით ერთგვაროვნებას ინარჩუნებს, ხოლო დანარჩენი ორი მიმართულებით კი ადგილი აქვს მათ გრივალისებრი სახით ცვალებადობას. წარმოიდგინეთ 11.1 ნახაზზე მოყვანილი სითხის შემცველი მართკუთხა კამერა, რომლის მარჯვენა და მარცხენა მხარეები ზემოთ-ქვემოთ გადაადგილდებიან. გადაადგილება სითხის ნაკადს x და y მიმართულებით წარმართავს, მაგრამ ნაკადი z კოორდინატის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის უცვლელია (ძალზე თხელი ფირფიტის წინა და უკანა ზედაპირების გარდა). ამრიგად ვამბობთ, რომ სითხის მოძრაობა ორგანოზომილებიანია.

სითხის ამგვარმა სახეობამ განსაკუთრებით ფართო გამოყენება უკანასკნელ წლებში, სითხეთა ნარევი არსებული ფიზიკური პირობების შესწავლისას ჰპოვა (იხილეთ თავის ბოლოში ციტირებული [Ottino, 1989] და სხვა წყაროები). ნარევი სითხე მნიშვნელოვან როლს ასრულებს სხვადასხვა ინდუსტრიულ და ბუნებრივ დარგებში. საიდან იცის საღებავების მწარმოებელმა ფირმამ, რომ საღებავში პიგმენტებია შერეული? როგორ ხდება, რომ ოკეანის ზედაპირის ზედა ფენებში ხსნადი CO_2 -ის მსგავსი აირები უფრო ღრმად განლაგებულ ფენებთანაა შერეული? შერევის დახასიათების პრობლემა და ქაოსთან მისი

კავშირის საკითხი ჯერაც შეუსწავლელია (RKZ00). შერევა მაშინ ვლინდება, როდესაც სითხის რაიმე წერტილში შეყვანილი შეფერილი სითხის პატარა წვეთი საბოლოოდ სითხის მთლიანი მოცულობის ფერზე გავლენას მოახდენს (შერევის პროცესის განხილვისას უგულებელვყოფთ მოლეკულური დიფუზიის წვლილს. ჩვენ მხოლოდ სითხის მასური გადაადგილებით გამოწვეული შერევით ვართ დაინტერესებული). ამის მაგალითია ყავის მორევა, როდესაც სითხის მოძრაობა სხვადასხვა სახის რგოლებს იწვევს. თუ სითხე „მდორედ“ მიედინება, მაშინ შერევა მცირეა.

სითხეების შერევის დინამიკური ანალოგია მდგომარეობათა სივრცეში ქაოსურ მოძრაობასთან ასოცირებული საწყისი პირობების სიმრავლის დეფორმაციაა, რაც ამ სიმრავლის მდგომარეობათა სივრცის მნიშვნელოვან არეში გავრცელებას იწვევს. ანალოგიის მათემატიკური ფორმულირება შესაძლებელია. შერევის რაოდენობრივ საზომად ახლომდებარე ტრაექტორიების გადახრის ლიაპუნოვის საშუალო ექსპონენტის ექვივალენტური სიდიდე შეგვიძლია გამოვიყენოთ [Ottino, 1989, გვ. 117].



ნახაზი. 11.1. თხევადი სისტემის სქემატური დიაგრამა, სადაც ნაკადი გამორჩეულად ორგანზომილებიანია. სითხის უჯრედის მარცხენა და მარჯვენა მხარეებს ვერტიკალური მიმართულებით გადაადგილების საშუალება ეძლევათ, რაც განაპირობებს სითხის მოძრაობას xy სიბრტყეში.

ორგანზომილებიანი სითხის მოძრაობის ჰიდროდინამიკური თეორია გვიჩვენებს, რომ კონკრეტულ (x, y) მდგომარეობაში სითხის სიჩქარე იზოქორული ნაკადისთვის ე.წ. **ნაკადის** $\Psi(x, y, t)$ **ფუნქციის** [Ottino, 1989] მეშვეობით შეიძლება განისაზღვროს. ნაკადის ფუნქციიდან კერძო წარმოებულების გამოთვლის გზით ვპოულობთ სიჩქარის კომპონენტებს:

$$\begin{aligned}
 v_x(x, y) &= \frac{\partial \Psi(x, y, t)}{\partial y} \\
 v_y(x, y) &= -\frac{\partial \Psi(x, y, t)}{\partial x}
 \end{aligned}
 \tag{11.2-1}$$

თუ დავაფიქსირებთ დროის t მომენტს, მაშინ $\Psi(x, y, t)$ მრუდები სითხის მოძრაობის ე.წ. **ნაკადის წირებს** გამოსახავენ. ისინი სივრცის ცალკეულ წერტილში სითხის სიჩქარის ვექტორის მიმართ მხები მრუდები იქნებიან.

აქ მთავარი ის არის, რომ სითხის ნაკადის სიჩქარის კომპონენტებისთვის (11.2-1) სახეს მე-8 თავში წარმოდგენილი ჰამილტონის განტოლებების მსგავსი მათემატიკური სტრუქტურა გააჩნია. (11.2-1) და (8.2-1) გამოსახულებების შედარების შედეგად ჩანს, რომ სითხის ნაკადის ფუნქცია ჰამილტონიანის როლს ასრულებს (ARE83, ARE84). მაშასადამე, სითხის ორგანოზომილებიანი ნაკადისთვის რეალურ x, y სივრცეში სითხის ნაწილაკის ტრაექტორია (ანუ (11.2-1) განტოლებების ამონახსნი) იგივეა, რაც ჰამილტონის ფუნქციისთვის მდგომარეობათა სივრცის ტრაექტორია (გაიხსენეთ, რომ მდგომარეობათა სივრცის ტრაექტორიები ჰამილტონის ფუნქციის მიმართ დიფერენციალური განტოლებების ამონახსნებია). თუ ნაკადის ფუნქცია დროის მიმართ დამოუკიდებელია, მაშინ სითხის ნაწილაკი $\Psi(x, y) = a$ მრუდის გასწვრივ იმოძრაებს. ამგვარი ქმედება ჰამილტონის ფუნქციის დინამიკას წააგავს, რადგან თუ ეს ფუნქცია დროისაგან დამოუკიდებელია, მაშინ მდგომარეობათა სივრცეში წერტილი, რომლისთვისაც $H(q, p) = a$, მრუდის გასწვრივ იმოძრაებს.

პირობების მოცემული სიმრავლისთვის ნაკადის ფუნქციისა და დინების მიმართულებების დადგენა გამოთვლების შედეგად ხდება, მაგრამ შერევის მოვლენისას უფრო შორს გვიწევს წასვლა – გვჭირდება სითხის შემადგენელი ნაწილაკების ტრაექტორიების დადგენა. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, შერევა ორი ახლომდებარე ნაწილაკის ტრაექტორიათა ექსპონენციალურ დივერგენციასთანაა დაკავშირებული. ნაწილაკთა ტრაექტორიების დახასიათებისთვის ორი განსხვავებული (მაგრამ ერთიმეორესთან კავშირში მყოფი) მეთოდი გამოიყენება. ჩვენ ფორმალურად დროის ფუნქციის სახით მოცემული ნაწილაკის მდგომარეობის ვექტორი უნდა განვსაზღვროთ, რომელიც შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\vec{x} = \vec{\Phi}(\vec{x}_0, t) \quad (11.2-2)$$

სადაც \vec{x}_0 არის ნაწილაკის საწყისი მდგომარეობის შესაბამისი ვექტორი. თუ ცალკეული მდგომარეობისათვის დინების ფუნქცია ცნობილია, მაშინ დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის შედეგად ტრაექტორიის განსაზღვრაც შესაძლებელია:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}, t) \quad (11.2-3)$$

ტრაექტორიის ექსპერიმენტულად განსაზღვრას \vec{x}_0 მდებარეობაში საღებავის ტრასერული ნაწილაკის ან მცირე ზომის წვეთის შეყვანით და მისი ტრაექტორიის გამოკვლევის გზით შევძლებთ.

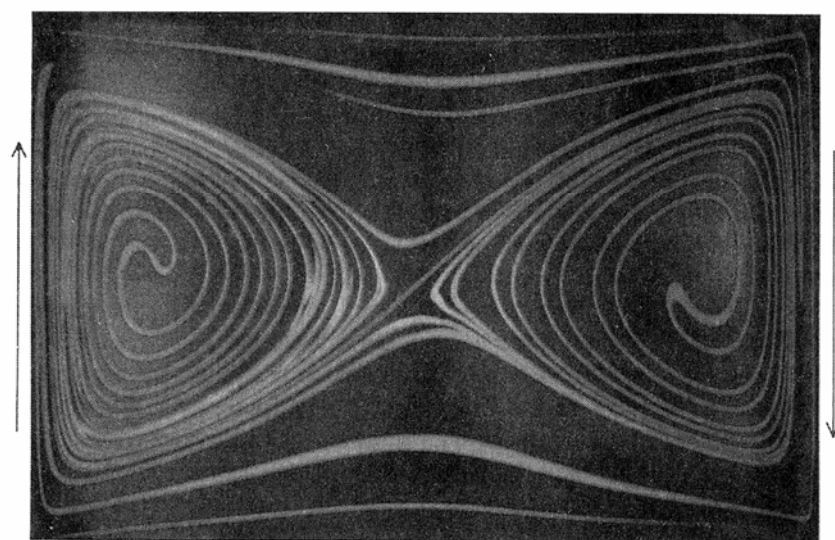
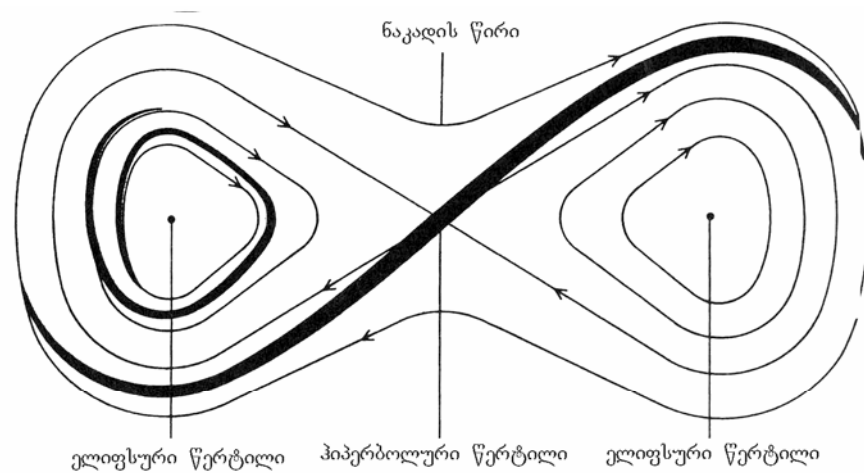
სითხის მოძრაობის კვლევის მეორე მეთოდი ფიქსირებულ სივრცით მდგომარეობაში ტრასერული ნაწილაკების ნაკადის ან საღებავის შეყვანასა და ამ გზით გამოწვეული ტრაექტორიის დადგენაში გამოიხატება. ასეთ ტრაექტორიას **ზოლოვანი მეთოდი** ეწოდება. თუ ნაკადი წონასწორულია და სითხის სიჩქარე ფიქსირებული სივრცითი მდებარეობისას დროისგან დამოუკიდებელია, მაშინ ზოლის მსვლელობა და ტრასერების ტრაექტორია ერთმანეთს ემთხვევა. არამდგრადი ნაკადების უფრო ზოგადი და საინტერესო შემთხვევებისას, ასეთი დამთხვევა არ მოხდება, რადგან ტრასერის განთავსების წერტილში სიჩქარე დროის მიხედვით იცვლება.

დავუბრუნდეთ სითხის ორგანოზომილებიან ნაკადსა და ჰამილტონის ფუნქციის მეშვეობით აღწერილ დინამიკას შორის არსებულ მსგავსებას. ამ მსგავსებიდან ორი მნიშვნელოვანი შედეგი გამომდინარეობს: 1) ჩვენ სითხის ტრაექტორიების გამოსახულება შეგვიძლია გამოვიყენოთ ჰამილტონისეული სისტემის ტრაექტორიების ანალოგიურად. სითხის მოძრაობაზე დაკვირვების შედეგად შეგვიძლია შევიქმნათ დაზუსტებული წარმოდგენა მდგომარეობათა სივრცეში აღებულ საწყის პირობათა შესაბამისი არის დეფორმაციის შესახებ (ასეთი წარმოდგენა გასული საუკუნის დასაწყისში ფიზიკოსმა ჯ.ვ. გიბსმა შემოგვთავაზა. იხილეთ [Gibbs, 1948], ტომი II, გვ. 141-156); 2) შეგვიძლია ვიხელმძღვანელოთ ჰამილტონის ფუნქციის თვისებებით და სითხის ორგანოზომილებიანი ნაკადი გამოვიკვლიოთ.

მოვიყვანოთ ბოლო მოთხოვნის შესაბამისი არგუმენტი: თუ ნაკადის ფუნქცია დროის მიმართ დამოუკიდებელია და სითხის ნაკადი კი წონასწორული, მაშინ სითხე თავისუფლების ერთი ხარისხის მქონე ჰამილტონისეული სისტემის ექვივალენტურია. როგორც ვიცით, ასეთ შემთხვევაში ქაოსური ქმედების არანაირი შესაძლებლობა არ არსებობს. სითხის ნაკადის ენაზე შეგვიძლია ვთქვათ, რომ სითხე შერევის ამსახველ „თავისუფლების ერთნახევარი ხარისხის მქონე“ ჰამილტონის ფუნქციის სისტემის ექვივალენტურია, ხოლო ქაოსური (შერევითი) ქმედება კი დასაშვებია. ბოლო შემთხვევაში, მე-8 თავის თანახმად, შერევითი ქმედება მდგომარეობათა სივრცეში მიმდინარე ქაოსურ ქმედებასთან დაკავშირებით პარამეტრის მნიშვნელობების გარკვეულ დიაპაზონისათვის შეიძლება საერთოდ არ გამოქვადეს. ნაკადის ნაწილი შესაძლოა შერეული, მღორე ან არაშერეული სახის იყოს.

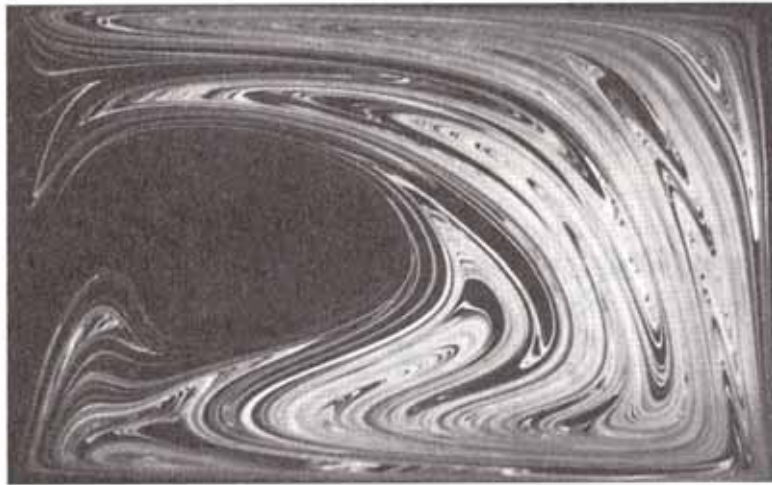
11.2 და 11.1 ნახაზები სითხის ნაკადის შესაბამის ზოგიერთ ტრაექტორიას გვიჩვენებს. ტრაექტორიები სითხის მცირე, შეფერილი წვეთის შეყვანის შედეგად მკვეთრ კონტურებს იძენენ. 11.2 ნახაზზე ნაჩვენებია შემთხვევისთვის ნაკადი მარჯვენა და მარცხენა ნაწილების მიმართ საპირისპირო მიმართულების მქონე სტაციონარული მოძრაობით არის განპირობებული. მოცემული ტრაექტორიები თავიანთი ფორმით გვაგონებს ჰამილტონისეული სისტემის ფაზური სივრცის ტრაექტორიებს. როგორც ჰამილტონისეული სისტემების შემთხვევაში, ნაკადის ორგანიზაციას აქაც ელიფსური და ჰიპერბოლური წერტილები ახდენს.

თუ სითხის წვეთი ელიფსური წერტილის მახლობლად იქნა შეყვანილი ნაკადში, იგი ფიქსირებულ მდგომარეობას ინარჩუნებს ან ელიფსური წერტილის მახლობლად თანაბრად (ლამინარულ რეჟიმში) ცირკულირებს.



ნახაზი. 11.2. სითხის შეფერადებული წვეთის გადაადგილების ტრაექტორიათა სქემა. მარჯვენა და მარცხენა ნაწილები მუდმივი სიჩქარითა და ურთიერთსაპირისპირო

მიმართულებით მოძრაობს. ნახაზზე აღნიშნულია ელიფსური წერტილებისა და ჰიპერბოლური (საყრდენი) წერტილის მდებარეობა. ფოტოსურათი გამოქვეყნებულია ჯ. ოტინოს ნებართვით.



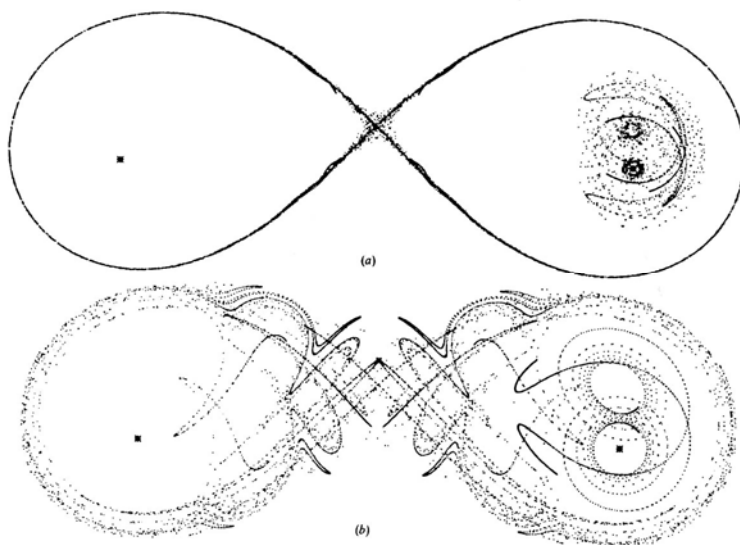
ნახაზი. 11.3. სითხის შეფერადებული წვეთის ტრეკი მოწყობილობის მოძრავი გვერდების პერიოდული გადაადგილებისას წარმოიქმნება. 11.1 ნახაზზე ნაჩვენებთან შედარებით ისინი 90⁰-ით შებრუნებულია. ჰიპერბოლური წერტილის მახლობლად, სითხე შერევისთვის დამახასიათებელ გაწელვისა და მოკეცვის ტიპის ქმედებებს ამჟღავნებს. ([Ottino 1989 მიხედვით, გვ. 210.]

ჰიპერბოლური წერტილის მახლობლად შეყვანილი წვეთის შემთხვევაში ჰიპერბოლური წერტილის მიმართ სითხე „გაწელილია“ და წერტილის არასტაბილურ მრავალსახეობასთან დაკავშირებული მიმართულებით გადაადგილდება, ხოლო წვეთი სტაბილური მრავალსახეობის გასწვრივ მდებარე წერტილისაკენ მიიზიდება. ნაკადმა შეიძლება შერევის მახასიათებელი თვისებები განავითაროს, თუ ჰამილტონისეულ სისტემას მე-8 თავში განხილული ჰომოკლინიკური და ჰეტეროკლინიკური ტრაექტორიები ექნება. ასეთი ტრაექტორიების არსებობა შესაძლებელია ნახაზზე არსებული „ლრუს“ მარჯვენა და მარცხენა გვერდების წინ და უკან პერიოდული მოძრაობის შემთხვევაში (იხ. ნახაზი. 11.3). ტრასერული საღებავის წვეთი ფაზური სივრცის ტრაექტორიების შესაბამისი ჰომოკლინიკური და ჰეტეროკლინიკური კუთხეების ანალოგიურად, განიცდიან გაწელვასა და მოკეცვას (იხ. ნახაზი.11.4).

სითხის ნაკადთან დაკავშირებით ჰამილტონის ფუნქციის ანალოგიის გამოყენების კიდევ ერთი მაგალითი ჰამილტონისეული დინამიკის KAM ზედაპირებს უკავშირდება. მე-8 თავის თანახმად, მდგომარეობათა სივრცეში დინამიკური სისტემის ტრაექტორიებისთვის KAM ზედაპირები ბარიერს ქმნიან. ტრაექტორიები სივრცის ზოგიერთ ნაწილში ქაოსურად შეიძლება გადაადგილდებოდეს, მაგრამ KAM ზედაპირები პარამეტრის მნიშვნელობების

გარკვეული დიაპაზონების შემთხვევაში სივრცის ზოგიერთ დასაშვებ არეში ტრაექტორიის შესვლას ეწინააღმდეგებიან.

ზღუდავენ თუ არა KAM ზედაპირები ანალოგიური სახით სითხის შერევას? შეგვიძლია თუ არა KAM ზედაპირების გამოყენება იმის გასარკვევად, თუ რატომ არ ვლინდება შერევა ნაკადის ზოგიერთ არეში, მაშინ როდესაც შერევა იმავე ნაკადის სხვა არეებში აშკარად შეიმჩნევა? ექსპერიმენტები (KUS92) (KUO92) (OMT92) გვიჩვენებს, რომ ორივე შეკითხვის პასუხია დიახ. 11.5 ნახაზი გვიჩვენებს სითხის ნაკადში მილაკისებრი მიქსერის მეშვეობით შეყვანილი საღებავის ტრეკს. სითხე ზემოდან შედის და ქვემოდან გამოდის.



ნახაზი. 11.4. სითხის ტრაექტორიების მსგავსება ჰამილტონისეულ სისტემებისათვის დაკვირვებულ ჰომოკლინიკურ კუთხეებთან. ტრაექტორიები გამოთვლილია ტენდრილ-ვორლის მოდელური სისტემისთვის. (a) ნაკადის მცირე სიჩქარის შემთხვევაში „უნაგირის“ წერტილის მახლობლად არსებული ჰომოკლინიკური ქმედება დაფარულია (ცენტრი). (b) ნაკადის შედარებით მაღალი სიჩქარის დროს ჰომოკლინიკური დიაპაზონი აშკარავდება. ([Ottino, 1989] მიხედვით.

როგორც ხედავთ, ერთ წერტილში შეყვანილი საღებავი მილში საკმაოდ ჩვეულებრივი ტრაექტორიის გასწვრივ მოძრაობს და არავითარ შერევას არ ახდენს. საღებავი შეჰყავთ KAM ზედაპირის ფარგლებშიც, სადაც მოძრაობა რეგულარულია. მეორეს მხრივ, მილის ბოლოში შეყვანილი საღებავი გამრუდებულ კვალს ტოვებს და ამ შემთხვევაში ტრაექტორია ერთი შეხედვით ქაოსურია. როგორც ვხედავთ, ჰამილტონისეული სისტემის ტრაექტორიათა

თვისებების გამოყენებით ვიკვლევთ სითხის კომპლექსურ ნაკადებსაც. ამ მეთოდს სამგანზომილებიანი ქაოსის შემთხვევაშიც შეგვიძლია მივმართოთ (FKO98).

მარცვლისებრი ნაკადები

არსებობს „სითხის“ ნაკადის კიდევ ერთი ტიპი, რომლის შესწავლაც არაწრფივი დინამიკის დამსახურებაა. ამ შემთხვევაში ჩვენს წინაშეა ე.წ. მარცვლისებრი ნივთიერების ნაკადი, როგორცაა ქვიშა და გამდნარი ლითონის მცირე ზომის ბურთულები. ასეთ ნივთიერებებს სათანადო პირობებში ნაკადის შექმნა შეუძლია თუმცა მათი თვისებები წყლისა თუ ჰაერის მსგავსი ჩვეულებრივი სითხეების თვისებებისგან განსხვავებული იქნება. მაგალითად, სცადეთ შეანჯღრიოთ ნუშთან შერეული ნივთიერების კონტეინერი. ალბათ გაგიკვირდებათ, რომ ნივთიერების დიდი ზომის მარცვლები კონტეინერის ზედა ნაწილში, ხოლო პატარა ზომისა ქვედა ნაწილში მოექცევა. ამგვარი მარცვლოვანი მასალების ნაკადი და შერევა მნიშვნელოვანია ფარმაცევტული და საკვები პროდუქტების წარმოების ტექნოლოგიაში. ის ასევე დიდ როლს ასრულებს ქიმიურ, კერამიკულ და მეტალურგიულ ინდუსტრიაში.

11.3. კორელირებადი ოსცილატორების მოდელები, ფიჭური ავტომატი და ქსელები

რეალური სისტემების დინამიკა ხშირად ძალზე რთულია და როგორც ექსპერიმენტული, ასევე თეორიული თვალსაზრისით ძნელი გამოსაკვლევაა. დრო-სივრცის არაწრფივობის ილუსტრაციის მიზნით ხშირად კომპიუტერის საშუალებით შედარებით ადვილად გასაგებ მარტივ მოდელებს ვადგენთ. მიუხედავად იმისა, რომ ამ მოდელებს რეალურ ფიზიკურ თუ ბიოლოგიურ სისტემებთან პირდაპირი კავშირი არ აქვთ, მოდელური სისტემების ქმედების ზოგადი შემთხვევა შედარებით რთული და რეალურად არსებული სისტემების დინამიკის შესახებ აზრის ჩამოყალიბებაში მაინც დაგვეხმარება.

მოცემულ პარაგრაფში აღვწერთ სამ ასეთ მოდელურ სისტემას. სამივე მაგალითი დისკრეტული ელემენტების დინამიკას მოიცავს. ერთი ელემენტის ქმედება გავლენას ახდენს მეორე ელემენტის ქმედებაზეც. პირველი მოდელი იტერაციული ასახვის ფუნქციების ცნობილი იდეის განზოგადებაა. მეორე მოდელი იტერაციული გამოთვლების ფიჭურ ავტომატად წოდებული კლასია. ორივე სისტემა შემთხვევითი სახით არჩეული საწყისი პირობების ფონზე საინტერესო და რთული სივრცითი სტრუქტურების გამოძვევ

იტერაციულ სქემებს მოიცავს. მესამე შემთხვევა ელემენტების ქსელია (რომლებიც ამუშავებენ შემავალ სიგნალს და უზრუნველყოფენ გამოძავალ სიგნალს).

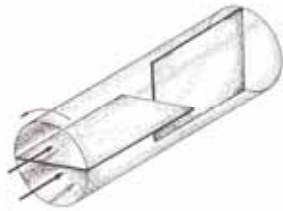
იტერაციული ასახვის კორელირებადი ფუნქციები

იდენტურ დინამიკურ სისტემათა ერთობლიობისაგან (როგორცაა ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციები) შევქმნათ მოდელური სისტემა. ერთობლიობის ყოველი წევრი სხვადასხვა სივრცით მდებარეობასთან იქნება დაკავშირებული. თითოეულ სივრცით მდებარეობას სისტემის განმსაზღვრელ, დინამიკური კანონით დადგენილ რიცხვსაც შეუვსაბამებთ. ჩვენ გვინტერესებს, თუ რა შემთხვევაში აღნოჩნდება ეს რიცხვები კორელირებადი თუ არაკორელირებადი. სხვადასხვა მდებარეობები უმარტივეს სიტუაციაში შეიძლება წრფეზე იქნეს დატანილი. ჩვენთვის არსებითია მხოლოდ ერთი სივრცითი მიმართულების დადგენა.

რასაკვირველია, თუ სისტემის თითოეული წევრი უბრალოდ ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად მოქმედებს, საინტერესოს ვერაფერს ვნახავთ. ჩვენ სხვადასხვა სივრცით მდებარეობებს შორის გარკვეული კავშირი ან ურთიერთქმედება გვესაჭიროება. სხვადასხვა მდებარეობებს შორის კავშირის გაძლიერებასთან ერთად სისტემას სპონტანურად შეუძლია წარმოქმნას სივრცითი წესრიგი ანუ გამოვლენილი რიცხვების კორელირებად ცვლილებებთან დაკავშირებული სივრცითი სტრუქტურები. მიუხედავად იმისა, რომ ამ მოდელს ნებისმიერ რეალურ ფიზიკურ სისტემას პირდაპირ ვერ შეუვსაბამებთ, სავარაუდოა, რომ სივრცული თვალსაზრისით ერთმანეთისაგან დაშორებულ „ოსცილატორებს“ შორის კავშირის მქონე რეალურმა სისტემებმა შეიძლება ზოგიერთი საერთო დინამიკური და სივრცითი თვისებები გამოავლინონ.

კონკრეტული მაგალითის სახით განვიხილოთ ერთგანზომილებიანი მოდელი. დავუშვათ, რომ $i = 1, 2, 3, \dots, N$ -ით აღნიშნულ მდებარეობებს შეესაბამება N -ური დინამიკური სისტემა. ყოველი მდებარეობის შემთხვევაში ვადგენთ $x(i)$ სიდიდეს:

$$x_{n+1}(i) = \frac{1}{1+2\varepsilon} [f(x_n(i)) + \varepsilon f(x_n(i-1)) + \varepsilon f(x_n(i+1))] \quad (11.3-1)$$



ნახაზი. 11.5. საღებავის ტრეკი, როდესაც იგი შეყვანილია მილისებრ მიქსერში გამავალ ნაკადში (თვით მიქსერის სქემა მარცხნივაა წარმოდგენილი). მარჯვენა მხარეს მოყვანილ მილაკში სითხე ზედა ნაწილში შედის და ქვემოდან გამოდის. საღებავი ქაოსურ ტრაექტორიებსა და კარგ გამოკვეთილ შერევით ქმედებას გვიჩვენებს (KUO92-ის მიხედვით)

აქ ε პარამეტრი განსაზღვრავს თანმიმდევრულ სიდიდეებს შორის არსებული კავშირის ხარისხს. f ფუნქცია ლოჯისტიკური ასახვის ტიპის ნებისმიერი ფუნქცია შეიძლება იყოს. $1/(1+2\varepsilon)$ მამრავლი უზრუნველყოფს x მნიშვნელობების ნულსა და ერთს შორის მდებარეობას, მაგალითად, f ფუნქციის მიერ $[0,1]$ დიაპაზონის საკუთარ თავზე ასახვის შემთხვევაში. კიდურა 1 და N წერტილებში, არაცალსახობის თავიდან ასაცილებლად, ხშირად $x(1) = x(N)$ ტოლობა შემოგვაქვს. შეგვიძლია მრავალი ერთმანეთისაგან განსხვავებული ფუნქციის გამოყენება და თანმიმდევრულ სიდიდეებს შორის კავშირის დამყარების ანალოგიურად, კავშირს შედარებით დაშორებულ სიდიდეებს შორისაც დავამყარებთ.

ამ ტიპის სისტემის გამოკვლევისთვის „შემოგვაქვს“ x მნიშვნელობების შემთხვევითი სახით შერჩეული სიმრავლე (როგორც წესი, ნულსა და ერთს შორის მყოფი მნიშვნელობებით) და შემდეგ დინამიკას თითოეული მდებარეობის შემთხვევაში x მნიშვნელობების მიმართ (11.3-1) დამოკიდებულების გამოყენებით ვამყარებთ. შემდეგ უნდა ვცვალოთ ორი პარამეტრი. ერთ-ერთი მათგანი, ასახვის ფუნქციასთან დაკავშირებული პარამეტრია (ანუ A პარამეტრი ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციაში), ხოლო მეორე ε – ახლომდებარე სიდიდეებს შორის კავშირის განმსაზღვრელი პარამეტრია.

ასეთი კორელირებადი სისტემის ქმედება საკმაოდ რთულია და სრულყოფილად ნამდვილად არ არის გამოკვლეული. ყველაზე საინტერესო ეფექტები მაშინ ვლინდება, როდესაც ყოველ სივრცით მდებარეობაზე ტოლი A მნიშვნელობები მდებარეობს არეში, რომლის მიმართ ინდივიდუალური ასახვის ფუნქცია მეზობლებთან კავშირის დამყარების

გარეშე ქაოსურად იქცევა. კავშირის გაძლიერებასთან ერთად სისტემა ერთდროულად ცვლადი რიცხვითი მნიშვნელობების ჯგუფების ან სიმრავლის მიხედვით ორგანიზებულ სივრცით სტრუქტურას ქმნის. სისტემა განსაკუთრებულ სივრცით წესრიგს შემთხვევითი სახით აღებული საწყისი მდგომარეობის შემთხვევაში ამყარებს.

კ. კანეკომ (KAN89a, KAN90, KAN92) შეისწავლა ერთგანზომილებიანი კორელირებად იტერაციულ ასახვათა ფუნქციები, რომელთა შემთხვევაშიც ყოველი სივრცითი მდებარეობა ერთმანეთთან შემდეგი სახითაა დაკავშირებული:

$$x_{n+1}(i) = (1 - \varepsilon)f(x_n(i)) + \frac{\varepsilon}{N} \sum_k f(x_n(k)) \quad (11.3-2)$$

ანალიზის სიმარტივისთვის, მე-5 თავის ანალოგიურად, x მნიშვნელობათა დიაპაზონი ორ მონაკვეთად შეგვიძლია დავყოთ და მარჯვენა ნაწილი R -ით, ხოლო მარცხენა - L -ით აღვნიშნოთ. შემდეგ R -ისა და L -ის შესაბამის სხვადასხვა მდებარეობებს შორის არსებულ კორელაციებს დავაკვირდეთ. კანეკომ დაადგინა, რომ სისტემის კოჰერენტული რხევები ჩვეულებრივად ყალიბდება: ყველა მდებარეობა ერთდროულად ახდენს ცირკულაციას R -სა და L -ს შორის. ε -სა და ასახვის პარამეტრის ზოგიერთი მნიშვნელობისთვის სისტემა ორ ურთიერთმონაცვლე ჯგუფად იშლება, რომლებიც ახდენენ ცირკულაციას R -სა და L -ს შორის ფაზების დამთხვევის გარეშე (ანუ არ არის აუცილებელი, რომ ერთი ჯგუფის წევრები სივრცეში თანმიმდევრული აღმოჩნდნენ). მთავარი იდეა იმაში მდგომარეობს, რომ ასახვათა კორელირებადი სისტემები საინტერესო სივრცით წესრიგს აყალიბებს და ეს არის ინდივიდუალური ელემენტის ქაოსური ქმედებისა და თანმიმდევრულ წევრებს შორის კავშირის დამყარებისთვის დამახასიათებელი ერთგვაროვნებისკენ მიდრეკილებას შორის კონკურენციის შედეგი. კონკურენციის ამგვარი ტიპი სტრუქტურების წარმომქნელი მრავალი სისტემის ზოგადი თვისებაა.

კორელირებად იტერაციულ ასახვათა მოდელებს ბევრი საინტერესო თვისება გააჩნიათ. დამატებითმა ხმაურმა ისინი შეიძლება უფრო მოწესრიგებულად აქციოს (SCK99). თუ დინამიკა მაღალგანზომილებიანი ხდება, დაჩრდილვის თეორემა (თავი 2) შესაძლოა დაირღვეს და ასეთი სისტემების კვლევის მათემატიკური მოდელიც აღარ იარსებებს (LAG99).

კორელირებადი ქაოსური ასახვები მარტივ სტრუქტურებსაც შეიძლება ქმნიდეს (SID98). ბოლო პერიოდში ეგოლოფმა (EGO00) ივარაუდა, რომ კორელირებადი ქაოსური ასახვების მოდელების კვლევებით დადგენილი წონასწორობის სტატისტიკური მექანიკის მეთოდები

წონასწორობის მდგომარეობიდან საკმაოდ გადახრილი სივრცითი ევოლუციის მქონე ქაოსური სისტემებისთვის შეიძლება გამოვიყენოთ. ასეთი სისტემების გააზრება, წონასწორული მდგომარეობებისთვის დანერგილი სტანდარტული ანალიტიკური მეთოდებით ძალზე რთულია (თუ არა შეუძლებელი).

ფიჭური ავტომატი

ფიჭური ავტომატები საინტერესო დრო-სივრცული სტრუქტურების მქონე მარტივი, დისკრეტული სისტემებია. სახელწოდება ამ ტიპის სისტემის დანერგვის პროცედურიდან გამომდინარეობს. ჩვენ რაიმე სივრცით არეს დისკრეტულ უჯრედებად ვყოფთ. თითოეულ უჯრედს რიცხვითი მნიშვნელობა (ასევე თვისება ან რაიმე სხვა ტიპის სიმბოლო) აქვს. წესების თანახმად, სიმბოლო იცვლება დროის დისკრეტული ბიჯების მიხედვით. უმეტეს შემთხვევაში წესები გამომდინარეობენ „ლოკალური“ ურთიერთქმედებებიდან: მოცემული უჯრედი თვისებას იცვლის საკუთარი და მოსაზღვრე უჯრედების მახასიათებლებიდან გამომდინარე. ამრიგად, სისტემის ევოლუცია „ავტომატურია“. შეუღლებულ იტერაციულ ასახვათა ფუნქციების ერთგანზომილებიანი სიმრავლე ქმნის მარტივ ფიჭურ ავტომატს, რომლის ევოლუციის წესები მსგავსია (11.3-1) ან (11.3-2) დამოკიდებულებებისა.

ფიჭური ავტომატების უმრავლესობა ორ ან მეტ სივრცით განზომილებას იყენებს და თვისებათა შეზღუდული (ძალზედ მცირე) რაოდენობა გააჩნია. ფიჭური ავტომატების უმრავლესობა კომპიუტერებშია დანერგილი და მათი წარმოშობა 1940-იანი წლების ადრეულ ელექტრონულ კომპიუტერს უკავშირდება [Toffoli და Margolus, 1987].

შეკქმნათ მარტივი ერთგანზომილებიანი ავტომატი ერთგანზომილებიანი (შესაძლოა უსასრულო სიდიდის) არის უჯრედებად დაყოფის გზით. გარკვეული საწყისი მახასიათებელი თვისების თითოეულ უჯრედს შევუსაბამებთ რაიმე რიცხვს (როგორც წესი, მთელს). შემდეგ დროის დისკრეტულ მომენტებში თითოეული უჯრედი სინქრონულად გაივლის მნიშვნელობათა გარკვეულ მიმდევრობებს. მაგალითად, შეგვიძლია ავირჩიოთ 1 (მნიშვნელობით „ცოცხალი“) ან 0 („მკვდარი“). ევოლუცია შესაძლოა შემდეგნაირი იყოს:

1. თუ ცოცხალ უჯრედს ორივე მხარეს ცოცხალი მეზობლები ჰყავს, იგი კვდება (ნულად გარდაიქმნება) „ჭარბი დასახლებულობის“ გამო.

2. თუ მკვდარ უჯრედს თითოეულ მხარეს ცოცხალი მეზობლები ჰყავს, მაშინ დროის შემდგომ მომენტში ცოცხლდება (1) („წყველი აჩენს შვილს“)

3. თუ ცოცხალ უჯრედს ცოცხალი მეზობლები არ ჰყავს, იგი კვდება (ნულად გარდაიქმნება) „სიმარტოვის“ გამო.

4. თუ უჯრედს (ცოცხალს ან მკვდარს) ერთი ცოცხალი და ერთი მკვდარი მეზობელი გააჩნია, იგი უცვლელი რჩება.

5. თუ მკვდარ უჯრედს ორი მკვდარი მეზობელი გააჩნია, იგი მკვდრად დარჩება.

ზღვრული სივრცის მქონე სივრცითი არის არსებობის შემთხვევაში მის ბოლოებთან დაკავშირებული წესებიც უნდა განისაზღვროს. ჯერჯერობით დავუშვებთ, რომ უსაზღვროდ გრძელი არე გაგვჩნდეს. შემდეგ ერთიანებისა და ნულების საწყის სტრუქტურას შევუსაბამებთ უჯრედებს და სისტემას არსებული წესების მიხედვით ევოლუციის საშუალებას მივცემთ. მაგალითად, დავიწყებთ ...0,1,0,...-ით ანუ თითოეული ნულითა და იზოლირებული ერთიანით. მე-(3) წესის თანახმად, მოცემული ცოცხალი უჯრედი მომდევნო მომენტში კვდება, სისტემა თითოეული ნულის მიმართულებით ვითარდება და საშუალოდ აქვე რჩება.

ამჯერად მეორე საწყისი სტრუქტურა, ვთქვათ ...0,1,1,0,... განვიხილოთ (ანუ იზოლირებული ცოცხალი წყვილის მქონე თითქმის ყოველი ნულიანი). როდესაც თითოეულ ერთიანს მეზობლად 1 და 0 აქვს, მე-(4) წესის თანახმად, იგი უცვლელი რჩება. მესამე მაგალითია ...0,1,1,1,0,... სადაც ყველა ელიფსი აღნიშნავს ნულიანს. ეს სტრუქტურა პირველ დროით მომენტში ...1,0,1,0,... მიმდევრობით, ხოლო შემდეგ ყოველთვის ნულის მიმართულებით ვითარდება. ამრიგად ორი განსხვავებული საწყისი სტრუქტურა ერთსა და იმავე საბოლოო მდგომარეობას განაპირობებს.

ეს უბრალო მაგალითები გვიჩვენებს, რომ ფიჭური ავტომატის ქმედებასთან დაკავშირებით შემდეგი კითხვები შეგვიძლია დავსვათ:

1. რა ტიპის საწყისი სტრუქტურები რჩება ევოლუციის წესების მიუხედავად უცვლელი?
2. საწყისი სტრუქტურების რა ტიპის სიმრავლე იწვევს სრულ გადაშენებას (სიკვდილს)?
3. საწყისი სტრუქტურების რა ტიპის სიმრავლე იწვევს ევოლუციის წესების მიხედვით შემდგომში უცვლელ სხვა სტრუქტურებს?
4. საწყისი სტრუქტურების რა ტიპს ახასიათებს პერიოდულობა?
5. რა ტიპის სტრუქტურები ვითარდება „შემთხვევითი“ სახის საწყისი სტრუქტურებიდან გამომდინარე?
6. არის, თუ არა რეკურენტული სტრუქტურები (ან ციკლები) ერთ-ერთი უჯრედის მნიშვნელობის შეცვლის „შეშფოთებებთან“ დაკავშირებით სტაბილური?
7. ევოლუციის წესების შეცვლასთან ერთად რა ემართება სტრუქტურებს?

ჩვენ მიერ ფიჭურ ავტომატთან და სისტემის დინამიკასთან დაკავშირებით დასმულ შეკითხვებს შორის აშკარა მსგავსებაა. ფაქტიურად, ამ შემთხვევაში ვიყენებთ იგივე ტერმინოლოგიას. მაგალითად, უცვლელი სტრუქტურა ევოლუციის *ფიქსირებული წერტილია*. რეკურენტული სტრუქტურების მიმდევრობა ქმნის *ზღვრულ ციკლს*. შეგვიძლია განვიხილოთ სტრუქტურა (ან სტრუქტურების პერიოდული ციკლი), რომლის მიმართ დანარჩენი სტრუქტურების სიმრავლე სისტემის ევოლუციის პროცესში *მიმზიდველს წარმოადგენს*. თუ თითქმის ერთნაირი სტრუქტურები ძალზე განსხვავებულ საბოლოო სტრუქტურებს გვაძლევს, მაშინ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ევოლუცია *საწყისი პირობების მიმართ მგრძობიარე დამოკიდებულებას* ამჟღავნებს. ამბობენ, რომ სტრუქტურა სტაბილურია, თუ მცირეოდენი შეშფოთება (მაგალითად, ერთერთი უჯრედის რიცხვითი მნიშვნელობის შეცვლა) კვლავ საწყის სტრუქტურასთან დაბრუნებას იწვევს. წინააღმდეგ შემთხვევაში სტრუქტურა არასტაბილურია.

ამოცანა 11.3-1. ზემოთ მოყვანილ ერთგანზომილებიან ავტომატთან დაკავშირებით შეამოწმეთ სხვადასხვაგვარი საწყისი სტრუქტურები და აღმოაჩინეთ კიდევ ერთი განსხვავებული იტერაციული სტრუქტურა. შეგიძლიათ თუ არა სტრუქტურათა პერიოდული ციკლის დადგენა? სტაბილურია თუ არა რეკურენტული სტრუქტურები?

ამოცანა 11.3-2. შეცვალეთ ერთგანზომილებიანი ავტომატის ევოლუციის ერთ-ერთი წესი. პოულობთ თუ ვერა რეკურენტულ სტრუქტურებს და ციკლებს? გამოიკვლიეთ ამ სტრუქტურების სტაბილურობის საკითხი.

ამოცანა 11.3-3. შეადგინეთ უჯრედების ზღვრული რაოდენობის მქონე ავტომატის სასაზღვრო პირობები იმგვარად, რომ შესრულდეს $x(1)=x(N)$, სადაც N უჯრედების რაოდენობაა. ტექსტში მოყვანილი წესების მიხედვით გამოიკვლიეთ ამ ავტომატის მიმზიდველები, მიზიდულობის არეები და ა.შ.

ორგანზომილებიანი ფიჭური ავტომატი კიდევ უფრო მეტ შესაძლებლობას გვაძლევს. ამისთვის მოვიყვანოთ ორ მაგალითს. მათემატიკოს ჯონ კონვეის მიერ წარმოდგენილი „ცხოვრების თამაში“ ორგანზომილებიან არეს უჯრედთა კვადრატულ ცხრილად ჰყოფს. თითოეულ უჯრედს “1” (“ცოცხალი”) ან “0” (“მკვდარი”) შეესაბამება. ყველა მათგანს რვა

მეზობელი გააჩნია, რომლების მდგომარეობაც გავლენას ახდენს ამ უჯრედების ევოლუციაზე. კონვეის თანახმად, ევოლუციის წესები ასე გამოიყურება:

1. ცოცხალი უჯრედი ("1") მხოლოდ მაშინ გადარჩება, როდესაც იგი ორი ან სამი ცოცხალი მეზობლით არის გარემოცული.

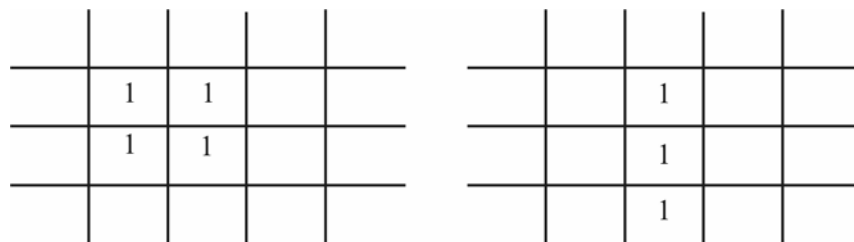
2. ცოცხალი უჯრედი კვდება, თუ მას 3-ზე მეტი (ჭარბი მოსახლეობა) ან ორზე ნაკლები ცოცხალი მეზობელი (მარტოობა) გააჩნია.

3. მკვდარი უჯრედი ("0") ერთიანში გადადის, თუ მას ზუსტად სამი ცოცხალი მეზობელი ჰყავს "(აშკარად, უფრო რთული სოციალური ურთიერთობები არსებობს ამ გამოგონილ სამყაროში.)

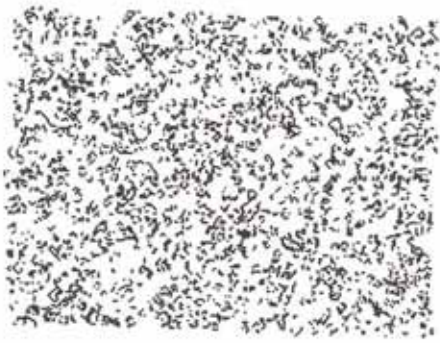
ჩვენ კვლავ ზემოთ დასმული კითხვების წინაშე ვდგებით. 11.6 ნახაზი გვიჩვენებს ცხოვრების თამაშთან დაკავშირებით სტაბილურ და პერიოდულ სტრუქტურებს.

11.7 ნახაზი შემთხვევითი სახის საწყისი პირობების სიმრავლის მიხედვით გამოვლენილ სტრუქტურას გვიჩვენებს. ცხადია, ჩვენ შესაძლებლობების ძალიან დიდ სიმრავლეს ვფლობთ ანუ შეგვიძლია როგორც ევოლუციის წესების სიმრავლის შეცვლა, ასევე ავტომატის კონსტრუქციის სამ ან მეტ განზომილებაში განვრცობა. დამატებითი ინფორმაციისთვის იხილეთ თავის ბოლოში მოყვანილი ლიტერატურა.

ორგანზომილებიანი ფიჭური ავტომატის მეორე მაგალითი უჯრედების (წვეროების) ექვსკუთხედ მასივს იყენებს და მესრის ერთი წვეროდან მეორეში გადაადგილების შემძლე „ნაწილაკს“ შეუსაბამებს ვექტორს (რომელიც წვეროების შემაერთებელ ერთ-ერთ წრფეზე შეიძლება აღმოჩნდეს).



ნახაზი. 11.6. ცხოვრების თამაშის ზოგიერთი რეკურენტული სტრუქტურა. მარცხნივ ნაჩვენებია ევოლუციის წესების ზეგავლენის მიუხედავად უცვლელად შენარჩუნებული სტრუქტურა. მარჯვნივ გამოსახულია ევოლუციის წესების ზეგავლენის შედეგად (პერიოდი-2-ის მქონე) მიღებული პერიოდულად რეკურენტული სტრუქტურა.



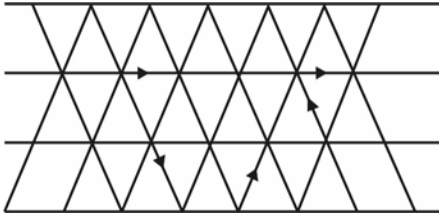
ნახაზი 11.7. ცხოვრების თამაშის ევოლუციური სტრუქტურა მართკუთხა გამოთვლით ბაღესთან დაკავშირებული შემთხვევითი საწყისი პირობების სიმრავლით. სტრუქტურა ვერ აღწევს სტაბილურ მდგომარეობას, მაგრამ „სტრუქტურების“ გამოვლინება მაინც შეიმჩნევა. ფრაქტალური (უჯრედის მთვლელი) განზომილება დაახლოებით

1.7-ია (მსგავსი განზომილებების მქონე სხვა სტრუქტურები იხ. 11.6 პარაგრაფში)

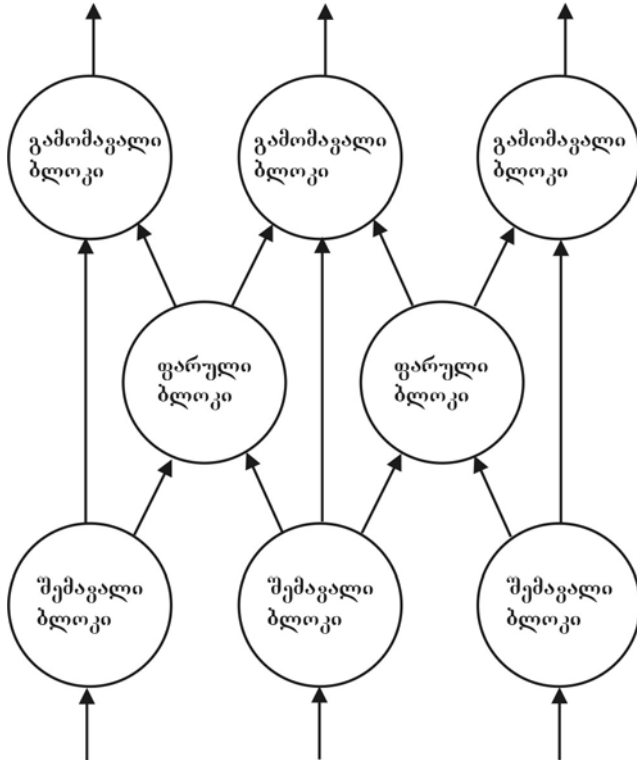
11.8 ნახაზი გვიჩვენებს ტიპურ მასივს (მოდელის ასეთ ტიპს ხშირად „მესრისებრი გაზის მოდელს“ უწოდებენ, რადგან წვეროდან წვეროზე ნაწილაკის გადაადგილება რეზერვუარში გაზის ნაწილაკების მოძრაობას მოგვაგონებს). მესერში ნაწილაკების ქმედების შესაბამისი წესების შერჩევის შემთხვევაში მიღებული სურათი მოგვაგონებს ორგანიზომილებიანი სითხის ნაკადს. დეტალებისთვის თავის ბოლოში მოყვანილ ლიტერატურას გაეცანით. ფიჭური ავტომატის მოდელები ადამიანის იმუნური სისტემის შესწავლისთვისაც გამოიყენება (ZOB98).

ქსელები

დისკრეტული სივრცითი სისტემების ბოლო მაგალითია მოცემულ პარაგრაფში მოყვანილი პირველი ორი სისტემისაგან ერთგვარად განსხვავებული სტრუქტურის მქონე სისტემების კლასი, კერძოდ **ქსელები** (ორგანიზმის ნერვული უჯრედების ქსოვილებთან მსგავსების გამო მათ ზოგჯერ **ნეირონულ ქსელებსაც** უწოდებენ). ქსელები წარმოადგენს უჯრედთა მასივებს. როგორც წესი, თითოეულ უჯრედს ერთი ან ორი შესაძლებელი სიმბოლო შეესაბამება. მოცემული უჯრედი ამავე ქსელში განლაგებულ სხვა უჯრედებთან ერთ ან მეტ კავშირს შეიძლება ამყარებდეს. ასეთი კავშირები უჯრედში შემავალ სიგნალს გვაძლევს. ევოლუციის წესები მოცემული უჯრედისთვის ხშირად ლოგიკური ალგებრის მსგავსი ორობითი ოპერაციების მეშვეობით არის მოცემული. ამ შემთხვევაში უჯრედიდან გამომავალი სიგნალი ქსელის სხვა უჯრედისთვის (ან უჯრედებისთვის) შემავალ სიგნალად გადაიქცევა. ფიჭურ ავტომატსა და ქსელს შორის განსხვავება კავშირის ხასიათში გამოიხატება. ფიჭურ ავტომატში უჯრედის მდგომარეობას დროის მომდევნო მომენტში მოცემული უჯრედის მეზობლები და არსებული მდგომარეობა განსაზღვრავს. უჯრედი გავლენას ახდენს მეზობლებზეც.



ნახაზი. 11.8. ექვსკუთხა, ორგანზომილებიანი აირის მესრისებრი ფიჭური ავტომატის ესკიზი. თითოეული წვეროს შესაბამისი ვექტორი აღნიშნავს ნაწილაკის მოძრაობის მიმართულებას. ზოგიერთ მოდელში ერთსა და იმავე წვეროზე ნებისმიერ დროს ერთზე მეტი ნაწილაკი შეიძლება აღმოჩნდეს.



ნახაზი. 11.9. ქსელის დიაგრამა. შემაჯავალი ბლოკები ან უჯრედები უკავშირდება სხვადასხვა გამომავალ ბლოკებს და, მოცემულ შემთხვევაში, ფარული ბლოკების ფენასაც. სხვადასხვა ფენებთან დაკავშირებული გამომავალი ბლოკების დატვირთვები შეიძლება შეიცვალოს.

11.9 ნახაზი წარმოგვიდგენს მარტივ ნეირონულ ქსელს.

სტიუარტ კაუფმანმა (KAU91) დაწვრილებით შეისწავლა ბულის ქსელი. ასეთი ქსელის ქმედება როგორც ცალკეულ უჯრედში შემაჯავალი სიგნალის მომცემი კავშირების რაოდენობაზე, ასევე იმ წესებზეა დამოკიდებული, რომლებსაც შემაჯავალი სიგნალი გამომავალ სიგნალში გადაჰყავს. კაუფმანმა დაამტკიცა, რომ ბულის ქსელი, რომლისთვისაც უჯრედების რაოდენობა და თითოეულ უჯრედში შემაჯავალი სიგნალების რაოდენობა ერთი და იგივეა, საწყის პირობებზე საგრძნობლად არის დამოკიდებული და ქაოსურ ქმედებას ავლენს. მდგომარეობათა ციკლებისა და მიზიდვის არეების რაოდენობა შედარებით მცირეა. ამრიგად, ასეთი ქსელები წესრიგის საკვირველ დონეს ავლენს. ამგვარი თვისებები შემაჯავალი სიგნალის რაოდენობის სამამდე დაყვანის დროსაც კი ნარჩუნდება (KAU91). თითოეულ უჯრედზე მხოლოდ ორი შემაჯავალი სიგნალის მქონე ქსელები საკმაოდ სტაბილური კოლექტიური ქმედებისკენ არიან მიდრეკილი. მცირეოდენ შეშფოთებებს სისტემის მდგომარეობიდან გამოყვანა არ შეუძლია. კაუფმანმა და სხვებმა ივარაუდეს, რომ წესრიგისა და ქაოსის

საზღვარზე მყოფი ქსელი ადაპტირებადი სისტემის კარგი მაგალითია. გარემო პირობების ცვლილებებზე რეაგირება მას მოხერხებულად და სწრაფად შეუძლია.

მიუხედავად იმისა, რომ ასეთი ქსელის მოდელები მიზანშეწონილია, მაინც გადაჭრით არ შეგვიძლია თქმა შეუძლიათ თუ არა მათ რეალური ადაპტაციისა და ევოლუციის აღქმა. ამ საკითხების უფრო დეტალური კვლევა იხილეთ [Kaufman, 1993] და [Kaufman, 1995]. **ინტერნეტ ქსელის** მსგავს „ბუნებრივ“ ქსელებს, ელექტრონერგეტიკულ სისტემებსა და ოპერატორთა ჯგუფებს საინტერესო დინამიკა ახასიათებთ (BAA99). ამგვარი ქსელებისთვის ჩვეულებრივი თვისებაა, რომ ახალი წვეროების (ან შეერთების წერტილების) დამატებით ქსელი ფართოვდება და ისინი უკვე კარგად მორგებულ სხვა წვეროებთან კონტაქტში შედიან.

დასკვნები

რას გვაძლევს დისკრეტული მოდელების შესწავლა? საინტერესო სივრცითი სტრუქტურები სისტემის ევოლუციის ძალზე მარტივი წესებისა და შემთხვევითი სახით შერჩეული პირობების შემთხვევაშიც კი ვლინდება. მიღებული შედეგი რეალურ ფიზიკურ და ბიოლოგიურ სისტემებში სტრუქტურის წარმოქმნასთან დაკავშირებული მარტივი წესების შემოდების საშუალებას გვაძლევს. აგრეთვე ვადგენთ, რომ არსებულ წესებში მომხდარმა უმცირესმა ცვლილებებმაც კი ზოგიერთ სისტემებში მკვეთრად განსხვავებული სტრუქტურების წარმოქმნა შეიძლება გამოიწვიოს, ხოლო სხვა სისტემებში ამგვარმა ცვლილებებმა შეიძლება მცირეოდენი ცვლილება ან საერთოდ არანაირი ცვლილება არ გამოიწვიოს. ზოგიერთ სისტემაში სივრცითი სტრუქტურა შეშფოთების მიმართ არასტაბილურ ხასიათს ამჟღავნებს, ზოგიც სტაბილურობას ინარჩუნებს. ამგვარ მოდელებზე დაყრდნობით შეგვიძლია შევისწავლოთ, სტრუქტურის წარმოქმნის რა თვისებებია მნიშვნელოვანი რეალური ფიზიკური, ქიმიური და ბიოლოგიური სისტემების სტაბილურობისთვის.

11.4 გადატანის მოდელები

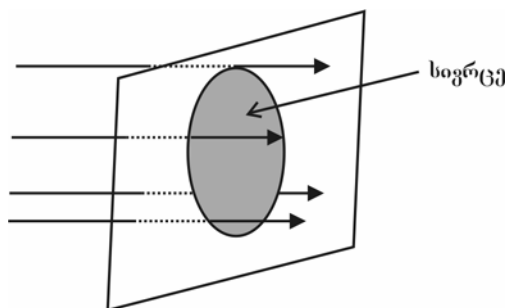
სივრცითი სტრუქტურების წარმოქმნის მრავალი მაგალითი გვხვდება ისეთ სისტემებში, სადაც ადგილი აქვს ერთი სივრცითი არიდან მეორეში ერთი ან მეტი (ნივთიერების) კომპონენტის გადატანას. მოცემულ პარაგრაფში წარმოგიდგენთ გადატანის თეორიის საფუძვლების მცირე შესავალს. მოყვანილ განმარტებებს მომდევნო პარაგრაფებში სტრუქტურების წარმოქმნასთან დაკავშირებული პრობლემების განხილვისთვის გამოვიყენებთ. გადატანის მოდელების მიმართ გამოიყენება დიფერენციალური განტოლებები, რადგან ეს

მეთოდი კომფორტული და „ახლობელი“ მეცნიერთა და ინჟინერთა უმრავლესობისთვის. საბოლოოდ ვნახავთ, რომ წინა პარაგრაფში განხილული დისკრეტული მოდელების ანალოგიურად, ამ მოდელებმაც შეიძლება საინტერესო სივრცითი სტრუქტურების წარმოქმნა აღწერონ.

გადატანის მოდელებში სივრცითი და დროითი ცვლადები უწყვეტად არიან მიჩნეული. წინა პარაგრაფში განხილული დისკრეტული მოდელები კი დისკრეტულ სივრცით (და ზოგჯერ დროით) ცვლადებს იყენებს. დისკრეტულობასა და უწყვეტობას შორის ამგვარ განსხვავებას დროითი დინამიკის შესახებ მსჯელობისას წავაწყდით: უწყვეტი დროითი ცვლადის მქონე სისტემები ჩვეულებრივი რიგის დიფერენციალური განტოლებებით აღიწერებიან, იტერაციული ასახვები კი დისკრეტულ დროით ბიჯებს იყენებენ. დისკრეტული და უწყვეტი ცვლადების მქონე სისტემებს შორის განსხვავება ხშირად აშკარა არ არის. აშკარაა ზუსტი მტკიცებულებების დეფიციტი და ჩვენც მოდელების ამ განსხვავებული კატეგორიების გამორჩევისა და შედარებისას, ექსპერიმენტსა და საღ აზრს შორის კომპრომისული ვარიანტი უნდა ვიპოვოთ.

მოლეკულური დიფუზია

გადატანის ტიპური მაგალითია მოლეკულების სივრცითი გადატანა დიფუზიის პროცესის მეშვეობით. მიკროსკოპულ დონეზე დიფუზია უბრალოდ მოლეკულების მოუწესრიგებელ მოძრაობასთან არის დაკავშირებული. ერთმანეთთან და გარემოს შემადგენელ მოლეკულებთან შეჯახებისას საკვლევი მოლეკულები მაღალი კონცენტრაციის არიდან დაბალი კონცენტრაციის არეში გადადიან. ყურადღებას გავამახვილებთ მიკროსკოპულ დონეზე ამგვარი შეჯახებებისა და მოუწესრიგებელი მოძრაობის საბოლოო შედეგებზე. მოლეკულები დიფუზიას განიცდიან მაღალი კონცენტრაციის არეებიდან დაბალი კონცენტრაციის არეების მიმართულებით.



ნახაზი. 11.10. დენის j_i სიმკვრივის ფიზიკური არსის სქემატური გამოსახულება. დენის სიმკვრივე გადამრავლებულია განივი კვეთის ფართობზე (პერპენდიკულარულია ნაკადის მიმართულებისა).

თუ მაღალი და დაბალი კონცენტრაციის არეებს გამყოფი თხელი, მაგრამ გამტარი ბარიერით გავმიჯნავთ, ამ ბარიერის სიახლოვეს მყოფი, მარცხნივ ან მარჯვნივ მდებარე მოლეკულის გადაადგილების ტოლი ალბათობის პირობებშიც კი იარსებებს მაღალი კონცენტრაციის არიდან დაბალი კონცენტრაციის არისაკენ მოძრავი ნაკადი, რადგან მაღალი კონცენტრაციის არეში მოლეკულათა ჭარბი რაოდენობაა თავმოყრილი.

დავუბრუნდეთ დიფუზიის უფრო ფორმალურ განმარტებას. მოლეკულების ნაკადი გამოისახება *მოლეკულური დენის სიმკვრივის მეშვეობით* (იხ. ნახაზი. 11.10). მაგალითად, x მიმართულებით j_x დენის სიმკვრივე, დიფუზიის ფიკის კანონის თანახმად, კონცენტრაციის ცვლილების სიჩქარის პროპორციულია:

$$J_x = -D \frac{\partial C(x, y, z)}{\partial x} \quad (11.4-1)$$

სადაც D ე.წ. *დიფუზიის კოეფიციენტი*, ხოლო $C(x, y, z)$ საკვლევი მოლეკულების კონცენტრაციაა (რაოდენობა მოცულობის ერთეულზე). კერძო წარმოებული x მიმართულებით ე.წ. კონცენტრაციის გრადიენტს გვაძლევს. (11.4-1) განტოლებაში („-“) ნიშანი გვამცნობს, რომ ნაკადი მაღალი კონცენტრაციის არეებიდან დაბალი კონცენტრაციის არეებისკენ მიემართება (მიღებულია, რომ გრადიენტი დადებითია დაბალი კონცენტრაციის არიდან მაღალი კონცენტრაციის არის მიმართულებით). დიფუზიის D კოეფიციენტი მოლეკულის სახეობასა და სიბლანტის გამომწვევ გარემო პირობებზეა დამოკიდებული. D -ს დიდი მნიშვნელობა იმის მანიშნებელია, რომ მოლეკულები არსებულ გარემოში საკმაოდ ინტენსიურ დიფუზიას განიცდის. თუ მოლეკულების კონცენტრაცია y და z მიმართულებებითაც იცვლება, მაშინ ვექტორული განტოლების შედგენა დაგვჭირდება:

$$\vec{j} = -D \text{grad } C(x, y, z) \quad (11.4-2)$$

სადაც $\text{grad } C(x, y, z)$ სიმბოლო კონცენტრაციის გრადიენტია:

$$\text{grad } C(x, y, z) = \hat{i} \frac{\partial C}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial C}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial C}{\partial z} \quad (11.4-3)$$

იგი გვაძლევს ვექტორის ორიენტაციას იმ მიმართულებით, საითაც C სივრცული თვალსაზრისით ყველაზე სწრაფად იცვლება. შენიშნეთ, რომ (11.4-2) განტოლების

შედგენისას დავეუშვით, რომ D სიდიდე გარემოში ყოველი მიმართულებით ერთი და იგივეა ანუ გარემო „იზოტროპიულია“.

თუ საკვლევი მოლეკულები არც წარმოიქმნება და არც იშლება (ქიმიური რეაქციების მეშვეობით), ვამბობთ, რომ მოლეკულების ქმედებას აღწერს **მუდმივობის კანონი**. თუ სახეზეა გარკვეული არის ფარგლებიდან გამომავალი მოლეკულების ნაკადი, მაშინ ამ არეში მოლეკულების კონცენტრაციამ უნდა დაიკლოს. მე-3 თავის თანახმად, მოცემული ნაკადი მათემატიკურად ე.წ. დენის სიმკვრივის ვექტორის დივერგენციის მეშვეობით აღიწერება. ამრიგად, შენახვის კანონი (ზოგჯერ **უწყვეტობის განტოლებად** წოდებული) ასე შეიძლება ჩაიწეროს:

$$\frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial t} = -\operatorname{div} \hat{j}(x, y, z, t) \quad (11.4-4)$$

მუდმივობის კანონის თანახმად, თუ მთლიანობაში სახეზეა რაიმე სივრცითი არიდან გამომავალი ნაკადი (რაც გამოიხატება დენის სიმკვრივის ვექტორის დივერგენციის დადებითი მნიშვნელობით), მაშინ არეში არსებულ საკვლევ მოლეკულათა კონცენტრაცია კლებულობს (მისი დროითი წარმოებული უარყოფითია).

11.4.4 და 11.4.2 განტოლებების კომბინაციის შედეგად მივიღებთ დიფუზიით გამოწვეული გადატანის განტოლებას:

$$\frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial t} = \operatorname{div}[D \operatorname{grad} C(x, y, z, t)] \quad (11.4-5)$$

ხშირად დიფუზიის კოეფიციენტი მდგომარეობისაგან დამოუკიდებელია და შეგვიძლია დავწეროთ (კონცენტრაციის ფუნქციის პარამეტრები არაა მოყვანილი აღნიშვნის გამარტივების მიზნით):

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= D \operatorname{div} \operatorname{grad} C \\ &\equiv D \nabla^2 C \end{aligned} \quad (11.4-6)$$

სადაც ∇^2 ოპერატორს ეწოდება **ლაპლასიანი** ფრანგი მათემატიკოსის - ჟ. ჰ. ლაპლასის პატივსაცემად. დეკარტის (x, y, z) კოორდინატთა სისტემაში ლაპლასის ფუნქციის უბრალოდ

სამი მეორე რიგის წარმოებულის ჯამის ტოლია: $\nabla^2 C = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}$. როგორც ქვემოთ ვნახავთ, (11.4-6) განტოლება და მისი განზოგადებები გარდა დიფუზიისა, გადატანის ამსახველი ბევრი სხვა მოვლენის მიმართაც შეგვიძლია გამოვიყენოთ.

(11.4-6) განტოლება განსაზღვრავს ზოგიერთ ისეთ სიდიდეს, რომელიც გადატანის მოვლენის უკეთ გააზრებაში გვეხმარება. თავდაპირველად მოლეკულების კონცენტრაციის ცვლილების მახასიათებელ d მანძილსა და დიფუზიის მახასიათებელ τ_D დროს განვსაზღვრავთ. შესაბამისი განტოლებები ასეთი იქნება:

$$\begin{aligned} d^2 \nabla^2 C &= C \\ \tau_D \frac{\partial C}{\partial t} &= C \end{aligned} \quad (11.4-7)$$

დიფუზიის მახასიათებელი დროის შებრუნებულ სიდიდეს „დიფუზიის სიჩქარე“ ეწოდება. ამ განსაზღვრებების (11.4-6) განტოლებაში გამოყენებით შემდეგ დამოკიდებულებას მივიღებთ:

$$\tau_D = \frac{d^2}{D} \quad (11.4-8)$$

რომელიც დიფუზიის D კოეფიციენტს კონცენტრაციის მახასიათებელ d მანძილთან და დიფუზიის მახასიათებელ τ_D დროსთან აკავშირებს. შენიშნეთ, რომ D -ს მცირე მნიშვნელობების შემთხვევაში τ_D -ს (მოცემული d -სათვის) დიდი მნიშვნელობა გაგვაჩნია. ასეთ შემთხვევაში მოლეკულების დიფუზია ნელა მიმდინარეობს და კონცენტრაციის შესაძენვე ცვლილებისთვის ხანგრძლივი დროა საჭირო.

ზოგიერთი შესწორება

აქამდე ყურადღებას ცალკეულ (მცირე) სივრცით არეში შემაჯავლი მოლეკულების კონცენტრაციაზე ვამახვილებდით და ამ არის ფარგლებში და მის გარეთ მოლეკულების დიფუზიისათვის კონცენტრაციის მახასიათებელი ცვლილებებიც აღვწერეთ. სხვა შემთხვევებში შესაძლოა კონცენტრაციის გამოკვლევა მოძრავ არეშიც მოგვიხდეს. კონცენტრაციის ცვლილება როგორც დიფუზიის, ისე სითხის ნაკადთან ერთად მოძრავი საკვლევი არის განსხვავებული კონცენტრაციის მქონე არეში გადასვლის გამო შეიძლება

მოხდეს. (11.4-6) განტოლების მარცხენა ნაწილში ვითვალისწინებთ ამგვარი „მასის გადინებას“ $\vec{v} \cdot \text{grad} C$ წვერის დამატების გზით:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} C = D \nabla^2 C \quad (11.4-9)$$

მათემატიკური თვალსაზრისით შეგვიძლია ვთქვათ, რომ განტოლების მარცხენა მხარე კონცენტრაციის *სრული* დროით წარმოებულს იძლევა. პირველი წვერი ფიქსირებულ მდებარეობის შემთხვევაში C -ს ცვლილების ხასიათს გვაუწყებს, ხოლო მეორე გვამცნობს, თუ როგორ იცვლება C სიდიდე განსხვავებული კონცენტრაციის მქონე არეში არსებული სითხის ნაკადის შესაბამისად. პირველი წვერი წარმოგვიდგენს დროის მიმართ წარმოებულს ფიქსირებული მდებარეობის მქონე დამკვირვებლის თვალსაზრისით. სითხეების მექანიკაში ამ მოვლენას *ეილერის* თვალსაზრისი ეწოდება. ერთად აღებული ორივე წვერი კი *ლაგრანჟის* თვალსაზრისს გვაძლევს და ეს არის დროის მიმართ დამოკიდებულება სითხის მოცულობის ელემენტთან ერთად მოძრავი დამკვირვებლის თვალსაზრისით.

ნახ. 11.11. ლაპლასის განტოლების (მიანხლოებით) ამონახსნისთვის ლაპლასიანის თვისების გასაშუალოების გამოყენების ილუსტრაცია. P წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობა ახლომდებარე წერტილების შესაბამისი მნიშვნელობების საშუალო სიდიდის $V(P) = 1/4 \{V(A) + V(B) + V(C) + V(D)\}$ თვალსაზრისით არის აღებული.

ამოცანა 11.4-1. გამოიყენეთ ჯაჭვური წესი კერძო წარმოებულის დადგენისთვის და დაამტკიცეთ, რომ (11.4-9) განტოლების მარცხენა მხარე კონცენტრაციის სრული დროით წარმოებულია.

დიფუზიის განტოლების სრულყოფის მიზნით შეგვიძლია განვიხილოთ ისეთი ქიმიური რეაქციები, რომლებიც იწვევენ კონცენტრაციის ცვლილებას. ამისათვის (11.4-9) განტოლების მარჯვენა ნაწილში დავამატოთ f_{source} წვერი (თუ რეაქციის შედეგად ადგილი აქვს ჩვენთვის

სანტერესო მოლეკულების „გაქრობას“, f_{source} წევრს ავიღებთ მინუს ნიშნით). ამ შესაძლებლობების თავმოყრის შედეგად დიფუზიის გადატანის უმნიშვნელოვანეს გამოსახულებას ვღებულობთ:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } C = D \nabla^2 C + f_{source} \quad (11.4-10)$$

ქვემოთ დავრწმუნდებით, რომ ∇^2 ლაპლასიანი მნიშვნელოვან როლს ასრულებს გადატანის მოვლენთა ფართო სპექტრის შემთხვევაში. მიუხედავად იმისა, რომ ლაპლასის ფუნქციის ფორმალური მათემატიკური თვისებებით ფონს ვერ გავალოთ, მნიშვნელოვანია ვიცოდეთ, რომ ლაპლასის ფუნქცია ერთგვარ გასაშუალოებულ ეფექტს გამოსახავს. ეს ფაქტი დიფუზიის (რომელიც მიდრეკილია გათანაბრებისაკენ) მსგავსი მოვლენის შემთხვევაში იჩენს თავს ანუ დიფუზია კონცენტრაციის სხვაობების შემცირებისკენ („გაგლუვებისაკენ“) მიისწრაფვის. მეორე მხრივ, სივრცის ამა თუ იმ უბანში ლოკალიზებული ქიმიური რეაქცია კონცენტრაციის სხვაობას წარმოქმნის. ეს არის კონკურენცია დიფუზიისთვის დამახასიათებელ გაგლუვებასა და სივრცითი სტრუქტურების გამომწვევი ქიმიური რეაქციებისთვის (ან სხვა მექანიზმებისთვის) დამახასიათებელი კონცენტრაციული სხვაობის წარმოქმნის ტენდენციას შორის.

რადგან ლაპლასიანის გასაშუალოებითი ბუნების დეტალური მათემატიკური დამტკიცება ძალზე შორს წავიყვანს, დაინტერესებულ მკითხველს ორ სახელმძღვანელოს [Griffiths, 1981] და [Purcell, 1985] ვურჩევთ. ძირითადი მტკიცებულება შემდეგია: თუ $C(x,y,z)$ ფუნქცია რაიმე არეში აკმაყოფილებს განტოლებას $\nabla^2 C = 0$, მაშინ ამ არის გარკვეულ P წერტილში C -ს მნიშვნელობა P წერტილში ცენტრის მქონე სფეროზე აღებული C -ს საშუალო მნიშვნელობის ტოლია. გასაშუალოების თვისება განტოლებათა რიცხვითი სახის ამონახსნებში ხშირად გამოიყენება. 11.11 ნახაზი ამ მეთოდის გამოყენებას ორგანოზომილებიან შემთხვევაში წარმოგიდგენს.

ამოცანა 11.4-2. ლაპლასიანის მეშვეობით გასაშუალოების მაგალითი ერთი ცვლადის შემთხვევაში. ვთქვათ, ვიკვლევთ გარკვეულ $f(x)$ ფუნქციას და მის საშუალო მნიშვნელობას $[-L/2, L/2]$ ინტერვალში. $f(x)$ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა ამ ინტერვალში განისაზღვრება, როგორც

$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) dx$$

(a) მოახდინეთ ტეილორის მწკრივად წარმოდგენა $x=0$ წერტილის მიდამოში და დაამტკიცეთ, რომ

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{12}{L^2} [\langle f(x) \rangle - f(0)]$$

თუკი უგულებელვყოფთ მეორეზე მაღალი რიგის წარმოებულებს.

(b) აჩვენეთ, რომ თუ მეორე რიგის წარმოებული ნულის ტოლია (ანუ f ფუნქცია ლაპლასის განტოლების ერთგანზომილებიან ვერსიას აკმაყოფილებს), მაშინ

$f(0) = \langle f(x) \rangle$; ანუ ფუნქციის მნიშვნელობა ინტერვალის ცენტრში მთლიან ინტერვალზე აღებული საშუალო მნიშვნელობის ტოლია.

(c) მტკიცებულება განავრცეთ სამგანზომილებიანი შემთხვევისათვის.

გამტარი სითბური ენერჯიის ნაკადი და გადატანის სხვაგვარი მოვლენები

მრავალი მოვლენის შემთხვევაში გადატანის განტოლებები დიფუზიის ამსახველი განტოლებების მსგავს ფორმას ღებულობს. გთავაზობთ რამდენიმე შემთხვევას.

გამტარობით გამოწვეული სითბური ენერჯიის გადატანა უკავშირდება ტემპერატურის გრადიენტს. ამრიგად, ტემპერატურის გრადიენტისადმი პროპორციული \vec{j}_T სითბური ენერჯიის დენის სიმკვრივის განსაზღვრა შემდეგი სახით შეგვიძლია:

$$\vec{j}_T = -\sigma_T \text{grad } T(x, y, z) \quad (11.4-11)$$

სადაც T გამტარის ტემპერატურაა, ხოლო σ_T -ს – ნივთიერების სითბური გამტარობა ეწოდება. განტოლებიდან ვაღვანთ, რომ სითბური ენერჯია მაღალი ტემპერატურის მქონე არეებიდან დაბალი ტემპერატურის მქონე არეებში გადადის. მუდმივობის კანონი გვამცნობს, რომ თუ არეში ენერჯიის წყაროები არა გვაქვს, მაშინ სითბური ენერჯიის მიერ არის

დატოვებისას მოცემულ არესთან დაკავშირებული სითბური ენერჯიის ρ_T სიმკვრივე უნდა შეიცვალოს. მუდმივობის კანონი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{\partial \rho_T}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j}_T \quad (11.4-12)$$

სითბური ენერჯიის სიმკვრივის ცვლილება ამ არეში ტემპერატურის ცვლილებასაც ნიშნავს. C_T კუთრი სითბოტევადობა სითბური ენერჯიის ცვლილებისა და არეში ტემპერატურის ცვლილების დამაკავშირებელი სიდიდეა:

$$\Delta \rho_T = C_T \Delta T \quad (11.4-13)$$

11.4.12 და 11.4.13 დამოკიდებულებების გამოყენება საშუალებას გვაძლევს დავწეროთ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\sigma_T}{C_T} \nabla^2 T \\ &\equiv D_T \nabla^2 T \end{aligned} \quad (11.4-14),$$

სადაც უკანასკნელი ტოლობა მასალის D_T თბოგამტარობას განსაზღვრავს. 11.4.14 და 11.4.16 განტოლებების შედარების შედეგად ვნახავთ, რომ თბოგამტარობისთვის (სითბური ენერჯიის დიფუზიისთვის) დამახასიათებელი ტემპერატურული ცვლილებები მოლეკულური დიფუზიისთვის დამახასიათებელი კონცენტრაციული ცვლილებების ამსახველი განტოლების იდენტური სახით მოიცემა.

დამუხტული ნაწილაკების მოძრაობა წინალობის შემცველ გარემოში

თუ დამუხტული ნაწილაკები წინალობის შემცველ გარემოში გადაადგილდება, მაშინ ელექტრული დენის \vec{j}_e სიმკვრივე ელექტრული პოტენციალის $V(x,y,z)$ ფუნქციის გრადიენტისადმი პროპორციულია (ეს მტკიცებულება ომის ცნობილი კანონის ექვივალენტურია). მათემატიკური თვალსაზრისით გვაქვს:

$$\vec{j}_e = -\sigma \operatorname{grad} V(x,y,z) \quad (11.4-15)$$

სადაც σ გარემოს *ელექტრული გამტარობაა* (ელექტრული პოტენციალის ფუნქციის უარყოფითი გრადიენტი ელექტრული ველის დაძაბულობის ტოლია). შესაბამისი მუდმივობის კანონი ელექტრული მუხტის სიმკვრივის ρ_e დროით წარმოებულს ელექტრული დენის სიმკვრივის (უარყოფით) დივერგენციასთან აკავშირებს:

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j}_e \quad (11.4-16)$$

11.4.15 და 11.4.16 განტოლებების გაერთიანების შედეგად ვღებულობთ:

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} = \sigma \nabla^2 V \quad (11.4-17)$$

ამ განტოლებას აქამდე წარმოდგენილი გადატანის განტოლებების მსგავსი სტრუქტურა გააჩნია, მაგრამ მათ შორის მნიშვნელოვანი განსხვავებაც არსებობს. დამუხტული ნაწილაკების შემთხვევაში მუხტის ρ_e სიმკვრივესა და V ელექტრულ პოტენციალს შორის ელემენტარული კავშირიც არ არსებობს. მომდევნო პარაგრაფში (11.4-17) განტოლება ანალოგიების მოსანახად საკმარისი აღმოჩნდება.

(11.4-17) განტოლება ელექტროსტატიკაში გარკვეული სტუდენტებისთვის საკმაოდ უცნაურად გამოიყურება. გვინდა აღვნიშნოთ, რომ ელექტრული პოტენციალის ფუნქციის პუასონის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$\nabla^2 V = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad (11.4-18)$$

ეს განტოლება ელექტრული პოტენციალის ლაპლასიანს მუხტის სიმკვრივესთან აკავშირებს. (11.4-14) განტოლებაში ჩვენ სხვა (როგორც წესი, ფიქსირებულ მდგომარეობაში მყოფი) ელექტრული მუხტების მიერ წარმოქმნილი პოტენციალის ზეგავლენით მოძრავი მუხტების ცვლილებასთან გვაქვს საქმე.

იმპულსის გადატანა თხევად ნაკადში

სითხის მოძრაობა, ნიუტონის მეორე კანონზე დაყრდნობით, იმპულსის (მასის ნამრავლი სიჩქარეზე) ნაკადის მეშვეობით შეგვიძლია გამოვსახოთ. სითხისთვის ეს კანონი *მოცულობის ერთეულზე მოსული* იმპულსის მეშვეობით გამოისახება.. მაგალითად, იმპულსის x გეგმილთან დაკავშირებით გვექნება:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} + \bar{v} \cdot \text{grad}(\rho v_x) = F_x \quad (11.4-19)$$

სადაც F_x სითხის მოცულობის ერთეულზე მოქმედი ძალის x -კომპონენტია.

11.4.19 განტოლების მარცხენა ნაწილის პირველი წევრი გვამცნობს, რომ სიჩქარის ცვლილების შემთხვევაში იმპულსიც შეიძლება შეიცვალოს (ჩვენ მხოლოდ ისეთ სითხეებს ვიკვლევთ, რომლებისთვისაც სიმკვრივე უცვლელია). მეორე წევრი კი გვიჩვენებს, რომ იმპულსის ცვლილება შეიძლება გამოიწვიოს იმ გარემოებამ, რომ სითხის ელემენტი იმპულსის განსხვავებული მნიშვნელობის მქონე მდებარეობის მიმართულებით (\bar{v} სიჩქარით) გადაადგილდება. შენიშნეთ, რომ სიჩქარის მეორე წევრი *არაწრფივია*.

სითხე აკმაყოფილებს მუდმივობის კანონს. ჩვენ ვვარაუდობთ, რომ იგი არც წარმოიქმნება და არც უკვალოდ ქრება. თუ ცალკეულ არეში სითხის ρ სიმკვრივე იცვლება, მაშინ იარსებებს ამ არეში შემავალი ან არიდან გამავალი ჯამური ნაკადი. ამრიგად, მუდმივობის კანონი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div}(\rho \bar{v}) \quad (11.4-20)$$

ისეთი სითხეების შემთხვევაში, როგორც წყალია, სიმკვრივე უცვლელია (გამბობთ, რომ სითხე *არაკუმშვადია*) და მუდმივობის კანონი დაიყვანება შემდეგ სახემდე:

$$\text{div} \bar{v} = 0 \quad (11.4-21)$$

ამ შედეგსაც შემდგომში ბევრჯერ გამოვიყენებთ.

ჩვენ მიერ გამოკვლეულ სითხეებში ანგარიშგასაწვევი ძალებია: 1) მასასთან დაკავშირებული ძალები (მაგალითად, გრავიტაცია, რომელიც სითხის სიმკვრივის პროპორციულია); 2) წნევის გრადიენტები და 3) სიბლანტე. ამრიგად, ვწერთ:

$$F_x = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 v_x \quad (11.4-22)$$

სადაც p სითხის წნევაა მოცემულ მდებარეობაში, ხოლო μ სიბლანტეა (სიბლანტის ძალის მარტივი გამოსახულება მოყვანილია მოცემული პარაგრაფის ბოლოში). მასასთან დაკავშირებული ძალები $f(x)$ სიმბოლოთია აღნიშნული. 11.4.22 და 11.4.19 განტოლებების გაერთიანების შედეგად ვიღებთ სითხის მოძრაობის (“გადატანის”) ფუნდამენტურ განტოლებას:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad}(\rho v_x) = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 v_x \quad (11.4-23),$$

ანალოგიური გამოსახულებებით v_y -ისა და v_z -სათვის. თუ საკვლევი სითხის სიმკვრივე უცვლელია, მაშინ წარმოებულის ნიშნის გარეთ ρ -ს გატანა და უკანასკნელი განტოლების ρ -ზე გაყოფით მივიღებთ:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} \vec{v} \cdot \text{grad} v_x = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 v_x \quad (11.4-24)$$

სადაც $\nu = \mu/\rho$ სიდიდეს *კინემატიკური სიბლანტე* ეწოდება. (11.4-24) გამოსახულება არაკუმშვადი სითხეების ნაკადისთვის ცნობილი *ნავიე-სტოქსის განტოლებაა*.

დასკვნა

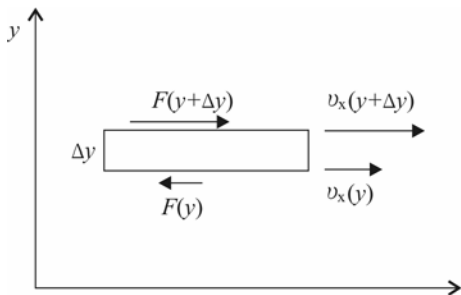
როგორც ვნახეთ, გადატანის მრავალი მოვლენის ფორმალურ განსაზღვრებებს მსგავსი ფორმები გააჩნიათ: გადატანის სიდიდის ღრობით და სივრცით წარმოებულების მომცემი განტოლება სხვადასხვა „ძალურ“ წევრებს უტოლდება, რომელთა უმრავლესობის გამოსახვა

∇^2 ლაპლასიანის საფუძველზეა შესაძლებელი. ამგვარი ფორმალური გამოსახულებების არსებობისას გადატანითი სისტემების ქმედებები ერთმანეთის მსგავსია.

***ბლანტი ძალის მოდელის მარტივი ფორმა**

ამჯერად სიბლანტეს გამარტივებული ფორმით განვიხილავთ. ჩვენი მიზანი 11.4.22 გამოსახულებაში გამოყენებული სიბლანტის ძალის შესაბამისი $\mu \nabla^2 v_x$ გამოსახულების დამტკიცება. უფრო დეტალური განხილვა სითხის მექანიკის შესახებ არსებულ სტანდარტულ კურსებშია შესაძლებელი.

ვიწყებთ 11.12 ნახაზზე მოყვანილი x მიმართულების მქონე სითხის ნაკადით. დავუშვათ, რომ ქვედა ფირფიტის ზემოთ მანძილის ზრდასთან ერთად სინქარეც მატულობს. შემდეგ ყურადღება ფირფიტებს შორის მყოფ სითხის ვიწრო ფენაზე გავამახვილოთ. ფირფიტების ზემოთ მყოფი სითხე უშუალოდ ფენასთან შედარებით სწრაფად გადაადგილდება და მის x მიმართულებით „წათრევას ცდილობს“. სწორედ ეს „წათრევი“ ძალა იქნება ფენზე მოქმედი ბლანტი ძალა. ისააკ ნიუტონმა პირველმა



ნახ. 11.12. x მიმართულებით (მარჯვნივ) მოძრავი სითხის ფენის სქემა დიაგრამა. სინქარე ვერტიკალური (y) მიმართულებით მატულობს. ნაჩვენებია Δy სიმაღლის მქონე სითხის ვიწრო ფენა. ზემოთ არსებული სითხე ფენიდან გამომავალ სითხეს „მიათრევს“. ქვემოთ

არსებული სითხე კი, პირიქით, წინააღმდეგობას უწევს.

ივარაუდა, რომ ეს ძალა ჭრილის (1) ზედა ფირფიტის ΔA ფართობისა და (2) ამ ფართობის ერთეულზე მოსული სინქარის ცვლილებისადმი პროპორციულია:

$$F_x(y + \Delta y) = \mu \frac{\Delta v_x}{\Delta y} \Delta A \quad (11.4-25)$$

სადაც პროპორციულობის კოეფიციენტი წარმოადგენს სითხის სიბლანტეს. $F(x)$ -ის არგუმენტი გვეუბნება, რომ ეს ძალა სწორედ ფენის ზემოთ არსებული სითხის მახასიათებელი ძალაა. $\Delta y \rightarrow 0$ ზღვარში 11.4.25 დამოკიდებულების მარჯვენა მხარეში ფარდობა კერძო წარმოებულად გადაიქცევა. ძალა პროპორციულია სიჩქარისა, რაც წარმოადგენს ტიპურ სიტუაციას სითხეში არსებული ხახუნის ძალისათვის.

ამჯერად ფენის ქვემოთ მყოფი დაბალი სიჩქარით მოძრავი სითხის მხრიდან ამ ფენაზე მოქმედი ძალა განვიხილოთ. ბლანტი ძალა ცდილობს შეამციროს ფენის სიჩქარე. თუ ფენის ქვემოთ და ზემოთ არსებული ბლანტი ძალები მოდულით ტოლი, მაგრამ ურთიერთსაწინააღმდეგო მიმართულებისაა, მაშინ ფენაზე მოქმედი ჯამური ძალა ნულის ტოლი იქნება (სამაგიეროდ არსებობს ფენის დეფორმირების ტენდენცია). თუ ფენის ზევით მყოფი სითხის გრადიენტი ქვედა სითხისაზე მეტია, მაშინ იარსებებს მარჯვნივ მიმართული თანაბარი ძალა, რომელიც შეგვიძლია ასე გამოვსახოთ:

$$\begin{aligned}
 F_x &= F_x(y + \Delta y) - F_x(y) \\
 &= \frac{\partial F_x}{\partial y} \Delta y \\
 &\quad \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \Delta y \Delta A
 \end{aligned}
 \tag{11.4-26}$$

ამრიგად, მოცემული ძალა სიჩქარის x კომპონენტის მეორე რიგის წარმოებულისადმი პროპორციულია.

როდესაც სიჩქარის x კომპონენტი x და z მიმართულებებითაც იცვლება, სიბლანტის ძალას კიდევ ორი კომპონენტი დაემატება. ერთობლიობაში ისინი გვაძლევენ:

$$\begin{aligned}
 F_x &= \mu \left\{ \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right\} \Delta y \Delta A \\
 &\equiv \mu \{ \nabla^2 v_x \} \Delta y \Delta A
 \end{aligned}
 \tag{11.4-27}$$

$\Delta y \Delta A$ ნამრავლი გვაძლევს ფირფიტებს შორის მყოფი ფენის მოცულობას. (11.4-27)-ის ორივე მხარის ამ სიდიდეზე გაყოფით მივიღებთ მოცულობის ერთეულზე მოქმედი ძალის გამოსახულებას:

$$f_x = \mu \nabla^2 v_x
 \tag{11.4-28},$$

რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

უნდა აღინიშნოს, რომ ჩვენ თავი ავარიდეთ ბლანტი ძალის განტოლებიდან გამომდინარე სითხის ბრუნვით გამოწვეული მოძრაობის გამორიცხვისთვის საჭირო რთულ ფორმალურ მიდგომას. მაგალითის სახით მოვიყვანო ცენტრში გამავალი ღერძის ირგვლივ მბრუნავ წყლიან ჭურჭელს. ამგვარი ბრუნვა არ იწვევს ხახუნს წყლის სხვადასხვა ფენებს შორის. ფენის ზემოთ მყოფი სითხისათვის ამგვარი მოძრაობის გათვალისწინების მიზნით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$F_{xy} = \mu \left\{ \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right\} \Delta A \quad (11.4-29)$$

სადაც ძალის წევრის პირველი ინდექსი გვაუწყებს, რომ ძალა x მიმართულებითაა, მეორე ინდექსი კი გვამცნობს, რომ ძალა y ღერძის მიმართ პერპენდიკულარულად განლაგებულ სიბრტყის გასწვრივაც მოქმედებს. მსგავსი გამოსახულებები ზედაპირებზე x და y მიმართულებით მოქმედ ძალებს გვაძლევს (შენიშნეთ, რომ ამ გამოსახულებების გამოყენება აქამდე გამოყენებულ ძირითად პარამეტრს არ ცვლის, რადგან ამ შემთხვევაში მხოლოდ x მიმართულებით არსებულ ძალის კომპონენტს ვიყენებთ). გამოთვლები ზემოთ აღნიშნული სქემის მსგავსად ხდება, $div \vec{v} = 0$ დამოკიდებულების გათვალისწინება განტ. (11.4-28) შედეგამდე მიგვიყვანს.

ამოცანა 11.4-3. დეტალურად გაარჩიეთ ზემოთ მოყვანილი გამოთვლები. ამ დროს მიიღებთ, რომ (11.4.28) წარმოადგენს ბლანტი ძალის გამოსახულების სწორ ვარიანტს. მინიშნება: იხილეთ [Feinman, Leighton, Sands, 1964], ტომი II, გვ. 41-4 ან სითხის მექანიკის შესავალი კურსი.

11.5 დიფუზიურ - რეაქციული სისტემები: სტრუქტურის წარმოქმნის მოდელი

გადატანის მოვლენიდან გამომდინარე, ე.წ. *დიფუზიურ-რეაქციული სისტემა* წარმოშობს საინტერესო სივრცით სტრუქტურებს. ამგვარი სისტემებისათვის ყურადღებას ორი ან მეტი ტიპის ქიმიურ კონცენტრაციებზე ვამახვილებთ, რომელთაგან საკვლევ სივრცით არეში ორივე

მათგანი განიცდის დიფუზიას და შედის ქიმიურ რეაქციებში. ტიურინგმა (TUR52) ამგვარი სისტემა თეორიული ბიოლოგიის კლასიკურ ნაშრომში განიხილა. მან დაამტკიცა, რომ დიფუზიურ-რეაქციულმა სისტემებმა სიმეტრიის დარღვევის ფონზე საინტერესო სივრცით სტრუქტურებს შეიძლება მისცენ დასაბამი. დღესდღეობით ასეთ სტრუქტურებს **ტიურინგის სტრუქტურებს** უწოდებენ. მიუხედავად იმისა, რომ ამგვარი სტრუქტურების თეორია საფუძვლიანად არის შესწავლილი, მათი არსებობის ამსახველი ექსპერიმენტული მონაცემები მხოლოდ ბოლო პერიოდში გახდა ხელმისაწვდომი (CDB90) (OUS91). მეცნიერები ფიქრობენ, რომ ასეთი დიფუზიურ-რეაქციული მექანიზმები ბიოლოგიური სისტემების ჩამოყალიბებაში დიდ როლს უნდა ასრულებდნენ [Murray, 1989]. ჩვენ ამ მოდელს კერძოწარმოებულის დიფერენციალური განტოლებებით აღწერილი ქმედების მიმართ გამოვიყენებთ. მნიშვნელოვანია, რომ სხვადასხვაგვარი **სივრცითი მოდელების** დროში ქმედების გამოსახვა საშუალებას გვაძლევს სტრუქტურის წარმოქმნის პრობლემის სახემდე დაყვანაში, როდესაც სივრცითი მოდელების ამპლიტუდები მდგომარეობათა სივრცის ცვლადების როლში გვევლინება. დაყვანის შემდეგ დინამიკასთან დაკავშირებული ნებისმიერი შედეგის გამოყენება შეგვეძლება სტრუქტურის წარმოქმნასთან დაკავშირებით.

დიფუზიურ-რეაქციულ სისტემაში ქიმიური სახეობების C_i კონცენტრაციები აღიწერება შემდეგი განტოლების მეშვეობით:

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = f_i(\dots C_j \dots) + D_i \nabla^2 C_i \quad (11.5-1)$$

სადაც D_i i -ური ნივთიერების დიფუზიის კოეფიციენტია. f_i ფუნქცია ყველა კონცენტრაციის მიმართ არაწრფივი სახით დამოკიდებული რეაქციის მექანიზმს განსაზღვრავს. გარდა ამისა, საჭიროა სასაზღვრო პირობების დადგენაც. რეაგენტების შეყვანა (ანუ შემავალი სიგნალი) და ამოღება შეიძლება მიმდინარეობდეს სივრცესა და დროში. საკვირველია, რომ ამ განტოლებებმა და სასაზღვრო პირობებმა შეიძლება ბუნებრივი სივრცის („ტალღის სივრცის“) შესაბამისი სივრცითი სტრუქტურების წარმოქმნა გამოიწვიოს, რომლებიც მხოლოდ რეაგენტების შეყვანის ან ამოღების კონცენტრაციებზე ან ინტენსიურობაზე და არა სისტემის გეომეტრიულ პარამეტრებზე იქნებიან დამოკიდებულნი.

სივრცითი სტრუქტურების წარმოქმნისთვის აუცილებელია რამდენიმე მოთხოვნის შესრულება. რეაქციის კინეტიკას, აქტივატორად წოდებულ ერთ-ერთ ტიპთან დაკავშირებით მაინც, დადებითი უკუმექანიზმი და შემაფერხებელი პროცესი უნდა გააჩნდეს. რიცხვითი მონაცემები გვიჩვენებს, რომ სივრცით არეში ინჰიბიტორები (შემაფერხებლები)

აქტივატორთან შედარებით სწრაფად განიცდიან დიფუზიას. წინააღმდეგ შემთხვევაში, სტრუქტურები მაკონტროლებელ პარამეტრთა (მიწოდებისა და დიფუზიის სიჩქარეები და ა.შ) შედარებით მცირე დიაპაზონისათვის იარსებებენ.

დიფუზიურ-რეაქციული სისტემის მაგალითის სახით განვიხილოთ შემდეგი ორკომპონენტური მოდელი [Murray, 1989, თავი 14] [Nicolis და Prigogine, 1989, A დანართი]: დავუშვათ, რომ სისტემა C_1 -ითა და C_2 -ით მოცემული კონცენტრაციების მქონე მხოლოდ ორ კომპონენტს შეიცავს. კომპონენტ 1-ის დიფუზიის მუდმივა იყოს D_1 , ხოლო კომპონენტ 2-ისა - D_2 . მოცემული სისტემის ამსახველი განტოლებები შემდეგნაირია:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_1}{\partial t} &= f_1(C_1, C_2) + D_1 \nabla^2 C_1 \\ \frac{\partial C_2}{\partial t} &= f_2(C_1, C_2) + D_2 \nabla^2 C_2 \end{aligned} \quad (11.5-2)$$

საჭიროა დავადგინოთ სასაზღვრო პირობებიც. ვინაიდან გვინტერესს სტრუქტურის წარმოქმნა „გარე ძალების მოქმედების გარეშე“, ამ მიზნით კომპონენტთა ნაკადს საზღვარზე ნულის ტოლად ვიღებთ. ამასთან, დაგვჭირდება საწყისი სივრცითი კონცენტრაციის $C_1(\vec{r}, t) = 0$, $C_2(\vec{r}, t) = 0$ განსაზღვრაც. დავუშვათ, რომ ეს მოთხოვნები სრულდება.

მივყვებით დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნის სტანდარტულ პროცედურას, რომლის მიხედვითაც საბოლოო ამონახსნები შესაძლებელია ფუნქციათა ნამრავლის სახით დაიწეროს. ერთი ფუნქცია მხოლოდ დროზეა დამოკიდებული, ხოლო მეორე – სივრცულ კოორდინატებზე. ამ პროცედურის გააზრებისთვის თავდაპირველად სივრცითი დამოკიდებულება უგულებელვყოთ ანუ „გამოვრიცხოთ“ დიფუზია. მაშინ გვექნება:

$$\begin{aligned} \frac{dC_1}{dt} &= f_1(C_1, C_2) \\ \frac{dC_2}{dt} &= f_2(C_1, C_2) \end{aligned} \quad (11.5-3)$$

ამ განტოლებებს მე-3 თავში დეტალურად განხილული ორგანიზმილებიან მდგომარეობათა სივრცის ამსახველი განტოლებების მსგავსი ფორმა გააჩნია. ზემოთ მიღებული შედეგების გამოყენებისათვის ყურადღებას ვამახვილებთ 11.5.3 განტოლებებში შემავალი წონასწორული მდგომარეობის შესაბამისი C_{10} და C_{20} კონცენტრაციების მცირე ვარიაციებზე, რომლებიც მიღებული არიან ფიქსირებული წერტილის შემთხვევაში (ვუშვებთ, რომ არსებობს მხოლოდ

ერთი ფიქსირებული წერტილი). მე-3 თავის ანალოგიურად, ამ ვარიაციებს შემდეგნაირად გამოვსახავთ:

$$\begin{aligned} c_1 &= C_1 - C_{1o} \\ c_2 &= C_2 - C_{2o} \end{aligned} \quad (11.5-4)$$

როგორც ვიცით, წონასწორული მდგომარეობის სიახლოვეს დროზე დამოკიდებულება f_1 და f_2 ფუნქციების წარმოებულთა იაკობიანის მახასიათებელი მნიშვნელობებით კონტროლდება. 11.5.3 განტოლების წონასწორულ მნიშვნელობებზე განვრცობის გზით ვღებულობთ შემდეგ დინამიკურ განტოლებებს:

$$\begin{aligned} \dot{c}_1 &= f_{11}c_1 + f_{12}c_2 \\ \dot{c}_2 &= f_{21}c_1 + f_{22}c_2 \end{aligned} \quad (11.5-5)$$

სადაც გამოყენებული გვაქვს 3.11 პარაგრაფის ანალოგიური აღნიშვნათა სისტემა. ამ შემთხვევასთან დაკავშირებით მე-3 თავში მიღებული შედეგების გამოყენება სავსებით შესაძლებელია. მაგალითად, უცვლელი მდგომარეობა სტაბილური იქნება, თუ იაკობის მატრიცის მახასიათებელი მნიშვნელობების ნამდვილი ნაწილები უარყოფითია.

ამჯერად დავუბრუნდეთ დრო-სივრცის პრობლემას. ყურადღებას ვამახვილებთ წონასწორული მდგომარეობიდან მცირე გადახრებზე. სიმარტივისთვის ვირჩევთ სივრცით ერთგვაროვან მდგომარეობებს. სივრცითი, ერთგვაროვანი, სტაციონარული მდგომარეობისთვის $\nabla^2 C_{10}=0$ შედეგის გამოყენებით ვპოულობთ, რომ c სიდიდეები აღიწერება შემდეგი განტოლებების მეშვეობით:

$$\begin{aligned} \dot{c}_1 &= f_{11}c_1 + f_{12}c_2 + D_1 \nabla^2 c_1 \\ \dot{c}_2 &= f_{21}c_1 + f_{22}c_2 + D_2 \nabla^2 c_2 \end{aligned} \quad (11.5-6)$$

თუ კომპონენტებს შორის კავშირი არ არსებობს (ანუ თუ როგორც f_{12} , ასევე f_{21} ნულის ტოლია) c_1 და c_2 შეგვიძლია ფუნქციების სახით ჩავწეროთ. აქედან ერთი დროზე, ხოლო მეორე სივრცით ცვლადებზე იქნება დამოკიდებული. მაგალითად, $c_1(\vec{r}, t) = \varphi(t)U(\vec{r})$. როდესაც საბოლოო ფორმა ჩასმულია 11.5.6 გამოსახულებებში, c_1 -სთან დაკავშირებით გვექნება:

$$U(\vec{r})\dot{\phi}(t) = f_{11}\phi(t)U(\vec{r}) + \phi(t)D_1\nabla^2U(\vec{r}) \quad (11.5-7)$$

c_2 -თან დაკავშირებით მივიღებთ ანალოგიურ განტოლებას. წინა განტოლების გადაჯგუფება და ϕU -ზე გაყოფა მოგვცემს:

$$\frac{1}{D_1} \left(\frac{\dot{\phi}(t)}{\phi(t)} - f_{11} \right) = \frac{1}{U(\vec{r})} \nabla^2 U(\vec{r}) \quad (11.5-8)$$

ახლა კი გადავდივართ მსჯელობის დასკვნით ნაწილზე. 11.5.8 განტოლების მხოლოდ მარცხენა ნაწილია დროის ფუნქცია, ხოლო მარჯვენა ნაწილი მხოლოდ მდგომარეობის ფუნქციაა. იმისათვის, რომ გვქონდეს ორივე მხარის ტოლობა დროისა და მდგომარეობის ყოველგვარი კომბინაციისთვის, ამისათვის თითოეული მათგანი ტოლი უნდა იყოს გარკვეული მუდმივობისა, რომელსაც $-k^2$ -ით აღვნიშნავთ. ამრიგად, საწყისი კერძოწარმოებულისანი დიფერენციალური განტოლება ორ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებად დაიყოფა:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t) &= (f_{11} - k^2 D_1)\phi(t) \\ \nabla^2 U(\vec{r}) + k^2 U(\vec{r}) &= 0 \end{aligned} \quad (11.5-9)$$

პირველი განტოლება გვამცნობს, რომ დროზე დამოკიდებულება, როგორც რეაქციის f_{11} ფუნქციის წარმოებულებზე, ასევე k მუდმივაზე დამოკიდებული მახასიათებელი ექსპონენტის მქონე დროის ექსპონენციალური ფუნქციის სახით შეიძლება ჩაიწეროს. მეორე განტოლება და სისტემასთან დაკავშირებით გამოვლენილი სასაზღვრო პირობები ამ სისტემისათვის ე.წ. **სივრცით მოდებს** განსაზღვრავს. ზღვრულ სივრცით არესთან დაკავშირებით ირკვევა, რომ k -ს მხოლოდ კონკრეტული მნიშვნელობები გვაძლევს განტოლებისა და სასაზღვრო პირობების დამაკმაყოფილებელ ამონახსნებს. k -ს ასეთ მნიშვნელობებს სივრცითი მოდების საკუთრივ მნიშვნელობებს (ან მახასიათებელ მნიშვნელობებს) უწოდებენ.

სივრცითი მოდების მარტივი მაგალითის სახით განვიხილოთ ერთგანზომილებიანი ამოცანა, რისთვისაც ვირჩევთ x ღერძს. ვთქვათ, სასაზღვრო პირობები ისეთია, რომ $x=0$ და $x=L$ მნიშვნელობებისათვის (საკვლევი არის საზღვრებზე) კომპონენტის ნაკადი ნულის ტოლია. როდესაც დიფუზიის გამო ნაკადი კონცენტრაციის გრადიენტისადმი (სივრცითი წარმოებულისადმი) პროპორციულია, ფიზიკური სასაზღვრო პირობები $x=0$ და $x=L$

წერტილებში ნულისაქენ მისწრაფებული $U(x)$ -ის წარმოებულის მქონე მათემატიკურ სასაზღვრო პირობებში გადადიან. ფუნქციათა სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს ამ სასაზღვრო პირობებსა და

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} + k^2U(x) = 0 \quad (11.5-10)$$

განტოლებას, მოიცემა $U_k(x) = A \cos kx$ სახით, სადაც $k = n\pi/L$ და $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ U ფუნქციის ინდექსი გვახსენებს, რომ ფუნქცია k -ზეა დამოკიდებული. მაშასადამე, k -ს მნიშვნელობათა მხოლოდ დისკრეტული სიმრავლე გვაძლევს როგორც დიფერენციალური განტოლების, ასევე სასაზღვრო პირობების დამაკმაყოფილებელ ფუნქციას.

აღსანიშნავია, რომ $U_k(x)$ ფუნქციას გააჩნია $2\pi/k$ პერიოდი (შესაბამისად, გვექნება „ტალღის სიგრძე“). შედარებით მაღალი განზომილების პირობებში იარსებებს თითოეული სივრცითი განზომილების შესაბამისი k -ების სიმრავლე. ამრიგად k -ს ზოგჯერ სივრცითი მოდების **ტალღურ ვექტორს** უწოდებენ. შენიშნეთ, რომ $k=0$ შემთხვევა ერთგვაროვან სივრცით მდგომარეობას შეესაბამება.

ამოცანა 11.5-1. შეამოწმეთ, რომ $U_k(x) = A \cos kx$ ფუნქციები, როდესაც $k = n\pi/L$ და $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ 11.5.10 განტოლებას და $x=0$ და $x=L$ მნიშვნელობებზე დამყარებულ სასაზღვრო პირობებს აკმაყოფილებს.

ვთქვათ, განსაზღვრული გვაქვს სივრცითი ტალღის ფუნქციები და k -ს დასაშვები მნიშვნელობები. შემდეგ ვუშვებთ, რომ c_1 შეიძლება ჩაიწეროს, დროისა და სივრცითი მოდების ფუნქციების ნამრავლთა ჯამის სახით:

$$c_1(\vec{r}, t) = \sum_k a_{1k}(t) U_k(\vec{r}) \quad (11.5-11)$$

$a_{1k}(t)$ კოეფიციენტებს **სივრცითი მოდის ამპლიტუდები** ეწოდება. $t=0$ და $a_{1k}(t=0)$ მნიშვნელობებზე კოეფიციენტები განისაზღვრება მოცემული კონცენტრაციების შესაბამისი საწყისი პირობების მიხედვით. c_2 -ის გამოსახულება იმავე ფორმით შეიძლება ჩაიწეროს.

დავუბრუნდეთ ურთიერთდაკავშირებული კონცენტრაციების პრობლემას. ჩვენი უმთავრესი მათემატიკური დაშვება იმაში მდგომარეობს, რომ ურთიერთდაკავშირებული

კონცენტრაციების შემთხვევაშიც კი 11.5.6 განტოლების გამოყვანა 11.5.11-ის ანალოგიურად არის შესაძლებელი. თუ 11.5.11 განტოლებას 11.5.6-ში ჩავსვამთ და 11.5.9 განტოლებაზე დაყრდნობით $\nabla^2 U$ წვევს $-k^2 U$ -ით შევცვლით, გვექნება:

$$\sum_k \dot{a}_{1k} U_k(\vec{r}) = f_{11} \sum_k a_{1k}(t) U_k(\vec{r}) + f_{12} \sum_k a_{2k}(t) U_k(\vec{r}) - D_1 \sum_k a_{1k}(t) k^2 U_k(\vec{r}) \quad (11.5-12)$$

(11.5-6)-ის მეორე განტოლების ანალოგიურად.

ამჯერად კიდევ ერთ გადაწყვეტ ნაბიჯს ვღებამთ: მოვითხოვთ, რომ k -ს თითოეულ მნიშვნელობასთან დაკავშირებული $a_{ik}(t) U_k(\vec{r})$ ფუნქციები განტოლებებს ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად აკმაყოფილებდეს (უფრო ფორმალურად თუ ვიტყვით, სივრცითი მოდის ფუნქციები გამოსაკვლევ არეში ერთმანეთის „ორთოგონალურია“. ამგვარი ორთოგონალობის გამოყენებით k -ს კონკრეტული მნიშვნელობის შერჩევასაც შევძლებთ). ამრიგად, k რიგის სივრცითი მოდების ამპლიტუდებისთვის ვადგენთ შემდეგ განტოლებებს:

$$\begin{aligned} \dot{a}_{1k}(t) &= f_{11} a_{1k}(t) + f_{12} a_{2k}(t) - D_1 a_{1k}(t) k^2 \\ \dot{a}_{2k}(t) &= f_{21} a_{1k}(t) + f_{22} a_{2k}(t) - D_2 a_{2k}(t) k^2 \end{aligned} \quad (11.5-13)$$

როგორც ვხედავთ, სივრცითი მოდების ამპლიტუდები ერთიმეორეზეა დამოკიდებული და გვაქვს *კორელირებადი მოდები*.

სივრცითი მოდების მეთოდის განვრცობის გზით კერძოწარმოებულისანი დიფერენციალური განტოლებების საწყისი სისტემა დაგვყავს სივრცითი მოდების ამპლიტუდათა ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სიმრავლემდე. ამ განტოლებებს გააჩნიათ მდგომარეობათა სივრცეში დინამიკის ამსახველი განტოლებების მსგავსი ფორმა, სადაც სივრცითი მოდების ამპლიტუდები მდგომარეობათა სივრცის ცვლადების როლში გვევლინება. გარკვეული სირთულეც არსებობს, რადგან k -ს შესაძლო მნიშვნელობების უსასრულო რაოდენობით არსებობისას მდგომარეობათა სივრცეს პრაქტიკულად განზომილებათა უსასრულო რაოდენობა ექნება. ამგვარი შედეგი გვაუწყებს, რომ კერძოწარმოებულისანი დიფერენციალური განტოლებებით აღწერილი სისტემები თავისუფლების უსაზღვრო რაოდენობით ხარისხების მქონე დინამიკური სისტემებია. მდგომარეობიდან გამოსავალი „აქტიური“ სივრცითი მოდების მცირე რაოდენობის არსებობის დაშვებაში მდგომარეობს. პასიური მოდების ამპლიტუდათა დროზე დამოკიდებულება უარყოფითი ნამდვილი ნაწილის მქონე მახასიათებელი მნიშვნელობის ექსპონენციალური ფუნქციით გამოისახება. ამგვარი პასიური მოდის ნებისმიერი „აგზნება“ დროში ექსპონენციალურად ქრება. პასიური ტალღა სისტემის ხანგრძლივ დინამიკაში არანაირ როლს არ ასრულებს.

რადგანაც 11.5.13 განტოლება 3.11 პარაგრაფში მოყვანილ განტოლებების სიმრავლის ანალოგიურია, შეგვიძლია მე-3 თავში მიღებული ნებისმიერი შედეგი გამოვიყენოთ სისტემის დინამიკის კვლევისთვის. 3.11 პარაგრაფის ანალოგიურად ვუშვებთ, რომ თითოეული ამპლიტუდის დროში ცვლილება დროის ექსპონენციალური ფუნქციის სახით შეიძლება გამოისახოს:

$$a_{ik}(t) = b_{ik} e^{\lambda(k)t} \quad (11.5-14)$$

სადაც $b_{ik} = a_{ik}(0)$ დროისაგან დამოუკიდებელია, ხოლო $\lambda(k)$ მახასიათებელი ექსპონენტია (შენიშნეთ, რომ λ არ არის ტალღის სიგრძე.) ასეთი ფორმის 11.5.13-ში ჩასმის შედეგად მივიღებთ წრფივი ალგებრული განტოლებების შემდეგ წყვილს:

$$\begin{aligned} \lambda b_{1k} &= f_{11} b_{1k} + f_{12} b_{2k} - D_1 k^2 b_{1k} \\ \lambda b_{2k} &= f_{21} b_{1k} + f_{22} b_{2k} - D_2 k^2 b_{2k} \end{aligned} \quad (11.5-15)$$

ამ განტოლებებს მოდებთან დაკავშირებით არატრივიალური ამონახსნები მხოლოდ იმ შემთხვევაში ექნება, როდესაც b_{ik} -ს კოეფიციენტების დეტერმინანტი ნულის ტოლი არაა (ტრივიალური ამონახსნებია, როდესაც $b_{ik}=0$). ამრიგად, საბოლოო განტოლება ასეთი იქნება:

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \lambda(k^2[D_1 + D_2] - f_{11} - f_{22}) + k^2(D_1 D_2 k^2 - f_{11} D_2 - f_{22} D_1) \\ + f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21} = 0 \end{aligned} \quad (11.5-16)$$

საზოგადოდ, ეს განტოლება k -ს თითოეული მნიშვნელობისთვის λ -ს ორ მნიშვნელობას გვაძლევს. მიღებულ $\lambda(k)$ ფუნქციას ხშირად სისტემის **დისპერსიულ დამოკიდებულებას** უწოდებენ. (ტერმინი აღებულია ტალღური ოპტიკიდან, სადაც ანალოგიური დამოკიდებულების მეშვეობით, ვიგებთ თუ როგორ არის შესაძლებელი გარკვეულ გარემოში სინათლის ტალღების გარდატეხა, რაც ჩვენს შემთხვევაში $\lambda(k)$ -ითა და ტალღური ვექტორით გამოსახულ დროით სიხშირეებს შორის კავშირს შეესაბამება. ასეთი კავშირი განსაზღვრავს ტალღის სიჩქარეს).

ამოცანა 11.5-2. (a) მიიღეთ 11.5.16 განტოლება 11.5.15 –დან; (b) გადაამოწმეთ, რომ 11.5.16 განტოლება ზემოთ მოყვანილ შედეგს $k = 0$ შემთხვევაში გვაძლევს; (c) რა პირობები უნდა შესრულდეს f_{ij} -ებისთვის, რომ მივიღოთ სივრცულად ერთგვაროვანი ამონახსნი სტაციონარული მდგომარეობის ($k=0$) შემთხვევაში?

საწყისი ერთგვაროვანი მდგომარეობის მიხედვით საინტერესო სივრცითი სტრუქტურების ადგილმდებარეობების დასადგენად განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც k -ს გარკვეული მნიშვნელობებისათვის $\lambda(k)$ -ს ნამდვილი ნაწილი დადებით მნიშვნელობას ღებულობს. მდგომარეობათა სივრცის დინამიკის ექსპერიმენტების საფუძველზე ვადგენთ, რომ $\lambda(k)$ -ს ნამდვილი ნაწილის მიერ დადებითი მნიშვნელობის მიღების შემთხვევაში მდგომარეობათა სივრცეში შესაბამისი მიმართულებით სისტემის „მოძრაობა“ არასტაბილურ ხასიათს იძენს. სივრცითი მოდის შემთხვევაში ეს ნიშნავს, რომ $U_k(\vec{r})$ ანუ სივრცითი მოდის ფუნქციის შესაბამისი სტრუქტურა ერთგვაროვანი საწყისი მდგომარეობიდან იწყებს ჩამოყალიბებას. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, თუ სივრცითი, ერთგვაროვანი, საწყისი მდგომარეობიდან დავიწყებთ და $\lambda(k)$ -ს ნამდვილი ნაწილი $k \neq 0$ შემთხვევაში დადებითი იქნება, მაშინ სისტემას ნებისმიერი მცირე შემფოთება ერთგვაროვანი მდგომარეობის არასტაბილური ფიქსირებული წერტილიდან დაშორებისაკენ უბიძგებს.

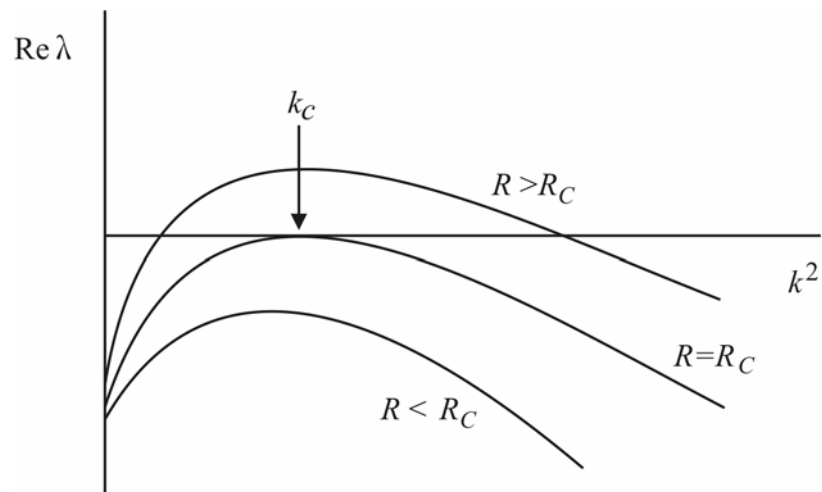
ავიჩინოთ მაკონტროლებელ პარამეტრად დიფუზიის D_2 მუდმივა იმ დაშვებით, რომ ყველა სხვა პარამეტრი ფიქსირებულია. 3.3 ცხრილიდან გამომდინარე, k -ს ნებისმიერი მნიშვნელობის შემთხვევაში λ -ს ნამდვილი ნაწილი მხოლოდ იმ შემთხვევაში იქნება დადებითი, როდესაც სრულდება შემდეგი პირობა:

$$D_1 D_2 k^4 - k^2 (D_1 f_{22} + D_2 f_{11}) + f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21} < 0 \quad (11.5-17)$$

ეს შემთხვევა დეტალურად არის გაანალიზებული [Murray, 1989, თავი 14]-ში. D_2 პარამეტრის სხვადასხვა მნიშვნელობებისთვის დისპერსიული დამოკიდებულების ტიპური მრუდი 11.13 ნახაზზეა ნაჩვენები. $D_2 < D_c$ (კრიტიკული მნიშვნელობა) შემთხვევაში ნებისმიერ λ -ს უარყოფითი ნამდვილი ნაწილი გააჩნია და სივრცული ერთგვაროვანი მდგომარეობა სტაბილურია. $D_2 = D_c$ პირობებში სივრცითი ტალღა $k = k_c$ მნიშვნელობასთან ერთად ზრდას იწყებს. $D_2 > D_c$ პირობებში k -ს რამდენიმე მნიშვნელობასთან დაკავშირებული მოდეები

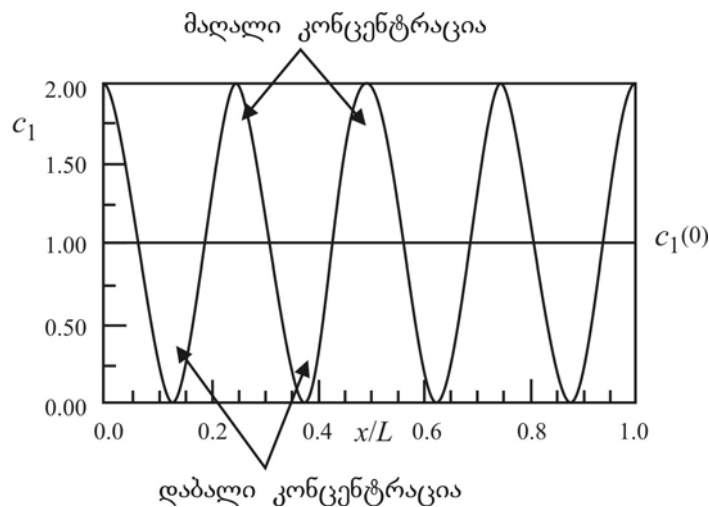
შეიძლება გაიზარდოს. ამ შემთხვევაში მნიშვნელოვანია ზომიერების შენარჩუნება: ჩვენი კვლევები პასუხს ვერ იძლევა, თუ რა მოსდით მოდებს ამპლიტუდების ზრდასთან ერთად. ჩვენი კვლევები გამოსადეგია მხოლოდ ერთგვაროვანი, სტაციონარული მდგომარეობების შესაბამისი საწყისი პირობების შემთხვევაში.

ამოცანა 11.5-3. 11.5.2 ამოცანაში დავადგინეთ, თუ რა შეზღუდვები წესდება f_{ij} -ების მიმართ, როდესაც ვუშვებთ, რომ წონასწორული მდგომარეობა გვაქვს მხოლოდ $k=0$ შემთხვევაში. (a) გამოიყენეთ ეს შედეგები, 11.5.17 პირობა და დაამტკიცეთ, რომ დიფუზიის ორთავე კოეფიციენტის ტოლობის შემთხვევაში ($D_1=D_2$) ვერც ერთი სივრცითი მოდა ვერ იქნება არასტაბილური (და ამგვარად, არანაირი სივრცითი სტრუქტურა არ წარმოიქმნება). (b) დაუშვით, რომ $f_{11}>0$ (ნივთიერება 1 არის თვითაქტივატორი) და $f_{22}<0$ (ნივთიერება 2 არის თვით-პასივატორი). აჩვენეთ, რომ სივრცითი მოდის არასტაბილურ მდგომარეობაში გადასაყვანად გვჭირდება $D_2>D_1$ პირობის დაკმაყოფილება. მინიშნება: იხილეთ [Murray, 1989, თავი 14].



ნახ. 11.13. ორკომპონენტური ბმული დიფუზიურ-რეაქციული სისტემის $\lambda(k)$ დისპერსიული დამოკიდებულების ნამდვილი ნაწილის ტიპური მრუდი. როდესაც $\lambda(k)$ -ს ნამდვილი ნაწილი დადებითი ხდება, k -ს შესაბამისი სივრცითი მოდის ამპლიტუდა ზრდას იწყებს. $R=D_2/D_1$ წარმოადგენს დიფუზიის კოეფიციენტთა ფარდობას.

ნახ. 11.14 გვიჩვენებს ერთგანზომილებიანი კონცენტრაციული სტრუქტურის ესკიზს, რომელიც წარმოქმნილია $k_c=8\pi/L$ შემთხვევაში.



ნახ. 11.14. c_1 კონცენტრაციის სივრცითი სტრუქტურის ესკიზი $k_c=8\pi/L$ მნიშვნელობის შემთხვევაში. როდესაც $c_1 > c_1(0)$, ნივთიერება 1-ის კონცენტრაცია ერთგვაროვან მნიშვნელობას აღემატება. სტრუქტურა წარმოადგენს მაღალი და დაბალი კონცენტრაციის შესაბამისი არეების განსხვავებულ მიმდევრობას (c_1 -სათვის მასშტაბი პირობითია).

პროცედურების მოკლე შინაარსი

საკმაოდ ხანგრძლივი გამოთვლების ჩატარების შემდეგ სასურველია, რომ შევაჯამოთ მიღებული შედეგები.

დიფუზიურ-რეაქციული სისტემისთვის გამოყენებული მეთოდი სტრუქტურის წარმოქმნის შესწავლისთვის გამოყენებული გამოთვლების პროტოტიპია. პროცედურა ასეთია:

1. დავადგინოთ სისტემის ამსახველი ძირითადი განტოლებები და სასაზღვრო პირობები. მოცემულ პარამეტრებში განხილული მოდელების შემთხვევაში ეს განტოლებები როგორც სივრცითი, ასევე დროითი წარმოებულების შემცველი კერძო დიფერენციალური განტოლებებია.

2. ჩავწეროთ ზოგადი ამონახსნები ორი ფუნქციის ნამრავლის სახით, რომელთაგან პირველი დროზე, ხოლო მეორე სივრცით ცვლადებზე არის დამოკიდებული.

3. ამოხსნის სივრცითი ნაწილი აღიწერება განტოლებით, რომელიც სასაზღვრო პირობებთან ერთად სისტემის შესაძლო k ტალღურ ვექტორებსა და $U_k(\vec{r})$ ტალღურ ფუნქციებს განსაზღვრავს.

4. სტაბილური მდგომარეობის (ფიქსირებული წერტილი) პირობის შესრულების შემთხვევაში ფუნდამენტური განტოლებები წრფივი ფორმითაა წარმოდგენილი (ტეილორის მწკრივები).

5. სივრცითი მოდების (შესაძლოა დროზე დამოკიდებული) განზოგადება ფუნდამენტურ განტოლებებშია გამოყენებული, რაც დროზე დამოკიდებულ ამპლიტუდებთან დაკავშირებით ჩვეულებრივ დიფერენციალური განტოლებების სისტემას გვაძლევს.

6. დროის მიმართ დამოკიდებულება განისაზღვრება მახასიათებელი ექსპონენტების მეშვეობით. სივრცითი მოდის ამპლიტუდები მდგომარეობათა სივრცის ცვლადების როლს ასრულებს. თუ მოდებს შორის ურთიერთქმედება საკმაოდ იშვიათია, გამოკვლევისთვის მათი მცირე რაოდენობაც საკმარისია.

7. ჩვენ ვეძებთ სივრცითი წესრიგის ბიფურკაციათა მეშვეობით გამოვლენას. სივრცითი მოდები არასტაბილურ მდგომარეობაში გადადის და ზრდას იწყებს. ამგვარი ზრდა გამოიხატება დროითი მახასიათებელი ექსპონენტებიდან ერთ-ერთის დადებითი მნიშვნელობის მქონე ნამდვილი ნაწილის მეშვეობით.

8. უფრო სრული („გლობალური“) კვლევა მზარდი მოდების „მომავლის“ გარკვევის მიზნით უნდა ჩატარდეს (უმეტეს შემთხვევაში სრულყოფილი კვლევა ძალიან დიდ სირთულეებთან არის დაკავშირებული).

ორგანზომილებიანი სტრუქტურის წარმოქმნა

როდესაც სტრუქტურის წარმოქმნისთვის საჭირო ორი (ან მეტი) სივრცითი განზომილება არსებობს, „ცხოვრება ბევრად საინტერესო“ ხდება. ჩვენ მხოლოდ გაკვრით შეგვხვებით ორი განზომილების შემთხვევაში მიმდინარე მოვლენებს და მეტი ინფორმაციის მისაღებად მკითხველს თავის ბოლოში მოყვანილ ლიტერატურას ვურჩევთ.

მაქსიმალური სიმარტივისთვის ავუშვებთ, რომ სტრუქტურა ორი სივრცითი განზომილების ფარგლებში მდებარეობს. მაგალითად, ერთი კომპონენტისგან შემდგარ დიფუზიურ-რეაქციულ სისტემას მოვიყვანთ. ამ შემთხვევაში 11.5.11 გამოსახულება შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ

$$\frac{\partial C(x, y)}{\partial t} = f(C) + D \left\{ \frac{\partial^2 C(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C(x, y)}{\partial y^2} \right\} \quad (11.5-18)$$

სადაც რეაქციის შესაბამისი წვერი C -ს არაწრფივი ფუნქციაა (ჩვენ წინაშეა ავტოკატალიზური რეაქცია). დავუშვათ, რომ ერთგვაროვანი სტაბილური მდგომარეობის შესაბამისი სტრუქტურის გამოვლენის პირობას მხოლოდ ერთი ტალღური ვექტორის აბსოლუტური სიდიდე აკმაყოფილებს. სტაბილურობის პირობები, საზოგადოდ, არაა დამოკიდებული ვექტორის მიმართულებაზე. როგორი თვისებები ექნებათ შესაძლო სტრუქტურებს?

დავუშვათ, მოცემული სისტემის შემთხვევაში გამორჩეული მიმართულება და წერტილი არ არსებობს (სისტემა *იზოტროპული* და *ერთგვაროვანია*). თუ მოხდა სტრუქტურის ჩამოყალიბება, მაშინ იგი სიბრტყის სრულად დამფარავი, ერთმანეთთან კარგად მორგებული რეგულარული მრავალკუთხედებისაგან უნდა იყოს შემდგარი. რეგულარული მრავალკუთხედის წარმოქმნის მოთხოვნა შესაძლო სტრუქტურებს გარკვეულწილად ზღუდავს: თუ მრავალკუთხედს n გვერდი გააჩნია, მაშინ თითოეული შიდა კუთხე $\pi(1-2/n)$ რადიანის ტოლია. სიბრტყის სრულად დაფარვისათვის 2π უნდა დაიყოს მთელ რიცხვჯერ, რომელსაც m -ით აღვნიშნავთ. მოცემული (n,m) წყვილებისთვის ეს ორი პირობა ერთდროულად უნდა შესრულდეს. ტოლგვერდა სამკუთხედების, კვადრატებისა და ექვსკუთხედების შესაბამისი პირობებია $(3,6)$, $(4,4)$, $(6,3)$. რასაკვირველია, სხვადასხვა ამპლიტუდებთან, ფაზებთან და მარტივი მრავალკუთხედის ფორმებთან კომბინაციაში სისტემა უფრო რთულ სტრუქტურებს განავითარებს. ჩვენ ვუშვებთ, რომ სტრუქტურის წარმოქმნის პირას ვიმყოფებით, ამიტომ მხოლოდ მარტივი მრავალკუთხედის შემთხვევის განხილვა გვესაჭიროება.

მრავალ სისტემაში „რულონის“ მსგავსი სტრუქტურებიც გვხვდება, რომლებიც 11.14 ნახაზზე ნაჩვენებია ერთგანზომილებიანი სტრუქტურის განზოგადებებია ორ განზომილებაში. რულონის სტრუქტურაში კონცენტრაცია (ან სხვა შესაბამისი ფიზიკური პარამეტრი) ერთი მიმართულებით პერიოდული სახით იცვლება, მაგრამ ორთოგონალური მიმართულებით თანაბარია.

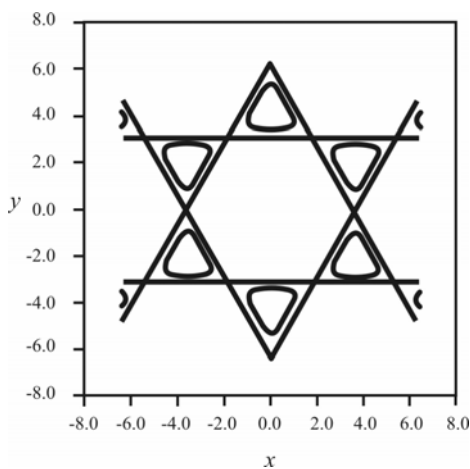
როგორც რულონის, ასევე მრავალკუთხედის შემთხვევაში, სისტემის იზოტროპულობის დაშვების შემდეგ, სისტემის ასიმეტრიულობამ ან შემთხვევითმა ფლუქტუაციებმა უნდა განსაზღვრონ სტრუქტურის ორიენტაცია. უნდა მოხდეს სისტემის ღერძული სიმეტრიის დარღვევა.

რეაქციის ფუნქცია განსაზღვრავს შესაძლო ზრდადი სტრუქტურებიდან რომელია სტაბილური. რეაქციის ფუნქცია, რასაკვირველია, საკვლევ სისტემაზეა დამოკიდებული. უმეტეს შემთხვევაში მას ერთგვაროვანი სტაბილური მდგომარეობიდან კონცენტრაციის $c(x,y)=C(x,y) - C_0$ გადახრის მიხედვით განვსაზღვრავთ. ყველაზე მნიშვნელოვანი რეაქციის

ფუნქციის პირველი და მესამე ხარისხის წევრებია, რომელთაც მივყავართ **გინცბურგ-ლანდაუს** განტოლებამდე:

$$\frac{\partial c(x, y)}{\partial t} = ac(x, y) + bc^3(x, y) + D\nabla^2 c(x, y) \quad (11.5-19)$$

აქ კვადრატული წევრი გამოტოვებულია, რადგან გვსურს, რომ c -ს $-c$ -თი შეცვლის შემთხვევაში განტოლებამ სახე შეინარჩუნოს ანუ სტაბილური მდგომარეობის შესაბამისი კონცენტრაციის ზემოთ ან ქვემოთ გადახრა იდენტური იყოს. გინცბურგ-ლანდაუს განტოლება გამოიყენება სტრუქტურის წარმოქმნის მოდელირებისათვის სითხეებში, ქიმიურ რეაქციებში, ლაზერული გამოსხივების ინტენსივობის ფორმებსა და სხვა მრავალ სფეროში.



ნახ. 11.15. 11.5.20 დამოკიდებულების შესაბამისი ექვსკუთხედის სქემატური დიაგრამა. ექვსკუთხედის ცენტრში $c(x, y) > -1$. სამკუთხა მომრგვალებული კონტურების შიგნით $c(x, y) < -1$.

მიუხედავად იმისა, რომ ამის გაკეთება ხშირად საკმაოდ რთულია, პარამეტრების მოცემულ სიმრავლის შესაბამისი სტაბილური სტრუქტურების განსაზღვრისათვის საჭირო რეაქციის ფუნქციის ზუსტი ფორმის გამოყენება შეგვიძლია.

ექვსკუთხა სტრუქტურები ხშირად გვხვდება (იხ. მაგალითად [Murray 1989] და [Chandrasekhar, 1981]). ნაკადის სასაზღვრო პირობების დამაკმაყოფილებელი 11.5.10 განტოლების ორგანოზომილებიანი განზოგადების გამოყვანა და ექვსკუთხა სტრუქტურის აღწერა პოლარულ კოორდინატებში შემდეგი გამოსახულების მიხედვით არის შესაძლებელი [Chandrasekhar, 1981]:

$$c(r, \theta) = \cos\{kr \sin(\theta)\} + \cos\{kr \sin(\theta + \pi/3)\} + \cos\{kr \sin(\theta + 2\pi/3)\} \quad (11.5-20)$$

სადაც $k=4\pi/(3L)$, ხოლო L ექვსკუთხედის გვერდის სიგრძეა (კონცენტრაციათა სხვაობის ამპლიტუდა შერჩევითია. ჩვენ შემთხვევაში კოორდინატთა სისტემის სათავეში $c=3$). როგორც ვხედავთ, ტალღის ვექტორის სიდიდესა და სტრუქტურის გეომეტრიულ ზომას სასაზღვრო

პირობების ნაცვლად სტაბილურობათა პირობები განსაზღვრავს. 11.15 ნახაზზე ერთ-ერთი ასეთი ექვსკუთხა სტრუქტურის დიაგრამაა გამოსახული.

სტრუქტურის შერჩევა და სივრცე-დროის „ტურბულენტობა“

პროცესს, რომლის მეშვეობითაც ერთგვაროვანი სივრცითი მდგომარეობიდან არაერთგვაროვანი სტრუქტურა წარმოიქმნება, სტრუქტურის *შერჩევა* ეწოდება. უმარტივეს შემთხვევებში მხოლოდ ერთი სივრცითი მოდა არსებობს, რომლის ამპლიტუდაც სისტემის საწყისი მდგომარეობიდან „წანაცვლებასთან“ (მაგალითად, შემთხვევითი შეშფოთებით გამოწვეული) ერთად იზრდება. პირობათა მოცემული სიმრავლისათვის რამდენიმე არასტაბილური მოდა შეიძლება არსებობდეს. მათი შერჩევა საწყისი პირობებისა და „შემთხვევითი“ შეშფოთების ხასიათის მიხედვით ხდება. ზოგად შემთხვევაში ექსპერიმენტის განმეორებამ შეიძლება განსხვავებული სტრუქტურები მოგვცეს, რადგან საწყისი პირობები ზუსტად არასოდეს მეორდებიან. მიუხედავად იმისა, რომ სისტემის „საბოლოო მდგომარეობის“ ანათვალში ხმაურისა და ფლუქტუაციების შეყვანა შეიძლება არ გვსურდეს, მაგრამ ისინი ხშირად ამ სტრუქტურების წარმოქმნასა და განვითარებაში გადამწყვეტ როლს ასრულებენ.

როგორც დიფუზიურ-რეაქციულ სისტემებთან დაკავშირებით ვნახეთ, სისტემის შესაძლო სივრცითი მოდები მისი ერთგვაროვანი მდგომარეობიდან არაერთგვაროვანში გადასვლისას წარმოქმნილი სტრუქტურების ტიპებს განსაზღვრავს. რეალურ სიტუაციებში მოდების კლასიფიკაციის მიზნით დამატებითი ინფორმაცია გვესაჭიროება. თუ სისტემასა და შესაბამის სასაზღვრო პირობებს გარკვეული სივრცითი სიმეტრია აქვს, მაშინ სიმეტრიის ჯგუფების მათემატიკური თეორია შესაძლო სტრუქტურების კლასიფიკაციისათვის შეგვიძლია გამოვიყენოთ (დამატებითი დეტალებისთვის იხილეთ [Golubitsky, Stewart, Schaeffer, 1988] და GMD90).

როდესაც გამოვლენილ სივრცით სტრუქტურებს საკმაო სივრცითი სირთულე აღენიშნებათ, ვამბობთ, რომ სისტემა დრო-სივრცის ქაოსს ან, შედარებით იშვიათად, ტურბულენტობას ამჟღავნებს (ტექნიკურად თვალსაზრისით ამ მდგომარეობას „სუსტი ტურბულენტობა“ ეწოდება. მორევის და ა.შ. მსგავს ძლიერ ტურბულენტობასთან საფუძვლიანი კავშირი ჯერჯერობით არ არის შესწავლილი). დრო-სივრცის ქაოსის მქონე ბევრ სისტემას ე.წ. *დეფექტების შემცველი* სივრცითი სტრუქტურები გააჩნიათ. დეფექტს განვიხილავთ განსხვავებული სივრცითი სტრუქტურების მქონე არეებს შორის არსებული საზღვრის თვალსაზრისით. მაგალითად, ერთ არეში სტრუქტურა კონკრეტული პერიოდის

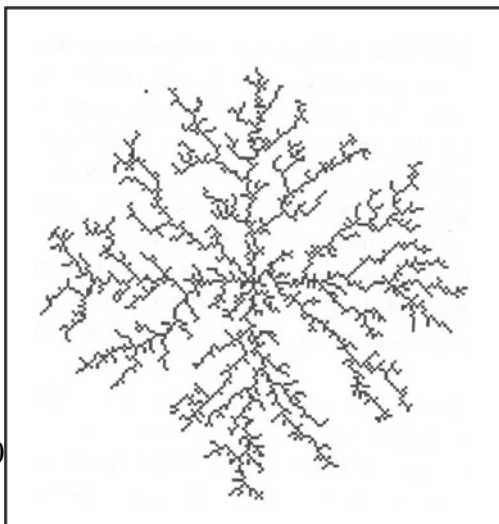
მქონე ხასიათის შეიძლება იყოს. მოსაზღვრე არეში სტრუქტურა კვლავ იმავე პერიოდის მქონე შეიძლება იყოს, მაგრამ ამ შემთხვევაში საზღვარზე ფაზების ცვლილება ხდება. ეკმანმა და პროკაკიამ (ECP91) დაამტკიცეს, რომ მოცემულ პარაგრაფში განხილული სტაბილურობის კვლევის მეთოდები დეფექტის გამოვლინების სიხშირის მიხედვების განხილვისას შეგვიძლია გამოვიყენოთ.

სივრცითი მოდების მიმზიდველების ცნება კომპლექსური სივრცითი სტრუქტურების შესახებ მსჯელობისას გამოგვადგება. ამგვარი დაშვება გამოკვლეულია და შესაბამისი კონტრარგუმენტები მოყვანილია CRK88-ში.

11.6 დიფუზიით შეზღუდული აგრეგაცია, ელექტროდეკომპოზიცია და სიბლანტის ენები: დაბრუნება ფრაქტალებთან

წინა პარაგრაფში ვნახეთ, რომ სივრცითი ტალღის ამპლიტუდების სტაბილურობისა და არასტაბილურობის შესწავლის გზით შეგვიძლია სტრუქტურის წარმოქმნის საწყისი ეტაპის გააზრება. მიუხედავად ამისა, სტაბილური მდგომარეობის პირობით შეზღუდული ანალიზი მხოლოდ რომელიმე სივრცითი ტალღის ზრდის დაწყების მომენტს თუ მოგვცემს. მოცემული ანალიზი ვერ გვამცნობს სისტემის საბოლოო მდგომარეობას. ფაქტიურად, მრავალი სისტემა წინა პარაგრაფში მოყვანილი ანალიზის მიღმა დარჩენილ რთულ სივრცით სტრუქტურებს ანვითარებს. მოცემულ პარაგრაფში ერთიმეორის მსგავსი რთული სივრცითი სტრუქტურების განმავითარებელ სამ საკმაოდ განსხვავებულ ფიზიკურ სისტემას აღვწერთ.

ჩვენი მიდგომა უფრო წარმოსახვითია, ვიდრე ანალიზური ანუ მათემატიკური მოდელების მეშვეობით ამ სტრუქტურების კვლევის მეთოდების ილუსტრაციის მიზნით შესაბამის მოდელებს შეძლებისდაგვარად ზუსტად გამოვიყვანოთ. პრაქტიკულად ეს სისტემის კომპიუტერულად აგებას ნიშნავს. სისტემები, როგორც მათ მიერ წარმოქმნილი სტრუქტურების სახეობების, ასევე მათი აღწერისთვის გამოყენებული მათემატიკური სტრუქტურების მიხედვით არის ერთმანეთთან დაკავშირებული.



ნახ. 11.16. დიფუზიით შეზღუდული აგრეგაციის კომპიუტერული მოდელის მიხედვით წარმოქმნილი სტრუქტურის მაგალითი. ნაწილაკი საზღვართან შემთხვევითი სახით მოძრაობს, სანამ მასის მიერ დაკავებულ არესთან არ განიცდის კონტაქტს,

სადაც რჩება კიდევ. ნახაზის მარცხენა ზედა ნაწილში ნაჩვენებია მასასთან მიახლოებული ნაწილაკი.

დიფუზიით შეზღუდული აგრეგაცია

დიფუზიით შეზღუდული აგრეგაცია (DLA) წარმოადგენს პროცესს, რომლის დროსაც ნივთიერება მშვიდად განიცდის დიფუზიას, სანამ არ დაეჯახება სხეულს, რომელსაც შეიძლება მიეწებოს. თავდაპირველად ეს სხეული შეიძლება იყოს ტალახის ნაჭერი, რომლის ზედაპირზეც დიფუნდირებადი ნივთიერების მასა დაგროვებას იწყებს და შედეგად წარმოქმნას იწყებს „კრისტალი“. რეალურ შემთხვევებში დიფუნდირებადი მოლეკულები მასას სხვადასხვა მიმართულებებიდან თანაბარი ალბათობით უახლოვდება. ამგვარ იზოტროპულ პირობებში წარმოქმნილი მასა მეტ-ნაკლებად სფეროს ფორმის უნდა იყოს. სინამდვილეში, წარმოქმნილი სტრუქტურები სხვა სფეროებს არ წარმოადგენს. მათ 11.16 ნახაზზე მოყვანილის მსგავსი რთული სტრუქტურების წარმოქმნის ტენდენცია აღენიშნებათ.

როგორ აღვწეროთ DLA ანალიზურად? დავიწყოთ დიფუზიის (11.4.10) განტოლებით, თანაც დავუშვათ, რომ დიფუზია იმდენად მშვიდად მიმდინარეობს, რომ შეგვიძლია კონცენტრაციის დროით წარმოებულისა და $\vec{v} grad$ წევრის უგულებელყოფა. მაშინ დიფუზიის განტოლება შემდეგ სახეზე დაიყვანება:

$$\nabla^2 C(x, y, z) = 0 \tag{11.6-1}$$

დასადგენია შესაბამისი სასაზღვრო პირობებიც. ამ შემთხვევაში ვუშვებთ, რომ კონცენტრაცია საზღვრებზე (როგორც სისტემის პერიფერიაზე, ასევე წარმოქმნილი მასის ზედაპირზე) უცვლელია.

ცხადი სახით არ ჩანს, რომ მოცემული სასაზღვრო პირობების შემცველი 11.6.1 განტოლება DLA -ში წარმოდგენილი რთული სტრუქტურების წარმოქმნას იწვევს. ფაქტიურად, 11.6.1 განტოლება ფიზიკის სამაგისტრო კურსებზე შესწავლილი დამუხტული სხეულების გარშემო ელექტრული პოტენციალებისთვის გამოყვანილი განტოლებების რიცხვს მიეკუთვნება.

	0.25				0.145	0.145
0.25	X	0.25		0.21	X	X
	0.25				0.145	0.145

ნახ. 11.17. DLA კრისტალური მესერი. მარცხნივ გვაქვს X-ით აღნიშნული ერთი უჯრედი. ოთხი მოსაზღვრე უჯრედიდან ერთ-ერთში მოხვედრის

ალბათობა 1/4-ის ტოლია. მარჯვნივ კომპლექსური ქმედების გამომწვევი ორი მეზობელი უჯრედია. აქ კილიდან მიწებების ალბათობა გვერდიდან მიწებებისას აღემატება.

ყველა შემთხვევაში ამონახსნები მდებარეობის საკმაოდ გლუვი ფუნქციებია და DLA გროვებთან საერთო არაფერი აქვთ. კიდევ ორი განსხვავებული ფიზიკური სისტემის განხილვის შემდეგ 11.6.1 განტოლების გამოსაკვლევ სტრუქტურებთან დაკავშირების მათემატიკურ საკითხს დავუბრუნდებით.

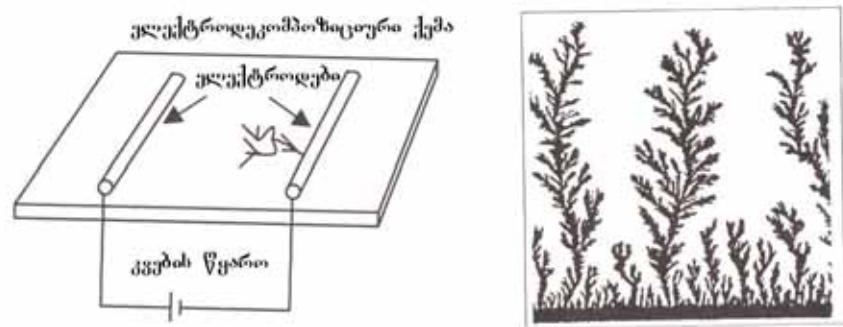
თუმცა, სტრუქტურების წარმოქმნასთან დაკავშირებით გარკვეული ინტუიციური დასკვნების გაკეთებაც შეგვიძლია განტოლებების ამოხსნის გარეშეც. DLA-ს შესაბამისი კომპიუტერული პროგრამის შედგენა საკმაოდ ადვილია. კომპიუტერს უნდა მივცეთ ბრძანება გამოუშვას „მოლეკულა“ მონიტორის კილის შემთხვევითი სახით არჩეული წერტილიდან. მაშინ მოლეკულა „მისაწებებელ“ სხეულთან დაჯახებამდე მონიტორზე უწყესრიგოდ იმოძრაებს. შემდეგ სხვა მოლეკულა გაიმეორებს იგივე პროცესს და ა.შ. საბოლოოდ მასას 11.16 ნახაზზე ნაჩვენების მსგავსი რთული სტრუქტურა ექნება.

გრძელი კომპლექსური ძაფების (ან *დენდრიტების*) ზრდის ტენდენციის მთავარი ფიზიკური მიზეზი ადვილად გასაგებია. 11.17 ნახაზის მარცხნივ გამოსახულია ერთი X უჯრედი (მაგალითად, კომპიუტერის ეკრანი) და მის ირგვლივ - ცარიელი უჯრედები. განვიხილოთ უმარტივესი მოდელი, რომლის მიხედვითაც მოლეკულას მიწებების უნარი მხოლოდ იმ შემთხვევაში გააჩნია, როდესაც იგი უჯრედში ზუსტად ზემოთ ან ქვემოთ ან ზუსტად მარჯვნივ ან მარცხნივ აღმოჩნდება. როდესაც მოლეკულა იზოტროპულად განიცდის დიფუზიას, ერთ-ერთ ცარიელ უჯრედთან კონტაქტის ალბათობა 1/4-ის ტოლია. ვთქვათ, გვაქვს ორი X უჯრედი (11.17 ნახაზის მარჯვენა ნაწილი). მოლეკულა რომელიმე მათგანს იმ შემთხვევაში მიუერთდება, თუ იგი ზუსტად მის ზემოთ ან ქვემოთ, მარჯვნივ ან მარცხნივ აღმოჩნდება. ზედა და ქვედა უჯრედებისათვის ალბათობები მიახლოებით 0.145-ია, ხოლო კიდურა უჯრედებისათვის 0.21-ის ტოლია. მნიშვნელოვანია, რომ სახეზეა კიდევზე მოლეკულის მიწებებისა და ძაფების გაგრძელების არათანაბარი ალბათობები.

ამოცანა 11.6-1. გამოთვალეთ 11.6.2 ნახაზზე წარმოდგენილი მიერთების ალბათობები.
მინიშნება: გამოიყენეთ სიმეტრიის არგუმენტები.

მეორე მექანიზმს ახასიათებს ბაფთისებრი სტრუქტურის გაფართოების ტენდენცია. თუ ორი კომპლექსური ძაფი ერთიმეორის მახლობლად იწყებს ზრდას, ისინი „ფიორდს“ წარმოქმნიან, რომელში შეღწევაც რომელიმე ძაფის ირგვლივ დიფუზირებად და ამავე ძაფთან

შეწებებასთან ახლოს მყოფ ნაწილაკს უჭირს. როდესაც მოლეკულა კომპლექსური ძაფის კიდეს უერთდება, იგი განტოტებული ძაფის კრისტალს წარმოქმნის, რომელიც შემდგომ ფიორდის შიგთავსს გადაეკვრება.



ნახ. 11.18. მარცხნივ მოყვანილია მართკუთხა ელექტროდეკომპოზიციის უჯრედის სქემა. ელექტროდენი შუშის ფირფიტაზე მოთავსებულ 0.1 მმ დიამეტრის მქონე ორ ელექტროდს შორის გადის. ელექტროდები, ორი განზომილების ფარგლებში დენის შენარჩუნების მიზნით, კიდევ ერთი შუშის ფირფიტითაა (არ არის ნაჩვენები) დაფარული. ფირფიტებს შორის სივრცე, $ZnSO_4$ -ის წყალხსნარითაა შევსებული. მარჯვნივ, ელექტროდეკომპოზიციის შედეგად მიღებული სტრუქტურა არის წარმოდგენილი (AAG88-ის მიხედვით).

ამრიგად, სქემატურად ჩანს, თუ რატომ გააჩნია DLA-ს გრძელი და თხელი განტოტებული კომპლექსური სტრუქტურების გამოწვევის ტენდენცია. DLA მოდელი გამოიყენება თოვლის ფიფქისებრი სტრუქტურებისა და სხვა მრავალი ფიზიკური მოვლენის ახსნისთვის.

ელექტროდეკომპოზიცია

თუ ელექტროდები იონური მინარეგების შემცველ ხსნარში არიან ჩაშვებული და გვაქვს პოტენციალთა სხვაობა ორ ელექტროდს შორის, მაშინ აღიძვრება იონური დენი ელექტროდებს შორის. თუ იონური მინარეგები Zn^{+} -ის ტიპის ლითონის იონია, მაშინ ლითონის ატომები დაილექება ფენის სახით უარყოფით ელექტროდზე. 11.18 ნახაზი წარმოგვიდგენს ელექტროდეკომპოზიციის სქემას. ელექტროდეკომპოზიციასა და 11.16 ნახაზზე წარმოდგენილ DLA -ს შორის სტრუქტურული მსგავსება აშკარაა.

ელექტროდეკომპოზიციის მათემატიკური აღწერა მსგავსია DLA დახასიათების შემთხვევისა. როდესაც იონური ნაკადი ძალზე მცირეა, იონების ელექტროსტატიკური ველების სახით „მმართავი“ ელექტრული ველების (ან ელექტრული პოტენციალების)

აღწერა შესაძლებელია. $V(x,y,z)$ ელექტრული პოტენციალი აღიწერება ლაპლასის განტოლების მეშვეობით:

$$\nabla^2 V(x, y, z) = 0 \quad (11.6-3)$$

არეში, სადაც იონები გადაადგილდება (ვუშვებთ, რომ მოძრავი იონების კონცენტრაცია იმდენად მცირეა, რომ ისინი ერთ-ერთი იონის მიერ „დაფიქსირებულ“ პოტენციალზე ზეგავლენას ვერ ახდენენ). სასაზღვრო პირობებიდან გამომდინარე, V პოტენციალს დადებითი ელექტროდის ზედაპირსა და უარყოფით ელექტროდზე წარმოქმნილ ლითონურ ფენაზე მუდმივი სახით ვიღებთ. გადატანის დამოკიდებულება მოიცემა ომის კანონის მეშვეობით:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = -\sigma \text{grad } V(x, y, z) \quad (11.6-4)$$

ამრიგად, ელექტროდეკომპოზიციის მათემატიკური აღწერა DLA-ის აღწერის ანალოგიურია.

ელექტროდეკომპოზიციის დროს დენდრიტების წარმოშობის პროცესის ახსნა სავსებით შესაძლებელია. თუ ლითონის ფენა დებულობს წაწვეტებულ ფორმას, მაშინ საზღვრის გლუვ ნაწილთან შედარებით წვეტიანი დაბოლოების მახლობლად ელექტრული ველი უფრო ძლიერია. უფრო ძლიერი ელექტრული ველი ამ არეში შემავალი იონების დენის სიმკვრივის ზრდას იწვევს და წვეტის ზრდის ტენდენცია სახეზეა. ვამბობთ, რომ გლუვი ზედაპირი არასტაბილურია მცირე, სივრცულად ლოკალიზებული შეშფოთებების მიმართ.

სიბლანტის ენები

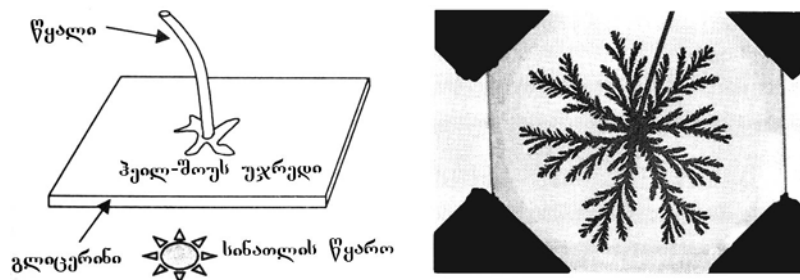
თუ ნაკლებად ბლანტ სითხეს მეტად ბლანტში ნელ-ნელა შევიყვანთ, მაშინ ნაკლებად ბლანტი სითხე მეორე სითხეში განვრცობის ტენდენციას გამოამჟღავნებს. ამ დროს წარმოიშობა ენისმაგვარი გრძელი და თხელი განშტოებები. სიბლანტის “ენების” ტიპური სტრუქტურა 11.19 ნახაზზეა ნაჩვენები.

სიბლანტის ენების წარმოშობი ფიზიკური პროცესები მნიშვნელოვანია სხვადასხვა სფეროებში. მაგალითად, წყალი ხშირად შეყავთ ნავთობის ჭაბურღილებში, რათა წყლის წნევით ნავთობის ამოღების ინტენსიურობა გაიზარდოს. ამავე დროს, ნავთობში გაჩენილმა წყლის სიბლანტის ენებმა ამოღების პროცესს შეიძლება ხელიც შეუშალოს. სიბლანტის ენების გამოყენებასთან დაკავშირებით უფრო დეტალური მსჯელობისთვის იხილეთ WON88.

შემოვიღოთ გარკვეული ფორმალური მიდგომა სიბლანტის ენების აღწერის მიზნით. დაუშვათ, რომ სითხე იმდენად მშვიდია, რომ მისი სიჩქარე პროპორციულია p წნევის გრადიენტისადმი (ე.წ. *დერსის კანონი*):

$$\vec{v} = -\beta \text{grad } p \quad (11.6-6)$$

სადაც β პარამეტრი სითხის სიბლანტეზეა დამოკიდებული. გამოყენებული ექსპერიმენტული პირობების თანახმად, სითხეების კუმშვადობის უგულებელყოფა შეგვიძლია. ამრიგად, შეგვიძლია გამოვიყენოთ $\text{div } \vec{v} = 0$ არაკუმშვადობის პირობა, რაც მოგვცემს:



ნახ. 11.19. მარცხნივ ნაჩვენებია სიბლანტის ენების შესწავლისას გამოყენებული პეილ-შოუს უჯრედის სქემა. ბლანტი სითხის ვიწრო შრე ბრტყელ ფირფიტებს შორისაა განთავსებული. ნაკლებად ბლანტი სითხე მცირე ზომის ზვრელის საშუალებით ნელ-ნელა შეყავთ უჯრედის ცენტრში. მარჯვნივ ნაჩვენებია სიბლანტის ენების ტიპური სტრუქტურა წყლისა და გლიცერინისთვის (WON88-ის მიხედვით.)

$$\nabla^2 p = 0 \quad (11.6-7)$$

ამრიგად, p წნევა იმავე როლს ასრულებს, რასაც კონცენტრაცია DLA-ში, ხოლო ელექტრული პოტენციალი ელექტროდეკომპოზიციაში. p -სთან დაკავშირებული სასაზღვრო პირობა იმაში მდგომარეობს, რომ ნაკლებად ბლანტი სითხეში წნევა მუდმივი უნდა იყოს. ასევე უნდა განვსაზღვროთ ბლანტი სითხეში საზღვრის მახლობლად წნევის გრადიენტი (BKL86).

ენების წარმოქმნის მიზეზის გასაგებად კვლავ მარტივი ფიზიკური არგუმენტის მოყვანა შეგვიძლია: წარმოიდგინეთ ორ სითხეს შორის მყოფი ბრტყელი გამყოფი ფენა. თუ შემთხვევითი ფლუქტუაციებისათვის დამახასიათებელ მცირე დეფორმაციას ექნება ადგილი, მაშინ დეფორმაციის სიანგლოვს მყოფ სითხეს წნევის შედარებით მეტი სიჩქარე ექნება. როგორც ვხედავთ, გლუვი ფენა არასტაბილურია მცირე, სივრცულად ლოკალიზებული შემფოთებების მიმართ, დეფორმაცია კი იზრდება.

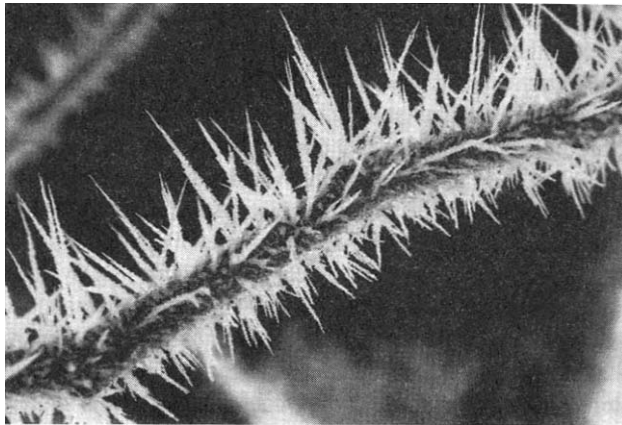
DLA-ს, ელექტროდეკომპოზიციისა და სიბლანტის ზოგადი განტოლება [11.6.1, 11.6.3 და 11.6.7 განტოლებები] წრფივი კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებაა. როგორ ვიხელმძღვანელოთ წრფივი განტოლებით ბიფურკაციის მოვლენებთან და ფრაქტალურ სტრუქტურებთან დაკავშირებით, რომლებიც არაწრფივ განტოლებებთან არიან ასოცირებულნი? პასუხი ის არის, რომ ამ პარაგრაფში განხილული მოვლენების კლასთან დაკავშირებით არაწრფივობები სასაზღვრო პირობებში გვხვდება. საზღვრის მოძრაობასთან ერთად თითოეულ სისტემაზე მოქმედი ჯამური ეფექტი საზღვარზე არაწრფივია. ამგვარ მდგომარეობასთან დაკავშირებული მათემატიკური ასპექტები PET89-სა და BLT91-შია მოყვანილი.

ფრაქტალური განზომილებები

DLA-ს მიერ წარმოქმნილ ფიზიკურ სტრუქტურებს, ელექტროდეკომპოზიციისა და სიბლანტის ენებს მე-9 თავში განხილული მარტივი ფრაქტალური ობიექტების გეომეტრიული თვისების, კერძოდ, ავტომოდელურობის გარკვეული ხარისხი გააჩნია. უჯრედთა მთვლელი ალგორითმების გამოყენება უმრავლესობა DLA-ს, ელექტროდეკომპოზიციისა და სიბლანტის ენების ექსპერიმენტებში წარმოქმნილი ორგანოზომილებიანი სტრუქტურებისთვის პირდაპირ არის შესაძლებელი. მრავალი ასეთი სტრუქტურის უჯრედთა მთვლელი განზომილება 1.7-თან ახლოსაა. ამ რიცხვის უნივერსალობის დამატებითი მტკიცებულება DLA-ს კომპიუტერული მოდელირებებიდან გამომდინარეობს. მოდელის ფართო სპექტრი იძლევა 1.7-თან მიახლოებულ უჯრედთა მთვლელ განზომილებას. რა თქმა უნდა, ამგვარი ავტომოდელურობა ყველა მასშტაბის სტრუქტურებისათვის ვერ გამოვლინდება. ზედა ზღვარში შეზღუდული ვართ სისტემის ზომით, ქვედა ზღვარში კი ინდივიდუალურ ატომებამდე დავდივართ. ამ სისტემებს ამა თუ იმ გრძივ მასშტაბებში ფრაქტალური უჯრედთა მთვლელი განზომილება აღენიშნება.

უნდა აღინიშნოს, რომ ამგვარი სტრუქტურების გეომეტრიის დახასიათებისთვის მხოლოდ ფრაქტალური განზომილება ნამდვილად არ არის საკმარისი. მე-10 თავში

განხილული მულტიფრაქტალური მიდგომა DLA სტრუქტურების კვლევისთვის გამოიყენება. მეტი ინფორმაციისთვის იხილეთ თავის ბოლოში ციტირებული ლიტერატურა.



ნახ. 11.20. ხის ტოტზე წარმოქმნილი ყინულის კრისტალების ფოტოსურათი დილით ადრე, როდესაც ტემპერატურა უეცრად 0°C -ის ქვემოთ ეცემა. ტემპერატურის დაცემამდე ტენიანობა საკმაოდ მაღალია. გაყინულმა ორთქლმა გრძელი, კონუსისებრი ფორმის დენდრიტები წარმოქმნა (ფოტოსურათისთვის მაღლობას ვუხდით დანიელ კრაუსს).

მულტიფრაქტალური და ფრაქტალური განზომილებების მეშვეობით ბუნებაში არსებული უამრავი სტრუქტურა შეიძლება დავახასიათოთ. დაინტერესებულ მკითხველს ვურჩევთ, რომ მე-9 თავის ბოლოში მოყვანილ სახელმძღვანელოებსა და მოცემული თავის ბოლოში მოყვანილ ლიტერატურას გაეცნოს.

უნდა აღინიშნოს, რომ აქ წარმოდგენილი მრავალი სისტემის გეომეტრია დამოკიდებულია ამ სისტემების არაწონასწორულ ბუნებასთან. თუ სისტემების ევოლუცია წონასწორობის მიმართულებით მიმდინარეობს, მაშინ ფრაქტალური სტრუქტურები შედარებით გლუვ (თანაბარ) სტრუქტურებამდე ვითარდება. ფრაქტალურიდან გლუვ გეომეტრიაში გადასვლის მოდელირებასთან დაკავშირებით იხილეთ SFM88.

სავარჯიშო 11.6-2. 11.20 ნახაზი გვიჩვენებს ნოემბრის დილას ხის ტოტზე წარმოქმნილი ყინულის კრისტალების ფოტოსურათს, როდესაც ჰაერის ტემპერატურა უეცრად 0°C -ის ქვემოთ დაეცა. ზემოთ მოყვანილი მსჯელობის საფუძველზე განმარტეთ, თუ რატომ წარმოქმნეს ყინულის კრისტალებმა გრძელი, კონუსისებრი ფორმის დენდრიტები.

11.7 თვითორგანიზებული კრიტიკული მდგომარეობა: ფრაქტალების ფიზიკა?

წინა პარაგრაფის ბოლოში აღვნიშნეთ, რომ დიფუზიით შეზღუდული აგრეგაცია, ელექტროდეკომპოზიციითა და სიბლანტის ენებით წარმოქმნილი სტრუქტურების დახასიათება მიახლოებით 1.7-ის ტოლი წილადური (უჯრედთა მთვლელი) განზომილების მეშვეობით არის შესაძლებელი. მიღებული შედეგი და ფრაქტალური გეომეტრიის ფარგლებში წარმოდგენილი არაერთი ნიმუში გვიჩვენებს, რომ წილადური განზომილების ცნება გამოსადეგია გეომეტრიული სტრუქტურების დახასიათებისთვის, რომლებიც მრუდებს, ზედაპირებსა და მოცულობებს შორის იმყოფებიან. მიუხედავად ამისა, უმთავრესი ფიზიკური შეკითხვა კვლავ უცვლელია: რატომ ავითარებს ესა თუ ის ობიექტი წილადური განზომილებებით დახასიათებულ სტრუქტურას? რა სახის ფიზიკაა ფრაქტალების მიღმა?

ფრაქტალების ფიზიკის ახსნისთვის შემოღებულია **თვითორგანიზებული კრიტიკულობის** მექანიზმი. ამ სახელწოდებაში იგულისხმება, რომ სისტემა თავად ეძებს კრიტიკულ მდგომარეობას, რომლის პირობებშიც მისი სივრცითი სტრუქტურა ფართომასშტაბიან დიაპაზონისათვის ავტომოდელურია. კრიტიკული მდგომარეობის დახასიათების კიდევ ერთი მეთოდი იმაში მდგომარეობს, რომ კრიტიკულ მდგომარეობას მახასიათებელი სივრცითი მასშტაბები არ გააჩნია და სხვადასხვა მასშტაბების პირობებში სისტემა ზუსტად ერთნაირად გამოიყურება. თვითორგანიზებული კრიტიკული მდგომარეობის პირობებში მრავალი განვრცობილი არაწონასწორული სისტემა კრიტიკული მდგომარეობის მიმართულებით სპონტანურად ვითარდება. *წონასწორული* სისტემები კრიტიკულ მდგომარეობას (როგორცაა ფაზური გარდაქმნა) მხოლოდ იმ შემთხვევაში აღწევს, როდესაც სისტემის მახასიათებელ პარამეტრთა მნიშვნელობები თანხვედრაშია კრიტიკულ მდგომარეობასთან ასოცირებულ მნიშვნელობებთან. თვითორგანიზებული კრიტიკულობის შემთხვევაში კრიტიკული მდგომარეობა პარამეტრის მნიშვნელობების გარკვეული დიაპაზონის პირობებში მიიღწევა.

დღეისათვის თვითორგანიზებული კრიტიკულობა უმთავრესად შესწავლილია ფიჭური ავტომატების ტიპის სხვადასხვა სისტემებისთვის, რომელთა თვისებები გარკვეულწილად მოგვაგონებს სხვადასხვა ფიზიკურ სისტემებს. კარგად არის შესწავლილი „ქვიშის გროვის“ მოდელი. გვერდიგვერდ განლაგებული უჯრედებისთვის მიწერილ რიცხვებს შორის სხვაობის ძალიან გაზრდისას (გროვაში ქვიშის სიმაღლის შესაბამისად) ფიჭური ავტომატების წესები „ზვავის“ გაჩენას პროვოცირებს. დადგენილია, რომ ეს მოდელები სპონტანურად აღწევს კრიტიკულ მდგომარეობას და ამ დროსაც ყველა ზომის ზვავი ვლინდება. ზვავთა ზომების დროში განაწილება არ ემთხვევა ქვიშის გროვებთან დაკავშირებულ ექსპერემენტის

პირობებში მიღებული ზეგავების განაწილებას. ამიტომ დღეისათვის თვითორგანიზებული კრიტიკულობა ფრაქტალების ფიზიკის სრულად დახასიათებას ვერ ახერხებს.

რადგან სისტემები კრიტიკული მდგომარეობის პირობებში არ ყალიბდება, ამიტომ ბუნებრივად იშმის შეკითხვა, თუ როგორ „პოულობენ“ სისტემები კრიტიკულ მდგომარეობას. *სინგულარული დიფუზიის* მომცველ ერთ-ერთ შესაძლო მექანიზმს (CCG90) გვთავაზობს. მთავარი იდეა მდგომარეობს იმაში, რომ დიფუზიურ სისტემაში თვითორგანიზებული კრიტიკულობა დიფუზიის კოეფიციენტის საკვლევი ნივთიერების კონცენტრაციაზე დამოკიდებულების შემთხვევაში ვლინდება. ამ შემთხვევაში გადატანის განტოლება C კონცენტრაციის შემთხვევაში მოიცემა (11.4-5) სახით, რომელიც D სიდიდს კონცენტრაციის მიმართ დამოკიდებულება ცხადი სახითაა მოცემული:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \text{div}[D(C)\text{grad } C] \quad (11.7-1)$$

თუ კონცენტრაციის რაიმე (ვთქვათ C^*) მნიშვნელობაზე დიფუზიის კოეფიციენტი უსასრულო ხდება, მაშინ სისტემა მიდრეკილია იმ მდგომარეობისკენ, რომელშიც მისი სივრცითი დიაპაზონის თითქმის ნებისმიერ ნაწილს (სასაზღვრო ფენის გარდა, რომლის ფარდობითი ზომაც სისტემის ზომის ზრდასთან ერთად მცირდება) კრიტიკული კონცენტრაცია გააჩნია და თვითორგანიზებული კრიტიკული მდგომარეობისთვის საჭირო ქმედებას ამჟღავნებს. CCG90-ში შესწავლილია მარტივი მოდელური სისტემის ქმედება და მოყვანილია რიცხვითი მტკიცებულებები, რომელთა მიხედვითაც ანალოგიური სახის ქმედება შედარებით რთული სისტემების შემთხვევაშიც ვლინდება.

მიუხედავად იმისა, რომ თვითორგანიზებული კრიტიკულობის შესწავლა დღესდღეობით საწყის ეტაპზეა, იქმნება შთაბეჭდილება, რომ ბუნებაში ფრაქტალური სტრუქტურების ყოვლისმომცველობის ფიზიკური ახსნა სწორედ მისი მეშვეობით იქნება შესაძლებელი. თუ თვითორგანიზებულ კრიტიკულობას ბუნებაში აღმოჩენილი ფრაქტალური სტრუქტურების ახსნის უნარი აქვს, მაშინ ფრაქტალური სტრუქტურების განმაპირობებელი დეტალური მექანიზმების შესწავლასაც შევძლებთ. ნორმირების კანონების განმაპირობებელი სხვა მექანიზმები (ABH98)-შია წარმოდგენილი. თვითორგანიზებული კრიტიკულობა (RIZ99) 7.3 პარაგრაფში აღნიშნული $1/f$ ხმაურის უნივერსალური მახასიათებელი თვისებების ამხსნელი დინამიკური მექანიზმის სახით არის შემოთავაზებული.

11.8. დასკვნები

მოცემულ თავში დავრწმუნდით, რომ სისტემათა ფართო სპექტრი ავლენს საერთო თვისებას, რომელიც მდგომარეობს არაწონასწორულ პირობებში სივრცითი სტრუქტურების სპონტანურ გენერაციაში. მიუხედავად იმისა, რომ სტრუქტურათა ასეთი სახით წარმოქმნის შესწავლა დღესდღეობით საწყის ეტაპზეა, უკვე შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ბუნებაში წესრიგის გამოვლინება იშვიათობას არ წარმოადგენს. ფაქტიურად, არაწონასწორული მდგომარეობების შემთხვევაში ბუნება წესრიგსა და ერთგვაროვანი სტრუქტურის შექმნას ანიჭებს უპირატესობას.

მიუხედავად იმისა, რომ კონცენტრირება მოვანდინეთ შედარებით მარტივი სტრუქტურების გამოვლინებაზე, მათი წარმოქმნის დინამიკური შეხედულების თაობაზე მნიშვნელოვანი დასკვნის გამოტანა შეგვიძლია და ვცდილობთ გავარკვიოთ, უზრუნველყოფს თუ არა მცირე რაოდენობით სივრცითი მოდების (არაწრფივი) ურთიერთქმედება რთული სტრუქტურების განვითარებას. ზოგიერთ შემთხვევაში, ალბათური ქმედების მსგავსი რთული დინამიკა მხოლოდ მცირე რაოდენობით თავისუფლების ხარისხების მქონე სისტემების შემთხვევაშიც კი შეიძლება გამოვლინდეს. სითხის ძლიერ ტურბულენტობაში გამოვლენილი რთული სივრცითი სტრუქტურების ახსნისას ამ პროგრამის გამოყენება ოპტიმიზმის საფუძველს გვაძლევს (MES87, FRO90). როგორც ქაოსური ქმედება, ასევე სტრუქტურის წარმოქმნა ზოგიერთი სისტემის ევოლუციისას არაწრფივი ეფექტების სახით ვლინდება.

სტრუქტურის წარმოქმნის პროცესი ნამდვილად იმსახურებს ცალკე კურსს. ამ საინტერესო და თვალწარმტაცი სფეროს ერთ თავში ჩატევა საკმაოდ რთულია. ჩვენ რამდენიმე მნიშვნელოვანი სფერო მთლიანად გამოვტოვეთ. ორი მათგანი ფიზიკოსების განსაკუთრებულ ყურადღებას იმსახურებს: (1) ქაოსური გაბნევა და (2) არაწრფივი ტალღის მოვლენა ანუ *სოლიტონის* ეფექტი (სოლიტონი წარმოადგენს სივრცულად ლოკალიზებულ ტალღური სახის შემფოთებას, რომელიც დიდ მანძილებზე ფორმის შეცვლის გარეშე ვრცელდება. მოკლედ აღვნიშნავთ, რომ მრავალი არაწრფივი სტრუქტურა სინქრონულ ხასიათს იძენს და სტაბილურ ლოკალიზებულ შემფოთებას წარმოშობს). მკითხველისთვის ამ და სხვა სივრცე-დროითი არაწრფივი მოვლენის შესახებ წარმოდგენის შექმნისათვის ვურჩევთ თავის ბოლოში ციტირებული ლიტერატურის გაცნობას.

ჩვენ აგრეთვე განვიხილეთ სტრუქტურების დახასიათების რამდენიმე მეთოდი მათი დრო-სივრცითი გამოვლინების ფორმებზე დაყრდნობით. კარუნენ-ლოევის დეკომპოზიციად წოდებული უძლიერესი მეთოდი ერთმანეთისაგან გამოყოფს დროით და სივრცით დამოკიდებულებებს და სივრცითი სტრუქტურის კვლევისათვის საჭირო მათემატიკური

ფუნქციების ფართო სპექტრს გვაძლევს, რომელთა განსაზღვრა უშუალოდ სივრცით სტრუქტურაზე დაყრდნობით წარმოებს. ამ მეთოდის შესახებ საფუძვლიან წარმოდგენას გვიქმნიან AHK93 და TRS97.

რა თქმა უნდა, ჩვენ ჯერ კიდევ შორს ვართ კომპლექსური სტრუქტურის გამოვლინების (მაგალითად ბიოლოგიური უჯრედის წარმოქმნის) ფიზიკური თეორიის ჩამოყალიბებისაგან, მაგრამ სივრცითი სტრუქტურების მარტივი სახეობების შემთხვევაში უკვე ვხვდებით, რომ მათი გამოვლინება (პირდაპირი) ჩარევის გარეშე შესაძლებელი და შესაბამის მიზეზებსაც ვაძგენთ. მათ, ვისაც სურს დაამტკიცოს, რომ სიცოცხლის წარმოშობა ბუნების მიერ წესრიგისკენ და სტრუქტურისკენ მიდრეკილებიდან გამომდინარე გარდაუვალი პროცესის გამოვლინებაა, ჩვენი შედეგები გარკვეული ოპტიმიზმის საფუძველს მისცემს. სიცოცხლის ფიზიკური კანონების დახმარებით გააზრებისა თუ მეცნიერული პროგრამის დანერგვისა და კომპლექსური სტრუქტურის გამოვლინების დაფიქსირების უნარის შემუშავების შემთხვევაშიც კი თეოლოგიური დასკვნების გამოტანა შესაძლებელია. ნებისმიერ შემთხვევაში სტრუქტურის წარმოქმნის მოძღვრება არაწრფივი დინამიკის ერთ-ერთი საინტერესო ასპექტია.

11.9 დამატებითი ლიტერატურა

ზოგადი შესავალი კურსები სტრუქტურების წარმოქმნასა და კომპლექსურობის შესახებ

B. F. Madure and W. L. Freedman, "Self-Organizing Structures," *American Scientist* 75,252-59 (1987).

G. Nicolis and I. Prigogine, *Exploring Complexity* (W. H. Freeman, New York, 1989). სტრუქტურების ფორმირების ზოგადი თეორია მრავალი მაგალითით.

J. D. Murray, *Mathematical Biology* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1989). ბიოლოგიაში სტრუქტურების ფორმირების (და მრავალი სხვა თემის) მათემატიკური განხილვა.

A. V. Gaponov-Grekhov and M. I. Rabinovich, "Disorder, Dynamical Chaos, and Structures," *Physics Today* 43 (7), 30-38 (July, 1990).

H. Haken, *Synergetics, An Introduction*, 3rd ed. (Springer-Verlag, Berlin, 1983).

H. Haken, "Synergetics: An Overview," *Rep. Prog. Phys.* 52,515-33 (1989).

H.-T. Moon, "Approach to chaos through instabilities," *Rev. Mod. Phys.* 65, 1535-43 (1993). ზოგადი შესავალი კურსი დრო-სივრცის წესრიგისა და უწესრიგობის წარმოშობის შესახებ ბაკალავრიატის ზედა და მაგისტრატურის პირველი საფეხურისათვის.

S. C. Müller, P. Couillet, and D. Walgraef, "From oscillations to excitability: A case study in spatially extended systems," *Chaos* 4, 439-42 (1994). დრო-სივრცის სტრუქტურებისადმი მიძღვნილი წამყვანი ნაშრომი მრავალი მაგალითით ფიზიკიდან და ქიმიიდან.

Paul Meakin, *Fractals, Scaling and Growth Far from Equilibrium* (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).

C. Bowman and A. C. Newell, "Natural patterns and wavelets," *Rev. Mod. Phys.* 70, 289-301 (1998).

Philip Ball, *The Self-Made Tapestry, Pattern Formation in Nature* (Oxford University Press, New York, 1999).

K. Kaneko and I. Tsuda, "Constructive complexity and artificial reality: an introduction," *Physica D* 75, 1-10 (1994). კომპლექსურობისადმი-დმი მიძღვნილი წამყვანი ნაშრომი.

David Ruelle, *Chance and Chaos* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1991). საინტერესო მსჯელობა იმის შესახებ, რა არის "კომპლექსურობის თეორია".

M. Mitchell Waldrop, *Complexity: The Emerging Science at the Edge of Order and Chaos* (Simon and Schuster, New York, 1992). სამეცნიერო-პოპულარული მოხსენება კომპლექსურობის თეორიასა და მის პრაქტიკულ გამოყენებაზე.

Stuart A. Kaufman, *Origins of Order: Self-Organization and Selection in Evolution* (Oxford University Press, New York, 1993).

Peter Coveney and Roger Highfield, *Frontiers of Complexity: The Search for Order in a Chaotic World* (Fawcett/Columbine, New York, 1995). კიდევ ერთი პოპულარული წიგნი კომპლექსურობის შესახებ.

John H. Holland, *Hidden Order: How Adaptation Builds Complexity* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1995) კომპლექსურობის თეორიის ერთ-ერთი პიონერის ესეთა ნაკრები.

Stuart A. Kaufmann *At Home in the Universe, The Search for the Laws of Self-Organization and Complexity* (Oxford University Press, New York, 1995).

John Horgan, "From Complexity to Perplexity," *Scientific American* 272 (6), 104-109 (1995). კომპლექსურობის თეორიის არსის სკეპტიკური განხილვა.

N. Goldenfeld and L. P. Kadanoff, "Simple Lessons from Complexity," *Science* 284, 87-89 (1999). სტატია complexity შესახებ მეცნიერების სხვა სფეროებში.

კოპერენტული სტრუქტურები

T. Shinbrot and J. M. Ottino, "Geometric Method to Create Coherent Structures in Chaotic Flows," *Phys. Rev. Lett.* 71, 843-46 (1993).

M. Rabinovich, J. Torres, P. Varona, R. Huerta, and P. Weidman, "Origin of coherent structures in a discrete chaotic medium," *Phys. Rev. E* 60, R1 130-33 (1999).

სითხეთა შერევა

საუკეთესო ზოგადი ლიტერატურა: [Ottino, 1989].

J. M. Ottino, C. Leong, H. Rising, and P. Swanson, "Morphological Structure Produced by Mixing in Chaotic Flows," *Nature* 333, 419-25 (1988).

J. M. Ottino, "The Mixing of Fluids," *Scientific American* 260 (1), 56-67 (January, 1989).

J. Franjione, C.-W. Leong, and J. M. Ottino, "Symmetries within Chaos: A Route to Effective Mixing," *Physics of Fluids A* 1, 1772-83 (1989).

H. A. Kusch, "Continuous Chaotic Mixing of Viscous Liquids," Ph. D. Thesis, Department of Chemical Engineering, University of Massachusetts, 1991.

H. A. Kusch and J. M. Ottino, "Experiments on Mixing in Continuous Chaotic Flows," *J. Fluid Mech.* 236, 319-28 (1992).

J. M. Ottino, F. J. Muzzio, M. Tjahjadi, J. G. Frangione, S. C. Jano, and H. A. Kusch, "Chaos, Symmetry, and Self-Similarity: Exploiting Order and Disorder in Mixing Processes," *Science* 257, 754-60 (1992).

G. O. Fountain, D. V. Khakhar, and J. M. Ottino, "Visualization of Three-Dimensional Chaos," *Science* 281, 683-86 (1998). V. Rom-Kedar and G. M. Zaslavsky, "Chaotic kinetics and transport (Overview)," *Chaos* 10 (1), 1-2 (2000).

H. Aref, "Integrable, Chaotic, and Turbulent Vortex Motion in Two-dimensional Flow," *Ann. Rev. Fluid Mech.* 15, 345-89 (1983). შენიშვნები ორგანზომილებიანი სითხის ნაკადისა და ჰამილტონის სისტემას შორის კავშირის შესახებ.

H. Aref, "Stirring by Chaotic Advection," *J. Fluid Mech.* 143, 1-21 (1984).

A. R. Paterson, *A First Course in Fluid Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1983). სითხეთა დინამიკის საინტერესო შესავალი კურსი.

R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands, Feynman, *Lectures on Physics*, Vol. II (Addison-Wesley, Reading, MA, 1963).

C. Meneveau and K. R. Sreenivasan, "Simple Multifractal Cascade Model for Fully Developed Turbulence," *Phys. Rev. Lett.* **59**,1424-27 (1987).

U. Frisch and S. A. Orszag, "Turbulence: Challenges for Theory and Experiment," *Physics Today* **43** (1), 24-32 (January, 1990).

გრანულარული ნაკადი

G. B. Lubkin, "Oscillating granular layers produce stripes, squares, hexagons, ...," *Physics Today* **48** (10), 17-19 (October, 1995).

G. Metcalf, T. Shinbrot, J. J. McCarthy and J. M. Ottino, "Avalanche mixing of granular solids," *Nature* **374**,39-41 (1995).

C. S. Daw, C. Finney, M. Vasudevan, N van Goor, K. Nguyen, D. Bruns, E. Kostelich, C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke, "Self-Organization and Chaos in a Fluidized Bed," *Phys. Rev. Lett.* **75**,2308-11 (1995).

F. Melo, P. Umbanhowar, and H. L. Swinney, "Hexagons, Kinks, and Disorder in Oscillated Granular Layers," *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3838-41 (1995).

H. Jaeger, S. Nagel, and R. Behringer, "The Physics of Granular Materials," *Physics Today* **49** (4), 32-38 (1996)

T. Shinbrot and F. J. Muzzio, "Reverse Buoyancy in Shaken Granular Beds," *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4365-68 (1998).

J. S. Olafsen and J. S. Urbach, "Clustering, Order, and Collapse in a Driven Granular Monolayer," *Phys. Rev. Lett.* **81**,4369-72 (1998).

D. V. Khakhar, J. J. McCarthy, J.F. Gilchrist, and J. M. Ottino, "Chaotic mixing of granular materials in two-dimensional tumbling mixers," *Chaos* **9**, 195— 205 (1999).

შეუღლებული იტერაქციული ასახვები, ფიჭური ავტომატები და ნერვული ქსელები

F. Kaspar and H. G. Schuster, "Scaling at the Onset of Spatial Disorder in Coupled Piecewise Linear Maps," *Phys. Lett. A* **113**,451-53 (1986).

K. Kaneko, "Chaotic but Regular Posi-Nega Switch among Coded Attractors by Cluster-Size Variation," *Phys. Rev. Lett.* **63**,219-23 (1989).

K. Kaneko, "Pattern Dynamics in Spatiotemporal Chaos," *Physica D* **34**, 1-41 (1989)

K. Kaneko, "Globally Coupled Chaos Violates the Law of Large Numbers but not the Central-Limit Theorem," *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1391-94 (1990).

M. Hassell, H. Comins, and R. May, "Spatial Structure and Chaos in Insect Population Dynamics," *Nature* **353**,255-58 (1991).

P. Matthews, R. Mirollo, and S. Strogatz, "Dynamics of a large system of coupled nonlinear oscillators," *Physica D* **52**,293-331 (1991).

K. Kaneko, "Overview of coupled map lattices," *Chaos* **2**, 279-82 (1992)

S. H. Strogatz and I. Stewart, "Coupled Oscillators and Biological Synchronization," *Scientific American* **269** (6), 102-109 (1993).

S. Sinha and W. L. Ditto, "Dynamics Based Computation," *Phys. Rev. Lett.* **81**,2156-59 (1998).

T. Shibata, T. Chawanya, and K. Kaneko, "Noiseless Collective Motion Out of Noisy Chaos," *Phys. Rev. Lett.* **82**,4424-27 (1999). Added noise can reduce the disorder in a coupled map model.

- Y.-C. Lai and C. Grebogi, "Modeling of Coupled Oscillators," *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4803-6 (1999).
- D. A. Egolf, "Equilibrium Regained: From Nonequilibrium Chaos to Statistical Mechanics," *Science* **287**, 101-104 (2000).
- M. Gardner, "The Fantastic Combinations of John Conway's New Solitaire Game of Life," *Scientific American* **223** (4), 120-23 (April, 1970).
- T. Toffoli and N. Margolus, *Cellular Automata Machines* (MIT Press, Cambridge, 1987).
- S. Wolfram, "Cellular Automata as Models of Complexity," *Nature* **341**, 419-24 (1984).
- S. Wolfram, ed. *Theory and Applications of Cellular Automata* (World Scientific Press, Singapore, 1986).
- M. Gardner, *Wheels, Life and Other Mathematical Amusements* (W. H. Freeman, New York, 1983).
- S. Wolfram, "Universality and Complexity in Cellular Automata," *Physica D* **10**, 1-35 (1984).
- P. Halpern, "Sticks and Stones: A Guide to Structurally Dynamic Cellular Automata," *Am. J. Phys.* **57**, 405-8 (1989).
- [Jackson, 1990], Vol. II, Chapter 10. ამ ნაწილში მოცემულია საინტერესო მსჯელობა ფიჭური ავტომატების და შეუღლებული ასახვების შესახებ.
- J. Salem and S. Wolfram, "Thermodynamics and Hydrodynamics of Cellular Automata," in [S. Wolfram, ed., 1986].
- N. Margolis, T. Toffoli, and G. Vichniac, "Cellular-Automata Supercomputers for Fluid Dynamics Modeling," *Phys. Rev. Lett.* **56**, 1694—96 (1986).
- S. Wolfram, "Cellular Automaton Fluids 1: Basic Theory," *J. Stat. Phys.* **45**, 471-526 (1986).
- P. Mameiulle, N. Boccasa, C. Y. Vichniac, and R. Bidaux, eds. *Cellular Automata and Modeling of Complex Physical Systems* (Springer-Verlag, Berlin, 1989).
- R. Zorzenon dos Santos and A. Bernardes, "Immunization and Aging: A Learning Process in the Immune Network," *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3034-37 (1998). ფიჭური ავტომატის მოდელი გამოყენებულია იმუნური სისტემის მიმართ.
- C. L. Scofield and L. N. Cooper, "Development and Properties of Neural Networks," *Contemporary Physics* **26**, 125-45 (1985).
- D. Tank and J. Hopfield, "Collective Computation in Neuronlike Circuits," *Scientific American* **257** (6), 104-14 (1987).
- H. Sompolinsky, A. Crisanti, and H. J. Sommers, "Chaos in Random Neural Networks," *Phys. Rev. Lett.* **61**, 259-62 (1988).
- Stuart A. Kaufman, "Antichaos and Adaptation," *Scientific American* **265** (2), 78-84 (August, 1991).
- D. Hansel and H. Sompolinsky, "Synchronization and Computation in a Chaotic Neural Network," *Phys. Rev. Lett.* **68**, 718-21 (1992).
- D. Caroppo, M. Mannarelli, G. Nardulli, and S. Stramaglia, "Chaos in neural networks with a nonmonotonic transfer function," *Phys. Rev. E* **60**, 2186-92 (1999).
- A.-L. Barabasi and R. Albert, "Emergence of Scaling in Random Networks," *Science* **286**, 509-12 (1999).

გადატანის მოკლეზნა

- David J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1981), pp. 100-1.
- Edward M. Purcell, *Electricity and Magnetism, 2nd ed.*, (McGraw-Hill, New York, 1985), pp. 63-65.

ლიფუზიურ-რეაქციული სისტემები

A. M. Turing, "The Chemical Basis of Morphogenesis," *Phil. Trans. Roy. Soc. London B* **237**, 37-72 (1952).

A. M. Albano, N. B. Abraham, D. E. Chyba, and M. Martelli, "Bifurcation, Propagating Solutions, and Phase Transitions in a Nonlinear Reaction with Diffusion," *Am. J. Phys.* **52**, 161-67 (1984).

A. Winfree, "Rotating Solutions to Reaction-Diffusion Equations in Simply-Connected Media," *SIAM-AMS Proceedings* **8**, 13-31 (1974).

Y. Kuramoto, "Rhythms and Turbulence in Populations of Chemical Oscillators," *Physica A* **106**, 128-33 (1981).

W. Y. Tarn, J. A. Vastano, H. L. Swinney, and W. Horsthemke, "Regular and Chaotic Chemical Spatiotemporal Patterns," *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2163-66 (1988).

V. Castets, E. Dulos, J. Boissonade, and P. DeKepper, "Experimental Evidence of a Sustained Standing Turing-Type Nonequilibrium Chemical Pattern," *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2953-56 (1990).

Q. Ouyang and H. L. Swinney, "Transition from a Uniform State to Hexagonal and Striped Turing Patterns," *Nature* **352**, 610-12 (1991).

Q. Ouyang and H. L. Swinney, "Transition to Chemical Turbulence," *Chaos* **1**, 411-19 (1991).

L. Tsimring, H. Levine, I. Aranson, E. Ben-Jacob, I. Cohen, O. Shochet, and W. Reynolds, "Aggregation Patterns in Stressed Bacteria," *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1859-62 (1995).

I. B. Schwartz and I. Triandaf, "Chaos and intermittent bursting in a reaction-diffusion process," *Chaos* **6**, 229-37 (1996).

ზოგადი საკითხები

J.-P. Eckmann and I. Procaccia, "Onset of Defect-Mediated Turbulence," *Phys. Rev. Lett.* **66**, 891-94 (1991).

J. P. Crutchfield and K. Kaneko, "Are Attractors Relevant to Turbulence," *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2715-18 (1988).

ფრაქტალების ზრდის მოვლენა

T. A. Witten, Jr. and L. M. Sander, "Diffusion-Limited Aggregation, a Kinetic Critical Phenomenon," *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1400-03 (1981).

L. Niemeyer, L. Pietronero, and H. J. Wiesmann, "Fractal Dimension of Dielectric Breakdown," *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1033-36 (1984).

D. Bensimon, L. P. Kadanoff, S. Liang, B. Shraiman, and C. Tang, "Viscous Flows in Two Dimensions," *Rev. Mod. Phys.* **58**, 977-99 (1986).

L. M. Sander, "Fractal Growth," *Scientific American* **256** (1), 94-100 (January, 1987).
ისეთი სისტემების ზოგადი თავისებურებები, რომელთაგანაც ხდება ფრაქტალური გეომეტრიული სტრუქტურების ჩამოყალიბება.

Po-Zen Wong, "The Statistical Physics of Sedimentary Rock," *Physics Today* **41** (12), 24-32 (December, 1988).

J. Lee and H. E. Stanley, "Phase Transition in the Multifractal Spectrum of Diffusion-Limited Aggregation," *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2945-48 (1988).

H. E. Stanley and P. Meakin, "Multifractal Phenomena in Physics and Chemistry," *Nature* **335**,405-9 (1988).

E. Sorensen, H. Fogedby, and O. Mouritsen, "Crossover from Nonequilibrium Fractal Growth to Equilibrium Compact Growth," *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2770-73 (1988).

T. Vicsek, *Fractal Growth Phenomena*, 2nd ed. (World Scientific Publishing, River Edge, NJ, 1991).

F. Family, B. Masters, and D. E. Piatt, "Fractal Pattern Formation in Human Retinal Vessels," *Physica D* **38**, 98-103 (1989).

F. Caserta, H. E. Stanley, W. D. Eldred, G. Daccord, R. E. Hausman, and J. Nittmann, "Physical Mechanisms Underlying Neurite Outgrowth: A Quantitative Analysis of Neuronal Shape," *Phys. Rev. Lett.* **64**, 95-98 (1990).

J. Walker, "Fluid Interfaces, Including Fractal Flows can be Studied in a Hele-Shaw Cell," *Scientific American* **257** (5), 134-38 (November, 1987). How to make your own viscous fingering cell.

J.-F. Gouyet, *Physics of Fractal Structures* (Springer-Verlag, New York, 1995). მოიცავს ფრაქტალების ზრდის მრავალ მოვლენას. განკუთვნილია ბაკალავრიატის ზედა საფეხურისათვის.

მათემატიკური ლიტერატურა

სივრცული მოდებისა და მათი ასოცირებული ფუნქციების განხილვა მოცემულია მათემატიკური ფიზიკის თითქმის ყველა წიგნში.

Mary L. Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences*, 2nd ed. (John Wiley and Sons, New York, 1983).

M. Peterson, "Nonuniqueness in Singular Viscous Fingering," *Phys. Rev. Lett.* **62**, 284-87 (1989).

E. Brener, H. Levine, and Y. Tu, "Mean-Field Theory for Diffusion-Limited Aggregation in Low Dimensions," *Phys. Rev. Lett.* **66**,1978-81 (1991).

M. Golubitsky, I. Stewart, and D. Schaeffer, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Applied Mathematical Sciences Vol. 69 (Springer-Verlag, New York, 1988), Vol. II.

C. Green, G. Mindlin, E. D'Angelo, H. Solari, and J. Tredicce, "Spontaneous Symmetry Breaking in a Laser: The Experimental Side," *Phys. Rev. Lett.* **65**, 3124-27 (1990).

თვითორგანიზებული კრიტიკულობა

P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, "Self-Organized Criticality: An Explanation of 1/Noise," *Phys. Rev. Lett.* **59**, 381-84 (1987).

C. Tang, K. Wiesenfeld, P. Bak, S. Coppersmith, and P. Littlewood, "Phase Organization," *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1161-64 (1987).

P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, "Self-Organized Criticality," *Phys. Rev. A* **38**, 364-74 (1988).

P. Bak and K. Chen, "The Physics of Fractals," *Physica D* **38**,5-12 (1989).

J. M. Carlson and J. S. Langer, "Properties of Earthquakes Generated by Fault Dynamics," *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2632-35 (1989).

J. Carlson, J. Chayes, E. Grannan, and G. Swindle, "Self-Organized Criticality and Singular Diffusion," *Phys. Rev. Lett.* **65**, 2547-50 (1990).

P. Bak and K. Chen, "Self-Organized Criticality," *Scientific American* **264** (1), 46-53 (January, 1991).

S. Boettcher and M. Paczuski, "Exact Results for Spatiotemporal Correlations in a Self-Organized Model of Punctuated Equilibrium," *Phys. Rev. Lett.* **76**, 348-51 (1996).

P. Bak, *How Nature Works: The Science of Self-Organized Criticality* (Springer-Verlag, New York, 1996).

Henrik Jeldtoft Hensen, *Self-Organized Criticality: Emergent Complex Behavior in Physical and Biological Systems* (Cambridge University Press, New York, 1998).

L Amaral, S. Buldyrev, S. Havlin, M. Salinger, and H. E. Stanley, "Power Law Scaling for a System of Interacting Units with Complex Internal Structure," *Phys. Rev. Lett.* 80 1385-88 (1998).

R. De Los Rios and Y.-C Zhang, "Universal 1/Noise from Dissipative Self-Organized Criticality Models," *Phys. Rev. Lett.* 82, 472-75 (1999).

სხვა დრო-სივრცული ეფექტები

დრო-სივრცის თვისებები ასევე კავშირშია გაბნევის პრობლემების შესწავლასთან, რომელიც მრავალი ფიზიკოსის საყვარელი საკითხია. იხ.:

B. Eckhardt, "Irregular Scattering," *Physica D* 33, 89-98 (1988).

E. Doron, U. Smilansky, and A. Frenkel, "Experimental Demonstration of Chaotic Scattering of Microwaves," *Phys. Rev. Lett.* 65, 3072-75 (1990).

Y.T. Lau, J. M. Finn, and E. Ott, "Fractal Dimension in Nonhyperbolic Chaotic Scattering," *Phys. Rev. Lett.* 66, 978-81 (1991).

E. Ott and T. Tel, "Chaotic scattering: an introduction," *Chaos* 3, 417'-426 (1993). არაწრფივი ტალღების საინტერესო შესავალია:

E. Infeld and G. Rowlands, *Nonlinear Waves, Solitons and Chaos* (Cambridge University Press, Cambridge, 1990).

N. B. Truffillaro, "Nonlinear and Chaotic String Vibrations," *Am J. Phys.* 57, 408-14 (1989). The standard introductory physics topic of elastic waves on strings has nonlinear characteristics.

კარპუნენ-ლოევის დეკომპოზიცია

D. Armbruster, R. Heiland, and F. Kostelich, "KLTOOL: A tool to analyze spatiotemporal complexity," *Chaos* 4, 421-24 (1994). აღწერილია კომპიუტერული პროგრამა, რომელიც ასრულებს კარპუნენ-ლოევის დეკომპოზიციას.

I. Triandaf and I. B. Schwartz, "Karhunen-Loeve mode control of chaos in a reaction-diffusion process," *Phys. Rev. E* 56, 204-212 (1997).

11.10 კომპიუტერული სავარჯიშოები

CE11-1. *Chaos Demonstrations* მოიცავს ამ თავში მოყვანილ მასალასთან დაკავშირებით რამდენიმე მნიშვნელოვან მაგალითს. გაეცანით „დიფუზიის“, „დეტერმინისტული ფრაქტალების“, „შემთხვევითი ფრაქტალებისა“ და „ცხოვრების თამაშის“ შემთხვევებს.

CE11-2. კ. ა. პიკოვერშის წიგნის „Markov Aggregation on Stickly Cycle“, *Computers in Physics* 3, 79-80 (ივლისი/აგვისტო, 1989) მიხედვით შექმენით დიფუზიით შეზღუდული აგრეგაციის კომპიუტერული პროგრამა.

CE11-3. წინა ამოცანისა და სიბლანტის “ენების” მოდელების პროგრამირების ზოგიერთი მეთოდი წარმოდგენილია ფ. ფემილისა და ტ. ვიცუეკის „Simulating Fractal Aggregation”-ის, *Computers in Physics* 4, 44-49 (იანვარი/თებერვალი, 1990). ჩაატარეთ მოცემულ სტატიაში მოყვანილი ზოგიერთი ექსპერიმენტი.

CE11-4. გაეცანით მ. ვიცუეკისა და ტ. ვიცუეკის მიერ შექმნილ პროგრამათა პაკეტს „Fractal Growth” (ინსტრუქტორების ცნობარი და დისკეტი) (მსოფლიო სამეცნიერო გამოცემა, რივერ ეიჯი, ნიუ ჯერსი 1991).

CE11-5. შეასრულეთ პ. ბაკის „Catastrophes and Self-Organized Criticality“ *Computers in Physics* 5, 430-433 (ივლისი/აგვისტო, 1991) მიხედვით შექმნილი ზოგიერთი პროგრამული ამოცანა.

ფიჭური ავტომატებისა და მასთან დაკავშირებული საკითხების შესახებ ინფორმაციისთვის მიმართეთ საიტს: <http://alife.santafe.edu/alife/topics/cas/ca-faq/ca-faq.html>.

კვანტური ქაოსი, კომპლექსურობის თეორია და სხვა საკითხები

ქაოსი ხშირად სიცოცხლეს ასაზრდოებს, ხოლო წესრიგი ასულდგმულებს ტრადიციას.
Henry Brooks Adams, The Education of Henry Adams.

12.1 შესავალი

მოცემულ თავში გავეცნობით არაწრფივი დინამიკისა და ქაოსის ურთიერთკავშირის დამადასტურებელ შემთხვევებს მეცნიერების სხვადასხვა სფეროში. პირველი შემთხვევა არაწრფივ დინამიკასა და ფიზიკის ფუნდამენტურ თეორიას შორის არსებულ კავშირს ეხება და, კონკრეტულად, კვანტურ მექანიკას უკავშირდება. ვნახავთ, რომ ეს კავშირები ერთი შეხედვით ურთიერთგამომრიცხავია. მეორე საკითხი დინამიკური სისტემების კომპლექსური ქმედების დახასიათებას ეხება (ანუ ერთი მხრივ სრული დეტერმინიზმისა და მარტივი ქმედების, ხოლო მეორე მხრივ სრულ მოუწესრიგებლობასთან დამაკავშირებელი „უხილავი ძაფის“ ძიებაშია). არაწრფივ დინამიკაში ამ საკითხებს პრაქტიკული სარგებლობა დიდად არ მოაქვთ, თუმცა მათგან გამომდინარე შედეგები მნიშვნელოვანია.

მოგაწვდით ასევე მოკლე ცნობებს აქამდე გარკვეულწილად უყურადღებოდ დატოვებულ რამდენიმე პრობლემასთან დაკავშირებით - უბან-უბან წრფივი მოდელები, დროში წანაცვლებული დიფერენციალური განტოლების მოდელები, სტოქასტიკური რეზონანსი, ქაოსის კონტროლი და სინქრონიზაცია, ქაოსური ქმედების ალბათობა კომპიუტერულ ქსელებში. აგრეთვე გარკვეულ მინიშნებებს გავაკეთებთ, თუ სად შეგვიძლია გამოვიყენოთ ქაოსისა და არაწრფივი დინამიკის ძირითადი შედეგები.

12.2 კვანტური მექანიკა და ქაოსი

მე-20 საუკუნის მეცნიერება ისტორიაში კვანტის სახელითაც შევა. ამ დროის განმავლობაში ფიზიკოსებმა მიკროსკოპულ სამყაროსთან დაკავშირებული კვანტური თეორია შექმნეს. იგი ფორმალურად *კვანტური მექანიკის* სახით არის ცნობილი. მან მეცნიერთა

ყოველგვარ მოლოდინს გადააჭარბა და ელემენტალური ნაწილაკების, ბირთვების, ატომებისა და მოლეკულების მიკროსკოპული სამყაროში მიმდინარე მოვლენების აღმწერად და მკვლევრად იქცა. თანამედროვე ქიმიისა და მოლეკულური ბიოლოგიის საფუძველი კვანტური მექანიკაა. კვანტურმა მექანიკამ გადაწყვეტი როლი შეასრულა მაღალი წნევის ფიზიკის განვითარებასა და მის დანერგვაში ნახევარგამტარული ელექტრონიკისა და კომპიუტერულ სფეროში. ეს იმას არ ნიშნავს, რომ კვანტური მექანიკის ყველა მექანიზმის დაკავშირება გვსურს მეცნიერების სხვა დარგებთან, მაგრამ ნივთიერების სტაბილურობის, ფუნდამენტური ძალების ბუნების, სინათლისა და ნივთიერების ურთიერთქმედების და ა.შ. შესახებ საბაზისო ცოდნას სწორედ ეს თეორია ქმნის. გარდა ამისა, არანაირი ნიშანი არ ჩანს იმისა, რომ 21-ე საუკუნის მეცნიერება სხვა გზით წავა.

აშკარაა, რომ წარმატებებთან ერთად კვანტური მექანიკა მრავალი კონცეპტუალური და ფილოსოფიური ხასიათის პრობლემის წინაშე გვაყენებს. თეორია გვამცნობს, რომ გარშემო არსებულ სამყაროზე ჩვენ მიერ შემუშავებული აზრებისა და კონცეფციების საფუძველზე მიკროსკოპული სამყაროს ადეკვატურად აღქმა შეუძლებელია. მაგალითად კვანტური მექანიკა გვეუბნება, რომ ელექტრონთან (ან სხვა ნებისმიერ ნაწილაკთან) დაკავშირებით შეუძლებელია (ანუ ფიზიკური თვალსაზრისით უაზრობაა) ზუსტი მდებარეობისა და იმპულსის დადგენა, ამიტომ მდგომარეობათა სივრცეში ნაწილაკის მკაფიოდ გამოხატული ტრაექტორიის შესახებ საუბარი ზედმეტია. კვანტური მექანიკა საწყისი პირობების, ძალებისა და ტრაექტორიების შესახებ გამოთქმული მოსაზრებების მსხვრევას ან ძირფესვიანად მოდიფიცირებას გვაიძულებს.

კვანტური მექანიკის შეხედულების თანახმად, მოცემული კურსის ფარგლებში (და არაკვანტურ მექანიკაზე აგებულ ნებისმიერ ნაშრომში) აღწერილი ფიზიკა სიცრუეა. თუმცა ვიდრე მთელ ჩვენს ნამოღვაწარს გვერდზე გადავდებთ, კვლავ კვანტურ მექანიკას მოვიშველიებთ, რომელიც აცხადებს, რომ ყოველდღიურ ცხოვრებასთან დაკავშირებულ ნიუტონის კლასიკურ მეთოდებზე დამყარებული თეორიები მხოლოდ მცირე და უმნიშვნელო რიცხობრივი ცდომილებების ფონზე შესანიშნავად მუშაობს. ამ საკითხს რაოდენობრივად ქვემოთ განვიხილავთ.

ალბათური აღწერა კვანტური თეორიის უმნიშვნელოვანესი ასპექტია და განსაზღვრის ტრადიციული მეთოდების გადახედვას გვაიძულებს. ნიუტონის კლასიკური მექანიკისგან განსხვავებით, რომლის მიხედვით სისტემაზე მოქმედი ძალების ხასიათისა და საწყისი პირობების ცოდნის შემთხვევაში ამ სისტემის მომდევნო ქმედების („ტრაექტორიის“) გამოთვლას შევძლებთ, კვანტური მექანიკა გვამცნობს, რომ ყველაზე დიდი, რისი მიღწევაც შეგვიძლია, ამ სისტემის სხვადასხვა ტიპის შემდგომი ქმედებების ალბათობების განსაზღვრაა.

კვანტური მექანიკის თანახმად, მთავარი პრობლემა იმაში მდგომარეობს, რომ ჩვენ პრინციპულად არ შეგვიძლია ზუსტად განსაზღვრული საწყისი მდებარეობის და სიჩქარის (ან იმპულსის) მქონე სისტემის (მაგალითად, ელექტრონის) მოძებნა. საწყის პირობებთან დაკავშირებით ყოველთვის იარსებებს რაიმე ტიპის „განუსაზღვრელობა“. მდგომარეობათა სივრცის ენაზე შეგვიძლია განვაცხადოთ, რომ სისტემის ტრაექტორიები სათავეს იღებს სივრცის განუსაზღვრელ არეში. ჩვენ მხოლოდ ევოლუციის ალბათობების ვარაუდი შეგვიძლია. მდგომარეობათა სივრცის ამ მინიმალური არის სიდიდე $h=6.626... \times 10^{-34}$ ჯ/წამი *მუდმივით* განისაზღვრება. პლანკის მუდმივას კლასიკური *ქმედების* ერთეული გააჩნია (გაიხსენეთ მე-8 თავი). ფაქტობრივად, კვანტური მდგომარეობა მასთან დაკავშირებული ქმედების სიდიდით შეიძლება დახასიათდეს. ჩვეულებრივ, ეს სიდიდე ფუნდამენტური h სიდიდის მთელი ჯერადია.

კვანტურ მდგომარეობათა სივრცესთან დაკავშირებული განუსაზღვრელობის პირობებში უნდა ვივარაუდოთ, რომ ელექტრონის მდებარეობა მნიშვნელობათა გარკვეულ დიაპაზონში, ხოლო მისი იმპულსი რაიმე სხვა შესაბამისი დიაპაზონის ფარგლებში იქნება მოთავსებული. კვანტური მექანიკის სპეციალისტთა უმრავლესობა ამტკიცებს, რომ ელექტრონის ტრაექტორიის შესახებ საუბარი ზედმეტია. აქ ჩვენ არამყარ ფილოსოფიურ შეხედულებებს ვუახლოვდებით, სადაც იმალება მნიშვნელოვანი, მაგრამ დამაბნეველი შეკითხვები: გაგვაჩნია თუ არა ცალკეული ელექტრონის მდებარეობისა და იმპულსის შესახებ საფუძვლიანი მსჯელობის უნარი? აღწერს თუ არა კვანტური მექანიკა მხოლოდ ნაწილაკების ჯგუფებს? საბედნიეროდ, როდესაც სისტემა ბეისბოლის ბურთის, სტანდარტულ ელექტრულ წრედში გამავალი დენის ან სინჯარაში ჩასხმული სითხის მსგავსად დიდია, კვანტური მექანიკის უზუსტობასთან ასოცირებული განუსაზღვრელობები მთლიანად ქრება და სისტემის აღწერისთვის კლასიკურ მექანიკას ვიყენებთ.

არსებობს მრავალი ფიზიკური სისტემა, რომლებშიც კვანტური მექანიკა ფუნდამენტურ როლს ასრულებს. ჩნდება შეკითხვა: ამჟღავნებს თუ არა კვანტური მექანიკის მეშვეობით აღწერილი სისტემები (სათანადო პირობებში) კლასიკური ქაოსის ანალოგიურ ქმედებას? ამ კითხვაზე პასუხის გაცემა მეტად რთულია. სირთულე კვანტური მექანიკის კლასიკური მექანიკისგან განმასხვავებელი კონცეპტუალური „მორევიდან“ წარმოდგება. ეს თეორიები სხვადასხვა „ენებზე საუბრობენ“, ამიტომ კვანტური სისტემის ქაოსურ ქმედებაზე საუბრისას ფრთხილად უნდა ვიყოთ, რათა მაგალითად ვაშლი და წყალბადის ატომი „ერთმანეთში არ აგვერიოს“. მეორე მხრივ, კვანტური და კლასიკური მექანიკების ერთსა და იმავე ტიპის ფიზიკური სისტემების მოდულებთან დაკავშირებით გამოყენება შეგვიძლია. თუ კლასიკური მექანიკა სისტემასთან დაკავშირებით ქაოსურ ქმედებას განსაზღვრულ პირობებში

(ანუ მაკონტროლებელი პარამეტრის მნიშვნელობათა განსაზღვრულ დიაპაზონში) წინასწარმეტყველებს, შეგვიძლია ვიკითხოთ, თუ რას მოგვცემს კვანტური მექანიკა იგივე პირობებში (რასაკვირველია, აგრეთვე უნდა ვიკითხოთ, თუ რას გვიჩვენებს რეალური ფიზიკური სისტემები იმავე პირობებში).

კლასიკური და კვანტური მექანიკის პროგნოზების შედარება რთულია იმ სისტემებისთვის, რომელთაც კლასიკური მექანიკა ქაოსურად მოიაზრებს. ქაოსური სისტემები არაწრფივია და კლასიკურ მექანიკაში მათ ანალიზური ამონახსნები არ გააჩნიათ. ჰამილტონისეული სისტემის შემთხვევაში საქმე არაინტეგრებად სისტემასთან გვაქვს. კვანტურ მექანიკაში ამ მხრივ უკიდურესი სიძნელებები ჩნდება და ინტეგრებადი სისტემებისთვის გამოყენებული მრავალი მეთოდი უვარგისია არაინტეგრებადი სისტემებისთვის. კვანტურ მექანიკასთან დაკავშირებით პროგნოზირება, საზოგადოდ, რთულია და დარწმუნებულები უნდა ვიყოთ, რომ ჩვენი ვარაუდი გამოთვლების ჩასატარებელი მიახლოებითი სქემის დამახინჯება არ იქნება. კვანტური მექანიკა სისტემის ქმედების ზუსტად იმ მახასიათებლების გამოთვლის საშუალებას არ გვაძლევს, რომლებზეც ქაოსის შესახებ ჩვენი კლასიკური შეხედულებებია აგებული, კერძოდ, ვგულისხმობთ სისტემის ტრაექტორიებს მდგომარეობათა სივრცეში. ამრიგად, კვანტური მექანიკის მიმართ სიფრთხილე უნდა გამოვიჩინოთ, როდესაც მისი საშუალებით ქაოსური ქმედების გამოვლინებებზე დაკვირვებას ვაპირებთ.

სამწუხაროდ, ამ სახელმძღვანელოს შექმნისას (2000) მეცნიერები ჯერ კიდევ არ არიან შეთანხმებულნი სათანადო მახასიათებლების შესახებ. ზოგიერთი ფიზიკოსი ამტკიცებს, რომ ცნება „კვანტური ქაოსი“ საერთოდ არ უნდა არსებობდეს, რადგან, როგორც ქვემოთ ვნახავთ, კვანტური მექანიკა პრაქტიკულად წრფივი თეორიაა. ვინაიდან ქაოსი არაწრფივობას საჭიროებს, კვანტური მექანიკა ქაოსური ქმედების გამომწვევი ვერ იქნება. თუ ეს შედეგი ჭეშმარიტებას შეესაბამება, ფუნდამენტური პრობლემის წინაშე აღმოვჩნდებით როდესაც რეალური სისტემები ქაოსურ ქმედებას წარმოაჩენს.

კვანტური მექანიკის სპეციალისტებს სჯერათ, რომ კვანტური მექანიკის პროგნოზები გარკვეულ ზღვრებში კლასიკური მექანიკისას ემთხვევა. ამგვარი *შესაბამისობის პრინციპი* ქმედების როგორც დიდ სიდიდეებზე, ასევე $\hbar \rightarrow 0$ ზღვარშიც ვრცელდება. ამიტომ, თუ კვანტური მექანიკა ქაოსურ ქმედებას საერთოდ არ აღწერს, მისი დაფიქსირება ძნელი იქნება კლასიკურ შემთხვევაშიც. კვანტური მექანიკა ან ჯერჯერობით ჩვენთვის ბოლომდე გაურკვეველი სახით გამოხატავს ქაოსურ ქმედებას, ან საერთოდ არ მოიცავს ამგვარ ქმედებას ანუ ამ შემთხვევაში კვანტური მექანიკა სრული სიცრუეა! თუ ასეთი „ერეტიკული“ დასკვნა სინამდვილეს წარმოადგენს, მაშინ კვანტური მექანიკის მეშვეობით „ტყუილის“

აღმოჩენა ქაოსის აღმწერი კვანტური მექანიკის გაცილებით ფუნდამენტურ თეორიასთან მიგვიყვანს. ამასთან ერთად, კვანტური მექანიკა ალბათ შეიცვლება, რადგან რასაც დღესდღეობით ქაოსს ვუწოდებთ, რეალურად ბუნების მიერ შექმნილი და დეტალურად გათვლილი „თავსატეხია“. რადიკალური დასკვნების გამოტანამდე უფრო დაწვრილებით უნდა გავაანალიზოთ, თუ რას გვამცნობს კვანტური მექანიკა ქაოსური ქმედების გამომხატველ სისტემებთან დაკავშირებით.

არსებობს კვანტური სისტემების სპექტრში ქაოსური ქმედების განხილვის კიდევ ერთი მიზეზი. უბრალო კვანტური მექანიკის მნიშვნელოვანი განზოგადება ნაწილაკების დიდი რაოდენობის მქონე სისტემების დახასიათება – ე.წ. კვანტურ-სტატისტიკური მექანიკაა. კვანტურ-სტატისტიკურ მექანიკაში კვანტური მექანიკის სათანადო ალბათობების სიმკვრივის განაწილებებით მოთხოვნილ დონეს ემატება სტატისტიკური ან შემთხვევითობის დონე. ჩნდება უმნიშვნელოვანესი კითხვა: შეუძლია თუ არა კვანტურ მექანიკას, რომ “გაუმკლავდეს” ამგვარ შემთხვევითობას, თუკი ეს უკანასკნელი განსაკუთრებული მოვლენაა? ქაოსის ანალოგიურად, კვანტურ-სტატისტიკური მექანიკის (KAM85) ფუნდამენტური ახსნის უნარი კვანტსაც შესწევს. თუ ახსნა თვით კვანტური მექანიკიდან არ გამომდინარეობს, მაშინ კიდევ ერთხელ დავასკვნით, რომ კვანტური მექანიკა დღევანდელი ფორმით არასრულყოფილია.

პირველ რიგში გთავაზობთ კვანტური მექანიკის მოკლე ანალიზს, ხოლო შემდეგ სხვადასხვა მიდგომებს გავეცნობით, რომლებსაც ორიენტირად გამოვიყენებთ კვანტურ მექანიკაში მიმდინარე ისეთი მოვლენებისთვის, რომელთა მიმართაც კლასიკური მექანიკა ქაოსურ ქმედებას პროგნოზირებს. ბოლოს კვანტური ქაოსის გამომხატველი (თუ ასეთი საერთოდ არსებობს) ზოგიერთი ჰიპოთეტური ექსპერიმენტის მოკლე განხილვით შემოვიფარგლებით.

„კვანტური ქაოსის“ შესახებ არსებობს აურაცხელი ლიტერატურა და მის განსჯას ცალკე სახელმძღვანელო დასჭირდება. ჩვენ ამ სწრაფად განვითარებადი სფეროს სრულად განხილვის პრეტენზია არ გავგაჩნია. დაინტერესებულ მკითხველს ცოდნის გასაღრმავებლად [Gutzwiller, 1990] და [Reichl, 1992] მონოგრაფიებს ვურჩევთ.

კვანტური მექანიკის მოკლე შინაარსი

მოცემულ პარაგრაფში გთავაზობთ კვანტური მექანიკის თეორიის მოკლე შესავალს, რომელიც აუცილებელია კვანტური ქაოსის კვლევის თვალსაზრისით. საბედნიეროდ, კვანტური ქაოსის შესწავლისათვის კვანტური მექანიკის ფორმალური მიდგომის განვრცობის

აუცილებლობა არ არსებობს. მსჯელობას შრედინგერის განტოლებით აღწერილ ჩვეულებრივ კვანტურ მექანიკამდე დავიყვანთ.

კვანტური მექანიკის შრედინგერისეული მიდგომა სისტემის ქმედების პროგნოზირებისთვის მნიშვნელოვან მათემატიკურ საფუძველს გვაძლევს. ამ მათემატიკურ, შუამავალ ფორმას სისტემის **ტალღური ფუნქცია** ეწოდება, რადგან იგი ტალღების აღწერისთვის საჭირო ფუნქციის ბევრ (მაგრამ არა ყველა) თვისებას ატარებს. $\Psi(x, y, z, t)$ სიმბოლოთი აღნიშნულ ტალღურ ფუნქციას პირდაპირი ფიზიკური მნიშვნელობა არ გააჩნია, მაგრამ იგი სისტემის თვისებების კვლევის მიზნით გამოიყენება. მაგალითად, ტალღური ფუნქციის აბსოლუტური სიდიდის კვადრატი გვაძლევს კონკრეტულ მდებარეობაში სისტემის აღმოჩენის ალბათობის სიმკვრივეს ანუ ნაწილაკისგან შემდგარი სისტემისთვის $|\Psi(x, y, z, t)|^2$ სიდიდე წარმოადგენს დროის t მომენტისათვის x, y, z კოორდინატებით განსაზღვრულ მდებარეობაში ნაწილაკის აღმოჩენის ალბათობას (მოცულობის ერთეულში).

ტალღური ფუნქცია სისტემის სხვა მახასიათებლების საშუალო მნიშვნელობების („ალბათური მნიშვნელობის“) გამოთვლისთვის გამოიყენება. $A(x,y,z)$ ფუნქცია აღწერს სისტემის რომელიმე თვისებას, მაშინ მისი საშუალო მნიშვნელობის დადგენა შემდეგი ინტეგრალის განსაზღვრის გზით არის შესაძლებელი:

$$\langle A \rangle = \int dx dy dz \Psi^*(x, y, z, t) A(x, y, z) \Psi(x, y, z, t) \quad (12.2-1)$$

სადაც ინტეგრება ხდება კოორდინატების ყველა შესაძლო მნიშვნელობის მიხედვით, ხოლო Ψ^* ტალღური ფუნქციის კომპლექსურად შეუღლებული რიცხვია. $[A(x,y,z)]$ შესაძლოა ჩვეულებრივი ფუნქცია არც იყოს და ე.წ. ოპერატორების საშუალებით იყოს წარმოდგენილი. ასეთი მნიშვნელოვანი მათემატიკური თვისება კვანტური მექანიკის ყველა სტანდარტულ სახელმძღვანელოშია მოყვანილი, მაგრამ ჩვენს შემთხვევაში იგი განხილვას არ საჭიროებს]. კვანტური მექანიკის ზოგად ინტერპრეტაციაზე დაყრდნობით, ეს ალბათობები სისტემის ქმედების შესახებ ყოველგვარ ინფორმაციას მოიცავს.

კვანტური მექანიკის უმთავრესი ნიშანი გახლავთ ფაქტი, რომ ფუნდამენტური $\Psi(x, y, z, t)$ სიდიდე გვაძლევს ალბათობის **ამპლიტუდას**. ტალღის (ალბათობის) ამპლიტუდის გამოყენება კვანტურ მექანიკას ელექტრონებთან, პროტონებთან, ჰელიუმის ატომებთან და ა.შ. დაკავშირებით ექსპერიმენტულად დადგენილი თვისებების (როგორცაა ინტერფერენცია და დიფრაქცია) გამოთვლის საშუალებას გვაძლევს.

როგორ ვადგენთ სისტემის ტალღურ ფუნქციას? ამას სისტემის შესაბამისი **შრედინგერის განტოლების** ამოხსნის საშუალებით ვაღწევთ. შრედინგერის განტოლება

სისტემასთან დაკავშირებულ ჰამილტონის ფუნქციას იყენებს (მე-8 თავიდან გაიხსენეთ, რომ მარტივ შემთხვევებში ჰამილტონის ფუნქცია სისტემის კინეტიკური და პოტენციური ენერგიების ჯამის ტოლია). ე.წ. კოორდინატული წარმოდგენის შემთხვევაში, როდესაც ყოველივე კოორდინატების ფუნქციის სახით არის გამოსახული, ნაწილაკის შესაბამისი ჰამილტონის ფუნქციაა $H(x, y, z, t)$.

მაშინ შრედინგერის განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს:

$$H(x, y, z, t)\Psi(x, y, z) = \frac{i\hbar}{2\pi} \frac{\partial \Psi(x, y, z, t)}{\partial t} \quad (12.2-2)$$

სადაც $i = \sqrt{-1}$, ხოლო \hbar პლანკის მუდმივაა, რომელსაც ენერგია×დრო ან იმპულსი×მდებარეობა ერთეულებით ზომავენ (H ფუნქცია ოპერატორიც შეიძლება იყოს და მიღებული განტოლება ტალღური ფუნქციის კერძო დიფერენციალური განტოლება აღმოჩნდება). შრედინგერის განტოლების ამონახსნები სისტემის შესაძლო Ψ მნიშვნელობებს გვაძლევს. ჰამილტონის ფუნქციისა და Ψ -სთვის სასაზღვრო პირობების სათანადოდ შერჩევის გზით ფიზიკური სიდიდის ბუნებას განვსაზღვრავთ. კვანტური მექანიკის მიღწევების დიდი ნაწილი „რეალური“ ჰამილტონის ფუნქციის დადგენაში გამოიხატება (მაგალითად ზეგამტარობა მაღალი ტემპერატურის პირობებში ან პროტონში მყოფი კვარკები).

მას შემდეგ, რაც ჰამილტონის ფუნქციის საკითხი მოგვარებულია, ვიზრუნოთ შრედინგერის განტოლების ამონახსნების დადგენაზე. ამონახსნებს მამრავლებად დაშლილი სახით ვეძებთ:

$$\Psi(x, y, z, t) = g(t)\Phi(x, y, z) \quad (12.2-3)$$

თუ ჰამილტონის ფუნქცია დროზე ცხადი სახით არ არის დამოკიდებული, მაშინ $g(t)$ და $\Phi(x, y, z)$ ფუნქციები მოცემულია შემდეგი განტოლებების მეშვეობით:

$$g(t) = Ge^{-i2\pi Et/\hbar} \quad (12.2-4)$$

$$H(x, y, z)\Phi(x, y, z) = E\Phi(x, y, z)$$

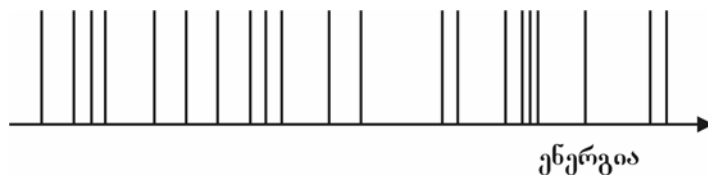
(12.2-4) განტოლებაში E სისტემის ენერგიაა. მიღებულ $\Phi(x, y, z)$ -ს ენერგიის კონკრეტული მნიშვნელობის შესაბამისი საკუთრივი ფუნქცია ეწოდება. არსებითია ის

გარემოება, რომ ტალღური ფუნქციის დროზე დამოკიდებულება $g(t)$ -სთვის მარტივი ექსპონენციალური სახითაა წარმოდგენილი და მხოლოდ E ენერგიის საკუთრივ მნიშვნელობაზეა დამოკიდებული.

ტალღური ფუნქციის დადგენის ბოლო საფეხური იმ მათემატიკური შედეგის გამოყენებაში მდგომარეობს, რომლის თანახმადაც შრედინგერის განტოლების ყველაზე ზოგადი ამონახსნი ამონახსნთა წრფივი კომბინაციის სახით შეიძლება ჩაიწეროს:

$$\Psi(x, y, z, t) = \sum_i c_i e^{-i2\pi E_i t / h} \Phi_i(x, y, z) \quad (12.2-5)$$

წინა პარაგრაფში E ენერგიის საკუთრივ მნიშვნელობა და $\Phi(x, y, z)$ საკუთრივ ფუნქცია მათთან დაკავშირებული შესაძლო საკუთრივ მნიშვნელობებისა და საკუთრივ ფუნქციების აღნიშვნის მიზნით ინდექსებით აღვნიშნეთ. ჯამი სისტემის ენერგიის ყველა შესაძლო მნიშვნელობების მიხედვით არის აღებული. ყველაზე ზოგად შემთხვევებში ენერგიის მნიშვნელობათა რაიმე უწყვეტ დიაპაზონზე ინტეგრალის აღებაც გვჭირდება. c_i კოეფიციენტები სისტემის საწყისი პირობების მიხედვით დადგენილი პარამეტრებია. შენიშნეთ, რომ (12.2-5) წარმოდგენა დანართსა და მე-11 თავში აღწერილი ფურიეს ჯამების იდენტურია.



ნახ. 12.1. ენერგიის საკუთრივ მნიშვნელობის სპექტრის ესკიზი შემოსაზღვრული კვანტური სისტემისთვის. თითოეული ვერტიკალური ხაზი ენერგიის ერთ-ერთი საკუთრივ მნიშვნელობის მდებარეობას აღნიშნავს.

$\Phi_i(x, y, z)$ საკუთრივ ფუნქციები აქ სინუსისა და კოსინუსის ფუნქციათა როლს ასრულებს.

კვანტურ მექანიკაში ქაოსის როლის დასადგენად უნდა გამოვიყენოთ შრედინგერის განტოლების ამონახსნების უმნიშვნელოვანესი თვისება, კერძოდ შემოსაზღვრული სისტემისთვის (ანუ სივრცის გარკვეულ შემოსაზღვრულ არემდე დაყვანილი სისტემისთვის) E_i ენერგიის მხოლოდ განსაზღვრული დისკრეტული მნიშვნელობები გვაძლევს ამონახსნებს.

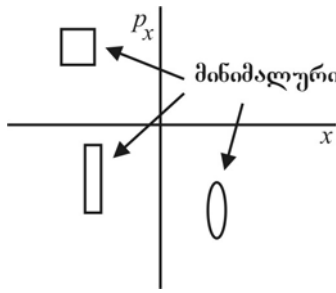
შემოსაზღვრული სისტემისთვის ტალღური ფუნქცია დასაშვებია, თუ მის მიხედვით გამოთვლილი განაწილების სიმკვრივე სივრცულ კოორდინატთა დიდი მნიშვნელობების შემთხვევაში ნულისაკენ მიისწრაფვის. ეს არის ზუსტი მათემატიკური განსაზღვრის გზა, როდესაც სისტემა სივრცის გარკვეულ შემოსაზღვრულ არეამდეა დაყვანილი. ეს თვისება E ენერჯის მხოლოდ დისკრეტული მნიშვნელობებისთვის ინარჩუნებს ძალას და ამ მნიშვნელობებს სისტემის ენერჯის საკუთრივი მნიშვნელობები ეწოდება (ამგვარი ქმედება მე-11 თავში განხილული სივრცითი ტალღების ქმედების ანალოგიურია). უფრო ფიზიკური ენით რომ ვთქვათ, თუ შემოსაზღვრული სისტემის ენერჯიას ვზომავთ, მაშინ ენერჯის არანებისმიერ მნიშვნელობას, არამედ ენერჯის საკუთრივი მნიშვნელობების მხოლოდ დისკრეტულ სიმრავლეს ვადგენთ. ამ დროს სისტემის ენერჯია „დაკვანტულია“. ენერჯის დაშვებული მნიშვნელობების საილუსტრაციოდ ხშირად ენერგეტიკულ დონეთა დიაგრამას ვიყენებთ, რომლის ერთ-ერთი ვერსიაც 12.1 ნახაზზეა მოყვანილი.

კლასიკური ტალღის შემთხვევაში ფურიეს ანალიზი (იხილეთ A დანართი) გვაუწყებს, რომ ნებისმიერი რხევითი გამოვლინება ცალკეულ სიხშირესთან ასოცირებული ტალღებიდან თითოეული ტალღის წრფივი სუპერპოზიციის სახით შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ. (12.2-5) ფორმულაში წარმოდგენილი ენერჯის საკუთრივი ფუნქციების სუპერპოზიცია კვანტური მექანიკის ანალოგიურ შედეგს ასახავს: ნებისმიერი ტალღური ფუნქცია ენერჯის ცალკეულ მნიშვნელობასთან ასოცირებული საკუთრივი ფუნქციების წრფივი სუპერპოზიციის მეშვეობით შეიძლება გამოისახოს.

დროზე დამოკიდებული ჰამილტონის ფუნქციები ლაზერული სხივით წარმოქმნილი ვიბრაციული ელექტრომაგნიტური ველის მიერ გარედან მოქმედი ძალით კონტროლირებადი კვანტური სისტემების აღწერისთვის გამოიყენება. ამ მოდელებში გარე ველები სრულად კონტროლდება და მათ მკაფიოდ განსაზღვრული დროში ქმედება ახასიათებთ. ამგვარი მოდელები გაიდელალებულია, რადგან სინამდვილეში გარე ველები ფიზიკური სისტემებია, რომლებიც კვანტური მექანიკის წესებს უნდა ემორჩილებოდნენ. მიუხედავად ამისა, სათანადოდ მოდელირებული ქმედება რეალურ მდგომარეობასთან მიახლოების კარგი საშუალებაა.

დროზე დამოკიდებული ჰამილტონის ფუნქციისთვის, როგორც წესი, ვადგენთ ე.წ. დინამიკურ $U(t, t_0)$ ოპერატორს, რომელიც ურთიერთქმედებს $\Psi(x, t_0)$ ტალღურ ფუნქციასთან და გვაძლევს დროის შემდგომი მომენტის შესაბამის ტალღურ ფუნქციას:

$$\Psi(x, t) = U(t, t_0)\Psi(x, t_0) \quad (12.2-6)$$



ნახ. 12.2. მდგომარეობათა სივრცეში კვანტურმა მექანიკურმა სისტემებმა $h/4\pi$ სიდიდის არე მაინც უნდა დაიკავოს. არეს ფორმა შეიძლება იცვლებოდეს.

ასეთ შემთხვევებში სისტემის დროზე დამოკიდებულება ჰამილტონის ფუნქციებთან შედარებით რთული შეიძლება იყოს, მაგრამ როგორც ქვემოთ ვნახავთ, დინამიკა კვლავაც წრფივ ხასიათს ატარებს.

კვანტური მექანიკა და მდგომარეობათა სივრცის ტრაექტორიები

კვანტურ მექანიკაში სისტემის შესაბამისი საწყისი პირობების განსაზღვრის სიზუსტე შეზღუდულია. თუ მდგომარეობათა სივრცეს ვიყენებთ, რომელშიც ღერძები x მდებარეობა და იმპულსის p_x კომპონენტია, მაშინ კვანტური მექანიკა გვაუწყებს, რომ სისტემის საწყისი პირობები ამ სივრცის $h/4\pi$ -ზე დიდი ზომის არეს უნდა შეესაბამებოდეს (იხილეთ ნახ. 12.2). კვანტური მექანიკის თანახმად, უფრო მცირე არის გამოყენება ამ თვალსაზრისით შეუძლებელია. ეს შედეგი **ჰაიზენბერგის განუსაზღვრელობების პრინციპის** სახელითაა ცნობილი:

$$\Delta_x \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi} \quad (12.2-7)$$

სადაც Δx წარმოადგენს x -ის განსაზღვრის სიზუსტეს, ხოლო Δp_x – იმპულსისა. განუსაზღვრელობების პრინციპი გვაუწყებს, რომ თუ მდებარეობასთან დაკავშირებით განუსაზღვრელობის შემცირებას ვცდილობთ, განუსაზღვრელობა წრფივი იმპულსის მხრივ უნდა გავზარდოთ. ამრიგად, მდგომარეობათა სივრცეში საწყისი პირობებთან დაკავშირებით მინიმალური ზომის მქონე არე უნდა არსებობდეს. სისტემის ევოლუციასთან ერთად მდგომარეობათა სივრცეში ტრაექტორიების მიერ დაკავებული არის ზომა იდეალური კვანტური სისტემის შემთხვევაში მხოლოდ გაიზრდება.

საწყისი პირობების ამგვარი შეზღუდვა ნივთიერების ტალღური ბუნების გამოხატულებაა. თუ სივრცის უმცირეს არეში (მცირე Δx) ნებისმიერი ტალღის შემფოთების

გამოწვევას ვეცდებით, მაშინ ფურიეს ანალიზიდან გამომდინარე (იხილეთ A დანართი), აუცილებლად მივიღებთ ტალღური ვექტორის გარკვეულ დიაპაზონს. კვანტურ მექანიკაში ცნობილი დე ბროილის თორემის თანახმად, k ტალღის ვექტორი იმპულსთან დაკავშირებულია ($p = \hbar k / 2\pi = \hbar / \lambda$) დამოკიდებულების მეშვეობით. აქ ტალღური ვექტორების დიაპაზონში აღწერილი ნაწილაკის იმპულსის მნიშვნელობათა დიაპაზონი იგულისხმება.

აქამდე კვანტურ ქაოსთან დაკავშირებული კვლევა, შესაბამისი პირობების ფონზე, ნახევრად კლასიკური ქმედების პირობებში ტარდებოდა. ეს ნიშნავს, რომ კვანტური სისტემის ქმედება გარკვეულწილად კლასიკური მოდელს წააგავდა. მაგალითად, ატომში ზოგიერთ აგზნებულ ელექტრონულ მდგომარეობებზე, როდესაც ელექტრონი ბირთვისგან შორს იმყოფება, „ტალღური პაკეტების“ მიღება შეგვიძლია (როგორც თეორიულად, ისე ექსპერიმენტულად). აქ იგულისხმება, რომ ნახევრად კლასიკური ქმედება ფაზურ სივრცეში საწყისი პირობებით კლასიკური ტრაექტორიის მთლიან „ზომასთან“ შედარებით მცირე არის დაკავებასა და ტალღური პაკეტების საკმარისად დიდ მნიშვნეზე გავრცელებისთვის საჭირო დროსთან შედარებით მცირე ინტერვალში დაკვირვებისას ვლინდება. ასეთ პირობებში, სათანადოდ ინტერპრეტირებულ კლასიკურ მოდელთან და კვანტურ მექანიკასთან დაკავშირებით გამოტანილი წინასწარი დასკვნები ერთმანეთთან დამაკმაყოფილებელ თანხვედრაშია.

შესაძლებელია თუ არა კვანტური ქაოსის არსებობა?

კვანტური მექანიკის გამორჩეული საკითხების მოკლე მიმოხილვის შემდეგ კვანტური ქაოსის ცნების შესახებ მსჯელობისათვის უკვე მზად ვართ. რადგან კვანტურ მექანიკაში შეუძლებელია ინდივიდუალური ტრაექტორიების იდენტიფიცირება, ქაოსური ქმედების შემოწმებისთვის ტრაექტორიების ექსპონენციალური დივერგენციის ცნებას ვერ გამოვიყენებთ. ამრიგად, დინამიკის სხვა ასპექტებზე მოგვიხდება ყურადღების გადატანა.

კვანტური ქაოსის შესაძლო არსებობის წინააღმდეგ ერთ-ერთი არგუმენტი (12.2.5) სუპერპოზიციული ფორმით გამოსახულ ტალღური ფუნქციის დროზე დამოკიდებულებას ეყრდნობა. შემოსაზღვრული სისტემისთვის და დროისგან დამოუკიდებელი ჰამილტონიანისათვის სისტემის შესაბამისი ნებისმიერი ტალღური ფუნქცია ენერჯის საკუთრივი ფუნქციების წრფივი სუპერპოზიციის სახით შეიძლება ჩაიწეროს, სადაც თითოეული მხარის დროზე დამოკიდებულება რთულ ექსპონენციალურ მამრავლში გაერთიანებული სინუსური და კოსინუსური რხევების კომბინაციაა. როდესაც ენერჯის საკუთრივი მნიშვნელობები მხოლოდ დისკრეტულ მნიშვნელობებზე ვრცელდება, ნებისმიერი

ტალღური ფუნქციის დროზე დამოკიდებულება, მე-4 თავში მოყვანილი განსაზღვრების თანახმად, სულ ცოტა კვაზიპერიოდული ხასიათის მაინც იქნება. ამასთან, როდესაც სისტემის ფიზიკური თვისებების ალბათური მნიშვნელობების დროზე დამოკიდებულება 12.2.1 დამოკიდებულებით ანუ ტალღური ფუნქციის საბოლოო სახის მიხედვით განისაზღვრება, ფიზიკური თვისებები სულ ცოტა კვაზიპერიოდული ხასიათის შეიძლება იყოს. ამრიგად, შემოსაზღვრულ სისტემაში ქაოსური ქმედების ალბათობა მხოლოდ მაშინ გვექნება, თუ ჰამილტონიანი დროისაგან დამოუკიდებელი იქნება (ამ შედეგის სხვაგვარად გამოხატვა შრედინგერის განტოლების წრფივობით შეიძლება. აქედან გამომდინარე, განტოლება ქაოსისთვის განსაკუთრებულად საჭირო არაწრფივობის ნაკლებობას განიცდის). ფორდმა და ილგმა (FOI92) ეს არგუმენტი კვანტური სისტემების ფართო სპექტრზე განავრცეს.

დავუშვათ, ყურადღება გადაგვაქვს ქაოსური ქმედების სხვა ასპექტზე, კერძოდ ახლომდებარე ტრაექტორიების ექსპონენციალურ დივერგენციაზე. გვიჩვენებს თუ არა ფუნქციები ექსპონენციალურ დივერგენციას? 12.2.6 გამოსახულებაში წარმოდგენილი ოპერატორის გამოყენებით შრედინგერის განტოლების ამონახსნი შემდეგი ფორმით შეიძლება დაწეროთ (სიმარტივისთვის ტალღური ფუნქციის სივრცითი დამოკიდებულება უგულებელყოფილი გვაქვს):

$$\Psi(t) = U(t, t_0)\Psi(t_0) \quad (12.2-8)$$

$\Psi(t_0)$ ტალღური ფუნქციის საწყისი მნიშვნელობაა და საკვლევი სისტემისთვის განსაზღვრავს საწყის პირობებს კვანტური მექანიკის მიხედვით დასაშვებ დიაპაზონში.

თუ ოდნავ განსხვავებული საწყისი პირობების, კერძოდ $\Psi(t_0) + \delta$ -ის შესაბამის, სისტემას მივმართავთ, მაშინ შრედინგერის განტოლების ამონახსნი იქნება

$$\Psi(t) + U(t, t_0)\delta \quad (12.2-9)$$

აქ მეორე წევრიც შრედინგერის განტოლების ამონახსნია. ამრიგად, იგი დროში ექსპონენციალურად ვერ გაიზრდება. დროთა განმავლობაში ორი „ახლომდებარე“ ტალღური ფუნქცია მცირე განსახვავებას შეინარჩუნებს.

ამრიგად, კვანტური ქაოსის შესაძლო ტესტი ახლომდებარე ტრაექტორიების ექსპონენციალური დივერგენცია ვერ იქნება. ტალღის ფუნქციის ქაოსური ევოლუციისათვის არანაირი შესაძლებლობა არ იარსებებს.

უნდა აღინიშნოს, რომ ანალოგიურ სიტუაციაში მე-8 თავში, ჰამილტონისეული სისტემების განხილვის შემთხვევაშიც, აღმოვჩნდით. მაშინ დავდაგინეთ, რომ მდგომარეობათა (ან ფაზური) სივრცის ალბათობების განაწილების ევოლუცია ლუივილის წრფივი განტოლებითაა მოცემული. ჩვენ ვასკვნი, რომ თუ ჰამილტონისეულ სისტემას გააჩნია ოდნავ განსხვავებული ალბათობების საწყისი განაწილება, მაშინ ალბათობათა ორი განაწილება ერთიმეორისგან ექსპონენციალურად არ „გადაიხრება“ იმ შემთხვევაშიც კი, როდესაც სისტემა ქაოსურად იქცევა, ხოლო ახლომდებარე ტრაექტორიები კი დივერგენციას განიცდის. კვანტურ მექანიკაშიც ანალოგიური მდგომარეობაა. მე-8 თავში განხილული არნოლდის კატის ასახვა კვანტური სისტემის დროზე დამოკიდებულების გამოვლინებაა (RIS87, FMR91).

კვანტურ მექანიკაში ალბათობათა განაწილების როლს ე.წ. *ვიგნერის განაწილების ფუნქცია* ასრულებს (იხილეთ თავის ბოლოში ციტირებული ლიტერატურა). ზედმეტი დეტალებისგან თავის ასარიდებლად უბრალოდ ვამბობთ, რომ ეს ფუნქცია კლასიკურ ფაზურ სივრცეში ალბათობების განაწილების ანალოგიურად ტალღური ფუნქციის ნამრავლებისგან არის შემდგარი. მნიშვნელოვანი განსხვავება ის არის, რომ ვიგნერის ფუნქცია უარყოფითიც შეიძლება იყოს, ხოლო კლასიკური განაწილების ფუნქცია ყოველთვის დადებითია (უარყოფითობა ინტერფერენციის დამსახურებაა, რაც ტალღურ მექანიკაში უმნიშვნელოვანეს როლს ასრულებს). ვიგნერის ფუნქციის შესაბამისი ლინარული განტოლება ასევე წრფივია და, ამრიგად, საწყის პირობებზე მგრძობიარე დამოკიდებულებას არ ამჟღავნებს. უფრო კონკრეტულად რომ ვთქვათ, ვიგნერის ორი ერთმანეთისაგან მცირედ განსხვავებული ფუნქცია დროში ექსპონენციალურ დივერგენციას ვერ წარმოაჩენს.

ვფიქრობთ, რომ კვანტურ მექანიკაში ექსპონენციალური დივერგენციის არარსებობასთან დაკავშირებით მოყვანილი არგუმენტი სწორია. ჩვენ მიერ გამოტანილი დასკვნის მიხედვით, შემოსაზღვრული სისტემების დროისგან დამოუკიდებელი ჰამილტონის ფუნქციის მქონე კვანტურ მექანიკურ მოდელებში ქაოსი (როგორც სისტემის მახასიათებლების დროზე ქაოსსური სახით დამოკიდებულება) ვერ იარსებებს. უნდა აღინიშნოს, რომ ეს დასკვნა მოდელების მხოლოდ კონკრეტულ კლასზე ვრცელდება. თუ მოდელებს სისტემის მიერ გარემოსთან ურთიერთქმედებებსაც დავუმატებთ (მაგალითად, ელექტრომაგნიტურ გამოსხივებას), მაშინ დისკრეტული ენერჯის საკუთრივი მნიშვნელობები ენერჯის მნიშვნელობათა უწყვეტი განაწილებით შეიცვლება (ენერჯის მნიშვნელობათა განაწილება შედარებით იზოლირებული სისტემისთვის დისკრეტულ მნიშვნელობებზე ან მათ სიახლოვეს გამოვლინდება). ამრიგად, კვაზიპერიოდულ ქმედებასთან დაკავშირებული შეზღუდვა აღარ არსებობს.

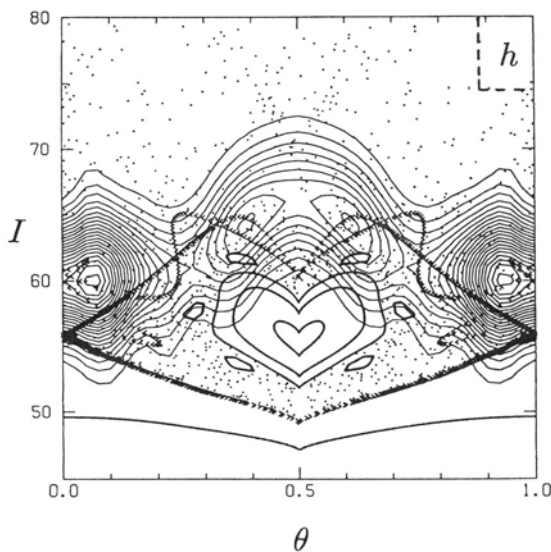
ასეთ შემთხვევაშიც კი შრედინგერის განტოლების წრფივობა ქაოსს კვლავ ეწინააღმდეგება.

უნდა აღინიშნოს, რომ ზემოთ მოყვანილი არგუმენტები ძალზე ზოგადია. რა ხდება, როდესაც რეალური კვანტურ მექანიკურ გამოთვლებს ვაწარმოებთ? კვანტური ქაოსის შესაძლო შედეგების შესახებ მტკიცებულებების მოყვანა მეტისმეტად რთულია და ჩვენც მოხერხებულად შერჩეულ სისტემებზე ჩატარებული გამოთვლების მიხედვით ჩატარებულ ანალიზს უნდა დავეყრდნოთ. დროზე დამოკიდებული ჰამილტონის ფუნქციის მქონე კვანტური სისტემის (მოდელის) მაგალითია პერიოდული ბიძგებით მოქმედი მბრუნავი მოწყობილობა. ეს არის მყარად დაფიქსირებული მბრუნავი ჩარჩო, რომელიც პერიოდულ ბიძგებს განიცდის. მე-8 თავში განხილული (CHI79) სტანდარტული ასახვის ექვივალენტური სისტემის კლასიკური მოდელი პარამეტრის მნიშვნელობათა გარკვეულ დიაპაზონში ქაოსურ ქმედებას ამჟღავნებს. ასეთ შემთხვევაში ქაოსური ქმედების როლი დროთა განმავლობაში მბრუნავი ჩარჩოს კინეტიკური ენერჯის ზრდაში გამოიხატება.

ჰამილტონისეულ სისტემებში კლასიკური ქაოსური ქმედების ერთ-ერთი გამოხატულება მდგომარეობათა სივრცეში ტრაექტორიების „ხეტიალია“: მდგომარეობათა სივრცის ერთ არეში დაწყებული ტრაექტორია ნებისმიერი KAM თორის რღვევისას მდგომარეობათა სივრცის მთლიან დასაშვებ არეში იმოძრაავს. ასეთ შემთხვევაში ვიტყვი, რომ სრულიად ქაოსური ქმედების წინაშე აღმოვჩნდით. ანალოგიურ კვანტურ სისტემებში თავდაპირველად მდგომარეობათა სივრცის გარკვეულ არეში განსაზღვრული სისტემები თავიანთი კლასიკური ანალოგიების მსგავსად დიფუნდირებას დაიწყებენ, მაგრამ საბოლოო ჯამში დიფუზია წყდება და კუთხე-ქმედების სივრცეში ტალღური ფუნქცია შესაბამისი კლასიკური მოდელის ფარგლებში დიფუზიის გაგრძელების შემთხვევაშიც კი თავდაპირველ სახეს შეინარჩუნებს.

ამგვარი მოდელის კვანტურ შემთხვევაში ჩირიკოვმა აღმოაჩინა, რომ შესაძლებელია დროის მიხედვით უკუინტეგრება ზუსტად საწყის წერტილში დაბრუნებამდე, რაც კლასიკური მოდელის შემთხვევაში შეუძლებელია ქაოსური ქმედების შესაბამისი ლიაპუნოვის დადებითი ექსპონენტის არსებობის გამო. კლასიკურად ქაოსური სისტემისთვის დიფუზია საწყისი მდგომარეობის განადგურებასა და მეხსიერების დაკარგვას იწვევს. ერთი შეხედვით, კვანტური მექანიკა მისი ალბათური ხასიათის მიუხედავად, კლასიკური ქაოსის მოთხოვნების დაკმაყოფილებისათვის საკმარისად მოუწესრიგებელი არ არის.

შეგვიძლია ვაჩვენოთ, თუ რატომ არის ზოგჯერ კვანტური მექანიკა კლასიკურ მექანიკაზე უფრო დეტერმინისტული: ფაზურ სივრცეში კვანტურ-მექანიკურ „განუსაზღვრელობას“ მნიშვნელოვანი დინამიკური აზრი გააჩნია. ამგვარი მდგომარეობა გვხვდება სისტემებში, სადაც KAM თორები დაშლას იწყებენ (მე-8 თავში ვნახეთ, რომ KAM თორები ფაზური სივრცის ტრაექტორიებს გარკვეული არეების ფარგლებში ზღუდავენ). კლასიკურ მექანიკაში KAM თორების დაშლის ნიშანია მდგომარეობათა სივრცის ფართომასშტაბიან არეებში სტოქასტიკური (ერგოდიკული) ქმედების გამოძვვევი ტრაექტორიების გავრცელება ან დიფუზია.



ნახ. 12.3. ალბათობების განაწილების (ჰუსიმის განაწილების) ეკვიპოტენციალური ზედაპირები ძლიერ მიკროტალღურ ველში აგზნებული წყალბადის ატომებისათვის. დინამიკა შესწავლილია ქმედების I და კუთხური θ ცვლადების მეშვეობით. განაწილება შესაბამისი კლასიკური მოდელის (არასტაბილურ) პერიოდულ ორბიტებთან

დაკავშირებულ დაჯგუფებებს (გროვებს) გვიჩვენებს. არასტაბილური პერიოდული წერტილისათვის შიდა და გარე სიმრავლეები (სტაბილური და არასტაბილური მრავალსახეობები) დიაგრამაზე, ცენტრის მახლობლად, ჰომოკლინიკურ კუთხეს წარმოქმნის (JSS89).

კვანტურ მექანიკაში ტალღური ფუნქცია KAM თორების შემთხვევაში გარკვეულწილად ვერც „ალიქამს“ დასაშვებ არეებს, რომლებიც ფუნდამენტურ კვანტურ $h/4\pi$ მოცულობაზე მცირე ზომისანი არიან. ამრიგად, კვანტურ მექანიკაში ალბათობათა განაწილებები KAM თორების ნარჩენების მიერ შეზღუდულ მდგომარეობაში შეიძლება დარჩეს, რაც კლასიკურ მექანიკაში ფაზურ სივრცეში ტრაექტორიების „ნებაზე მიშვების“ ტოლფასია. ასეთ შემთხვევაში კვანტური სისტემა ექვივალენტურ კლასიკურ სისტემასთან შედარებით ნაკლებად სტოქასტიკურია.

ფაზურ სივრცეში ტალღური ფუნქციების ამგვარი „ლოკალიზება“ კონდენსირებული ნივთიერების ფიზიკაში მნიშვნელოვანი და ხანგრძლივი კვლევის შედეგის, კერძოდ, შემთხვევითი პოტენციალების გარემოში ელექტრონების სივრცითი განლაგების

(ანდერსონის ლოკალიზაცია) ანალოგიურია. იხილეთ მაგალითად JEN87 და [Gutzwiller, 1990].

ზემოთ მოყვანილი შეზღუდვის კვანტურ სისტემებში „გადატანის“ კიდევ ერთი ახსნა კვანტური ალბათობების სიმკვრივის განაწილებებსა და შესაბამის კლასიკური დინამიკის ტოპოლოგიას შორის კავშირში მდგომარეობს. ალბათობათა კვანტური განაწილებები შესაბამისი კლასიკური სისტემის არასტაბილური პერიოდული ორბიტების ირგვლივ იყრიან თავს (იხ. ნახ. 12.3) (12.3 ნახაზზე გამოყენებული *ჰუსიმის განაწილება* სისტემის ე.წ. კოჰერენტულ მდგომარეობებთან ტალღური ფუნქციის გადაფარვაა. იხილეთ, მაგალითად, RBW96). მეცნიერები ფიქრობენ, რომ კვანტური ალბათობების სიმკვრივის განაწილებებში პერიოდული ორბიტები „გროვებს“ ტოვებს. მოყვანილი ანალიზი (JSS89) მიკროტალღური ველების მიერ წყალბადის აგზნებული ატომების იონიზაციის შემცირების ახსნისათვის გამოიყენება.

ქაოსურ ქმედების კვანტური ანალოგიები

რადგან კვანტურ მექანიკაში ქაოსის დროზე დამოკიდებულება თითქოს უგულებელყოფილია და კვანტური მექანიკა მდგომარეობათა სივრცეში მყოფი ტრაექტორიების შესახებ მსჯელობის საშუალებას არ გვაძლევს, სხვა სახის შეკითხვა უნდა დავსვათ: გვექნება თუ არა კვანტურ მექანიკურ მოდელის მეშვეობით გაკეთებულ პროგნოზში თვისობრივი ცვლილებები, როდესაც შესაბამისი კლასიკური მოდელი ქაოსურ ქმედებას წინასწარმეტყველებს? უკანასკნელ წლებში დეტალურად გამოიკვლიეს ორი სიდიდე – ენერგიის საკუთრივი მნიშვნელობების სტატისტიკური განაწილება და ენერგიის საკუთრივი ფუნქციების სივრცითი კორელაციები.

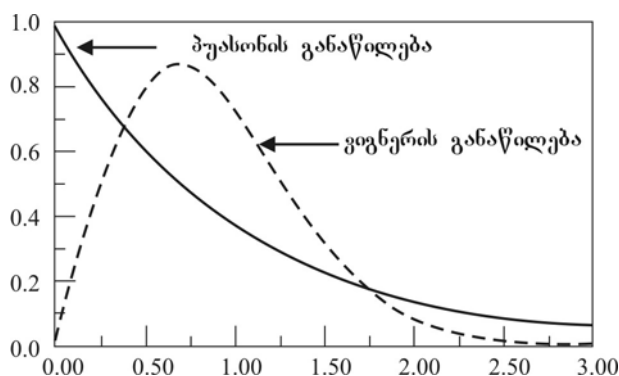
ენერგიის საკუთრივი მნიშვნელობების დაშორებათა სტატისტიკური განაწილება

კვანტური ქაოსის ერთ-ერთი შესაძლო ნიშანი ენერგიის საკუთრივი მნიშვნელობების დაშორებათა სტატისტიკური განაწილებაა. გავიხსენოთ ჰამილტონის ფუნქციის შესახებ, რომ ენერგიების გარკვეულ დიაპაზონში (სისტემის ყველა დანარჩენი პარამეტრის მუდმივობის პირობებში) მდგომარეობათა სივრცის არეებში შესაძლებელია გამოვლინდეს ქაოსური ქმედება. ამრიგად, კლასიკურ მოდელში ჩვეულებრივი ქმედების შესაბამის ენერგიის არეებში ენერგიის საკუთრივი მნიშვნელობების განაწილებასა და ქაოსური ქმედების შესაბამის

ენერგეტიკულ დიაპაზონებში ენერჯის საკუთრივი მნიშვნელობების დაშორებათა განაწილებებს შორის მსგავსება თვალსაჩინოა.

პირველ რიგში უნდა აღინიშნოს, რომ ენერჯის საკვლევი დიაპაზონები არ შეესაბამება სისტემის უმცირეს ენერგეტიკულ მდგომარეობებს, როგორც ეს კვანტურ მექანიკაში გვაქვს. მრავალ სისტემაში ენერჯის ასეთ ღონეებს ჩვეულებრივი განაწილება გააჩნიათ და მათგან სიურპრიზებს არ ველოთ. განვიხილოთ აგზნებული მდგომარეობები, როდესაც ენერჯები სისტემის ენერჯის უმცირეს შესაძლო მნიშვნელობებს ბევრად აღემატება. ასეთ შემთხვევებში ენერჯის საკუთრივი მნიშვნელობების დაშორებათა განაწილებას გამოკვეთილი სახიათი არ გააჩნია (როგორც 12.1 ნახაზზეა ნაჩვენები). მაშინ ჩნდება შეკითხვა: როგორი იქნება ენერჯის მოცემულ დიაპაზონში მყოფ თანმიმდევრულ საკუთრივ მნიშვნელობებს შორის არსებული ენერგეტიკული ინტერვალების განაწილება? ვარაუდობენ, რომ (კლასიკური) ჩვეულებრივი და (კლასიკური) ქაოსური მოძრაობების შემთხვევებში განაწილებები ერთიმეორისგან მკვეთრად განსხვავებული იქნება. ჩვეულებრივი მოძრაობის შესაბამის არეებში კვანტური ენერჯის მნიშვნელობათა ინტერვალები პუასონის განაწილებით აღიწერება, ხოლო ქაოსური ქმედების არეებში ე.წ. ვიგნერის ტიპის განაწილება გვაქვს (JOS88, IZR90). ორივე ტიპის განაწილება 12.4 ნახაზზეა ნაჩვენები.

განაწილებებს შორის სხვაობას ადვილად შევამჩნევთ, თუ გავითვალისწინებთ სისტემის კლასიკურ მოდელში ჩვეულებრივ და ქაოსურ ქმედებას შორის განსხვავებას. როდესაც კლასიკური სისტემის ქმედება რეგულარულია (ან კვაზიპერიოდულია), მაშინ მე-8 თავის თანახმად, კლასიკური ფაზური სივრცის თვისებებს მეტწილად KAM ზედაპირები განსაზღვრავს. კვანტურ მექანიკაში ნებისმიერი KAM ზედაპირი მასზე სისტემის მოძრაობასთან ერთად მუდმივი ასოცირებული კვანტური რიცხვების სიმრავლით ხასიათდება.



ნახ. 12.4. პუასონისა და ვიგნერის განაწილებები ენერგეტიკული ღონეების დაშორებებისათვის.

ამრიგად, ენერჯის საკუთრივი მნიშვნელობები კვანტური რიცხვების მიმდევრობის საშუალებით არის მოცემული. საკუთრივ მნიშვნელობათა მიღებული მიმდევრობა, სხვების ფიქსირებულ მდგომარეობაში დარჩენის ფონზე, თითოეული კვანტური რიცხვის ცვლილებით მიღებული მიმდევრობების „ნაზავია“. ამგვარი ნაზავი ენერჯის საკუთრივი მნიშვნელობების განაწილების (რომელშიც ყველაზე სანდო ინტერვალი უმცირესია) წინაპირობაა.

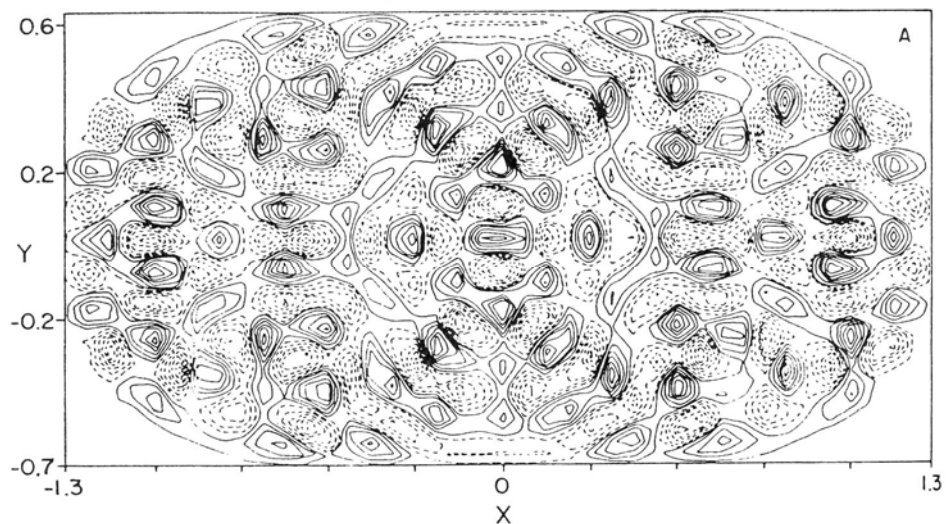
კლასიკური სისტემის ქაოსში გადასვლისას იგი არაინტეგრებადი ხდება (უკიდურეს შემთხვევაში, მას ენერჯის გარდა სხვა ინტეგრალები არ გააჩნია) და ტრაექტორია მდგომარეობათა სივრცეში „ხეტიალს: იწყებს. ასეთ შემთხვევაში თავისუფლების ხარისხები ერთმანეთთან „ურთიერთქმედებას იწყებენ“ და მათი მოქმედების ეფექტი ძლიერ კორელაციაშია ენერჯის საკუთრივ მნიშვნელობებთან (ინტეგრირებად შემთხვევაში ვამბობთ, რომ თავისუფლების ხარისხები დამოუკიდებელია). საბოლოო ჯამში, ნაკლებად მოსალოდნელია, რომ ენერჯის საკუთრივი მნიშვნელობები ერთმანეთის ახლოს იყვნენ განლაგებული (ვამბობთ, რომ სახეზეა „ენერგეტიკულ დონეებს შორის განზიდვა“. კვანტური მდგომარეობების ზოგადი თვისება თავისუფლების ურთიერთქმედი ხარისხების შესაბამის ენერგეტიკულ დონეთა მიერ ურთიერთგანზიდვის ტენდენციაა ანუ ურთიერთქმედებასთან ერთად ენერჯის დონები შედარებით დაშორებულ მდგომარეობაშია, ვიდრე ისინი ამ ურთიერთქმედების არარსებობის შემთხვევაში იქნებოდნენ). ამრიგად, ენერგეტიკულ დონეთა დაშორებების განაწილება ვიგნერის ტიპის განაწილების მსგავსად გამოიყურება.

მოყვანილი არგუმენტები სინამდვილეში მხოლოდ ინტეგრებადობისა და სრული არაინტეგრებადობის უკიდურეს შემთხვევებს მიესადაგება. ამგვარად, უნდა არსებობდეს შუალედური შემთხვევებიც, მეტიც, კვლევებმა გამოავლინეს ისეთი შემთხვევები, როდესაც კლასიკური ინტეგრებადი სისტემების კვანტური ანალოგიები ენერგეტიკულ დონეთა დაშორებების პუასონისეულ განაწილებას არ გვიჩვენებს (CCG85), როდესაც კლასიკურად არაინტეგრირებადი სისტემების კვანტური ანალოგიები ენერგეტიკულ დონეთა დაშორებები ვიგნერის ტიპის განაწილებით არ ხასიათდება (ZDD95) და კლასიკურად არაქაოსური სისტემების ენერგეტიკულ დონეთა დაშორებების განაწილება ვიგნერის ტიპის განაწილებასთან ახლოსაა. ამრიგად, ენერგეტიკულ დონეთა დაშორებების განაწილების კვლევა ქაოსის კვანტური ანალოგიის საძიებლად არ გამოგადგება. ნებისმიერ შემთხვევაში, ენერგეტიკულ დონეთა გამოთვლა თავისუფლების მხოლოდ მცირე რაოდენობით ხარისხების მქონე სისტემებისა შესაძლებელია.

კორელაციები ტალღურ ფუნქციებში

ტალღური ფუნქციების სივრცითი კორელაციების კვლევას ვაწარმოებთ ისეთი სისტემებისთვის, რომელთა კლასიკური ანალოგი ქაოსურ ქმედებას გვიჩვენებს. როდესაც კლასიკური სისტემის ქმედება ქაოსურია, მასთან დაკავშირებული მდგომარეობათა სივრცის ალბათობების განაწილება ხშირ შემთხვევაში მდგომარეობათა სივრცის მიმზიდველის ფრაქტალურ გეომეტრიას ასახავს. კვანტურ-მექანიკური ტალღური ფუნქციების შემთხვევაში, არასიმეტრიულად წაგრძელებული ფორმების განვითარების მოლოდინში ვართ იმ პარამეტრული დიაპაზონებისთვის, სადაც შესაბამისი კლასიკური მოდელი ქაოსურ ქმედებას ავლენს.

ტალღურ ფუნქციაში „შემთხვევითობის“ ხარისხი, მე-10 თავში აღწერილი დროში ავტოკორელაციური ფუნქციების განსაზღვრის ანალოგიურად, სივრცითი კორელაციური ფუნქციის სახით შეიძლება ჩაიწეროს. 12.5 ნახაზი გვიჩვენებს ტალღური ფუნქციის კონტურულ მრუდს ბილიარდის კვანტური სისტემისთვის ენერჯის იმ დიაპაზონში, რომლის შესაბამისი კლასიკური სისტემა ქაოსურია (მე-8 თავიდან გავიხსენოთ, რომ ბილიარდის მოდელი ორ განზომილებაში თავისუფლად გადაადგილებადი ნაწილაკისაგან შედგება). ჩვენ შემთხვევაში მცირე სივრცითი კორელაციის მქონე ტალღური ფუნქციის არსებობა აუცილებელია, მაგრამ საკმარისი არ არის იმ მოვლენისთვის, რასაც ჩვენ ქაოსური ქმედება გვინდა ვუწოდოთ.



ნახ. 12.5. კვანტურ-მექანიკური ტალღური ფუნქციის კონტურული მრუდი ბილიარდის ტიპის კვანტური სისტემისთვის, რომლის კლასიკური ანალოგი ქაოსურ ქმედებას ავლენს. მსხვილი ხაზები ტალღური ფუნქციის დადებით მნიშვნელობებს, ხოლო წყვეტილი ხაზები

უარყოფით მნიშვნელობებს შეესაბამება. არასიმეტრიული ფორმა კვანტური ქმედების ქაოსური ტრაექტორიების ანალოგიის დემონსტრაციის მიზნით არის მოყვანილი (SHG84). ამგვარად, კვლავ მხოლოდ ნაწილობრივი განსაზღვრების ამარა ვრჩებით.

არასიმეტრიული საკუთრივი ფუნქციები ფრაქტალური განზომილებებით შეიძლება ხასიათდებოდეს. KKK97-მა დაამტკიცა, რომ მე-9 თავში წარმოდგენილი განზოგადებული D_2 განზომილება კვანტური სისტემის ენერჯის დონის სპექტრისა და ენერჯის საკუთრივი ფუნქციების დახასიათებისთვის შეიძლება გამოვიყენოთ. მეცნიერები ვარაუდობენ, რომ ორი განზომილების ფარდობა ტალღური პაკეტების გავრცელების სიჩქარეს უნდა აკონტროლებდეს.

ქაოსი და ნახევრად კლასიკური მიდგომა კვანტური მექანიკის მიმართ

კვანტური ქაოსთან დაკავშირებული ალბათობების კვლევამ კვანტური და კლასიკური მექანიკის ნახევრისათვის გამოთვლითი მეთოდების დანერგვისადმი მზარდი ინტერესი გამოიწვია. მრავალი სისტემისთვის შრედინგერის განტოლების მიხედვით ტალღური ფუნქციის გამოთვლა არა პრაქტიკულია. ამავე დროს, ნაკლებად პრობლემატური ტალღური ფუნქციების შესწავლა კლასიკური მექანიკიდან ნასესხები იდეების მეშვეობით არის შესაძლებელი. ამრიგად, მოცემული მეთოდი კლასიკურ და კვანტურ იდეებს აერთიანებს, რაც სახელწოდების ანუ ნახევრადკლასიკური მეთოდის განმსაზღვრელია.

მეთოდზე გარკვეული წარმოდგენის შექმნის მიზნით გამოვიყენოთ ნახევრად კლასიკური მეთოდის ერთ-ერთ ტიპს: კლასიკურ მექანიკაში შესაძლებელია ე.წ. ჰამილტონის მახასიათებელი $S(q)$ ფუნქცია ისე განისაზღვროს, რომ q განზოგადებულ კოორდინატთან დაკავშირებული იმპულსს ჰქონდეს შემდეგი სახე:

$$p(q) = \frac{\partial S(q)}{\partial q} \tag{12.2-10}$$

(სიმარტივისთვის მსჯელობა ერთ სივრცით განზომილებამდე დაგვყავს) 12.2.10 გვაუწყებს, რომ ტრაექტორიები მუდმივი S -ის მრუდებისადმი პერპენდიკულარულია. პროცედურას მთლიანად შევცვლით, თუ $S(q)$ -ს ნაწილაკის მთლიან ტრაექტორიაზე წრფივი იმპულსის ინტეგრალის სახით გამოვსახავთ:

$$S(q, q_0) = \int_{q_0}^q p(q') dq' \quad (12.2-11)$$

სადაც S სიდიდე როგორც ტრაექტორიის საწყის წერტილზე, ასევე საბოლოო წერტილზე იქნება დამოკიდებული. თუ მას პერიოდული ორბიტისათვის გამოვთვლით, მაშინ იგი ორბიტასთან დაკავშირებული კლასიკური ქმედებისადმი პროპორციული იქნება.

აღრეულ კვანტურ თეორიაში (შრედინგერის განტოლების მიღებამდე) სისტემების დახასიათება „კვანტირებული“ იყო პლანკის h მუდმივას მთელი ჯერადის ტოლი ქმედების დადგენის გზით. ეს ე.წ. აინშტაინ-ბრიუნ-კელერის მეთოდი მხოლოდ იმ ტიპის ქმედებებს აღიარებდა, რომლებიც დასაშვებ ორბიტებს შეესაბამებოდა. მეცნიერები მალე მიხვდნენ (EIN17), რომ ეს პროცედურა ძალას კარგავს არაინტეგრირებადი კლასიკური სისტემებისთვის, რომელთაც ჩაკეტილი ორბიტები არ გააჩნიათ.

როდესაც ცნობილია დახასიათებული ფუნქცია, E ენერჯიის ცვლილებასთან ერთად $S(q)$ -ს ცვლილების ხასიათის დადგენის მეშვეობით კლასიკური ორბიტის T პერიოდის განსაზღვრასაც შეუძლებთ:

$$T = \frac{\partial S(q)}{\partial E} \quad (12.2-12)$$

ახლა ვნახოთ, თუ როგორ უნდა გამოვიყენოთ $S(q)$ სიდიდე კვანტურ-მექანიკური ტალღური ფუნქციის მიახლოებითი ფორმის მისაღებად. კვანტურ მექანიკაში p იმპულსის განსაზღვრული მნიშვნელობის მქონე ნაწილაკისთვის ტალღურ ფუნქციას შემდეგი ფორმა გააჩნია:

$$\Psi(q) = A e^{i \frac{2\pi pq}{h}} \quad (12.2-13)$$

თუ ნაწილაკი რაიმე ძალის ზემოქმედების ქვეშ მოექცა, მაშინ მისი იმპულსი შეიცვლება და ტალღური ფუნქციის ნახევრადკლასიკური ფორმა ასეთი იქნება:

$$\Psi(q) = A(q) e^{i \frac{2\pi S(q)}{h}} \quad (12.2-14)$$

სადაც $S(q)$ ქმედება 12.2.11 ინტეგრალური ფორმით არის მოცემული. როდესაც ინტეგრალი აღებულია კლასიკური ტრაექტორიის გასწვრივ, გვაქვს ტალღურ ფუნქციასთან ნახევრადკლასიკური მიახლოება. ამ შემთხვევაში S მუდმივას მრუდები კვანტურ-მექანიკური ტალღების „ტალღური ფრონტები“, ვინაიდან ტალღური ფრონტი მუდმივი ფაზის მრუდია.

როდესაც კლასიკური მოძრაობა ატარებს რეგულარულ ხასიათს, მაშინ თითოეული კვანტური მდგომარეობა კორელაციაშია კვანტირებული ქმედების ცალკეული მნიშვნელობის მქონე კლასიკურ ტრაექტორიასთან (მაგალითად, წყალბადის ატომის ბორის და ბორ-ზომერფელდის მოდელებში შესაბამისად წრიული და ელიფსური ორბიტები). ახლომდებარე ორბიტები ერთიმეორეს „მიჰყვება“ და $S(q)$ -ით წარმოდგენილი ტალღური ფრონტი გლუვია. როდესაც კლასიკური მოძრაობა ქაოსურია, ქაოსური ტრაექტორიები ($grad S(q)$) არ წარმოქმნის ვექტორულ ველს, რომლის მიხედვით შესაძლებელია ტალღური ფუნქციის აგება.

როგორ უნდა მოვიქცეთ ქაოსურ შემთხვევაში? გუცვილერმა (GUT71, BER89) შესაბამისი კვანტური პრობლემისთვის ე.წ. გრინის ფუნქციის დასადგენად კლასიკური სისტემის პერიოდული ორბიტების თვისებებზე დამყარებული მეთოდი შექმნა (გრინის ფუნქცია ისეთი მათემატიკური ფუნქციაა, რომელიც ტალღური ფუნქციის ევოლუციის დადგენის საშუალებას გვაძლევს). გუცვილერის მეთოდის გამოყენება კლასიკური ქაოსური სისტემების მიმართაც არის შესაძლებელი.

კვანტურ ქაოსთან დაკავშირებული ექსპერიმენტები

კვანტური ქაოსის შესახებ მსჯელობისას ყურადღებას თეორიულ მოდელებსა და საკითხებზე ვამახვილებთ. რას გვამცნობს ექსპერიმენტები კვანტური ქაოსის შესახებ? მოკლე პასუხი იმაში მდგომარეობს, რომ ქაოსური ქმედების მომცველ სისტემებზე ჩატარებული ნებისმიერი ექსპერიმენტის შედეგი კვანტური მექანიკის პროგნოზებთან თანხმობაშია ანუ კვანტური მექანიკა არ ირღვევა, როდესაც კლასიკური ანალოგია ქაოსურ ქმედებას ამჟღავნებს. მოკლედ აღვწეროთ რამდენიმე ექსპერიმენტი.

თუ ერთი ელექტრონის მქონე ატომი ძლიერ მაგნიტურ ველში მდებარეობს, მაშინ კლასიკური მექანიკით აღწერილი სისტემის დინამიკა არაინტეგრებადია და საკმარისად მაღალი ენერგიების ან ძლიერი მაგნიტური ველების შემთხვევაში ქაოსურ ქმედებას ამჟღავნებს. საბედნიეროდ, ეს არის სისტემა, რომლის მიმართ კვანტურ მექანიკას ზუსტი ექსპერიმენტების მეშვეობით კვლევა (IWK91) და პროგნოზირება შეუძლია (DBG91). ამრიგად, კვანტური მექანიკის თეორიულ პროგნოზებსა და ექსპერიმენტებს შორის თანხმობა

მაღალ დონეზეა, მაგრამ გამოკვლეული კანონზომიერებების ფიზიკურ ინტერპრეტაციასთან და გაგებასთან დაკავშირებით წინ ჯერ კიდევ დიდი სამუშაოა.

ექსპერიმენტების მეორე კატეგორიაში მაღალ ენერგეტიკულ მდგომარეობებამდე აგზნებული წყალბადის ატომები იონიზებულია მიკროტალღურ სინშირეებზე ვიბრირებადი ინტენსიური ელექტრული ველის ზემოქმედების გზით. ვიბრირებადი ველი სისტემისთვის ჰამილტონის დროისგან დამოუკიდებელ ფუნქციას იძლევა და ქაოსური ქმედებისთვის საჭირო თავისუფლების უკიდურეს ხარისხს უზრუნველყოფს. ექსპერიმენტის შედეგები კვანტური მექანიკის თეორიულ პროგნოზებთან კვლავ თანხმობაშია. როგორც თეორიული, ასევე ექსპერიმენტული შედეგების გაცნობის მიზნით იხილეთ JSS91.

კლასიკურ ქაოსსა და კვანტურ მექანიკას შორის კიდევ ერთი წინააღმდეგობა ლაზერებისა და ატომების ურთიერთქმედებისას ვლინდება. თუ ვაკუუმში მოძრავი ატომების ნაკადი ლაზერული სხივის ურთიერთქმედებას განიცდის, მაშინ ატომებს ფოტონების გამოსხივებისა და შთანთქმის უნარი გააჩნიათ. როდესაც ატომი ფოტონს შთანთქავს, იგი ფოტონისაგან როგორც იმპულსს, ისე შინაგან ენერგიას ღებულობს. როდესაც ატომი ფოტონს ასხივებს, იგი უკუცემას განიცდის. ინტენსიურ ლაზერულ გამოსხივებასთან ურთიერთქმედების შედეგად ატომთა იმპულსები თანდათანობით იზრდება. ამ პროცესის კლასიკურ-მექანიკური დახასიათების თანახმად, იმპულსის „დიფუზია“ ქაოსური ქმედების შედეგია. კვანტური მექანიკის თანახმად, იმპულსის ზრდა შეზღუდულია (**დინამიკური ლოკალიზაციის** ეფექტი). (MRB94, RBM95) ექსპერიმენტები გვაუწყებს, რომ კვანტური მექანიკა კლასიკური ქმედების ქაოსურობის შემთხვევაშიც კი სწორ აღწერას იძლევა. LAW95 ვარაუდობს, რომ ლოკალიზაციის ახსნისთვის კლასიკური არაწრფივი დინამიკა საკმარისია და გამოკვლეული ეფექტები დინამიკური ლოკალიზაციის მაგალითები არ არის. ექსპერიმენტებისა და დასკვნების საფუძვლიანი განხილვიდან გამომდინარე შედეგების მისაღებად იხილეთ RAI99.

დასკვნები

კვანტურ ქაოსს (თუკი ასეთი რამ საერთოდ არსებობს) მაკროსკოპული სისტემების ქაოსურ ქმედებასა და კვანტური მექანიკის ალბათობებს შორის კავშირის საკითხი მთელი მსოფლიოს ლაბორატორიებში ყოველდღიურად შეისწავლება, თუმცა ასეთი კავშირების აღმოჩენამდე ჯერ კიდევ შორს ვართ. აღიარებულ მეცნიერებს კვანტურ ქაოსთან დაკავშირებით განსხვავებული შეხედულებები აქვთ. ჩვენ გვჯერა, რომ საბოლოოდ დავადგენთ, თუ როგორ მიესადაგება კვანტური მექანიკის პროგნოზი კლასიკურ ქაოსს. ამ

პრობლემის გადაჭრას შეიძლება ასპირანტის ნახევარი ცხოვრება ან სულაც ერთი საუკუნე დასჭირდეს. სავარაუდოდ, კვანტურ და კლასიკურ მექანიკას შორის არსებული “უხილავი ძაფების” შესახებ ბევრი რამ შეგვიძლია შევიტყოთ.

12.3 ქაოსი და ალგორითმული კომპლექსურობა

ჩვენგანთა უმეტესობა მატერიაზე ფიქრისას დინამიკურ ქმედებას ორ განსხვავებულ კატეგორიად ჰყოფს: (1) ჩვეულებრივი, პერიოდული და აქედან გამომდინარე, განსაზღვრავს დაქვემდებარებული ქმედება და (2) შემთხვევითი (განუსაზღვრელი) ქმედება. არაწრფივი დინამიკის თანახმად, ქმედების მესამე სახეობაც არსებობს და მას ქაოსური ეწოდება. გაგვაჩნია ქაოსური ქმედების ევოლუციის დეტერმინიზების წესები, თუმცა არსებობს თავისუფლების რეალური ხარისხების რაოდენობის მიახლოებით განსაზღვრის საშუალების მომცემი ანალიზური მეთოდებიც და, ამრიგად, თავისუფლების ხარისხების მცირე რაოდენობის შემცველ ქაოსურ ქმედებასა და თავისუფლების ხარისხების უსასრულო (ან ძალზე დიდი) ხარისხების რაოდენობით დახასიათებულ “ჭეშმარიტ” შემთხვევითობას შორის პარალელის გავლება შეგვიძლია.

დინამიკური ქმედების შუალედური ტიპის დადგენა იძლევა ამგვარი ქმედების კომპლექსურობის გაზომვის შესაძლებლობას. იგი მუდმივად ცირკულირებს თავისუფლების ხარისხების მცირე რაოდენობის მქონე დეტერმინისტული ქაოსური ქმედებით მიღებულ მარტივ პერიოდულ მოძრაობასა და სრულ შემთხვევითობას შორის. ჩვენ კომპლექსურობის რიცხვითი სახით წარმოდგენის ერთ-ერთ ასეთ სქემას აღვწერთ.

მე-5 თავში ვიხილეთ, თუ როგორ შეიძლება იტერაციული ასახვების (და ზოგჯერ სხვა დინამიკური სისტემების) დინამიკის სიმბოლურ დინამიკაზე დაყვანა R და L სიმბოლოებით ან ერთიანებისა და ნულების მეშვეობით. კომპლექსურობის ერთ-ერთი საზომი სიმბოლოების ამგვარ მიმდევრობაზე ამახვილებს ყურადღებას და მიმდევრობის **ალგორითმულ კომპლექსურობას** მიმდევრობის ამსახველი უმცირესი კომპიუტერული პროგრამის (ალგორითმის) სიგრძის მიხედვით (ბიტებში) ზომავს. მაგალითად, პერიოდული მიმდევრობის ალგორითმული კომპლექსურობა საკმაოდ მცირეა, რადგან ჩვენ მხოლოდ იტერაციული სიმბოლოების განმეორებადი ნიშან-თვისების განსაზღვრა და მისი განმეორების დადგენა გვესაჭიროება. მეორე მხრივ, სრულიად შემთხვევითი ქმედების შემთხვევაში საჭიროა იმდენი ალგორითმი, რამდენ წევრსაც მიმდევრობა შეიცავს.

რაში მდგომარეობს ქაოსური სისტემით განსაზღვრული სიმბოლოების მიმდევრობის ალგორითმული კომპლექსურობა? სავარაუდოდ, ქაოსური სისტემის შესაბამის სიმბოლოთა ისეთ მიმდევრობას, როგორცაა ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქცია $A = A_{\infty}$ მნიშვნელობის შემთხვევაში, ექნება შუალედური ალგორითმული კომპლექსურობა ანუ მხოლოდ ზომიერი კომპიუტერული პროგრამა შეძლებს ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციის იტერაციას. ბერნულის გადაადგილების ასახვისთვის მოკლე პროგრამაა საკმარისი, რომელიც ბიტების მიმდევრობას ერთი პოზიციით მარცხნივ წანაცვლებს.

ამ პროცედურის გამოყენებისას სიფრთხილე გვმართებს, რადგან კონკრეტული მიმდევრობის შექმნისთვის საწყისი მნიშვნელობის (ვთქვათ x_0 -ის) განსაზღვრაც გვესაჭიროება. მეტი კონკრეტულობისთვის დავუშვათ, რომ $A=4$ მნიშვნელობაზე ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციის ათი იტერაციის მიხედვით ბიტების მიმდევრობის გამოსახვის სურვილი გვამოძრავებს. მე-5 თავში ვიხილეთ, რომ $A=4$ მნიშვნელობისათვის ლოჯისტიკური ასახვა ექვივალენტურია ბერნულის წანაცვლების ასახვისა, ამიტომ ლოჯისტიკური ასახვის შესაბამისი თითოეული იტერაცია ბიტების მიმდევრობის ერთი პოზიციით მარცხნივ წანაცვლების ტოლფასია.

ვთქვათ, თითოეული იტერაციის დროს ერთ ბიტს ბინარული წერტილის მარჯვნივ ვწერთ. ამრიგად, 100 ბიტისგან შემდგარი მიმდევრობის შექმნისათვის x_0 -ის 100 ბიტის მეშვეობით წარმოდგენა დაგვჭირდება. სხვაგვარად ახლომდებარე ტრაექტორიების ექსპონენციალური დივერგენცია x -ის საბოლოო მნიშვნელობის სასურველისაგან განსხვავებას გამოიწვევს. აქედან გამომდინარე, საჭიროა მთლიანი მიმდევრობის განსაზღვრა და სახეზეა მაღალი ალგორითმული კომპლექსურობა. ქაოსური სისტემის მიერ წარმოქმნილი რიცხვების მიმდევრობა შემთხვევითი რიცხვების მიმდევრობის ექვივალენტურია.

ალგორითმული კომპლექსურობის მარტივი წარმოდგენა თითქოსდა სრული არ არის. ქაოსური სისტემის მიერ წარმოქმნილი რიცხვების მიმდევრობის შემთხვევაში ძირითადი დეტერმინისტული ალგორითმის გამოსახვა $(n+1)$ რიგის იტერაციის, როგორც n -რიგის იტერაციის ფუნქციის, გრაფიკის აგების გზით არის შესაძლებელი. ზოგჯერ ეს პროცედურა უფრო მეტი განზომილების მქონე სისტემებისთვისაც შეგვიძლია განვახორციელოთ.

დეტერმინიზმზე ტესტის ჩატარება მიმდევრობაზე უშუალო დაკვირვებითაც შესაძლებელია. როდესაც რიცხვები განსაზღვრულია გარკვეული ზღვრული სიზუსტით, მიმდევრობა საბოლოოდ რომელიმე განსაზღვრულ რიცხვს უბრუნდება. ასეთ შემთხვევაში ჩნდება შეკითხვა, ემთხვევა თუ არა მიმდევრობაში მდგომი შემდეგი რიცხვი იმ რიცხვს, რომელიც დაკავშირებულია ჩვენ მიერ განსაზღვრული რიცხვის პირველ გამოვლინებასთან. თუ დამთხვევას არ ექნება ადგილი, მაშინ გვეცოდინება, რომ ჩვენ წინაშე არ არის

ერთგანზომილებიანი იტერაციულ ასახვათა მიმდევრობა. თუ მიმდევრობა ორი (ან მეტი) განზომილების მქონე ასახვის ფუნქციის მეშვეობითაა მიღებული, მაშინ დეტერმინიზმის შესამოწმებლად მიმდევრობის ორი (ან მეტი) რიცხვის განმეორებაზე დაკვირვება დაგვჭირდება. განზომილებების შესაძლო რაოდენობის ზრდასთან ერთად თვალშისაცემია დეტერმინიზმის ტესტირებასთან დაკავშირებული სირთულეების აშკარა მატება. ამის პარალელურად, მე-10 თავში განხილული ჩადგმის სქემები მცირე განზომილების მქონე სისტემების შემთხვევაში მაინც განზომილებების რაოდენობასთან დაკავშირებულ გარკვეულ მინიშნებას გვაძლევს და ამგვარად „ჭეშმარიტ“ შემთხვევითობას დეტერმინისტული ქაოსისგან გამოარჩევს. „ჭეშმარიტ“ შემთხვევითობასა და მაღალგანზომილებიან დეტერმინისტულ ქაოსს შორის დიდი სხვაობა პრაქტიკულად არც არსებობს.

ამრიგად, ალბათ ნაადრევა იმის თქმა, რომ შემთხვევითობა დეტერმინისტული ქაოსის გამოხატულებაა ან შემთხვევითობის ყველანაირი ფორმის მომცველ ქაოსს უტოლდება (ამ მოსაზრებების დამამტკიცებელი საფუძვლიანი არგუმენტებისთვის იხილეთ FOR89). ალგორითმული კომპლექსურობის ან სხვა რომელიმე სქემის მიხედვით განსაზღვრულ დეტერმინისტულ ქაოსსა (მცირეგანზომილებიანი სისტემების შემთხვევაში მაინც) და „ჭეშმარიტ“ შემთხვევითობას შორის განსასხვავებელი გარემოებების შენარჩუნება არაპრაქტიკული თუ არა, ევრისტიკული მაინცაა.

ჟ. ფორდი (FOR89) აცხადებს, რომ ალგორითმული კომპლექსურობა უზრუნველყოფს შემთხვევითობის (რასაც იგი ქაოსურ ქმედებასთან აიგივებს) განსაზღვრას, რაც კვანტურ მექანიკაში ქაოსის არსებობა-არარსებობის ტესტის ჩასატარებლად გამოგვადგება. თუ კვანტურ მექანიკაში ეს ტესტი „ჩავარდება“, მაშინ ფორდის თანახმად, კვანტური მექანიკის მოდიფიკაცია დაგვჭირდება, რადგან ვიცით, რომ ბუნებაში არსებობს ქაოსური სისტემები. უნდა აღინიშნოს, რომ არსებობს სხვა შესაძლებლობებიც და ალგორითმული კომპლექსურობა ვერ უზრუნველყოფს ქაოსური ქმედების სათანადო სახით განსაზღვრას. გარდა ამისა, კვანტური მექანიკა, სავარაუდოდ, სათანადოდ გამოიკვლევს მაღალი ალგორითმული კომპლექსურობის მქონე ქმედებას.

12.4 სხვადასხვა საკითხები: უბან-უბან წრფივი და დროში წანაცვლების მოდელები, ინფორმაციული თეორია, სტოქასტიკური რეზონანსი, კომპიუტერული ქსელები, ქაოსის კონტროლი და ქაოსის სინქრონიზაცია

მოცემულ პარაგრაფში განვიხილავთ რამდენიმე საკითხს, რომლებიც კურსის ფარგლებში ხშირად არ შეგვხვედრია. ეს საკითხები არაწრფივ დინამიკასთან დაკავშირებულ არაერთ საინტერესო ასპექტს შეეხება და ამიტომ გარკვეულ ყურადღებას იმსახურებს.

პირველი ორი საკითხი არაწრფივ დინამიკაში ფართოდ გავრცელებული მოდელის ორ კლასს ეხება. მათი მათემატიკური თვისებები ჩვენ მიერ ზემოთ განხილული მოდელების თვისებებისგან საკმაოდ განსხვავდება და ამიტომ გარკვეულ კომენტარებს საჭიროებს.

უბან-უბან წრფივი სისტემები

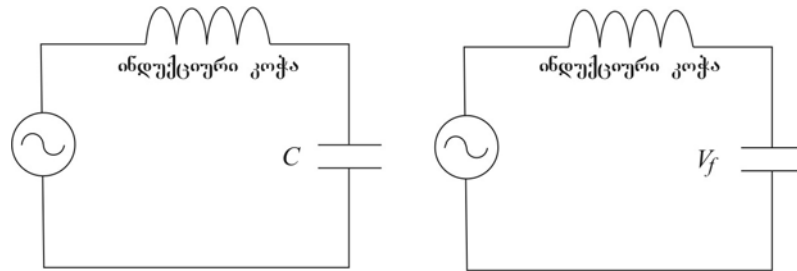
სიხშირეთა სინქრონიზაციის, ქაოსური ქმედებისა და სხვა საინტერესო ეფექტების კვლევისას ყურადღებას ვამახვილებთ არაწრფივი დინამიკური განტოლებების არსებობის აუცილებლობაზე. არსებობს მოდელთა კლასი, რომელიც არაწრფივი სისტემების მოდელირებისთვის იყენებს წრფივ დიფერენციალურ განტოლებებს. ამ ერთი შეხედვით წრფივი მოდელებიდან გამომდინარე, რა პირობებში გვექნება არაწრფივი ეფექტები? ასეთ მოდელებს უბან-უბან წრფივი ეწოდება, რადგან დროის გარკვეულ ინტერვალებში სისტემის ევოლუციას აღწერს წრფივი განტოლებები. მოცემული ინტერვალის დასრულებისას მოდელი სხვა წრფივ განტოლებებზე „გადაერთდება“. ეს პროცესი არაწრფივი ელემენტების ჩართვასაც გულისხმობს.

უბან-უბან წრფივი მოდელის გამოყენების უპირატესობა გადასვლებს შორის არსებულ ინტერვალში ცალსახა ამონახსნის დადგენის შესაძლებლობაში მდგომარეობს. გადასვლისას საძიებელ ფიზიკურ სიდიდეთა მნიშვნელობებს ერთმანეთთან ვატოლებთ (რათა არ მოხდეს მათი ნახტომისებრი ცვლილება). გადასვლის შემდეგ ახალი წრფივი განტოლებების მეშვეობით დინამიკის შესწავლას ზუსტად შემდეგ გადასვლამდე შევძლებთ. უბან-უბან წრფივმა მოდელებმა ფართო გამოყენება ჰპოვეს არაწრფივი სისტემების მოდელირების ტექნიკაში.

უბან-უბან წრფივი მოდელის სახით განვიხილოთ პირველ თავში წარმოდგენილი ნახევარგამტარული დიოდის წრედის აღწერისთვის გამოყენებული მოდელი (ROH82). როდესაც დიოდში პირდაპირი მიმართულების პოტენციალი ფიქსირებულ V_f მნიშვნელობას მიაღწევს, დიოდი ფიქსირებული V_f ძაბვის (ემძ) წყარო გახდება. როდესაც დიოდში გამავალი პირდაპირი დენის ძალა ნულამდე ეცემა, დიოდი გატარებას განაგრძობს ე.წ. „აღდგენის τ

დროის“ განმავლობაში, რომელიც დამოკიდებულია დენის ძალის უახლოეს მაქსიმალურ მნიშვნელობაზე. აღდგენის დროის დასრულების შემდეგ ნახევარგამტარული დიოდი უკვე ფიქსირებული კონდენსატორია. წრედის ორი მოდელი 12.6 ნახაზზეა ნაჩვენები.

ცვლადი დენის წრედის ანალიზის გამოყენებით შევძლებთ მოდელების შესაბამისი განტოლებების ამოხსნას გადასვლებს შორის არსებულ დროის ინტერვალებში. არაწრფივობა აღდგენის დროის მეშვეობით იმიტომ არის წარმოდგენილი, რომ გადასვლის ზუსტი დრო დიოდში გამავალი დენის წინა ისტორიაზეა დამოკიდებული.



ნახ. 12.6. წრედის ორი მოდელი პირველ თავში წარმოდგენილი ნახევარგამტარული დიოდის უბან-უბან წრფივი დახასიათებისთვის. დიოდი ფიქსირებული C მნიშვნელობის მქონე კონდენსატორია, გარდა იმ შემთხვევისა, როდესაც მისი პირდაპირი გატარების პოტენციალთა სხვაობა V_f -ს აღწევს. მოდელი ამ დროს დიოდისთვის V_f -ის ტოლ ფიქსირებულ პოტენციალთა სხვაობაზე გადადის. წრე აღნიშნავს ემპ-ს სინუსოიდური სიგნალის გენერატორს.

მოდელის უკუაღდგენის დროის ოდნავ მოდიფიცირებასთან ერთად ნახევარგამტარული დიოდის უბან-უბან წრფივ მოდელს მაღალგანზომილებიანი ქმედების ახსნაც შეუძლია (HUR84). განსხვავებული ტიპის უბან-უბან წრფივი მოდელი (პირდაპირი ან უკუგამტარობის დიოდი განსხვავებული ფიქსირებული ტევადობით) ასევე ავლენს ქაოსურ ეფექტებს (MCT84).

განვიხილოთ უფრო ზოგადი სახით უბან-უბან წრფივი მოდელები. კონკრეტულად შევეხებით მდგომარეობათა სივრცის ორი განზომილებისა და x_1 და x_2 ცვლადების შესაბამის მოდელს. წრფივი სისტემისთვის მდგომარეობათა სივრცის ევოლუცია ჩვენთვის კარგად ნაცნობი განტოლებებითაა მოცემული:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_{11}x_1 + f_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_{21}x_1 + f_{22}x_2 \end{aligned} \tag{12.4-1}$$

სადაც f -ები მუდმივი პარამეტრებია. უბან-უბან წრფივი მოდელი დროის გარკვეულ ინტერვალში გვიჩვენებს ამგვარ დინამიკას, ხოლო შემდეგ განტოლებათა სხვა სისტემაზე გადადის:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f'_{11}x_1 + f'_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= f'_{21}x_1 + f'_{22}x_2 \end{aligned} \quad (12.4-2)$$

f -ების ახალი მნიშვნელობებით. f -ებში თავს იჩენს წყვეტები, რამაც არაწრფივი ეფექტები შეიძლება გამოიწვიოს. ჩვენ გადასვლებს შორის არსებული დინამიკის ზუსტად მოდელირების შესაძლებლობა გვაქვს. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, შეგვიძლია ასახვის ფუნქციის პონა, რომელიც მდგომარეობათა სივრცის ცვლადებს ზუსტად ერთი გადასვლის შემდეგ მიანიჭებს მნიშვნელობებს.

ამ მეთოდის გამოყენების პრინციპის გაცნობის მიზნით დავუშვათ, რომ გადასვლა მაშინ ხდება, როდესაც x_1 და x_2 ცვლადები ღებულობს კონკრეტულ X_1 და X_2 მნიშვნელობებს. ასეთ პირობებში დროის მიმართ წარმოებულები გადასვლისას გვიჩვენებს წყვეტას. მაგალითად, \dot{x}_1 -სათვის გვექნება:

$$\dot{x}_{1\text{ after}} - \dot{x}_{1\text{ before}} = (f'_{11} - f_{11})X_1 + (f'_{12} - f_{12})X_2 \quad (12.4-3)$$

ანალოგიური განტოლება გვექნება \dot{x}_2 -სათვისაც.

გადასვლისას წარმოებულის ასეთი ცვლილება სისტემაზე მოქმედი იმპულსის „ძალის“ არსებობის ტოლფასია. ამრიგად, ჩვენ წინაშეა დროზე დამოკიდებული სისტემა, რომელიც მდგომარეობათ სივრცის კიდევ ერთ განზომილებას მოითხოვს. რადგან გადასვლის დრო ცვლადების „წარსულზე“ დამოკიდებული, საბოლოოდ არაწრფივ სისტემას ვღებულობთ. აქედან გამომდინარე, უბან-უბან წრფივი მოდელის ეს ტიპი ქაოსურ ქმედებასთან დაკავშირებით ჩვენ მოთხოვნებს აკმაყოფილებს.

უბან-უბან წრფივ სისტემებს ან, საზოგადოდ, უბან-უბან წრფივ გლუვ სისტემებს (რომლებისთვისაც ფაზურ სივრცეში შეიძლება არსებობდეს წერტილები, სადაც დინამიკის განმსაზღვრელი ფუნქციების წარმოებულები არ იქნება განსაზღვრული) შეუძლია ბიფურკაციათა ახალი ტიპები გამოამუღავნონ. ასეთ ბიფურკაციებში სისტემის პარამეტრის ცვლილებასთან ერთად ერთდროულად რამდენიმე მიმზიდველი შეიძლება წარმოიქმნას.

ჯერადი მიმზიდველების წარმოქმნა იმის ნიშანია, რომ სისტემა ხმაურთან დაკავშირებით მგრძობიარობას ამჟღავნებს და ჩვენ იმ მიმზიდველის პროგნოზირების საშუალებასაც კი ვკარგავთ, რომლის მიმართულებითაც სისტემა განიცდის ევოლუციას. ბიფურკაციის ამგვარი თეორია DNO99-შია განხილული.

დროში წანაცვლების დიფერენციალური განტოლების მოდელები

მოდელთა საინტერესო კლასისთვის დინამიკური განტოლებები მდგომარეობათა სივრცის ცვლადების წარმოებულებს იმ ფუნქციების სახით გვაძლევს, რომლებიც სისტემის არა მხოლოდ მიმდინარე t დროში არსებულ მდგომარეობაზე, არამედ შედარებით ადრეული $t - \tau$ მომენტის შესაბამის მდგომარეობაზე არიან დამოკიდებული, სადაც τ -ს სისტემის წანაცვლების დრო ეწოდება. ფორმალურად, მდგომარეობათა სივრცის ერთი ცვლადისთვის დროში დინამიკური შემდეგნაირი იქნება

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), x(t - \tau)) \tag{12.4-4}$$

დროში წანაცვლების დიფერენციალური მოდელის ცნობილი მაგალითია გლას-მაკეის მოდელი [Glass და Mackey, 1988]:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ax(t - \tau)}{1 + x^c(t - \tau)} - bx \tag{12.4-5}$$

სადაც a , b და c რიცხვითი პარამეტრებია. ასეთი მოდელი ბიოლოგიურ სისტემებში დროში წინმსწრები ეფექტების აღწერისათვის გამოიყენება.

დროში წანაცვლების მოდელის ამონახსნის ზუსტად დადგენისათვის უნდა განვსაზღვროთ x -ის საწყისი პირობა τ ინტერვალში. დავყოთ ეს ინტერვალში N რაოდენობის დისკრეტულ ერთეულებად. ამ შემთხვევაში დროში წანაცვლების დიფერენციალური განტოლება N განზომილებიანი მდგომარეობათა სივრცის ევოლუციის ექვივალენტურია. $N \rightarrow \infty$ პირობებში გვაქვს უსასრულო განზომილების მქონე მდგომარეობათა სივრცე. ამრიგად, დროში წანაცვლების დიფერენციალური განტოლება თავისუფლების უსაზღვრო რაოდენობით

ხარისხების მქონე სისტემის ექვივალენტურია. ჩნდება შეკითხვა: როგორ განვასხვავოთ ერთმანეთისგან თავისუფლების უსაზღვრო რაოდენობით ხარისხების მქონე სისტემის დინამიკა თავისუფლების სასრული (და მცირე) რაოდენობით ხარისხების მქონე სისტემის დინამიკისგან? არსებობს თუ არა მცირეგანზომილებიან სისტემებთან დაკავშირებული კონცეპტუალური და რაოდენობრივი მეთოდები, რომელთა გამოყენება თავისუფლების უსაზღვრო რაოდენობით ხარისხების მქონე სისტემისთვისაც შესაძლებელია? ფარმერმა (FAR82a) გამოიკვლია გლას-მაკეის მოდელი, შესაბამისი ლიაპუნოვის ექსპონენტები და სისტემის მიმზიდველების ფრაქტალური განზომილება. მან აღმოაჩინა, რომ პარამეტრის მნიშვნელობების გარკვეული დიაპაზონისათვის სისტემის ქმედება განისაზღვრება სასრული განზომილების მქონე მიმზიდველის მეშვეობით. დროში წანაცვლების მოდელში თავისუფლების უსასრულო რაოდენობით ხარისხებსა და შესაბამისი სისტემების სივრცით ქმედებას შორის კავშირის (იხილეთ თავი 11) საკითხი კვლავ ღია რჩება.

ინფორმაცია და ქაოსური ქმედება

1940-იან წლებში კლოდ შენონის მიერ ინფორმაციისა და ინფორმაციის გადაცემის ფორმალური თეორიის დანერგვის შემდეგ ფიზიკოსებმა ინფორმაციის კონცეფციები გამოიყენეს სტატისტიკური სისტემების ფიზიკის კვლევის მიზნით (იხილეთ მაგალითად [Baierlein, 1971].) ამგვარად, სულაც არ არის გასაკვირი, რომ ინფორმაციის ცნება ქაოსური სისტემების ქმედებისთვისაც გამოიყენება. მიუხედავად ამისა, ლიტერატურაში ერთიმეორის გამომრიცხავი ორი შეხედულება არსებობს: (1) ქაოსური სისტემები ქმნის ინფორმაციას; (2) ქაოსური სისტემები სპობს ინფორმაციას. საოცარია, მაგრამ ორივე შეხედულება სწორია.

თავდაპირველად უნდა დავადგინოთ, თუ რას ვგულისხმობთ *ინფორმაციაში*. ტექნიკური თვალსაზრისით, ინფორმაციის განსაზღვრება ახლოსაა ენტროპიის განსაზღვრებასთან. ყურადღება მივაქციოთ სიმბოლოების მიმდევრობის გამოყენებით ზოგიერთი სისტემის ქმედების პროგრამირების სიმბოლურ დინამიკაზე. სიმბოლოების მოცემული მიმდევრობით მიღებული ინფორმაციის რაოდენობა მიმდევრობის შექმნისათვის საჭირო სიმბოლოების რიცხვის ლოგარითმის მიხედვით განისაზღვრება:

$$I = \log_2 N \quad (12.4-6)$$

თუ მიმდევრობა შეიცავს ერთსა და იმავე რიცხვებს, მაგალითად, ნულიანებს, მხოლოდ ერთი სიმბოლოს განსაზღვრა გვესაჭიროება და ინფორმაცია არის 0. სრულიად შემთხვევითი

მიმდევრობისთვის სიმბოლოების საჭირო რაოდენობა მიმდევრობის წევრთა რაოდენობის ტოლია და ინფორმაციის რაოდენობაც ღილია (როგორც ხედავთ ამგვარი ტექნიკური განსაზღვრება, არაპროგნოზირებადობისა თუ სიურპრიზის საკითხს ინფორმაციის ღიდ რაოდენობასთან აიგივებს. [Baierlein, 1971] გეთავაზობს, რომ ამ სიდიდეს „ინფორმაციის გადინება“ ვუწოდოთ.)

ქოსურ სისტემასთან დაკავშირებით შეგვიძლია ვთქვათ, რომ დროის მცირე ინტერვალებში ქოსური ქმედება წარმოშობს ინფორმაციას. ამის საჩვენებლად განვიხილოთ მდგომარეობათა სივრცის ძალზე მცირე არეში დაწყებული რამდენიმე ტრაექტორია. თუ საწყისი პირობები საკმარისად ახლოსაა ერთმანეთთან, მაშინ ვერ ვიტყვით, რომ სხვადასხვა ტრაექტორიები გაგვანია. ახლომდებარე ტრაექტორიების ექსპონენციალური დივერგენციის გამო საბოლოო ჯამში ტრაექტორიები ერთიმეორეს საკმარისად დაშორდება და ჩვენ მათ განსხვავებაში დავრწმუნდებით. ამრიგად, ჩვენ სისტემის შესახებ ინფორმაცია მოვიპოვეთ. მაშასადამე, შეხედულება, რომ ქოსურ სისტემას კოლმოგოროვის დადებითი ენტროპია გააჩნია, სწორია.

ქოსური ქმედება სპობს ინფორმაციას ხანგრძლივი დროის განმავლობაში. კვლავ დაუბრუნდეთ რამდენიმე სხვადასხვა ტრაექტორიის დასაწყისს, ოღონდ ამ შემთხვევაში მდგომარეობათა სივრცის სხვადასხვა ნაწილებში. დროის ღიდი ინტერვალის შემდეგ ჩანს, რომ ტრაექტორიები მიმზიდველზე მდებარეობს და დისიპაციური სისტემებისთვის მრავალჯერ იმყოფება გაშლილ და მოკეცილ მდგომარეობაში.

საბოლოოდ ჩვენ უკვე ვეღარ შევძლებთ იმის თქმას, თუ საწყისი პირობების რომელი სიმრავლიდან მოემართება ესა თუ ის ტრაექტორია. სისტემის შესახებ ინფორმაცია დაკარგულია.

თუ ყურადღებას ტრაექტორიების მიერ მდგომარეობათა სივრცის სხვადასხვა უჯრედების (ან უჯრედების მიმდევრობების) “მონახულების” ალბათობაზე გავამახვილებთ, როგორც ამას მე-9 და მე-10 თავებში ვაკეთებდით, მაშინ ინფორმაციის რაოდენობა ამ ალბათობების საფუძველზე შეიძლება შემდეგნაირად განისაზღვროს:

$$I = -\sum_i p_i \ln p_i \quad (12.4-7)$$

„–“ ნიშნის გარეშე განსაზღვრულ ინფორმაციას ზოგჯერ ნეგენტროპიას უწოდებენ, რადგან იგი ამ შემთხვევაში ალბათობების მეშვეობით მოცემული ჩვეულებრივი ენტროპიის ფუნქციის უარყოფითი სიდიდეა.

ზემოთ მოყვანილი მსჯელობიდან გამოგვაქვს დასკვნა, რომ ქაოსური დინამიკისთვის ინფორმაციული ტერმინოლოგიის გამოყენება ინფორმაციული თეორიის ზოგიერთი ასპექტის გაგებაში გვეხმარება, მაგრამ დინამიკის შეცნობაში მაინცდამაინც დიდ სამსახურს ვერ გაგვიწევს.

სტოქასტიკური რეზონანსი

არაწრფივი დინამიკა ჩვენს ინტუიციას სხვადასხვა მიმართულებით ანვითარებს. ერთ-ერთი ყველაზე საინტერესო მიმართულება ე.წ სტოქასტიკური რეზონანსია. არსებობს პირობები, როდესაც სისტემის ქმედებაზე ხმაურის დამატება მას სუსტი სიგნალების ადვილად აღდგენისადმი მიდრეკილებას აძლევს. ამგვარი ეფექტი ლაზერული და ელექტრული სისტემების, ქიმიური რეაქციებისა და ადამიანის აღქმის უნარიანობის შემთხვევებში ვლინდება. MOW95 და GHJ98 წარმოდგენას გვიქმნის სტოქასტიკური რეზონანსისა და მისი გამოყენებების შესახებ.

სტოქასტიკური რეზონანსის დასამყარებლად სისტემას „აქტივაციის ბარიერის“ ან „ზღვარის“ რაიმე სახეობა უნდა გააჩნდეს (ანუ სისტემა მგრძნობელობას მხოლოდ მმართველი მოწყობილობის მიერ გარკვეული დონის გადაჭარბების შემთხვევაში უნდა ამჟღავნებდეს). თუ სისტემის მართვის მიზნით გამოყენებულია როგორც სუსტი პერიოდული სიგნალი, ისე რაიმე ხმაური, მაშინ სისტემის რეაქცია სუსტი პერიოდული სიგნალის შესაბამის სიხშირეზე ღებულობს მაქსიმალურ ამპლიტუდას, როდესაც ხმაურის ამპლიტუდა განსზვავდება ნულისაგან (ანუ სახეზეა თავისებური რეზონანსი). მაშასადამე, ნულოვანი ხმაურის შემთხვევაში სისტემის რეაქცია იშვიათია. ხმაურის დიდ ამპლიტუდებზე რეაქცია არ არსებობს, ხოლო ხმაურის ამპლიტუდების საშუალო მნიშვნელობებისას სისტემის რეაქცია სასურველ სიხშირეზე მაქსიმალურია. ხმაური დახმარებას უწევს სისტემას აქტივაციის ბარიერისა თუ ზღვრის დაძლევაში. თავის ბოლოში მოყვანილი წყაროები წარმოდგენას შეგიქმნით სტოქასტიკური რეზონანსის გამოყენების შესახებ.

ქაოსი კომპიუტერულ ქსელებში

როგორც უკვე არაერთგზის აღვნიშნეთ, კომპიუტერებისა და კომპიუტერული გრაფიკის გამოყენება არაწრფივი დინამიკისა და ქაოსის თანამედროვე მოძღვრებაში შეუცვლელია. თუმცა თვით კომპიუტერებიც კომპლექსური სისტემებია. ამჟღავნებენ თუ არა ისინი ქაოსურ ქმედებას? რა თქმა უნდა, კომპიუტერთა უმრავლესობა დეტერმინისტულ და კონტროლირებად პროგრამებს იყენებს, ანუ ზუსტი შემავალი სიგნალისთვის ზუსტ რეაქციას უზრუნველყოფს. კომპლექსური ქმედების დამაინტრიგებელი ალბათობა კომპიუტერულ ქსელებში ანუ სისტემებში ვლინდება, სადაც მრავალი კომპიუტერი ერთმანეთთან არის დაკავშირებული. ერთმანეთთან დაკავშირებული კომპიუტერები დაკავშირებული ოსცილატორების ერთ-ერთი შემთხვევაა: თითოეული მათგანი პროგნოზირებად ქმედებას ამჟღავნებს, მაგრამ ურთიერთკავშირებმა, ოსცილატორების ანალოგიურად, სისტემა შესაძლოა სრულიად ქაოსურად აქციოს. ამგვარი ქმედება აუცილებელი არ არის სახიფათო იყოს. შესაბამისი მაგალითები თავის ბოლოს მოყვანილ წყაროებშია გამოკვლეული.

ქაოსის კონტროლი

ლაზერების, ელექტრული წრედების, მექანიკური ოსცილატორებისა და ა.შ. ტიპის რეალურ სისტემებში ქაოსური ქმედების აღძვრის შესახებ მსჯელობისას, ასეთ ქმედებას, არასასურველ გარემოებად აღვიქვამთ ანუ გვსურს, რომ ლაზერი, ელექტრული წრედი ან მექანიკური ოსცილატორი პროგნოზირებად ქმედებას ამჟღავნებდნენ.

ბოლოდროინდელმა შრომებმა გვიჩვენეს, რომ სისტემაში არსებული ქაოსის მართვამ პარამეტრის ზოგიერთ დიაპაზონებში გარკვეული სარგებლობა შეიძლება მოიტანოს. მთავარი იდეა გამოიხატება სისტემის ქაოსური ქმედების შემთხვევაში მდგომარეობათა სივრცის შედარებით ვრცელი არეების კვლევაში. მოცემულ არეში მრავალი (არასტაბილური) პერიოდული ორბიტაა განთავსებული. სუსტი მაკონტროლებელი სიგნალის უზრუნველყოფის გზით სისტემის მართვას თითოეულ პერიოდულ ორბიტასთან მიახლოებული ორბიტის მეშვეობით შევძლებთ. ამრიგად, ქაოსური ქმედება სისტემის დინამიკური ქმედების ფართო „ლანდშაფტს“ ქმნის და სუსტი მაკონტროლებელი სიგნალის შეცვლით სისტემის მიერ სხვადასხვა ტიპის პერიოდული ქმედების გამოწვევა შეგვიძლია.

ადაპტაციური კონტროლის ეს მეთოდი არ მოითხოვს სისტემის წარსული დინამიკის ცოდნას. ფაქტიურად, თვით სისტემის ქმედების გამოყენება შეგვიძლია, რათა გავიგოთ, თუ მცირე მოუწესრიგებლობის რა ტიპი უნდა გამოვიწვიოთ ცალკეული პერიოდული ორბიტის მიღების მიზნით (OGY90). ამგვარი კონტროლის სქემები სხვადასხვა ექსპერიმენტულ სისტემებშია გამოყენებული (BRG91, HUN91, RMM92 და თავის ბოლოში მოყვანილი სხვა ლიტერატურა). ამ მეთოდის განვრცობა მაღალი განზომილების მქონე სისტემების მიმზიდველებისთვის (AGO92) შეიძლება და მისი მართვა ვრცელ პარამეტრულ დიაპაზონებზეც ხერხდება (GIR92). [Kapitaniak, 1996, [Schuster, 1999] და DIS97, სხვადასხვა ტიპის კონტროლის ტექნიკის შესანიშნავ მაგალითებს გვაწვდის.

ქაოსური ქმედების მქონე სისტემის პირობებში, ამგვარი ქმედებიდან გამომდინარე, ბიოლოგიური შინაარსის დასკვნების გამოტანაც ხდება შესაძლებელი. მიანიჭებს თუ არა ბიოლოგიურ სისტემებს უპირატესობას ქაოსურ რეჟიმში გადასვლა, როდესაც შესაძლო ქმედებების ფართო არჩევანი პირობების ცვლილებებთან ერთად, მათ უფრო მარტივ სახეს მისცემს? თუ სისტემების ქმედება მკაცრად პერიოდულია, მათ სირთულეები შეექმნებათ გარემო პირობების ცვლილებაზე ადაპტაციის თვალსაზრისით. უფრო კონკრეტულად, შეგვიძლია ვიმსჯელოთ ტვინის ქმედების მოდელირების შესაძლებლობის შესახებ. იშვიათი გარე შემოფოტებების (მაგალითად, ფიქრთა მსვლელობის) ზემოქმედებით ნერვული სისტემა მეხსიერების შემადგენელ გარკვეულ „პერიოდულ ორბიტაზე“ შეიძლება აღმოჩნდეს. მაგალითად, როდესაც ვინმეს სახელის გახსენება გვსურს, ტვინის „ორბიტები“ მდგომარეობათა სივრცის შედარებით ვრცელ არეში ქაოსურად „დაეხეტება“ და მსჯელობის რომელიმე პიროვნებაზე შეჩერებამდე ფიქრების მსვლელობა მეხსიერების შემადგენელი „პერიოდული ორბიტის“ გასწვრივია მიმართული.

მნიშვნელოვანია ის ფაქტი, რომ ქაოსური ქმედება და მისი შესაძლო კონტროლი გვთავაზობს ახალ მოდელს კომპლექსური სისტემების ქმედების მართვის შესახებ.

ქაოსის სინქრონიზება

ყურადღება მივაქციოთ იმ ფაქტს, რომ ქაოსის წარმოშობა მოუწესრიგებელი ქმედების გამომწვევ საწყის პირობებზეა დამოკიდებული. ამ ფაქტის საფუძველზე შეიძლება დასკვნა გამოვიტანოთ, რომ ორი ქაოსური სისტემა ზუსტად ერთნაირად ვერ მოიქცევა, ანუ შეუძლებელია ორი სისტემის ისეთი სახით სინქრონიზაცია, რომ მათი ქაოსური ტრაექტორიები ზუსტად ერთი და იგივე იყოს. მიუხედავად ამისა, შესაძლებელია ორი (ან მეტი) ქაოსური სისტემის იმგვარად სინქრონიზებაც, რომ მათი შესაბამისი ტრაექტორიები

(მდგომარეობათა სივრცეში) დროის ხანგრძლივ პერიოდში ერთიმეორესთან საკმაოდ ახლოს იმყოფებოდნენ. საწყის პირობებზე მგრძობიარე დამოკიდებულებას ერთი სისტემაზე ზემოქმედების მიზნით ვიყენებთ, რათა იგი მეორესთან მიმართებაში სინქრონიზებული გახდეს.

რაში გვჭირდება ორი ქაოსური სისტემის სინქრონიზება? ამისთვის მრავალი მიზეზი არსებობს. მაგალითად, ზოგიერთ ტექნოლოგიურ სფეროში აუცილებელია ორი სინქრონიზებული „ოსცილატორის“ არსებობა. ხშირად საჭიროა ორი ძრავის ან ცვლადი დენის წარმოქმნელი ორი გენერატორის სინქრონიზაცია. ეს საკითხი არაპერიოდულ (ქაოსურ) ქმედებაზეც შეგვიძლია განვავრცოთ. ჯანმრთელი ადამიანის როგორც გული, ასევე ტვინი ერთი შეხედვით მცირე დოზით ქაოსურ ქმედებასაც ამჟღავნებს. გულის შემთხვევაში მნიშვნელოვანია, რომ მისი სხვადასხვა ნაწილები, რომლებიც ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად მოქმედებენ, დროის ინტერვალში ძვერის სინქრონიზაციის მცირე ცვლილების შემთხვევაშიც კი სინქრონიზობას ინარჩუნებდნენ. კიდევ ერთი მაგალითია საკომუნიკაციო სისტემები. ქაოსური სიგნალები შეგვიძლია გამოვიყენოთ უკანონო გზით მომსმენ პირთაგან „ჭეშმარიტი“ ინფორმაციის შემცველი სიგნალის დამალვის მიზნით, ოღონდ სიგნალის გამგზავნისა და მიმღების ქაოსურ ქმედებებს შორის სინქრონიზაცია უნდა არსებობდეს.

თავის ბოლოში მითითებული ლიტერატურა საინტერესო ინფორმაციას მოგაწვდით ქაოსის სინქრონიზების შესახებ.

ქაოსის გამოყენება მომავლის წინასწარმეტყველების მიზნით

სისტემის დინამიკური მოდელების შექმნისა და მომავლის წინასწარმეტყველებისთვის დროითი მწკრივების მონაცემების გამოყენებას ხანგრძლივი და შთამბეჭდავი ისტორია გააჩნია. უკანასკნელ წლებში არაწრფივ სისტემებში ქაოსური ქმედებიდან გამომდინარე იდეებს კომპლექსური ქმედების მოდელირების მიზნით წარმატებით იყენებენ, რაც პროგნოზირების სქემის გაუმჯობესებას უზრუნველყოფს. იგივე იდეები დროით მწკრივებში არსებული ხმაურის ეფექტების შემცირების მიზნითაც შეიძლება გამოვიყენოთ, ანუ ამ მეთოდების საშუალებით დგინდება, თუ როგორი სიტუაცია იქნებოდა ხმაურის არსებობის გარეშე. პროგნოზირებისა და ხმაურის შემცირების შესახებ დეტალური მსჯელობა ძალიან შორს წაგვიყვანს, ამიტომ დაინტერესებული მკითხველი სასურველია მოცემული თავის ბოლოში მოყვანილ ლიტერატურას გაეცნოს.

12.5. ქაოსთან დაკავშირებული ზოგიერთი მარტივი ექსპერიმენტი

კურსის ფარგლებში ყურადღებას ვამახვილებდით სხვადასხვა ფიზიკური, ქიმიური თუ ბიოლოგიური სისტემების მიმართ არაწრფივი დინამიკის გამოყენებაზე. უკანასკნელ წლებში გამოქვეყნდა ბიფურკაციის, ქაოსში გადასვლის გზებისა და ა.შ. სადემონსტრაციოდ მარტივი ექსპერიმენტული სისტემების (მეტწილად ფიზიკური შინაარსის) ამსახველი სტატიები. მოგიწოდებთ, რომ თავად გამოიკვლიოთ ზოგიერთი სისტემა. მათი უმრავლესობა თითქმის ყველა კოლეჯისა თუ ფიზიკის დეპარტამენტისათვის ხელმისაწვდომ აპარატურას მოითხოვს.

პირველ თავში აღწერილი დიოდის წრედი ერთ-ერთი ყველაზე მრავალმხრივი და ადვილად კონტროლირებადი არაწრფივი სისტემაა. ასეთ სისტემის ვრცელი დახასიათება BUJ85-შია მოცემული. მოცემული სისტემის გამოყენება არაწრფივი დინამიკის მრავალი ასპექტის რიცხვითი გამოთვლების ჩატარებაში გვეხმარება, მაგრამ იგი საჭიროებს ელექტრონობის ცოდნასა და ოსცილოსკოპის გამოყენებას.

მიუხედავად იმისა, რომ რაოდენობრივი გაზომვების ჩატარება დიდ სირთულეებთანაა დაკავშირებული, მრავალი მექანიკური სისტემა გამოდგება არაწრფივი დინამიკის ეფექტების საილუსტრაციოდ. ლიტერატურაში აღწერილ ექსპერიმენტებს შორისაა მყარ, ვიბრირებად ზედაპირზე მხტუნავ ბურთზე (TUA86, MET87), ცვლადი დენით მართულ სხვადასხვა მაგნიტებზე (BSS90, MES86, OMH91) და ონკანიდან მომავალ წყლის წვეთზე (DRH91) ჩატარებული ექსპერიმენტები. რამდენიმე სხვა ელექტრული და არაწრფივი მექანიკური სისტემა BRI87-შია განხილული. C დანართი [Moon, 1992] სხვადასხვა „ქაოსურ ხერხებს“ წარმოგვიდგენს. მილევადი ქანქარის კომერციული ვერსიებს ამზადებენ Daedalon, Inc. (Danvers, MA) და TEI-Atomic, (Jackson, MI)

12.6 ზოგადი კომენტარები და განხილვა: ქაოსის მომავალი

21-ე საუკუნის ფიზიკაში ორი გადატრიალება მოხდა – აინშტაინის ფარდობითობის თეორიის და კვანტური მექანიკის შექმნა. ისინი ფიზიკური რეალობის ზღვრების გადალახვის და, აქედან გამომდინარე, სამყაროს შესახებ ცნობიერების გაღრმავებისაკენ გვიბიძგებენ: ფარდობითობა გვასწავლის, რომ არსებობს ენერჯისა და ინფორმაციის გადატანის სიჩქარის ზედა ზღვარი (სინათლის c სიჩქარე), რაც სივრცისა და დროის შესახებ ჩვენ შეხედულებებს დიამეტრალურად ცვლის. კვანტური მექანიკა გვაუწყებს, რომ არსებობს სისტემებს შორის ურთიერთქმედების ქვედა ზღვარი, რომელიც პლანკის h მუდმივითი განისაზღვრება. ამრიგად,

ნებისმიერი ფიზიკური ურთიერთქმედება და, აქედან გამომდინარე, ნებისმიერი გაზომვა საკვლევ სისტემაზე აუცილებლად აისახება. ეს არის ეფექტი, რომლის უგულებელყოფაც შეუძლებელია.

არაწრფივი დინამიკისა და ქაოსის დაბადება და განვითარება ბუნების შეცნობასთან დაკავშირებული გადატრიალების შემადგენელი ნაწილია. ქაოსის არსებობა კიდევ ერთ შეზღუდვას ქმნის. ქაოსურ სისტემებში, ზოგიერთი მათგანის დეტერმინისტულობის შემთხვევაშიც კი, დროის ხანგრძლივ ინტერვალზე აღებული ქმედების პროგნოზირებასთან დაკავშირებით ჩვენი შესაძლებლობები შეზღუდულია. ზოგჯერ ამგვარი შეზღუდულობა ძირეული და ისეთივე მნიშვნელოვანია, როგორც ფარდობითობითა და კვანტური მექანიკით წარმოდგენილი შეზღუდვები.

არაწრფივი დინამიკა და ქაოსი ფარდობითობისა და კვანტური მექანიკის დონის გადატრიალების გამომწვევი არ არის, თუმცა ფართო მსჯელობის საგანია. არაწრფივი დინამიკისა და ქაოსის სფეროში ბოლოდროინდელი ძვრები მაჩვენებელია იმისა, თუ როგორ ვლტულობთ ბუნებაში არსებული ფუნდამენტური ძალების ურთიერთქმედების შედეგად ჩვენს გარემომცველ რთულ სამყაროს. თუმცა არსებობს სიძნელებიც. პუანკარემ და სხვა მკვლევარებმა გააცნობიერეს, რომ არაწრფივი დინამიკა ისეთ პრობლემებთანაა დაკავშირებული, რომელთა გადაწყვეტა კონკრეტული ფორმულების მეშვეობით ვერ ხერხდება. პროგნოზირების თანდაყოლილი დეფიციტის მქონე ქაოსურ ქმედებად წოდებული სიგნალის ამოხსნა კი შესაძლებელია. მეტიც, პუანკარე მიხვდა, რომ ბუნებაში არსებულ პროცესთა უმეტესობას ახასიათებს არაწრფივობა, თუმცა მას არ ჰქონდა კომპიუტერი. გაცილებით მნიშვნელოვანი კი ის არის, რომ არაწრფივი დინამიკის გეომეტრიული ასპექტების გამოკვლევისთვის მაშინ არც კომპიუტერული გრაფიკა არსებობდა. მიუხედავად ამისა, პუანკარემ გაათვინცნობიერა გამოვლენილი კომპლექსური ქმედების გეომეტრიული ასპექტების მნიშვნელობის ფუნდამენტურობა.

არაწრფივი დინამიკის მნიშვნელობის გადმოსაცემად მოვახდენთ ნობელის პრემიის ლაურეატის – ფიზიკოს რიჩარდ ფეინმანის ციტირებას: „მრავალ სფეროსთან დაკავშირებით უძველესი და საერთო ფიზიკური პრობლემა არსებობს. იგი დღემდე გადაუჭრელია. ეს არ არის ახალი ფუნდამენტური ნაწილაკების აღმოჩენის პრობლემა, არამედ რაღაც ძველი – ასწლეულების დანატოვარი. მონათესავე მეცნიერებებთან კავშირის მიუხედავად, მისი მათემატიკური გამოკვლევა, ჯერჯერობით ვერც ერთმა ფიზიკოსმა ვერ მოახერხა. ეს ტურბულენტური სითხეების ცირკულაციის ანალიზია... ჩვენ ამინდის კვლევას ვერ ვახერხებთ. ჩვენ არ ვიცით დედამიწის შიგნით არსებული შესაძლო მოძრაობის ფორმები“ [Feynman, Leighton, Sands, 1963], ტომი I, გვ. 3-9.

ცხადია, ფეინმანი გულისხმობდა არაწრფივი პრობლემათა მთელ კლასს, რომელიც უკავშირდება ტურბულენტობას, ფორმის წარმოქმნასა და ქაოსს.

არაწრფივი დინამიკისა და ქაოსის შესწავლას კვანტური მექანიკისა და მყარი სხეულის ფიზიკის სათანადო განვითარებამდე ლოდინი დასჭირდება, რაც თავის მხრივ იოლად მართვადი და სწრაფი კომპიუტერების განვითარებას შეუწყობს ხელს. ამასთან ერთად, მათემატიკოსების მცდელობებმა და სტატისტიკური მექანიკის შესწავლასთან დაკავშირებულმა პროგრესმა უკანასკნელი 20 წლის განმავლობაში არაწრფივი დინამიკის სწრაფი განვითარებისათვის მყარი საფუძველი შეამზადა.

ფიზიკის ერთ-ერთი მიღწევა არაწრფივი სისტემების თვისობრივი და რაოდენობრივი ქმედების თვალსაზრისით უნივერსალური კლასების აღმოჩენაა. ადრეულ ლიტერატურაში არაწრფივი დინამიკის არსებობის შესახებ მინიშნება არ არსებობს. მეცნიერთა საზოგადოება დიდი სიურპრიზის წინაშე აღმოჩნდა.

ქაოსის კიდევ ერთი საოცარი თვისება გახლავთ მეცნიერების თითქმის ყველა სფეროში და ტექნოლოგიაში მისი გამოყენების შესაძლებლობა. ამ სახელმძღვანელოში მეცნიერების, ინჟინერიისა და ტექნოლოგიის პრაქტიკულად ყველა სფეროში ასობით ჩატარებული ექსპერიმენტის მოყვანასთან ერთად, ქაოსისა და სხვა „ტიპური“ არაწრფივი ქმედების გამოვლინებაზე მაქსიმალურად გავამახვილეთ ყურადღება. არაწრფივი დინამიკისა და ქაოსის თეორია, განვითარების საწყისი ეტაპის მიუხედავად, ძალზე კომპლექსური ქმედების აღწერაში, ორგანიზებასა და რიცხვითი სახით წარმოდგენაში გვეხმარება.

რასაკვირველია, უამრავი აზრია გამოთქმული ამ კონცეფციების საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებისა და ტექნოლოგიების მიღმა არსებული მოვლენების მიმართ გამოყენების თაობაზე. ამ შემთხვევაში არაწრფივი დინამიკის, ეკონომიკისა და სოციოლოგიის მოვლენების შესწავლის მიზნით მისი გამოყენების თაობაზე გამოთქმულ იდეას მყარი საფუძველი გააჩნია. ლიტერატურულ თეორიაში ანალოგიური აღმოჩენები დაფიქსირებულია კიდევ [Hayles, 1991]. ნებისმიერ შემთხვევაში არაწრფივმა დინამიკამ და ქაოსმა, როგორც სიტყვიერი, ასევე კონცეპტუალური თვალსაზრისით, ჩვენი ლექსიკონი გაამდიდრა და გარემომცველი სამყაროს ახალი მოდელებიც მოგვცა.

12.7 დამატებითი ლიტერატურა

ქაოსი და კვანტური მექანიკა

ზოგადი ლიტერატურა

P. V. Elyatin, "The Quantum Chaos Problem," *Sov. Phys. Usp.* 31, 597-622 (1988).

B. Eckhardt, "Quantum Mechanics of Classically Non-Integrable Systems," *Phys. Rep.* **163**, 205-97 (1988).

J. Ford, "What Is Chaos That We Should Be Mindful of It?" in P. W. Davies, ed. *The New Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1989). საინტერესო ესე, რომელშიც განხილულია კვანტური ქაოსის მრავალი საკითხი (ისევე, როგორც კლასიკური ქაოსის მრავალი საკითხი).

M. C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (Springer-Verlag, New York, 1990).

J. Ford and M. Ilg, "Eigenfunctions, Eigenvalues, and Time Evolution of Finite Bounded, Undriven, Quantum Systems are not Chaotic," *Phys. Rev. A* **45**, 6165-73(1992).

J. Ford and G. Mantica, "Does Quantum Mechanics Obey the Correspondence Principle? Is it Complete?" *Am. J. Phys.* **60**, 1086-98 (1992).

M. C. Gutzwiller, "Quantum Chaos," *Scientific American* **266** (1), 78-84 (January, 1992).

L. Reichl, *The Transition to Chaos in Conservative Classical Systems: Quantum Manifestations* (Springer-Verlag, New York, 1992).

[Schuster, 1995] Chapter 8.

H.-J. Stockman, *Quantum Chaos, An Introduction* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999). მოითხოვს კვანტური მექანიკის ცოდნას ბაკალავრიატის ბოლო ან მაგისტრატურის პირველი საფეხურის დონეზე.

ნახევრად კლასიკური კვანტური მექანიკა

A. Einstein, "Zum Quantensatz vom Sommerfeld und Epstein," *Verh. Dtsch. Phys. Ges.* **19**, 82-92 (1917).

M. Gutzwiller, "Phase-Integral Approximation in Momentum Space and the Bound State of Atoms," *J. Math. Phys.* **8**, 1979-2000 (1967)

M. C. Gutzwiller, "Periodic Orbits and Classical Quantization Conditions," *J. Math. Phys.* **12**, 343-58 (1971).

M. V. Berry, "Quantum Scars of Classical Closed Orbits in Phase Space," *Proc. Roy. Soc. London A* **423**, 219-31 (1989).

R. Aurich and F. Steiner, "Periodic-Orbit Sum Rules for the Hadamard-Gutzwiller Model," *Physica D* **39**, 169-93 (1989).

S. A. Meyer, M. Morgenstern, S. Knudson, and D. Noid, "Novel Method for WKB Analysis of Multidimensional Systems," *Am. J. Phys.* **59**, 145-51 (1991)

G. Tanner, P. Scherer, E. B. Bogomolny, B. Eckhardt, and D. Wintgen, "Quantum Eigenvalues from Classical Periodic Orbits," *Phys. Rev. Lett.* **67**, 2410-13(1991).

Chaos **2** (1) (1992). ნაშრომში განხილულია პერიოდულ ორბიტათა თეორია ნახევრად კლასიკურ კვანტურ მექანიკის ფარგლებში.

E. J. Heller and S. Tomsovic, "Postmodern Quantum Mechanics," *Physics Today* **46** (7), 38-46 (1993).

ასახვითი მოდელები კვანტურ მექანიკაში

G. Casati, B. V. Chirikov, F. M. Izrailev, and J. Ford, in *Stochastic Behavior in Classical and Hamiltonian Systems*, G. Casati and J. Ford, eds. Lecture Notes in Physics, Vol. 93 (Springer-Verlag, New York, 1979).

J. H. Hannay and M. V. Berry, "Quantization of Linear Maps on a Torus-Fresnel Diffraction by a Periodic Grating," *Physica D* **1**, 267-90 (1980). არნოლდის კატის ასახვის გამოყენება კვანტურ მექანიკის პრობლემის გადაჭრაში.

G. H. Ristow, "A Quantum Mechanical Investigation of the Arnold Cat v fap " Master's Thesis, School of Physics, Georgia Institute of Technology, 1987.

S. Adachi, M. Toda, and K. Ikeda, "Quantum-Classical Correspondence in $jYkny$. Dimensional Quantum Chaos," *Phys. Rev. Lett.* **61**, 659-61 (1988).

R. E. Prange and S. Fishman, "Experimental Realizations of Kicked Quantum Chaotic Systems," *Phys. Rev. Lett.* **63**, 704-7 (1989).

J. Ford, G. Mantica, and G. H. Ristow, "The Arnold Cat: Failure of the Correspondence Principle," *Physica D* 50,493-520 (1991).

ვიგნერის ფაზური სივრცის განაწილება

E. Wigner, "On the Quantum Correction for Thermodynamic Equilibrium," *Phys. Rev.* **40**, 749-59 (1932).

R. F. O'Connell, "The Wigner Distribution Function—50th Birthday," *Found. Phys.* **13**, 83-93 (1983).

Y. S. Kim and E. P. Wigner, "Canonical Transformations in Quantum Mechanics," *Am. J. Phys.* **58**, 439-48 (1990). საინტერესო შესავალი კურსი ვიგნერის განაწილების შესახებ.

W. A. Lin and L. E. Ballentine, "Quantum Tunneling and Chaos in a Driven Anharmonic Oscillator," *Phys. Rev. Lett.* **65**,2927-30 (1990).

ენერგეტიკულ ღონეთა განაწილება

G. Casati, B. V. Chirikov, and I. Guarneri, "Energy-Level Statistics of Integrable Quantum Systems," *Phys. Rev. Lett.* **54**, 1350-53 (1985).

J. Ford, "Quantum Chaos, Is There Any?" in [Hao, 1988], pp. 128-47.

J. V. Jose, "Quantum Manifestations of Classical Chaos: Statistics of Spectra," in [Hao, 1988].

F. M. Izrailev, "Simple Models of Quantum Chaos: Spectrum and Eigenfunctions," *Phys. Rep.* **196**, 299-392 (1990).

M. Shapiro and G. Goelman, "Onset of Chaos in an Isolated Energy Eigenstate," *Phys. Rev. Lett.* **53**, 1714-7 (1984).

J. Zakrzewski, K. Dupret, and D. Delande, "Statistical Properties of Energy Levels of Chaotic Systems: Wigner or Non-Wigner," *Phys. Rev. Lett.* **74**, 522-25 (1995).

R. Ketzmerick, K. Kruse, S. Kraut, and T. Geisel, "What Determines the Spreading of a Wave Packet?," *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1959-63 (1997). განზოგადებული განზომილება D_2 გამოყენებულია ენერგეტიკული სპექტრისა და საკუთრივი ფუნქციების მიმართ. კოეფიციენტი განსაზღვრავს რამდენად სწრაფად ვრცელდება ტალღური პაკეტი.

ატომური ფიზიკა

ორი ძალზე ზოგადი მიმოხილვა:

R. V. Jensen, "Chaos in Atomic Physics," in *Atomic Physics JO*, H. Narumi and I. Shimamura, eds. (Elsevier North-Holland, Amsterdam, 1987).

R. V. Jensen, "The Bohr Atom Revisited: A Test Case for Quantum Chaos," *Comments At. Mol. Phys.* **25**, 119-31 (1990).

Comments At. Mol. Phys. **25** (1-6), 1-362 (1991). An entire volume dedicated to the question of "Irregular Atomic Systems and Quantum Chaos."

K. A. H. van Leeuwen, et al. "Microwave Ionization of Hydrogen Atoms: Experiment versus Classical Dynamics," *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2231-34 (1985).

E. J. Galvex, B. E. Sauer, L. Moorman, P. M. Koch, and D. Richards, "Microwave Ionization of H Atoms: Breakdown of Classical Dynamics for High Frequencies," *Phys. Rev. Lett.* 61, 2011-14 (1988).

J. E. Bayfield, G. Casati, I. Guarneri, and D. W. Sokol, "Localization of Classically Chaotic Diffusion for Hydrogen Atoms in Microwave Fields," *Phys. Rev. Lett.* 63, 364-67 (1989).

R. V. Jensen, M. M. Sanders, M. Saraceno, and B. Sundaram, "Inhibition of Quantum Transport Due to 'Scars' of Unstable Periodic Orbits," *Phys. Rev. Lett.* 63, 2771-15 (1989).

R. V. Jensen, S. M. Susskind, and M. M. Sanders, "Chaotic Ionization of Highly Excited Hydrogen Atoms: Comparison of Classical and Quantum Theory with Experiment," *Physics Reports* 201, 1-56 (1991).

კვანტური მექანიკის გამოთვლები აღწერილია შემდეგ ნაშრომებში:

M. L. Du and J. B. Delos, "Effect of Closed Classical Orbits on Quantum Spectra: Ionization of Atoms in a Magnetic Field," *Phys. Rev. Lett.* 58, 1731- 33 (1987).

P. Leboeuf, J. Kurchan, M. Feingold, and D. P. Arovas, "Phase-Space Localization: Topological Aspects of Quantum Chaos," *Phys. Rev. Lett.* 65, 3076-79 (1990).

D. Delande, A. Bommier, and J. C. Gay, "Positive-Energy Spectrum of the Hydrogen Atom in a Magnetic Field," *Phys. Rev. Lett.* 66, 141-44 (1991).

C.-H. Iu, G. R. Welch, M. M. Kasch, D. Kleppner, D. Delande, and J. C. Gay, "Diamagnetic Rydberg Atom: Confrontation of Calculated and Observed," *Phys. Rev. Lett.* 66, 145-48 (1991).

P. L. Moore, J. C. Robinson, C. Bharucha, P. E. Williams, and M. G. Raizen, "Observation of Dynamical Localization in Atomic Momentum Transfer: A New Testing Ground for Quantum Chaos," *Phys. Rev. Lett.* 73, 2974-77 (1994).

J. C. Robinson, C. Bharucha, F. L. Moore, R. Jahnke, G. A. Georgakis, Q. Niu and M. G. Raizen, and B. Sundaram, "Study of Quantum Dynamics in the Transition from Classical Stability to Chaos," *Phys. Rev. Lett.* 74, 3963-66 (1995).

M. Latka and B. J. West, "Nature of Quantum Localization in Atomic Momentum Transfer Experiments," *Phys. Rev. Lett.* 75, 4202-5 (1995).

R. Bliimel and W. P. Reinhardt, *Chaos in Atomic Physics* (Cambridge University Press, New York, 1997).

M. Raizen, "Quantum Chaos and Cold Atoms," in *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics* 41, 43-81. B. Bederson and H. Walther, eds. (Academic Press, San Diego, 1999).

კვანტური ფიზიკის სხვა სფეროები

J. P. Pique, Y. Chen, R. W. Field, and J. L. Kinsey, "Chaos and Dynamics on 0.5-300 ps Time Scales in Vibrationally Exited Acetylene: Fourier Transform of Stimulated-Emission Pumping Spectrum," *Phys. Rev. Lett.* 58, 475- 78 (1987). ქაოსური ეფექტები მოლეკულური ენერჯის დონეზე.

M. Schreiber and H. Grussbach, "Multifractal Wave Functions at the Anderson Transition," *Phys. Rev. Lett.* 67, 607-10 (1991). მე-10 თავში მოტანილი $r(q)$ და D_q ფორმალის გამოყენების საინტერესო მაგალითები კვანტური ალბათური განაწილების აღწერისას.

ქაოსური ეფექტები შეიძლება გამოვლინდეს არაწრფივ ფიზიკაში. მაგ.: G. E. Mitchell, E. G. Bipluch, P. M. Endt, and J. F. Shringer, Jr., "Broken Symmetries and Chaotic Behavior in ^{26}Al ," *Phys. Rev. Lett.* 61, 1473- 76 (1988).

O. Bohigas and H. A. Weidenmller, "Aspects of Chaos in Nuclear Physics," *Ann. Rev. Nucl. Part. Science* 38, 421-53 (1988).

S. Berg, "Onset of Chaos in Rapidly Rotating Nuclei," *Phys. Rev. Lett.* 64, 3119-22(1990).

G. Miiller, "Nature of Quantum Chaos in Spin Systems," *Phys. Rev. A* 34, 3345-55(1986).

N. G. van Kampen, in *Chaotic Behavior in Quantum Systems. Theory and Applications*. G. Casati, ed. (Plenum, NY, 1985).

S. Weinberg, "Testing Quantum Mechanics," *Annals of Physics* 194, 336-86 U989).
კვანტური მექანიკის არაწრფივი განზოგადება.

J. Wilkie and P. Brumer, "Time-Dependent Manifestations of Quantum Chaos," *Phys. Rev. Lett.* 67, 1185-88 (1991). ქაოსის ეფექტებს შეიძლება დროზე დამოკიდებული გამოვლინება ჰქონდეს კვანტურ მექანიკაში.

შემდეგი ორი ნაშრომი საინტერესო შესავალს გვთავაზობს კვანტურ ქაოსისა და კვანტურ სისტემებში ქაოსის ვიზუალური გამოსახვის შესახებ.

N. Srivastava, C. Kaufman, and G. Muller, "Hamiltonian Chaos III," *Computers in Physics* 6, 84-88 (1992).

N. Regez, W. Breyman, S. Weigert, C. Kaufman, and G. Muller, "Hamiltonian Chaos IV," *Computers in Physics* 10, 39-45 (1996).

კვანტური ოპტიკა ნაყოფიერი სფერო იყო არაწრფივი სისტემების დინამიკისათვის. საინტერესო შესავლისათვის იხ.:

J. R. Ackerhalt, P. W. Milonni, and M. L. Shih, "Chaos in Quantum Optics," *Phys. Rep.* 128, 205-300 (1985).

ჟურნალ Optical Society of America ორი გამოცემა მიეძღვნა არაწრფივი სისტემების დინამიკას ოპტიკაში:

"Instabilities in Active Optical Media," *J. Opt. Soc. Am. B* 2 (1) (January, 1985).

N. B. Abraham, L. A. Lugiato, and L. M. Narducci, "Overview of Instabilities in Laser Systems," *J. Opt. Soc. Am. B* 2, 7-13 (1985). განსაკუთრებით სასარგებლოა ამ სტატიის წაკითხვა.

"Nonlinear Dynamics of Lasers," *J. Opt. Soc. Am. B* 5 (5) (May, 1988).

საფეხურა-წრფივი და დროში დაყოვნების ფიფქერენტიალური მოდელები

R. W. Rollins and E. R. Hunt, "Exactly Solvable Model of a Physical System Exhibiting Universal Chaotic Behavior," *Phys. Rev. Lett.* 49, 1295-98 (1982).

J. N. Schulman, "Chaos in Piecewise-Linear Systems," *Phys. Rev. A* 28,477-79(1983).

E. R. Hunt and R. W. Rollins, "Exactly Solvable Model of a Physical System Exhibiting Multidimensional Chaotic Behavior," *Phys. Rev. A* 29, 1000-2 (1984).

T. Matsumoto, L. O. Chua, and S. Tanaka, "Simplest Chaotic Nonautonomous Circuit," *Phys. Rev.* 30, 1155-57 (1984).

S. Banerjee, J. A. Yorke, and C. Grebogi, "Robust Chaos," *Phys. Rev. Lett.* 80 3049-52 (1998).

M. Dutta, H. E. Nusse, E. Ott, J. A. Yorke, and G. Yuan, "Multiple Attractor Bifurcations: A Source of Unpredictability in Piecewise Smooth Systems," *Phys. Rev. Lett.* 83,4281-4284(1999).

J. D. Farmer, "Chaotic Attractors of an Infinite-Dimensional Dynamical System," *Physica D* 4, 366-93 (1982).

[Kaplan and Glass, 1995] pp. 183-188 დროში დაყოვნების მოდელის საინტერესო შესავალი.

G. Giacomelli and A. Politi, "Relationship between Delayed and Spatially extended Dynamical Systems," *Phys. Rev. Lett.* 76 2686-89 (1996).

სტოხასტიკური რეზონანსი

- F. Moss and K. Wiesenfeld, "The Benefits of Background Noise," *Scientific American* 273 (3) 66-69 (1995).
- A. R- Bulsara and L. Gammaitoni, "Tuning in to Noise," *Physics Today* 49 (3), 39[^]5 (1996).
- E. Simonott, M. Riani, C. Seife, M. Roberts, J. Twitty, and F. Moss, "Visual Perception of Stochastic Resonance," *Phys. Rev. Lett.* 78,1186-89 (1997).
- L. Gammaitoni, P. Hanggi, P. Jung, F. Marchesoni, "Stochastic Resonance," *Rev. Mod. Phys.* 70,223-87 (1998).
- K. Richardson, T. Imhoff, P. Grigg, and J. J. Collins, "Using electrical noise to enhance the ability of humans to detect subthreshold mechanical cutaneous stimuli," *Chaos* 8,599-603 (1998).

ალგორითმული კომპლექსურობა და ინფორმაციის თეორია

- R. Baierlein, *Atoms and Information Theory* (W. H. Freeman, San Francisco,1971). არაჩვეულებრივი შესავალი კურსი ინფორმაციის თეორიაში ფიზიკურ კონტექსტში.
- G. J. Chaitin, "Randomness and Mathematical Proof," *Scientific American* 232 (5), 47-52 (1975).
- V. M. Alekseev and M. V. Yakobson "Symbolic Dynamics and Hyperbolic Dynamic Systems," *Phys. Rep.* 75, 287-325 (1981). ნაშრომის პირველი გვერდები გვთავაზობს ქაოსური სისტემების ალგორითმული სირთულის ბრწყინვალე შესავალს. შემდეგ კი მოცემულია საკმაოდ რთული მათემატიკური ნაწილი.
- J. Ford, "How Random is a Coin Toss," *Physics Today* 36 (4), 40-47 (1983).
- იხილეთ ასევე
J. Ford in [Hao, 1988], pp. 139[^]7.
- G. J. Chaitin, *Algorithmic Information Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
- A. Shudo, "Algorithmic Complexity of the Eigenvalue Sequence of a Nonintegrable Hamiltonian System," *Phys. Rev. Lett.* 63, 1897-901 (1989). დამტკიცებულია, რომ ალგორითმის სირთულე არ არის კვანტური ქაოსის შესაბამისი საზომი.
- არაწრფივი სისტემების დინამიკის კონცეფციებისა და კომპიუტერულ ქსელში ქაოსის შესაძლებლობის გამოყენების შესახებ არსებობს რამდენიმე საინტერესო ნაშრომი:
- B. A. Huberman and T. Hogg, "Adaptation and Self-Repair in Parallel Computing Structures," *Phys. Rev. Lett.* 52, 1048-51 (1984).
- B. A. Huberman, "Computing with Attractors: From Self-repairing computers, to Ultradiffusion, and the Application of Dynamical Systems to Human enavior," in *Emerging Syntheses in Science*, D. Pines, ed. Vol. I, (Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1988).
- B. A. Huberman, "An Ecology of Machines, How Chaos Arises in Computer Networks," *The Sciences* (New York Academy of Sciences), 38-44 (July/August 1989).

ქაოსის კონტროლი

- E. Ott, C. Grebogi, and J. A. Yorke, "Controlling Chaos," *Phys. Rev. Lett.* 64 1196-99(1990).

- W. L. Ditto, S. N. Rauseo, and M. L. Spano, "Experimental Control of Chaos," *Phys. Rev. Lett.* 65, 3211-14 (1990).
- T. Shinbrot, E. Ott, C. Grebogi, and J. A. Yorke, "Using Chaos to Direct Trajectories to Targets," *Phys. Rev. Lett.* 65, 3215-18 (1990).
- Y. Braiman and I. Goldhirsch, "Taming Chaotic Dynamics with Weak Periodic Perturbations," *Phys. Rev. Lett.* 66, 2545-48 (1991).
- L. Pecora and T. Carroll, "Pseudoperiodic Driving: Eliminating Multiple Domains of Attraction Using Chaos," *Phys. Rev. Lett.* 67, 945-48 (1991).
- E. R. Hunt, "Stabilizing High-Period Orbits in a Chaotic System: The Diode Resonator," *Phys. Rev. Lett.* 67, 1953-55 (1991).
- U. Dressler and G. Nitsche, "Controlling Chaos Using Time Delay Coordinates," *Phys. Rev. Lett.* 68, 14 (1992).
- R. Roy, T. Murphy, T. Maier, Z. Gills, and E. R. Hunt, "Dynamical Control of a Chaotic Laser: Experimental Stabilization of a Globally Coupled System," *Phys. Rev. Lett.* 68, 1259-62 (1992).
- T. Shinbrot, W. Ditto, C. Grebogi, E. Ott, M. Spano, and J. A. Yorke, "Using the Sensitive Dependence of Chaos (the "Butterfly Effect") to Direct Trajectories in an Experimental Chaotic System," *Phys. Rev. Lett.* 68, 2863-66 (1992).
- Z. Gills, C. Iwata, R. Roy, I. Schwartz, and I. Triandof, "Tracking Unstable Steady States: Extending the Stability Regime of a Multimode Laser System," *Phys. Rev. Lett.* 69, 3169-72 (1992).
- D. Auerback, C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke, "Controlling Chaos in High Dimensional Systems," *Phys. Rev. Lett.* 69, 3479-82 (1992).
- W. L. Ditto and L. Pecora, "Mastering Chaos," *Scientific American* 269 (2), 78-84 (1993).
- T. Shinbrot, C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke, "Using small perturbations to control chaos," *Nature* 363, 411-17 (1993).
- D. J. Gauthier, D. W. Sukow, H. M. Concannon, and J. E. S. Socolar, "Stabilizing unstable periodic orbits in a fast diode resonator using continuous time-delay autosynchronization," *Phys. Rev. E* 50, 2343-46 (1994).
- E. Ott and M. Spano, "Controlling Chaos," *Physics Today* 48 (5), 34-40 (1995).
- T. Kapitaniak, *Controlling Chaos* (Academic Press, San Diego, 1996). An introduction to controlling chaos with a collection of thirteen reprints.
- K. Hall, D. J. Christini, M. Tremblay, J. J. Collins, L. Glass, and J. Billette, "Dynamic Control of Cardiac Alternans," *Phys. Rev. Lett.* 78, 4518-21 (1997).
- W. L. Ditto and K. Showalter, "Introduction: Control and synchronization of s" *Chaos* 7, 509-11 (1997). ქაოსის კონტროლისა და სინქრონიზაციისადმი მიძღვნილი ფუნდამენტური სტატია.
- D. J. Christini and J. J. Collins, "Control of chaos in excitable physiological system: A geometric analysis," *Chaos* 7, 544-49 (1997).
- K. Myneni, T. A. Barr, N. J. Corron, S. d. Pethel, "New Method for the Control of Fast Chaotic Oscillations," *Phys. Rev. Lett.* 83, 2175-78 (1999).
- H. G. Schuster, *Handbook of Chaos Control* (Wiley, New York, 1999). გვაწვდის შესავალ კურსს ქაოსის თეორიისა და ქაოსის კონტროლის მრავალგვარი საშუალებების შესახებ.

ქაოსის სინქრონიზაცია

- L. Pecora and T. Carroll, "Driving Systems with Chaotic Signals," *Phys. Rev. A* 44, 2374-83 (1991).

K. M. Cuomo and A. V. Oppenheim, "Circuit Implementation of Synchronized Chaos with Applications to Communications," *Phys. Rev. Lett.* 71, 65-68(1993).

S. H. Strogatz and I. Stewart, "Coupled Oscillators and Biological Synchronization," *Scientific American* 269 (6), 102-109 (1993).

T. C. Newell, P. M. Alsing, A. Gavrielides, and V. Kovanis, "Synchronization of Chaotic Diode Resonators by Occasional Proportional Feedback," *Phys. Rev. Lett.* 72, 1647-50 (1994).

L. Kocarev and U. Parlitz, "General Approach for Chaotic Synchronization with Applications to Communication," *Phys. Rev. Lett.* 74, 5028-31 (1995).

Y. Braiman, J. F. Lindner, and W. L. Ditto, "Taming spatiotemporal chaos with disorder," *Nature* 378, 465-67 (1995).

იხ. DIS97-ის სინქრონიზაციისა და კონტროლისადმი მიძღვნილი ნაწილი.

R. Fitzgerald, "Phase Synchronization May Reveal Communication Pathways in Brain Activity," *Physics Today* 52 (3), 17-19 (1999).

A. Neiman, L. Schimanksy-Geier, F. Moss, B. Shulgin, and J. J. Collins, "Synchronization of noisy systems by stochastic signals," *Phys. Rev. E* 60, 284-92 (1999).

A. Neiman, L. Schimanksy-Geier, A. Cornell-Bell, and F. Moss, "Noise-Enhanced Phase Synchronization in Excitable Media," *Phys. Rev. Lett.* 83, 4896-99(1999).

პროგნოზირება არაწრფივი დინამიკისა და ქაოსის პირობებში

J. D. Farmer and J. J. Sidorowich, "Predicting Chaotic Time Series," *Phys. Rev. Lett.* 59, 845-48 (1987).

M. Casdagli, "Nonlinear Predictions of Chaotic Time Series," *Physica D* 35, 335-56 (1989).

J. D. Farmer and J. J. Sidorowich, "Optimal Shadowing and Noise Reduction," *Physica D* 47, 373-92 (1991).

C. G. Schroer, T. Sauer, E. Ott, and J. A. Yorke, "Predicting Chaos Most of the Time from Embeddings with Self-Intersections," *Phys. Rev. Lett.* 80, 1410-13 (1998).

არაწრფივი სისტემების დინამიკისა და ქაოსის გამოყენება სხვა სფეროებში

აკუსტიკა

W. Lauterborn and U. Parlitz, "Methods of chaos physics and their application to acoustics," *J. Acoust. Soc. Am.* 84, 1975-93 (1988).

D. Crighton and L. A. Ostrovsky, "Introduction to acoustical chaos," *Chaos* 5 (3), 495 (1995). Introduction to a focus issue on acoustical chaos.

D. M. Campbell, "Nonlinear dynamics of musical reed and brass wind instruments," *Contemporary Physics* 40, 415-431 (1999).

ასტროფიზიკა

G. J. Sussman and J. Wisdom, "Chaotic Evolution of the Solar System," *Science* 257, 56-62 (1992). სპეციალური კომპიუტერი გამოიყენეს იმისათვის, რომ მოეხდინათ პლანეტების ტრაექტორიათა მოდელირება 100 მილიონი წლის ინტერვალისათვის. მზის სისტემას აქვს ლუაპონოვის დადებითი ექსპონენტი $l/X = 4$ მილიონი წლით.

J. R. Buchler, T. Serre, and Z. Kollath, "A Chaotic Pulsing Star: The Case of R Scuti," *Phys. Rev. Lett.* 73, 842-45 (1995).

W. Vieira and P. Letelier, "Chaos around a Henon-Heiles-Inspired Exact Perturbation of a Black Hole," *Phys. Rev. Lett.* 76, 1409-12 (1996).

M. Palus and D. Novotna, "Sunspot Cycle: A Driven Nonlinear Oscillator?" *Phys. Rev. Lett.* 83, 3406-9 (1999).

ბიომედიცინა

B. J. West, *Fractal Physiology and Chaos in Medicine* (World Scientific Publishing, River Edge, NJ, 1990).

L. Glass, "Nonlinear dynamics of physiological function and control," *Chaos* 1, 247-50 (1991).

F. Witkowski, K. Kavanagh, P. Penkoske, R. Plonsey, M. Spano, W. Ditto, and D. Kaplan, "Evidence for Determinism in Ventricular Fibrillation," *Phys. Rev. Lett.* 75, 1230-33 (1995).

J. Belair, L. Glass, U. an der Heiden, and J. Milton, "Dynamical disease: Identification, temporal aspects and treatment strategies," *Chaos* 5 (1), 1-7 (1995).

L. Glass, "Dynamics of Cardiac Arrhythmias," *Physics Today* 49 (8), 40-45 (1996).

A. Mandell and K. Selz, "Entropy conservation as $h_{T\mu} \approx \lambda_{\mu} d_{\mu}$ in urobiological dynamical systems," *Chaos* 7, 67-81 (1997).

P. Muruganandam and M. Lakshmanan, "Bifurcation analysis of the travelling waveform of FitzHugh-Nagumo nerve conduction model equation," *Chaos* 7, 476-87 (1997).

R. Larter, B. Speelman, and R. W. Worth, "A coupled ordinary differential equation lattice model for the simulation of epileptic seizures," *Chaos* 9, 795-804 (1999).

ქიმიური მანქანათმშენებლობა [Ottino, 1989]

Chaos 9 (1) (1999). ქიმიურ მანქანათმშენებლობაში ასეული ქაოსისადმი მიძღვნილი სტატია.

ქიმია

S. K. Scott, *Oscillations, Waves, and Chaos in Chemical Kinetics* (Oxford University Press, New York, 1994).

W. G. Rothschild, *Fractals in Chemistry* (Wiley, New York, 1998).

Irving R. Epstein and John A. Pojman, *An Introduction to Nonlinear Chemical Dynamics: Oscillations, Waves, Patterns, and Chaos* (Oxford University Press, New York, 1998).

M. Dolnik, T. Gardner, I. Epstein, and J. Collins, "Frequency Control of an Oscillatory Reaction by Reversible Binding of an Autocatalyst," *Phys. Rev. Lett.* 82, 1582-85 (1999).

I. R. Epstein and J. A. Pojman, "Overview: Nonlinear dynamics related to polymeric systems," *Chaos* 9, 255-59 (1999). ფუნდამენტური სტატია პოლიმერული სისტემების არაწრფივი დინამიკის შესახებ.

კონდენსირებული ნივთიერების ფიზიკა

Philip E. Wigen, ed., *Nonlinear Phenomena and Chaos in Magnetic Materials* (World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1994).

კრისტალოგრაფია და კომუნიკაციის საშუალებანი

E. Bollt, Y.-C. Lai, and C. Grebogi, "Coding, Channel Capacity, and Noise Resistance in Communicating with Chaos," *Phys. Rev. Lett.* **79**, 3787-90 (1997).

M. S. Baptista, "Cryptography with chaos," *Phys. Lett. A* **240**,50-54 (1998).

G. VanWiggeren and R. Roy, "Optical Communication with Chaotic Waveforms," *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3547-50 (1998).

G. VanWiggeren and R. Roy, "Communication with Chaotic Lasers," *Science* **279**, 1198-1200 (1998). შესაძლებელია მაღალგანზომილებიანი ქაოსური სისტემებს გამოყენება შეტყობინებების გასაშიფრად.

J.P. Goedgebuer, L. Larger, and H. Porte, "Optical Cryptosystem Based on Synchronization of Hyperchaos Generated by a Delayed Feedback Tunable Laser Diode," *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2249-52 (1998).

J. Geddes, K. Short, and K. Black, "Extraction of Signals from Chaotic Laser Data," *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5389-92 (1999).

ეკოლოგია

S. Ellner and P. Turchin, "Chaos in a Noisy World: New Methods and Evidence from Time-Series Analysis," *The American Naturalist* **145**, 343-75 (1995). სახეობათა დინამიკის გამოყენება ეკოლოგიაში

D. Zanette and S. Manrubia, "Role of Intermittency in Urban Development: A Model of Large-Scale City Formation," *Phys. Rev. Lett.* **79**, 523-26 (1997).

J. Maron and S. Harrison, "Spatial Pattern Formation in an Insect Host-Parasitoid System," *Science* **278**, 1619-21 (1997).

P. Rohani, T. Lewis, D. Griinbaum, and G. Ruxton, "Spatial self-organization in ecology: pretty patterns or robust reality," *TREE* **12** (2), 70-74 (1997).

ეკონომიკა

W. A. Brooks and C. L. Sayers, "Is the Business Cycle Characterized by Deterministic Chaos?" *J. of Monetary Economics* **22**, 71-90 (1988).

W. J. Baumol and J. Benhabib, "Chaos: Significance, Mechanism, and Economic Applications," *J. Econ. Perspectives* **3**, 77-105 (1989).

C. L. Sayers, "Statistical Inference Based Upon Nonlinear Science," *European Economic Review* **35**, 306-12 (1991).

E. E. Peters, *Chaos and Order in the Capital Markets* (Wiley, New York, 1991).

R. Palmer, W. B. Arthur, J. Holland, B. LeBaron, and P. Tayler, "Artificial economic life: a simple model of a stockmarket," *Physica D* **75**,264--1'4 (1994).

B. B. Mandelbrot, *Fractals and Scaling in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk* (Springer-Verlag, New York, 1997).

Y. Lee, L. Amaral, D. Canning, M. Meyer and H. E. Stanley, "Universal Features in the Growth Dynamics of Complex Organizations," *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3275-78 (1998).

Rosario N. Mantegna and H. Eugene Stanley, *An Introduction to Econophysics* (Cambridge University Press, New York, 1999).

ელექტროტექნიკა

Proc. IEEE, August (1987). სპეციალური ნაშრომი ქაოსურ სისტემებზე, სადაც აქცენტი ეთდება ელექტრულ სისტემებზე. მრავალი ელექტრული წრედი ავლენს ქაოსურ ქმედებას.

გეოფიზიკა

R. Pool, "Ecologists Flirt with Chaos," *Science* **243**, 310-13 (1989).

C H. Scholz and B. B. Mandelbrot, eds. *Fractals in Geophysics* (Birkhauser Verlag, Basel and Boston, 1989).

M Fleischmann and D. J. Teldesley, eds. *Fractals in the Natural Sciences* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990).

Geophys. Res. Lett. 18 (8) (1991) has a special section: "Chaos and Stochasticity in Space Plasmas."

N. Lam and L. De Cola, *Fractals in Geography* (PTR Prentice-Hall, 1993).

A. Sharma, "Assessing the magnetosphere's nonlinear behavior: Its dimension is low, its predictability, high," *Rev. Geophysics Suppl.* 645-50 (July, 1995).

D. L. Turcotte, *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics*, 2nd ed. (Cambridge University Press, 1997).

ლიტერატურის თეორია

Chaos and Order: Complex Dynamics in Literature and Science. N. Katherine Hayles, ed. (University of Chicago Press, Chicago, 1991).

მანქანათმშენებლობა

T. Burns and M. Davies, "Nonlinear Dynamics Model for Chip Segmentation in Machining," *Phys. Rev. Lett.* 79,447-50 (1997).

C. Caravati, F. Delogu, G. Cocco, and M. Rustici, "Hyperchaotic qualities of the ball motion in a ball milling device," *Chaos* 9, 219-26 (1999).

არაწრფივ დინამიკასა და ქაოსთან დაკავშირებული ექსპერიმენტები

E. V. Mielczarek, J. S. Turner, D. Leiter, and L. Davis, "Chemical Clocks: Experimental and Theoretical Models of Nonlinear Behavior," *Am. J. Phys.* **51**, 32-42 (1983). ქიმიური რეაქციები ავლენენ ქაოსურ ქმედებას.

R. Shaw, *The Dripping Faucet as a Model Chaotic System* (Aerial Press, Santa Cruz, CA, 1984).

R. Van Buskirk and C. Jeffries, "Observation of Chaotic Dynamics of Coupled Oscillators," *Phys. Rev.* **31**, 3332-57 (1985). ნახევარგამტარული დიოდები ახდენენ არაწრფივი ქმედების მრავალი ასპექტის დემონსტრაციას.

P. Martien, S. C. Pope, P. L. Scott, and R. S. Shaw, "The Chaotic Behavior of the Leaky Faucet," *Phys. Lett. A* **110**, 399-404 (1985).

H. Meissner and G. Schmidt, "A Simple Experiment for Studying the Transition from Order to Chaos," *Am. J. Phys.* **54**, 800-4 (1986). მრავალფეროვანი ექსპერიმენტები with magnets driven by oscillating currents.

- N. B. Tufillaro and A. M. Albano, "Chaotic Dynamics of a Bouncing Ball," *Am. J. Phys.* **54**,939-44 (1986).
- T. M. Mello and N. B. Tufillaro, "Strange Attractors of a Bouncing Ball," *Am. J. Phys.* **55**, 316-20 (1987).
- K. Briggs, "Simple Experiments in Chaotic Dynamics," *Am. J. Phys.* **55**, 1083-89 (1987).
სხვადასხვა ელექტრული და მექანიკური ექსპერიმენტების მიმოხილვა.
- R. Landauer, "Nonlinearity: Historical and Technological Review," in *Nonlinearity in Condensed Matter*, A. R. Bishop, D. K. Campbell, P. Kumar, and S. E. Trullinger, eds. (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1987). ტექნოლოგიაში არაწრფივობის გამოყენების მრავალი საინტერესო ისტორიული დეტალი.
- M. J. Ballico, M. L. Sawley, and F. Skiff, "The Bipolar Motor: A Simple Demonstration of Deterministic Chaos," *Am. J. Phys.* **58**,58-61 (1990).
- R. F. Cahalan, H. Leidecker, and G. D. Cahalan, "Chaotic Rhythms of a Dripping Faucet," *Computers in Physics* **4**, 368-83 (1990).
- A. Ojha, S. Moon, B. Hoeling, and P. B. Siegel, "Measurements of the Transient Motion of a Simple Nonlinear System," *Am. J. Phys.* **59**, 614-19 (1991).
- K. Dreyer and F. R. Hickey, "The Route to Chaos in a Dripping Faucet," *Am. J. Phys.* **59**, 619-27 (1991).
- M. T. Levinson, "The Chaotic Oscilloscope," *Am. J. Phys.* **61**, 155-165 (1993).
- B. K. Clark, R. F. Martin, Jr., R. J. Moore, and K. E. Jesse, "Fractal dimension of the strange attractor of the bouncing ball circuit," *Am. J. Phys.* **63**, 157-63(1995).
- Thomas L. Carroll, "A simple circuit for demonstrating regular and synchronized chaos," *Am. J. Phys.* **63**, 377-379 (1995).
- Th. Pierre, G. Bonhomme, and A. Atipo, "Controlling the Chaotic Regime of Nonlinear Ionization Waves using the Time-Delay Autosynchronization Method," *Phys. Rev. Lett.* **76**,2290-93 (1996).
- Stephen J. Van Hook and Michael F. Schatz, "Simple Demonstrations of Pattern Formation," *The Physics Teacher* **35**, 391-95 (1997).
- A. Siahmakoun, V. A. French, and J. Patterson, "Nonlinear dynamics of a sinusoidally driven pendulum in a repulsive magnetic field," *Am. J. Phys.* **65** (5), 393-100 (1997).
- E. Lanzara, R. N. Mangegna, B. Spagnolo, and R. Zangara, "Experimental study of a nonlinear system in the presence of noise: The stochastic resonance," *Am. J. Phys.* **65**, 341-49 (1997).
- J. E. Berger and G. Nunes, Jr., "A mechanical Duffing oscillator for the undergraduate laboratory," *Am. J. Phys.* **65**, 841-846 (1997).
- [Epstein and Pojman, 1998]. აღწერილია ექსპერიმენტის ჩატარების მეთოდის და დიზაინი ბაკალავრებისათვის.
- W. L. Shew, H. A. Coy, and J. F. Lindner, "Taming chaos with disorder in a pendulum array," *Am. J. Phys.* **67**, 703-708 (1999).

დანართი A

ფურიეს ენერგეტიკული სპექტრები

A.1 შესავალი და ძირითადი განსაზღვრებები

მოცემულ დანართში შემოგთავაზებთ ფურიეს ანალიზსა და სინთეზთან, აგრეთვე ფურიეს ენერგეტიკულ სპექტრებთან დაკავშირებული მეთოდების მოკლე შესავალს. დეტალური მათემატიკური ინფორმაციის მისაღებად იხ. Mary L. Boas, *Mathematical Methods for Physical Sciences*, 2nd ed. (Wiley, New York, 1983).

ფურიეს ანალიზის უმთავრესი ნაწილი ფურიეს თეორემაა, რომელიც ნებისმიერი სახის პერიოდული ფუნქციის სინუსისა და კოსინუსის ფუნქციების მწკრივებად წარმოდგენის საშუალებას გვაძლევს.

განსაზღვრება: T პერიოდის მქონე პერიოდული ფუნქცია აკმაყოფილებს პირობას $f(t+T) = f(t)$ ნებისმიერი t -სთვის.

ფურიეს თეორემა: T პერიოდის მქონე ნებისმიერი პერიოდული ფუნქცია შესაძლებელია გამოისახოს შემდეგი სახით:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t) \quad (\text{A.1-1})$$

სადაც $\omega_0 = 2\pi/T$.

ფურიეს თეორემა გვაუწყებს, რომ შესაძლებელია პერიოდული ფუნქციის გამოსახვა მულტიპლი ვიწროებისა და კოსინუსისა და სინუსის ვიწროების მწკრივების მეშვეობით, სადაც სინუსებთან და კოსინუსებთან დაკავშირებული სინშირები „ძირითადი სინშირის“ მთელი ჯერადებია („ჰარმონიკები“) (ქვემოთ დავრწმუნდებით, თუ რატომ იმყოფება ორიანი a_0 ვიწროის მნიშვნელობა.)

როგორ ვადგენთ a_n და b_n „ფურიეს ამპლიტუდებს“ (ან „ფურიეს კოეფიციენტებს“) მოცემული $f(t)$ ფუნქციისათვის? კოეფიციენტებს ე.წ. „ფურიეს ხერხით“ ვპოულობთ: a_m კოეფიციენტის განსაზღვრისთვის (A.1-1) გამოსახულების ორივე მხარეს ჯერ $\cos(m\omega_0 t)$ -ზე

ვამრავლებთ, სადაც m დადებითი მთელი რიცხვია, ხოლო შემდეგ ვაინტეგრებთ შემდეგ $t=0$ -დან $t=T$ -მდე:

$$\int_0^T f(t) \cos(m\omega_0 t) dt = \int_0^T dt \frac{a_0}{2} \cos(m\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^T dt \cos(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^T dt \cos(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) \quad (\text{A.1-2})$$

როდესაც $m=n$, (A.1-2)-ის მარჯვენა მხარეში მყოფი ნებისმიერი ინტეგრალი, გარდა მეორისა, ნულის ტოლია (ვამბობთ, რომ განსხვავებული m -ისა და n -ის მქონე სინუსები და კოსინუსები „ორთოგონალურია ნულიდან T -მდე ინტერვალში ინტეგრაციის თვალსაზრისით“). $\sin(m\omega_0 t)$ -ზე ვამრავლებთ შედეგად მივიღებთ:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T dt f(t) \cos(m\omega_0 t)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T dt f(t) \sin(m\omega_0 t) \quad (\text{A.1-3})$$

შენიშნეთ, რომ $a_0/2$ წარმოადგენს $f(t)$ -ის საშუალო სიდიდეს ერთი პერიოდის განმავლობაში.

ამოცანა A.1. აჩვენეთ, რომ თუ (A.1-2) და (A.1-3) გამოსახულებებში ინტეგრალებს შევაფასებთ დროის ისეთი ინტერვალისათვის, რომლის ხანგრძლივობაც T პერიოდია, t დერძის გასწვრივ ამ ინტერვალის მდებარეობასაც განვსაზღვრავთ.

(A.1-3) ფორმულები გვაძლევს ფურიეს კოეფიციენტების დადგენის საშუალებას ნებისმიერი $f(t)$ -სთვის. ამ პროცესს **ფურიეს ანალიზს** ვუწოდებთ, რადგან $f(t)$ „სიგნალის“ სპექტრულ შემადგენლობას ვიკვლევთ. აწონილი სინუსებისა და კოსინუსების მწკრივების მეშვეობით $f(t)$ -ს განსაზღვრის შებრუნებულ პროცესს **ფურიეს სინთეზი** ეწოდება. ნებისმიერი კოეფიციენტი გვიჩვენებს, თუ რა სახითაა საწყისი $f(t)$ ფუნქცია დაკავშირებული თითოეულ ჰარმონიკასთან. თუ $f(t)$ „ძალიან ჰგავს“ $\cos(m\omega_0 t)$ -ს, მაშინ ნულიდან T -მდე ინტეგრებისას $f(t)$ და $\cos(m\omega_0 t)$ ერთმანეთთან „ფაზაში“ იქნება და ინტეგრალქვეშა გამოსახულება \cos^2 -ის პროპორციული იქნება. შედეგად მიღებული a_m კოეფიციენტის აბსოლუტური სიდიდე დიდი იქნება. თუ $f(t)$ საერთოდ არ „მოჰგავს“ $\cos(m\omega_0 t)$ -ს, მაშინ ნულიდან T -მდე ინტეგრებისას

ინტეგრალქვეშა გამოსახულება დადებით და უარყოფით მნიშვნელობებს შორის მერყეობს და მიღებული a_m კოეფიციენტის აბსოლუტური სიდიდე მცირე იქნება. კოეფიციენტების ფიზიკურ არსს უფრო დეტალურად ქვემოთ ავხსნით.

მათემატიკური პირობები

$f(t)$ -ს ფურიეს მწკრივის არსებობის ფუნქციის მიერ ე.წ. დირიხლეს პირობების დაკმაყოფილება:

1. $f(t)$ ფუნქციას გააჩნია წყვეტათა სასრული რაოდენობა T პერიოდის ფარგლებში (არის უბან-უბან დიფერენცირებადი).
2. $f(t)$ ფუნქციას გააჩნია სასრული საშუალო მნიშვნელობა.
3. $f(t)$ ფუნქციას T პერიოდის ფარგლებში გააჩნია ფარდობითი მაქსიმუმებისა და მინიმუმების სასრული რაოდენობა.

თუ ზემოთ მოყვანილი პირობები სრულდება, მაშინ მწკრივი $f(t)$ -ს მიმართ კრებადია (სადაც $f(t)$ უწყვეტია), ხოლო იმ t წერტილებში კი, სადაც $f(t)$ ფუნქცია წყვეტას განიცდის, გვექნება კრებადობა $f(t_+)$ და $f(t_-)$ მნიშვნელობების საშუალო არითმეტიკულის მიმართ.

A.2 ექსპონენციალური მწკრივები

თუ სინუსებისა და კოსინუსების მწკრივებს კომპლექსური ექსპონენციალური ფუნქციების სახით გადავწერთ, მივიღებთ დიდი რაოდენობით ალგებრულ გამარტივებებს. ამოვწეროთ სინუსებისა და კოსინუსების შემცველი მწკრივის რამდენიმე წევრი და შემდეგ ეილერის ფორმულის გამოყენებით ეს წევრები ხელახლა დავავჯგუფოთ:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega_0 t) + b_1 \sin(\omega_0 t) + \dots \\
 &= \frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{2} [e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}] + \frac{b_1}{2i} [e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}] + \dots \\
 &= \frac{a_0}{2} + e^{i\omega_0 t} \left[\frac{a_1}{2} - \frac{ib_1}{2} \right] + e^{-i\omega_0 t} \left[\frac{a_1}{2} + \frac{ib_1}{2} \right] + \dots
 \end{aligned}
 \tag{A.2-1}$$

ამრიგად, შეგვიძლია $f(t)$ ფუნქციის კომპლექსური ექსპონენციალების ჯამის სახით გამოსახვა:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \quad (\text{A.2-2})$$

სადაც $c_n = 1/2(a_n - ib_n)$ და $c_{-n} = 1/2(a_n + ib_n)$.

c_n კოეფიციენტების დადგენა (A.2-2) განტოლების ორივე მხარის $e^{-im\omega_0 t}$ -ზე გამრავლებისა და შემდეგ ნულიდან T -მდე ინტეგრირების გზით ხდება. მარჯვენა მხარეში მიღებული საბოლოო ინტეგრალი ნულის ტოლია, $m \neq n$ შემთხვევის გარდა, როდესაც ინტეგრალი T -ს ტოლია. ამრიგად:

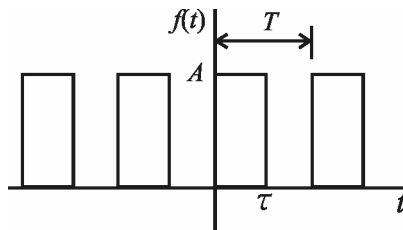
$$c_m = \frac{1}{T} \int_0^T dt f(t) e^{-im\omega_0 t} \quad (\text{A.2-3})$$

შენიშვნა: თუ $f(t)$ ნამდვილი ფუნქციაა, მაშინ $c_n = (c_{-n})^*$.

ამოცანა A.2. დაამტკიცეთ, რომ ქვემოთ მოყვანილი ფუნქციისთვის და ნულის არატოლი m -სთვის:

$$c_m = \frac{iA}{2\pi m} [e^{im2\pi/T} - 1]$$

და $c_0 = A\tau/T$. $f(t)$ ფუნქცია წარმოადგენს პერიოდულ „მართკუთხა ტალღას“, რომლისთვისაც $f(t) = A$, როდესაც $0 < t < \tau$, $f(t) = 0$ როდესაც $\tau < t < T$ და $f(t) = f(t+T)$.



A.3 ენერგეტიკული სპექტრი

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ფურიეს კოეფიციენტები გვამცნობს, თუ რამდენი სხვადასხვა ტიპის სიხშირისაგან შეიძლება შედგებოდეს სიგნალი. ჩვენ თავდაპირველად ვითვლით სიგნალის დროში გასაშუალოებულ კვადრატულ მნიშვნელობას. ამას იმიტომ ვაკეთებთ, რომ ხშირად (მაგრამ არა ყოველთვის) გამზომი ხელსაწყოები რეაგირებს საშუალო მნიშვნელობაზე. მაგალითად, განვიხილოთ რეზისტორი, რომელშიც საშუალო სიმძლავრე რეზისტორში გამავალი დენის ძალის დროში გასაშუალოებული კვადრატული მნიშვნელობისადმი პროპორციულია. გარდა ამისა, ელექტრომაგნიტური ტალღის მიერ გადატანილი ენერგიის საშუალო სიმძლავრე ელექტრული ველის დაძაბულობის ამპლიტუდის კვადრატის დროში გასაშუალოებული მნიშვნელობისადმი პროპორციულია. დროში გასაშუალოებული მნიშვნელობა განსაზღვრულია, როგორც

$$\langle f(t)^2 \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_0^T dt [f(t)]^2 \quad (\text{A.3-1})$$

მრგვალ ფრჩხილებში t -ს ყოფნა არ ნიშნავს, რომ საშუალო მნიშვნელობა დამოკიდებულია დროზე. პერიოდული ფუნქციისთვის ამგვარად განსაზღვრული საშუალო მნიშვნელობა დროის მიმართ დამოუკიდებელია.

ამჯერად $[f(t)]^2$ -ს ფურიეს ექსპონენციალური ჯამის სახით ჩავწერთ:

$$\begin{aligned} [f(t)]^2 &= \left(\sum_m c_m e^{im\omega_0 t} \right) \left(\sum_n c_n e^{in\omega_0 t} \right) \\ &= \sum_{m,n} c_m c_n e^{i(n+m)\omega_0 t} \end{aligned} \quad (\text{A.3-2})$$

ცხადია, რომ როდესაც მარჯვენა ნაწილის ინტეგრებას მოვახდენთ ნულიდან T -მდე ინტერვალში, მივიღებთ ნულის ტოლ მნიშვნელობას, გარდა $m = -n$ შემთხვევისა, როდესაც გვექნება T -ს ტოლი მნიშვნელობა. ამრიგად, სიგნალის საშუალო კვადრატული მნიშვნელობა მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$\langle f(t)^2 \rangle \equiv \sum_n c_n c_{-n} = \sum_n |c_n|^2 \quad (\text{A.3-3})$$

სადაც ვუშვებთ, რომ $f(t)$ ფუნქცია ნამდვილია და, ამრიგად, $c_{-n} = c_n^*$. თუ ავაგებთ $|c_n|^2$ სიდიდის გრაფიკს, როგორც ჰარმონიკის რიგითი n ნომრის ფუნქციას, მიღებულ მრუდს სიგნალის „ენერგეტიკული სპექტრი“ ეწოდება. მიღებული შედეგი გვამცნობს, რომ ფურიეს c_n კოეფიციენტის აბსოლუტური მნიშვნელობის კვადრატი n რიგის ჰარმონიკასთან დაკავშირებული სიმძლავრის მნიშვნელობას გვადლევს.

ამოცანა A.3. ამოცანა A.2-ში მოყვანილი შემთხვევისათვის აჩვენეთ, რომ ფურიეს ენერგეტიკული სპექტრი მოიცემა შემდეგი სახით:

$$|c_n|^2 = \frac{A^2}{2\pi^2 n^2} [1 - \cos(2\pi n\tau / T)]$$

მიღებული შედეგის მიხედვით ააგეთ გრაფიკი n -ის ფუნქციის სახით, როდესაც $\tau = T/2$.

A.4 არაპერიოდული ფუნქციები

შესაძლებელია ფურიეს ანალიზის მრავალ არაპერიოდულ ფუნქციაზე განზოგადება (ეს შემთხვევა განსაკუთრებულ ინტერესს იწვევს ქაოსის მკვლევართა შორის). მთავარი იდეა მდგომარეობს იმაში, რომ წარმოდგენას ვიწყებთ პერიოდული ტალღის მეშვეობით და შემდეგ პერიოდს ვანიჭებთ უსასრულო მნიშვნელობას. მაგალითად, მართკუთხა იმპულსის სიგნალის კვლევა მართკუთხა იმპულსების პერიოდულ მწკრივებთან დაკავშირებით ზემოთ მიღებული შედეგის გამოყენებითა და A.1 ნახაზზე წარმოდგენილი T პერიოდისთვის უსასრულოდ დიდი მნიშვნელობის მინიჭების გზით შეგვიძლია.

მაგალითისათვის განვიხილოთ შემდეგი სახით წარმოდგენილი ფურიეს ექსპონენციალური მწკრივი.

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} dt' f(t') e^{-im\omega_0 t'} \right] e^{im\omega_0 t} \quad (A.4-1)$$

მოხერხებულობისთვის ინტეგრების ღიაპაზონი ალებულია იმგვარად, რომ იგი სიმეტრიული იყოს $t=0$ მნიშვნელობის მიმართ.

შემოვიყვანოთ ახალი ცვლადი $\omega_m = m\omega_0$. შენიშნეთ, რომ მოსაზღვრე ω_m მნიშვნელობებს შორის სხვაობა

$$\Delta\omega_m = \omega_0 \quad (\text{A.4-2})$$

ამრიგად, (A.4-1) შეგვიძლია ასე გადავწეროთ

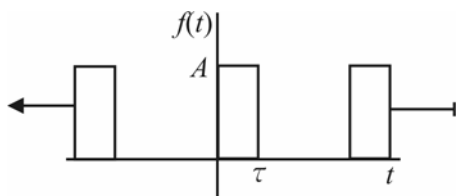
$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Delta\omega_m}{2\pi} \int_{-T/2}^{+T/2} dt' f(t') e^{-i\omega_m t'} \right] e^{i\omega_m t} \quad (\text{A.4-3})$$

$T \rightarrow \infty$ ზღვარში ვუშვებთ, რომ $\Delta\omega_m \rightarrow d\omega$. შემდეგ ჯამს – ინტეგრალით, ხოლო ω_m -ს ω უწყვეტი ცვლადით შევცვლით და მოცემული ზღვრის პირობებში დავწერთ:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega c(\omega) e^{i\omega t} \quad (\text{A.4-4})$$

სადაც

$$c(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) e^{-i\omega t} \quad (\text{A.4-5})$$



ნახ. A.1. თუ მართკუთხა იმპულსების მწკრივის პერიოდი უსასრულო ხდება (როდესაც თითოეული იმპულსის სიგანე ფიქსირებულია), მაშინ სიგნალი იზოლირებული მართკუთხა იმპულსის ექვივალენტური

იქნება.

$c(\omega)$ ფუნქციას $f(t)$ -ს **ფურიეს გარდაქმნა** ეწოდება. ვამბობთ, რომ $c(\omega)$ და $f(t)$ ფუნქციები ქმნის ფურიეს გარდაქმნათა წყვილს ($1/2\pi$ სიდიდე სიმეტრიულ ნაწილებად დაყვავით, ამიტომ გვექნება როგორც $f(t)$ -სთან, ასევე მის ფურიეს გარდაქმნასთან დაკავშირებული $1/\sqrt{2\pi}$ კოეფიციენტი).

უნდა აღინიშნოს, რომ (A.4-5) ფურიეს გარდაქმნის ინტეგრალი ω ცვლადის უარყოფითი მნიშვნელობების მიხედვით ინტეგრებასაც მოიცავს. ეს უარყოფითი მნიშვნელობები (A.2-2) განტოლებაში n მთელი რიცხვის დადებითი და უარყოფითი მნიშვნელობების მომცემი სინუსებისა და კოსინუსების ჯამების კომპლექსურ ექსპონენციალებად „გარდაქმნილი“ მიმდევრობაა და უწყვეტ ცვლადზე გადასვლა

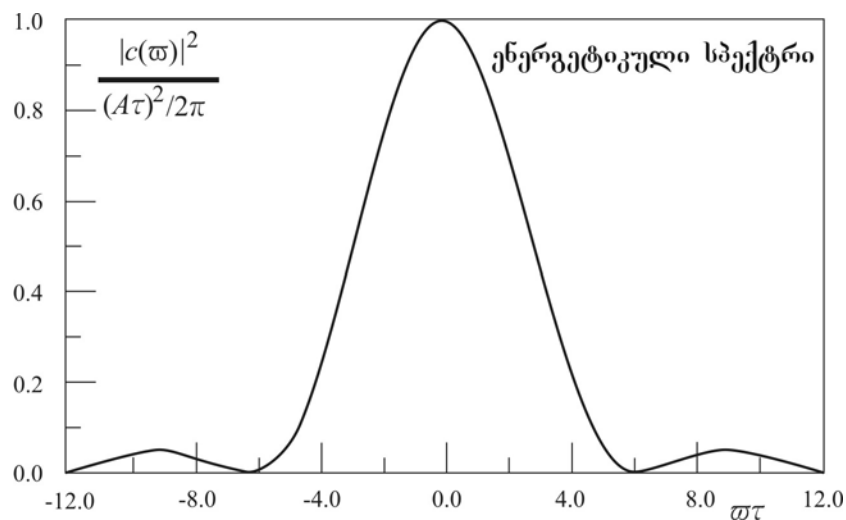
კომპლექსური ექსპონენციალების მთელი რიცხვის ინდექსის მიმართ პროპორციულია. უარყოფით სიხშირებს რაიმე განსაკუთრებული დატვირთვა არ უკავშირდება.

არაპერიოდული ფუნქციის შემთხვევაში ენერგეტიკული სპექტრი ფურიეს გარდაქმნის ფუნქციის აბსოლუტური მნიშვნელობის კვადრატითაა მოცემული და გარდაქმნის ცვლადის უწყვეტი ფუნქციაა. $|c(\omega)|^2 d\omega$ სიდიდე წამოადგენს სიხშირეთა $(\omega; \omega+d\omega)$ დიაპაზონში არსებული სიმძლავრისადმი პროპორციულ სიდიდეს. მაგალითად, ზემოთ მოყვანილი მართკუთხა იმპულსისთვის ენერგეტიკული სპექტრი მოიცემა შემდეგი სახით:

$$|c(\omega)|^2 = \frac{A^2}{\pi\omega^2} [1 - \cos \omega\tau] \quad (\text{A.4-6})$$

მიღებული შედეგის მიხედვით აგებული გრაფიკი A.2 ნახაზზეა ნაჩვენები.

აღსანიშნავია, რომ ენერგეტიკული სპექტრი ω -ს ცვლილებასთან ერთად სწრაფად ეცემა. ენერგეტიკული სპექტრის „სიგანის“ საზომად შეგვიძლია სპექტრის პირველ ორ ნულს ($\omega = \pm 2\pi/\tau$) შორის არსებული დიაპაზონის გამოყენება.



ნახ. A.2. ფურიეს ენერგეტიკული სპექტრი τ ხანგრძლივობის მქონე მართკუთხა იმპულსისგან შემდგარი არაპერიოდული სიგნალისთვის. ენერგეტიკული სპექტრი ამჯერად ω სიხშირის უწყვეტი ფუნქციაა. $(A\tau)^2/2\pi$ წარმოადგენს მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

ამრიგად, სიგანის მნიშვნელობაა $\Delta\omega=4\pi/\tau$. აღსანიშნავია, რომ $\Delta\omega$ -სა და τ -ს ნამრავლი მუდმივი სიდიდეა:

$$(\Delta\omega)\tau = 4\pi \quad (\text{A.4-7})$$

ეს შედეგი ფაქტობრივად არაპერიოდული სიგნალის დროით ხანგრძლივობასა და შესაბამისი ფურიეს ენერგეტიკული სპექტრის „ფართობს“ ან სიგნალში შემავალ სინშირეთა დიაპაზონს შორის ზოგადი კავშირის მაგალითია (ამ ნამრავლს ზოგჯერ *იმპულსის ხანგრძლივობისა და სიგანის ნამრავლს* უწოდებენ). თუ გადავალთ „ჩვეულებრივ“ $f=\omega/2\pi$ სინშირეზე, ზემოთ ხსენებული ნამრავლი შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$(\Delta f)\tau = 2 \quad (\text{A.4-8})$$

შედარებით დეტალური, მაგრამ რთული დამტკიცება გვიჩვენებს, რომ $(\Delta f)\tau \geq 1$. [მაგალითად, იხილეთ M. Born and E. Wolf, Principles of Optics, 5nd ed. (Pergamon Press, New York, 1975, გვ. 540-44)] (ლიტერატურაში ნამრავლის სხვა ფორმები Δf -სა და τ -ს ზუსტ განსაზღვრებებზეა დამოკიდებული. მნიშვნელოვანია, რომ არსებობს ნამრავლის გარკვეული ქვედა ზღვარი. τ -ის შემცირებასთან ერთად სიგნალში შემავალი Δf სინშირეების განვრცობა აუცილებლად მატულობს).

ამოცანა A.4. მიიღეთ ფურიეს გარდაქმნა, შესაბამისი ენერგეტიკული სპექტრი და *იმპულსის ხანგრძლივობისა და სიგანის ნამრავლი* არაპერიოდული ხასიათს მქონე შემდეგი ტალღისათვის:

$$f(t)=0, \quad t < 0\text{-ისა და } t > \tau\text{-სთვის.}$$

$$f(t)=A\cos(\omega t), \quad 0 \leq t \leq \tau\text{-სთვის.}$$

შეადარეთ თქვენ მიერ მიღებული შედეგები (A.4-6) და (A.4-7) გამოსახულებების მიხედვით მიღებულ შედეგებს.

A.5 ფურიეს ანალიზი და არაწრფივი დინამიკა

რა სარგებლობა მოაქვს ფურიეს ანალიზს არაწრფივ დინამიკასთან დაკავშირებით? როგორც უკვე ვნახეთ, ფურიეს ანალიზი სიგნალის სპექტრული შემადგენლობის განსაზღვრის საშუალებას გვაძლევს. თუ სიგნალი პერიოდული ან კვაზი-პერიოდულია, მაშინ ფურიეს ენერგეტიკული სპექტრი ძირითად სიხშირეებზე „პიკების“ მიმდევრობისგან, მათი ჰარმონიკებისა და სხვადასხვა სიხშირეების ჯამებითა და სხვაობებით მიღებული სიხშირეებისგან შედგება. აქ მთავარი ის არის, რომ სპექტრი სიხშირეთა დისკრეტული სიმრავლისგან შედგება. როდესაც სიგნალი არც პერიოდულია და არც კვაზიპერიოდული (მაგალითად, ქაოსურია), მაშინ ფურიეს ენერგეტიკული სპექტრი უწყვეტი იქნება (იხილეთ H დანართის H.2 ნახაზი. ამრიგად, სისტემის მახასიათებელი რომელიმე პარამეტრის ცვლილებასთან ერთად დისკრეტული სპექტრიდან უწყვეტი ენერგეტიკული სპექტრის მომენტალური გამოვლინება ქაოსური ქმედების საწყისი ეტაპის ინდიკატორია.

ფურიეს უწყვეტი ენერგეტიკული სპექტრი გარეშე ხმაურის არსებობის შემთხვევაშიც შეიძლება იქნეს მიღებული. ამასთან, თავისუფლების დიდი რაოდენობით ხარისხების შემთხვევაში იმდენი ძირითადი სიხშირე და ჰარმონიკა იარსებებს, რომ მოცემული ექსპერიმენტის პირობებში სიხშირეების უმაღლესი სიზუსტით განსაზღვრის შემთხვევაშიც კი ფურიეს ენერგეტიკული სპექტრი უწყვეტი არ იყოს. ამრიგად, უწყვეტი ენერგეტიკული სპექტრის არსებობა აუცილებლად ქაოსის არსებობის დაკავშირებული უტყუარი მტკიცებულება არ არის. უბრალოდ, შეგიძლიათ დარწმუნდეთ, რომ გარე ხმაური არსებობს და ექსპერიმენტული გადაწყვეტილება საკმარისია თავისუფლების ხარისხების მოსალოდნელი რაოდენობისთვის არსებული ნებისმიერი სიხშირის დასადგენად.

A.6 ფურიეს სივრცითი გარდაქმნები და რიცხვით მეთოდებთან დაკავშირებული კომენტარები

ფურიეს გარდაქმნა (სიხშირის ცვლადის ფუნქცია) დროზე დამოკიდებული ფუნქციისთვის გვაქვს განხილული. სივრცულ ცვლადზე დამოკიდებულ ფუნქციასთან დაკავშირებითაც თამაშის იგივე წესებს ვიყენებთ. ამ შემთხვევაში ფურიეს გარდაქმნის ცვლადს **ტალღურ k ვექტორს** უწოდებენ (k -ს ტალღური ვექტორი ეწოდება იმიტომ, რომ ჩვენ ამ ცნებას ერთზე მეტი სივრცითი განზომილების მქონე ფუნქციებზე განზოგადებას ვახდენთ. ამ შემთხვევაში თითოეული სივრცითი განზომილებისთვის k -ს განსხვავებული „კომპონენტი“ იარსებებს). ფურიეს სივრცითი გარდაქმნისთვის (ერთ განზომილებაში) გვექნება:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk F(k) e^{-ikx}$$

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) e^{+ikx}$$
(A.6-1)

ექსპონენციალებში ნიშანი „+“ და „-“ ისეა შერჩეული, რომ ტალღასთან დაკავშირებით როგორც სივრცითი, ასევე დროითი დამოკიდებულების არსებობის დაშვებისას (A.6-1) განტოლების პირველ ნაწილში ექსპონენციალური ფუნქცია x -ის დადებითი მიმართულებით გადაადგილებადი ტალღის ამსახველი $e^{i(\omega t - kx)}$ სახით გვექნება.

რიცხვითი და პროგრამული უზრუნველყოფა

არსებობს კომპიუტერულ პროგრამათა მრავალი პაკეტი, რომლებიც Fast Fourier Transform (FFT) ალგორითმის მეშვეობით ფურიეს გარდაქმნებსა და ენერგეტიკულ სპექტრებს გვაძლევს. მაგალითად, იხილეთ W. H. Press, Numerical recipes, The Art of Scientific Computing, (Cambridge University Press, Cambridge, 1986).

არსებობს ფურიეს გარდაქმნის სხვადასხვა ვარიაციები, როგორცაა ჰარტლის გარდაქმნა, იმპულსის ანალიზი და ა.შ. ასეთი მეთოდების შესანიშნავი მიმოხილვა მოყვანილია პუბლიკაციაში R. N. Bracewell, „The Fourier Transform“ The Scientific American **260** (6), 86-95 (ივნისი, 1989).

დანართი B

ბიფურკაციის თეორია

B.1 შესავალი

მოცემულ დანართში წარმოგიდგენთ არაწრფივი დინამიკური სისტემების მყისიერი ცვლილებების გამოვლინების კვლევისათვის გამოყენებული ბიფურკაციის თეორიის მოკლე მიმოხილვას. ეს თეორია დღემდე დაუსრულებელი მსჯელობის საგანია. ბიფურკაციის თეორიის თანახმად, მრავალი ფორმისა და ზომის აურაცხელი რაოდენობით ხეების არსებობის გამო ტყის აღქმა შეიძლება დაიკარგოს. ამიტომაც მეტი მათემატიკური და ვიზუალური დეტალების გაცნობის მსურველთათვის დამატების ბოლოს მრავალი ნაშრომია ციტირებული.

ბიფურკაციის თეორია ცდილობს, რომ მოახდინოს დინამიკური სისტემების თვისობრივ ქმედებაში დაკვირვებული მყისიერი ცვლილებების სისტემატური კლასიფიცირება. ეს მიზანი ორ ნაწილად იყოფა. პირველი ნაწილი ყურადღებას როგორც ფიქსირებული წერტილების, ასევე ზღვრული ციკლების სტაბილურობასთან დაკავშირებულ ბიფურკაციებზე ამახვილებს. ასეთ ბიფურკაციებს *ლოკალურს* ვუწოდებთ, რადგან მათი კვლევა შესაბამისი ფიქსირებული წერტილის ან ზღვრული ციკლის მახლობლად სისტემის *ლოკალური* ქმედების თვალსაზრისითაა შესაძლებელი. თეორიის მეორე ნაწილი, რომელიც დღესდღეობით ბევრად სუსტადაა განვითარებული, მდგომარეობების სივრცის უფრო ფართომასშტაბიანი ქმედების მომცველ ბიფურკაციას შეეხება და ამიტომ მათ *გლობალურ* ბიფურკაციებს უწოდებენ. ამგვარი გლობალური მოვლენები ისეთი სტრუქტურების უფრო დიდ მასშტაბს მოიცავს, როგორცაა მიზიდულობის არეები და საყრდენ წერტილებთან დაკავშირებული ჰომოკლინიკური და ჰეტეროკლინიკური ორბიტები.

ბიფურკაციის თეორიის მიზანია მოახდინოს დინამიკურ სისტემებში დაიკვირვებულ ბიფურკაციათა სახეობების კლასიფიცირება (ან შესაბამისი ფიქსირებული წერტილების ან ზღვრული ციკლების მახლობლად ტრაექტორიებთან დაკავშირებული *ევექტური* განზომილების კლასიფიცირება), რომლებიც წარმოადგენენ მდგომარეობათა სივრცის განზომილების ფუნქციებს. მოცემული თეორია ასევე დაინტერესებულია ბიფურკაციის პარამეტრული დამოკიდებულებით. პარამეტრების რაოდენობას, რომელიც ბიფურკაციის ცვლილების „მიზეზად“ შეიძლება იქცეს, ბიფურკაციის *თანაგანზომილება* ეწოდება. ჩვენ

უმეტეს შემთხვევაში ერთის ტოლი თანაგანზომილების მქონე ბიფურკაციებზე გავამახვილებთ ყურადღებას (როდესაც მხოლოდ ერთი პარამეტრი იცვლება).

თანაგანზომილება გეომეტრიულად შეგვიძლია უფრო თვალსაჩინოდ განვსაზღვროთ. თუ n -განზომილებიან სივრცეში გვაქვს m განზომილების მქონე „ზედაპირი“ (ან უფრო „მათემატიკური ენით“ რომ ვთქვათ – მრავალსახეობა), მაშინ მრავალსახეობის თანაგანზომილება იქნება $n-m$. მაგალითად, სამგანზომილებიან სივრცეში მდებარე ზედაპირის ფართობს ერთის ტოლი თანაგანზომილება ექნება, როდესაც იმავე სამგანზომილებიან სივრცეში (ერთგანზომილებიან) მრუდს 2-ის ტოლი თანაგანზომილება შეიძლება გააჩნდეს. პარამეტრის თანაგანზომილებასა და ბიფურკაციასთან დაკავშირებულ გეომეტრიულ თანაგანზომილებას შორის კავშირი გამოკვლეულია [Guckenheimer და Holmes, 1990]-ში, მაგრამ მთავარი არსი იმაში მდგომარეობს, რომ ძირითადი მათემატიკური მოთხოვნების შესრულებისთვის პარამეტრების რაოდენობა გეომეტრიულ თანაგანზომილებას უნდა გაუტოლდეს.

ბიფურკაციების შესახებ მსჯელობისას ყურადღებას ვამახვილებთ ე.წ. ტრანსვერსალურობის პირობის დამაკმაყოფილებელ ბიფურკაციებზე. პირობების დამაკმაყოფილებელ ბიფურკაციებს **ზოგადს** უწოდებენ. ბიფურკაცია **პარამეტრების სივრცეში** მრუდების, ზედაპირებისა და აშ. გადაკვეთის თვალსაზრისით განიხილება (ჩვენთვის კარგად ნაცნობი ბიფურკაციული დიაგრამის აგება). თუ კვეთები ტრანსვერსალურია, მაშინ მცირე შემოფოთებები კვეთის ბუნებაზე ზეგავლენას ვერ მოახდენს. არატრანსვერსალური კვეთები კი, პირიქით, განიცდის შემოფოთებათა ზეგავლენას. მაგალითად, სამგანზომილებიან სივრცეში ორი (ორგანზომილებიანი) ზედაპირი ტრანსვერსალურ თანაკვეთას ახდენენ და შედეგად მრუდს გვაძლევს (ერთგანზომილებიანი მრავალსახეობა). თუ ზედაპირები ოდნავ შემოფოთებულია, კვეთა მოძრავია, მაგრამ ერთგანზომილებიან მრავალსახეობას ინარჩუნებს. სამგანზომილებიანი სივრცის წერტილში გადამკვეთი ორი მრუდი არატრანსვერსალურ კვეთას გვაძლევს და მრუდების ოდნავი შემოფოთებაც კი კვეთას აქრობს.

ტრანსვერსალურობის პირობა გადამკვეთი მრავალსახეობების თანაგანზომილებების სახით შეიძლება გამოისახოს. თუ გადამკვეთი მრავალსახეობების თანაგანზომილებების ჯამი კვეთის შედეგად მიღებული მრავალსახეობის თანაგანზომილების ტოლია, მაშინ კვეთა ტრანსვერსალურია. მაგალითად, სამგანზომილებიან სივრცეში ორი (ორგანზომილებიანი) ზედაპირის მქონე თანაგანზომილებების ჯამი კვეთის შედეგად მიღებული მრუდის თანაგანზომილების მნიშვნელობის, კერძოდ 2-ის ტოლია. ამრიგად, კვეთა ტრანსვერსალურია. ორი მრუდის შემთხვევაში თანაგანზომილებების ჯამი უკვე 4-ის ტოლია და წერტილში

მიღებული საბოლოო კვეთა ტრანსვერსალური აღარ არის. სამგანზომილებიან სივრცეში მრუდისა და ზედაპირის გადაკვეთა, საზოგადოდ, ტრანსვერსალურია.

ტრანსვერსალურულობის პირობის დაწესებით ჩვენ ყურადღება გავამახვილეთ ისეთ ბიფურკაციებზე, რომლებიც არ განიცდიან მცირე შემოფოთებების ზეგავლენას [Guckenheimer და Holmes, 1990]. ზოგჯერ არატრანსვერსალური ბიფურკაციებიც მნიშვნელოვანია, როდესაც სისტემის მიმართ დაწესებულია სხვა შეზღუდვები, მაგალითად, გარკვეული სიმეტრიების შესახებ.

როგორც თანაგანზომილება, ასევე ეფექტური განზომილება მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ბიფურკაციულ მოვლენათა გარკვეული ტიპის ე.წ. სტრუქტურული სტაბილურობის განსაზღვრაში (აღსანიშნავია, რომ სტრუქტურული სტაბილურობის ცნება დინამიკურ განტოლებათა ამონახსნების თვისებების შესასწავლადაც გამოიყენება. ბიფურკაციულ წერტილში ამონახსნები სტრუქტურულად არასტაბილურია). მთავარი კითხვა მგომარეობს იმაში, ინარჩუნებს თუ არა ბიფურკაცია თავდაპირველ სახეს, როდესაც დინამიკურ განტოლებებში მცირე წევრების შეყვანის შედეგად სისტემა შემოფოთებულია. თუ ბიფურკაცია უცვლელია, მაშინ იგი სტრუქტურულად სტაბილურია. არსებობს შეხედულება, რომლის თანახმადაც სტრუქტურულად არასტაბილური ბიფურკაციები რეალურ სისტემებში არ ვლინდება, რადგანაც „ხმაური“ და თავისუფლების უამრავი რაოდენობის ხარისხი სისტემის “შემშოთებლების” როლს ასრულებს.

B.2 ლოკალური ბიფურკაციები

როგორც უკვე ვთქვით, ლოკალური ბიფურკაციების შემთხვევაში ფიქსირებული წერტილები ან ზღვრული ციკლები ჩნდება, ქრება ან იცვლის სტაბილურობის ხასიათს. ვინაიდან შეგვიძლია ზღვრული ციკლების, როგორც პუანკარეს კვეთების ფიქსირებული წერტილების, განხილვა, ორთავე ტიპის შემთხვევაში ვიყენებთ ტერმინს *ფიქსირებული წერტილის ბიფურკაცია*. სტაბილურობის ცვლილების ნიშანია ამ ფიქსირებული წერტილის ერთი (ან მეტი) მახასიათებელი ექსპონენტის ნამდვილი ნაწილის ცვლილება: ლოკალური ბიფურკაციის შემთხვევაში სისტემის რომელიმე პარამეტრის (ან პარამეტრების) ცვლილებასთან ერთად რეალური ნაწილი ნულის ტოლი ხდება (გაიხსენეთ, რომ მახასიათებელი ექსპონენტები კომპლექსური რიცხვებიც შეიძლება იყვნენ). მაგალითად, მახასიათებელი ექსპონენტის ნამდვილი ნაწილის უარყოფითიდან დადებით მნიშვნელობაზე გადასვლასთან ერთად, მახასიათებელ მიმართულებასთან დაკავშირებული მოძრაობა სტაბილურობიდან (ფიქსირებული წერტილისაკენ მიზიდული) არასტაბილურობაში

(ფიქსირებული წერტილიდან განზიდული) გადადის. პუნკარეს ასახვის ფიქსირებულ წერტილთან დაკავშირებით ეს კრიტერიუმი მახასიათებელი მამრავლის ერთის ტოლი აბსოლუტური მნიშვნელობის არსებობის ტოლფასია.

ცენტრალური მრავალსახეობის თეორემის მიხედვით, ლოკალური ბიფურკაციის შემთხვევაში შეგვიძლია ყურადღება გავამახვილოთ თავისუფლების იმ ხარისხების მიმართ, რომელთა შესაბამისი ექსპონენტების ნამდვილი ნაწილები მიისწრაფვის ნულისაკენ. ეს არის ბიფურკაციასთან დაკავშირებული ეფექტურ განზომილებათა რაოდენობა, კერძოდ, ნულის ტოლი ნამდვილი ნაწილების მქონე მახასიათებელი ექსპონენტების რაოდენობა. ცენტრალური მრავალსახეობა ისეთი „ქვესივრცეა“, რომელიც ნულის ტოლი ნამდვილი ნაწილების მქონე მახასიათებელ ექსპონენტებთანაა დაკავშირებული (იგი უნდა განგასხვავოთ სტაბილური მრავალსახეობისგან, სადაც ნამდვილი ნაწილები უარყოფითი მნიშვნელობის მქონეა და ასევე არასტაბილური მრავალსახეობისგან, სადაც ნამდვილი ნაწილები დადებითი მნიშვნელობისაა).

ბიფურკაციის ტიპების კლასიფიკაციის მიზნით დინამიკური განტოლებები დაიყვანება სტანდარტულ, **ნორმალურ სახემდე** [იხილეთ მაგალითად Kahn და Zarmi, 1997], რომლის მიხედვითაც ბიფურკაცია მაშინ აღიძვრება, როდესაც μ პარამეტრის მნიშვნელობა ნულს აღწევს და $x=0$ -ში მდებარე ფიქსირებულ წერტილს ნულის ტოლი ნამდვილი ნაწილის მქონე მახასიათებელი ექსპონენტა გააჩნია. ნორმალურ ფორმებთან დაკავშირებული უფრო ზოგადი ფორმები კოორდინატისა და პარამეტრის ცვლილებათა მეშვეობით მიიღება, ამიტომ გამარტივებული ნორმალური ფორმების გამოყენებისას ზოგადი ხასიათი არ იკარგება.

სისტემისთვის, რომლის ცენტრალური მრავალსახეობის დინამიკა ერთგანზომილებიანია და დიფერენციალური განტოლებით აღიწერება, დინამიკური განტოლება ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = & A_0 + B_0x + C_0x^2 + \dots \\ & + \mu(A_1 + B_1x + C_1x^2 + \dots) \\ & + \mu^2(A_2 + B_2x + C_2x^2 + \dots) \\ & + \dots \end{aligned} \tag{B.2-1}$$

სადაც A -ს, B -სა და C -ს და ა.შ. ინდექსები გვაუწყებს თუ μ პარამეტრის რომელ ხარისხთან არიან ისინი დაკავშირებული. მუდმივებისთვის მნიშვნელობების შერჩევის გზით ხერხდება ბიფურკაციების სისტემატური კლასიფიკაცია. იტერაციული ასახვების მეშვეობით

აღწერილი სისტემებისთვის (როგორცაა ზღვრული ციკლების პუნაქარეს ასახვები), ბიფურკაციის წერტილის მიდამოში შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= A_0 + B_0 x_n + C_0 x_n^2 + \dots \\
 &+ \mu (A_1 + B_1 x_n + C_1 x_n^2 + \dots) \\
 &+ \dots
 \end{aligned}
 \tag{B.2-2}$$

კლასიფიკაციის სქემის პრაქტიკული გამოყენების პრინციპის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ რამდენიმე შემთხვევა. თუ დიფერენციალური განტოლებებით აღწერილი სისტემისთვის ავიღებთ $A_1=1$, $C_0=-1$ და ნებისმიერ სხვა მუდმივას ნულს გავუტოლებთ, გვექნება:

$$\frac{dx}{dt} = \mu - x^2
 \tag{B.2-3}$$

3.17 პარაგრაფის თანახმად, ეს განტოლება აღწერს სისტემის ქმედებას კვანძი-განმზიდველი ბიფურკაციის პირობებში (ან უფრო მაღალი განზომილების შემთხვევაში – კვანძი-„უნაგირისებრი“).

თუ გამოვიყენებთ **იტერაციული** ასახვის ზოგად ფორმას, როდესაც $B_0=-1$, $B_1=-1$ და $D_0=1$, მაშინ შემდეგი დამოკიდებულება:

$$x_{n+1} = -(1 + \mu)x_n + x_n^3
 \tag{B.2-4}$$

აღწერს ფეიგენბაუმის კასკადის მსგავს პერიოდის გაორმაგების ბიფურკაციას. მდგომარეობათა სივრცისადმი მეორე განზომილების დამატების შედეგად შევძლებთ მე-3 თავში აღწერილი ჰოპფის ბიფურკაციის მოდელირებას.

ბიფურკაციები ასევე კლასიფიცირებულია, როგორც **ფაქიზი** (ან **ზეკრიტიკული**) და **კატასტროფული** (ან **ქვეკრიტიკული**). პირველ შემთხვევაში ბიფურკაციული წერტილის მიდამოში პარამეტრის ცვლილებასთან ერთად (სტაბილური) ფიქსირებული წერტილიც მონოტონურად იცვლება. მე-3 თავში აღწერილი ჰოპფის ბიფურკაცია ფაქიზი ბიფურკაციის მაგალითია. კატასტროფული ბიფურკაციისას (სტაბილური) ფიქსირებული წერტილი უეცრად ჩნდება, უჩინარდება ან გაუთავებლად იცვლის ადგილმდებარეობას.

ქვეკრიტიკული ბიფურკაციის მაგალითისათვის განვიხილოთ ქვემოთ მოყვანილი ნორმალური სახის განტოლება:

$$\dot{x} = \mu x + x^3 - x^5 \quad (\text{B.2-5})$$

სადაც μ მაკონტროლებელი პარამეტრია. $\mu < 0$ პირობებში მიღებული მდგრადი მდგომარეობის შესაბამისი ამონახსნი $x=0$ სტაბილურია. $\mu > 0$ პირობებში არსებობს შემდეგი განტოლებით მოცემული ორი სტაბილური მდგომარეობა:

$$x_{\pm} = \sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4\mu}} \quad (\text{B.2-6})$$

ბიფურკაცია ვლინდება $\mu = 0$ მნიშვნელობის შემთხვევაში და სტაბილური მდგომარეობის განლაგებები მყისიერად ახალ მდებარეობებს დაიკავენ.

ბიფურკაციების შესაბამისი სხვადასხვა ნორმალური ფორმებისა და ნიმუშების ჩამონათვალის გაცნობა შესაძლებელია [Thompson და Stewart, 1986]-სა და [Abraham და Marsden, 1978]-ში.

B.3 გლობალური ბიფურკაციები

გლობალური ბიფურკაციები უკავშირდება მიზიდულობის არეების, ჰომოკლინიკური და ჰეტეროკლინიკური ორბიტებისა და მდგომარეობათა სივრცის ფართომასშტაბიან რეგიონებთან გავრცელებულ ცვლილებებს. ასეთი ბიფურკაციები მოიცავს მე-7 თავში აღწერილ წყვეტასა და კრიზისებს. როდესაც მდგომარეობათა სივრცის ფართომასშტაბიან არეებში გამოვლენილი ქმედება გვანტერესებს, ამგვარი ბიფურკაციების შესწავლის სხვადასხვა ხერხების ცოდნის აუცილებლობა აშკარა ხდება. სამწუხაროდ, ლოკალური ბიფურკაციების თეორიასთან შედარებით, გლობალური ბიფურკაციების თეორია უფრო რთულია და იშვიათადაა განხილული. ჰომოკლინიკური ტანგენსებისა და კრიზისის განსაკუთრებული შემთხვევები დეტალურადაა შესწავლილი, მაგრამ ზოგადი კლასიფიცირების სქემა დღემდე დაუდგენელია. ქაოსური მიმზიდველების მომცველი ბიფურკაციების ზოგადი კლასიფიკაცია მოცემულია [Thompson და Stewart, 1986 თავი 13]-სა და [Wiggins, 1988]-ში.

B.4 დამატებითი ლიტერატურა

ბიფურკაციის თეორიის ცნობარი

ამ „საკითხავ კურსს“ გირჩევთ იმ შემთხვევაში, თუ ღრმა ცოდნის მიღება გსურთ ბიფურკაციათა თეორიის შესახებ. მოცემულია საინტერესო ილუსტრაციები და დიაგრამები.

[Thompson and Stewart, 1986], Chapters 7, 8, და 13.

ლოკალური და გლობალური ბიფურკაციების ილუსტრირებული გზამკვლევი მათემატიკური მხარის გარეშე: [Abraham and Shaw, 1992] და [Abraham, Abraham, and Shaw, 1996]. თუ უკვე მზად ხართ უფრო რთული და ზოგადი მათემატიკური განხილვისათვის, მაშინ იხილეთ [Guckenheimer and Holmes, 1990] თავები 3, 6 და 7.

J. D. Crawford, "Introduction to Bifurcation Theory," *Rev. Mod. Phys.* 63, 991-1037 (1991).

სხვა ზოგადი შესავალი კურსები დინამიკურ სისტემებში არსებული ბიფურკაციების შესახებ

R. Abraham and J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, 2nd ed. (Benjamin/Cummings, Reading, MA, 1978).

G. Iooss and D. D. Joseph, *Elementary Stability and Bifurcation Theory* (Springer-Verlag, New York, 1980).

V. I. Arnol'd, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations* (Springer, New York, 1983).

P. Kahn and Y. Zarmi, *Nonlinear Dynamics: Exploration through Normal Forms* (Wiley, New York, 1997).

Y. A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, 2nd ed. (Springer-Verlag, New York, 1998). განკუთვნილია ბაკალავრიატის ბოლო და მაგისტრატურის პირველი კურსების სტუდენტებისათვის. საინტერესო დიაგრამები, ამოცანები და მათი ანალიზი.

ბიფურკაციული ანალიზის მაგალითები

C. Robert, K. T. Alligood, E. Ott, and J. A. Yorke, "Outer Tangency Bifurcations of Chaotic Sets," *Phys. Rev. Lett.* 80, 4867-70 (1998).

M. C. Eguia and G. B. Mindlin, "Semiconductor laser with optical feedback: From excitable to deterministic low-frequency fluctuations," *Phys. Rev. E* 60, 1551-57 (1999).

გლობალური ბიფურკაციები

შემდეგი კურსი მოიცავს არაჩვეულებრივად დაწრილ პირველ თავს, რომელიც დინამიკური სისტემების მათემატიკურ განხილვას წარმოადგენს. შემდგომ მოყვანილია გლობალური ბიფურკაციების დეტალური ანალიზი.

S. Wiggins, *Global Bifurcations and Chaos, Analytical Methods* (Springer-Verlag, New York, 1988).

E. Meron and I. Procaccia, "Gluing Bifurcations in Critical Flows: The Route to Chaos in Parametrically Excited Surface Waves," *Phys. Rev. A* 35, 4008-11 (1987).

დანართი C

ლორენცის მოდელი

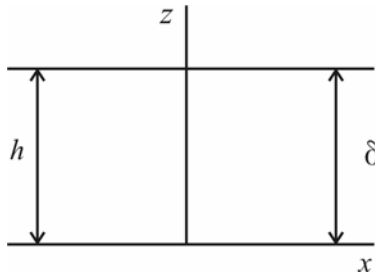
C.1 შესავალი

მოცემულ დანართში ვნახავთ, თუ როგორ მიიღება პირველ თავში მოყვანილი ლორენცის მოდელი ნაგეი-სტოქსისა და სითბური ენერჯის დიფუზიის ამსახველი განტოლებების მეშვეობით. როდესაც ფიზიკური მდგომარეობის აღმწერი ძირითადი განტოლებების ანალიზურ ამოხსნას ვერ ვახერხებთ, ლორენცის მოდელში გამოყენებული მიდგომა გვიქმნის წარმოდგენას ამონახსნების მიახლოებითი სახით განსაზღვრის შესახებ.

ლორენცის მოდელი მეტად მნიშვნელოვანია არაწრფივი დინამიკისათვის. სამწუხაროდ, ლორენცის მოდელის განტოლებების ამონახსნთა უმრავლესობა მკითხველს ისეთი დოზით აძლევს ინფორმაციას, რომ ისინი პრაქტიკულად უსარგებლონი ხდებიან, გარდა სითხეების დინამიკისა. იმედია, რომ მოცემული დანართის ფარგლებში ამომწურავ ინფორმაციას მოგაწვდით ლორენცის მოდელთან დაკავშირებით როგორც მათემატიკურ მიახლოებების, ისე ფიზიკურ არსის თვალსაზრისით.

ლორენცის მოდელი აღწერს სითხის მოძრაობას რელეი-ბენარდის პირობებში: არაკუმშვადი სითხე შეყვანილია უჯრედში, რომელსაც გააჩნია შედარებით მაღალი T_w ტემპერატურა ქვედა ნაწილში, ხოლო დაბალი T_c ტემპერატურა კი ზედა ნაწილში. $\delta T = T_w - T_c$ ტემპერატურული სხვაობა სისტემის მაკონტროლებელი პარამეტრია. შესაბამისი გეომეტრია C.1 ნახაზზეა წარმოდგენილი.

რელეი-ბენარდის ნაკადის ფორმალურ განხილვამდე მოკლედ მიმოვიხილოთ კონვექციური ნაკადის გამომწვევი პირობები. უხეშად რომ ვთქვათ, როდესაც ზედა და ქვედა ფენებს შორის ტემპერატურული გრადიენტი საკმაოდ დიდია, სითხის მოცულობის ელემენტი ამომგდები ძალის ზემოქმედების შედეგად ზემოთკენ ამოძრავდება, რადგან იგი მოხვდება შედარებით დაბალი ტემპერატურისა და, აქედან გამომდინარე მაღალი სიმკვრივის გარემოში. ამ შემთხვევაში მას გარემოსთან შედარებით ნაკლები სიმკვრივე გააჩნია. თუ ამომგდები ძალა საკმარისად ძლიერია, მაშინ სითხის მასა ზემოთ ამოსვლას ტემპერატურის დაცემამდე მოასწრებს (როდესაც ელემენტის მასა გარემოზე თბილია, იგი სითბურ ენერჯიას გარემოს გადასცემს).



ნახ. C.1. ლორენცის მოდელის გეომეტრია. სისტემა უსასრულოა ჰორიზონტალური მიმართულებით.

ასეთ შემთხვევაში ადგილი ექნებათ კონვექციურ ღინებებს. მეორე მხრივ, თუ ამომგდები ძალა შედარებით სუსტია, მაშინ ელემენტის ტემპერატურა მის მიერ დიდი მანძილის გავლამდე იკლებს და აქედან გამომდინარე, ელემენტი პრაქტიკულად უცვლელ მდებარეობას ინარჩუნებს.

ამგვარი ქმედება შეგვიძლია რაოდენობრივად განვიხილოთ, თუ გამოვიყენებთ ჩვენ ცოდნას სითხეებში სითბური ენერჯის დიფუზიასთან და სიბლანტის ძალებთან დაკავშირებით. წარმოიდგინეთ, რომ სითხე თავდაპირველად უძრავია. ჩვენ დავადგინოთ, არის თუ არა ამგვარი პირობა სტაბილურობის მანიშნებელი. თავდაპირველად ვიწყებთ სითხის მცირე მასის განხილვით, რომელიც ზემოთკენ მცირე Δz მანძილითაა წანაცვლებული. ახალ არეში ტემპერატურა $\Delta T = (\delta T/h)\Delta z$ -ით ნაკლები იქნება. სითბური ენერჯის დიფუზიის განტოლებაზე დაყრდნობით (მე-11 თავი), ტემპერატურის ცვლილების სიჩქარე ლაპლასის ტემპერატურული ფუნქციისა და დიფუზიის სითბური D_T კოეფიციენტის ნამრავლის ტოლია. ზემოთ ხსენებული წანაცვლების შემდეგ, ლაპლასის ფუნქციის მიახლოება ასეთი იქნება:

$$\nabla^2 T \approx \frac{\delta T}{h^2} \approx \frac{\Delta z}{h} \quad (C.1-1)$$

სითბური რელაქსაციის δt_T დროსათვის გვექნება:

$$\delta t_T \frac{dT}{dt} = \Delta T = \delta t_T D_T \nabla^2 T \quad (C.1-2)$$

სადაც მეორე ტოლობა სითბური დიფუზიის განტოლებიდან გამომდინარეობს. ლაპლასის ფუნქციის მიმართ ზემოთ მოყვანილი მიახლოების გამოყენების შედეგად მივიღებთა:

$$\delta t_T = \frac{h^2}{D_T} \quad (C.1-3)$$

ამჯერად განვიხილოთ სითხის მასაზე მოქმედი ამომგდები ძალის ეფექტი. ამომგდები ძალა პროპორციულია სითხის მასისა და ელემენტისა და გარემოს სიმკვრივეს შორის სხვაობისა. ეს უკანასკნელი, თავის მხრივ, სითხური გაფართოების α კოეფიციენტისა (რომელიც ტემპერატურის ცვლილების ერთეულზე მოსული სიმკვრივის ფარდობითი ცვლილებაა) და ΔT ტემპერატურული სხვაობისადმი პროპორციულია. ამრიგად, ამომგდებ ძალასთან დაკავშირებით გვექნება:

$$F = \alpha p_0 g \Delta T = \alpha p_0 g \frac{\delta T}{h} \Delta z \quad (C.1-4)$$

სადაც ρ_0 სითხის საწყისი სიმკვრივეა, ხოლო g თავისუფალი ვარდნის აჩქარება (დედამიწის ზედაპირის სიახლოვეს $g = 9.86/კგ = 9.86/წმ^2$).

დავუშვათ, რომ ამომგდები ძალა სითხის ბლანტი ხახუნის ძალას აწონასწორებს, ამიტომ ელემენტი მუდმივი v_z სიჩქარით გადაადგილდება. Δz მანძილის გასავლელად მას $\tau_d = \Delta z / v_z$ დრო ესაჭიროება. მე-11 თავის თანახმად, შიდა ხახუნის ძალა სიჩქარის ლაპლასის ფუნქციაზე გამრავლებული სითხის სიბლანტის ტოლია. ამრიგად, ბლანტი ხახუნის ძალას ასე წარმოვადგენთ:

$$F_v = \mu \nabla^2 v_z \approx \mu \frac{v_z}{h^2} \quad (C.1-5)$$

სადაც მიახლოებითი ტოლობის ნიშანი v_z -ის ლაპლასიანის მიახლოებით წარმოდგენას აღნიშნავს.

თუ ამომგდები ძალის შიდა ხახუნის ძალასთან ტოლობას მოვითხოვთ, v_z -ის გამოსახვა შემდეგნაირად მოხდება:

$$v_z = \frac{\alpha \rho_0 g h \delta T}{\mu} \Delta z \quad (C.1-6)$$

მაშინ წანაცვლების დრო მოცემული იქნება

$$\tau_d = \frac{\mu}{\alpha \rho_0 g h \delta T} \quad (C.1-7)$$

საწყისი არაკონვექციური მდგომარეობა სტაბილურია, თუ სითბური დიფუზიის დრო წანაცვლების დროზე მცირეა. თუ სითბური დიფუზია უფრო დიდხანს მიმდინარეობს, მაშინ სითხის მასა კვლავ ზემოთ მიმართული ძალის ზემოქმედებას განიცდის და კონვექციაც გაგრძელდება. სითბური დიფუზიისა და წანაცვლების დროების ფარდობა მნიშვნელოვანი მახასიათებელია. ამ ფარდობას *რელეის R რიცხვი* ეწოდება და მას შემდეგი ფორმა გააჩნია:

$$R = \frac{\alpha \rho_0 g h^3 \delta T}{D_T \mu} \quad (\text{C.1-8})$$

რელეი-ბენარდის კონვექციისათვის *რელეის რიცხვი* ძირითადი პარამეტრია, მაგრამ კონვექციის დაწყებისას მისი რეალური მნიშვნელობის მისაღებად უფრო დეტალური გამოთვლების ჩატარებაა საჭირო.

C.2. ნავიე-სტოქსის განტოლებები

ზემოთ მოყვანილი გეომეტრია გვაძლევს შესაძლებლობას დავუშვათ, რომ სითხის ნაკადი ორგანზომილებიანია. ამრიგად, სითხის სიჩქარის მხოლოდ x (ჰორიზონტალური) და z (ვერტიკალური) მდგენელების განხილვა გვესაჭიროება. მათი შესაბამისი ნავიე-სტოქსის განტოლებები ასეთია (იხილეთ მე-11 თავი):

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \text{grad } v_z &= -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 v_z \\ \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \text{grad } v_x &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 v_x \end{aligned} \quad (\text{C.2-1})$$

სადაც ρ სითხის სიმკვრივეა, p - წნევა, ხოლო μ სითხის სიბლანტეა. აღსანიშნავია, რომ სიმძიმის ძალა მხოლოდ z მდგენელის შესაბამის განტოლებაში იჩენს თავს.

სითხის T ტემპერატურა სითბური დიფუზიის განტოლების მეშვეობით შემდეგნაირად გამოისახება (იხილეთ მე-11 თავი):

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } T = D_T \nabla^2 T \quad (\text{C.2-2})$$

სადაც D_T სითბური დიფუზიის კოეფიციენტია.

სტაბილურ არაკონვექციურ მდგომარეობაში (როდესაც სითხე უძრავია) ტემპერატურა ქვემოდან ზემოთ წრფივი სახით იცვლება:

$$T(x, z, t) = T_w - \frac{z}{h} \delta T \quad (\text{C.2-3})$$

ჩვენ ყურადღებას გავამახვილებთ $\tau(x, z, t)$ ფუნქციაზე, რომელიც წრფივობიდან ტემპერატურის გადახრის ხასიათს გვამცნობს:

$$\tau(x, z, t) = T(x, z, t) - T_w + \frac{z}{h} \delta T \quad (\text{C.2-4})$$

(C.2-4) გამოსახულების (C.2-2) განტოლებაში ჩასმის შედეგად τ დააკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებას:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \bar{v} \cdot \text{grad } \tau - \nu_z \frac{\delta T}{h} = D_T \nabla^2 \tau \quad (\text{C.2-5})$$

ჩვენ ამჯერად გასათვალისწინებელი გვაქვს სითხის სიმკვრივის ცვლილება ტემპერატურის ცვლილებასთან ერთად. წარმოვადგინოთ სითხის სიმკვრივე შემდეგი მწკრივის მეშვეობით:

$$\rho(T) = \rho_o + \frac{\partial \rho}{\partial T} (T - T_w) + \dots \quad (\text{C.2-6})$$

სადაც ρ_o წარმოადგენს T_w -ს შესაბამის სიმკვრივეს.

შემოვიყვანოთ სითბური გაფართოების α კოეფიციენტი, რომელიც შემდეგნაირად განისაზღვრება:

$$\alpha = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \rho}{\partial T} \quad (\text{C.2-7})$$

თუ $T-T_w$ -ს განვსაზღვრავთ (C.2-4) გამოსახულების მეშვეობით, სიმკვრივის ტემპერატურის მიხედვით ცვლილება შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ:

$$\rho(T) = \rho_o - \alpha\rho_o \left[-\frac{z}{h} \delta T + \tau(x, z, t) \right] \quad (C.2-8)$$

სითხის ρ სიმკვრივე ნავიერ-სტოუქსის განტოლებათა სხვადასხვა წევრებში შედის. სითხეთა დინამიკაში ფართოდ გამოყენებული **ბუსინესკის მიახლოება** გვამცნობს, რომ სიმკვრივის ცვალებადობის უგულებელყოფა ყოველ წევრშია შესაძლებელი, გარდა სიმძიმის ძალის შემცველი წევრისა. ამგვარი მიახლოების საფუძველზე (C.2-1) სისტემა v_z -ს მიმართ ჩაწერილ განტოლებას შემდეგ სახემდე დაიყვანს:

$$\begin{aligned} \rho_o \frac{\partial v_z}{\partial t} + \rho_o \vec{v} \cdot \text{grad } v_z = & -\rho_o g - \alpha g \rho_o \frac{z}{h} \delta T - \frac{\partial p}{\partial z} \\ & + \alpha g \rho_o \tau(x, z, t) + \mu \nabla^2 v_z \end{aligned} \quad (C.2-9)$$

როდესაც სითხის კონვექცია არ მიმდინარეობს, განტოლების მარჯვენა ნაწილის პირველი სამი წევრი ნულის ტოლია. ამრიგად, შემოგვაქვს ეფექტური წნევის გრადიენტი, რომელსაც სითხის უძრავობისას ნულოვანი მნიშვნელობა გააჩნია:

$$\begin{aligned} p' = p + \rho_o g z + \alpha g \rho_o \frac{z^2}{2} \frac{\delta T}{h} \\ \frac{\partial p'}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z} + \rho_o g + \alpha g \rho_o \frac{z}{h} \delta T \end{aligned} \quad (C.2-10)$$

ეფექტური წნევის გრადიენტს ნავიერ-სტოუქსის განტოლებებში ვიყენებთ და ρ_0 -ზე გაყოფის შედეგად ვღებულობთ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } v_z = & -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p'}{\partial z} + \alpha \tau g + \nu \nabla^2 v_z \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } v_x = & -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \nabla^2 v_x \end{aligned} \quad (C.2-11)$$

სადაც $v = \mu / \rho_0$ ე.წ. კინემატიკური სიბლანტეა.

C.3 უგანზომილებო ცვლადები

ლორენცის მოდელის შემდეგი ეტაპი უგანზომილებო ცვლადების მეშვეობით ნავიე-სტოქსის (C.2-11) განტოლების შედგენაში მდგომარეობს. უგანზომილებო ცვლადების გამოყენების საშუალებით ჩანს, თუ რომელი პარამეტრების კომბინაციაა მნიშვნელოვანი სისტემის ქმედების განსაზღვრისთვის. ამასთან ერთად, h სიმაღლის, δT ტემპერატურული სხვაობის და ა.შ. გარკვეულ რიცხვით მნიშვნელობებზე დამოკიდებულებას უგულებელვყოფთ და ვამარტივებთ განტოლებების რიცხვითი ამოხსნის პროცესს.

თავდაპირველად შემოგვყავს დროის უგანზომილებო t' ცვლადი:

$$t' = \frac{D_T}{h^2} t \quad (C.3-1)$$

[(C.1-3) განტოლებიდან და მე-11 თავიდან გავიხსენოთ, რომ h^2/D_T ფარდობა h მანძილზე სითბური დიფუზიის ტიპური დროა]. ასევე შემოგვაქვს მანძილისა და ტემპერატურის უგანზომილებო ცვლადები:

$$x' = \frac{x}{h} \quad z' = \frac{z}{h} \quad \tau' = \frac{\tau}{\delta T} \quad (C.3-2)$$

მანძილის და ტემპერატურის უგანზომილებო ცვლადების გამოყენებით უგანზომილებო სიჩქარის განსაზღვრასაც შევძლებთ. მაგალითად, უგანზომილებო სიჩქარის x მდგენელი იქნება:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{D_T}{h} v_x \quad (C.3-3)$$

ახალი ცვლადების დახმარებით შესაძლებელია ლაპლასის ოპერატორის გამოსახვა:

$$\nabla'^2 = h^2 \nabla^2 \quad (C.3-4)$$

თუ ახალ ცვლადებს ნავიე-სტოქსის (C.2-11) განტოლებაში ჩავსვამთ და მათ $h^3/(vD_T)$ -ზე გავამრავლებთ, მივიღებთ

$$\frac{D_T}{\nu} \left[\frac{\partial v'_z}{\partial t'} + \vec{v}' \cdot \text{grad}' v'_z \right] = - \frac{h^2}{\nu D_T \rho_o} \frac{\partial p'}{\partial z'} + \frac{\alpha \delta T g h^3}{\nu D_T} \tau' + \nabla'^2 v'_z \quad (\text{C.3-5})$$

$$\frac{D_T}{\nu} \left[\frac{\partial v'_x}{\partial t'} + \vec{v}' \cdot \text{grad}' v'_x \right] = - \frac{h^2}{\nu D_T \rho_o} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nabla'^2 v'_x \quad (\text{C.3-6})$$

განტოლებებში თავს იჩენს პარამეტრთა გარკვეული უგანზომილებო ფარდობები. **პრანდტლის σ რიცხვი** კინემატიკური სიბლანტისა და სითბურ დიფუზიის კოეფიციენტების ფარდობას გვაძლევს:

$$\sigma = \frac{\nu}{D_T} \quad (\text{C.3-7})$$

პრანდტლის რიცხვი ზომავს შედარებით სიბლანტის ფარდობით მნიშვნელობას სითბურ დიფუზიასთან შედარებით. პრანდტლის რიცხვი წყლისათვის ოთახის ტემპერატურაზე დაახლოებით 7-ის ტოლია.

რელის R რიცხვი ასახავს ბალანსს სითხის ელემენტის ზემოთკენ მოძრაობის ტენდენციასა და სითბური დიფუზიის შორის. იგი ფორმალურად ასე განისაზღვრება:

$$R = \frac{\alpha g h^3}{\nu D_T} \delta T \quad (\text{C.3-8})$$

რელის რიცხვი უჯრედის ქვედა და ზედა ნაწილებს შორის ტემპერატურული სხვაობის უგანზომილებო საზომია. რელი-ბენარდის ექსპერიმენტთა უმრავლესობაში რელის რიცხვი ტემპერატურული სხვაობის ცვლილების მიხედვით დამყარებული მაკონტროლებელი პარამეტრია.

დაბოლოს, შემოვიყვანოთ წნევის უგანზომილებო Π ცვლადი:

$$\Pi = \frac{p'h^2}{v\rho_o D_T} \quad (C.3-9)$$

შემდეგ ვიყენებთ ყველა უგანზომილებო სიდიდეს ნავე-სტოქსის განტოლებებისა და სითბური დიფუზიის განტოლების ჩასაწერად, სადაც მეტი სიმარტივისთვის ' სიმბოლოები არ გამოგვიყენებია (გახსოვდეთ, რომ ყოველი ცვლადი უგანზომილებოა):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial v_z}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } v_z \right] &= -\frac{\partial \Pi}{\partial z} + R\tau + \nabla^2 v_z \\ \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } v_x \right] &= -\frac{\partial \Pi}{\partial x} + \nabla^2 v_x \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } \tau - v_z &= \nabla^2 \tau \end{aligned} \quad (C.3-10)$$

უნდა აღინიშნოს, რომ უგანზომილებო ცვლადებისა და პარამეტრების შემოღებით ჩვენ არც განტოლებების ფიზიკური შინაარსი შეგვიცვლია და არც რაიმე ტიპის მათემატიკური მიახლოებები შემოგვიტანია.

C.4 ნაკადის ფუნქცია

მე-11 თავის მიხედვით, ორგანზომილებიანი ნაკადისთვის შეგვიძლია ყოველგვარი ინფორმაციის შემცველი $\Psi(x,z,t)$ ნაკადის ფუნქციის შემოღება. სითხის სიჩქარის კომპონენტები მიიღება ნაკადის ფუნქციის კერძო წარმოებულების მეშვეობით:

$$v_x = -\frac{\partial \Psi(x,z,t)}{\partial z} \quad v_z = \frac{\partial \Psi(x,z,t)}{\partial x} \quad (C.4-1)$$

(ჩვენ შეგვიძლია სიჩქარის რომელიმე კომპონენტის წინ „-“ ნიშნის დასმა. ნიშნის არჩევა ლორენცის მოდელში პირობით ხასიათს ატარებს). შემდეგ ნაკადის ფუნქციას ვიყენებთ სითბური დიფუზიის განტოლებაში:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \tau}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \nabla^2 \tau \quad (C.4-2)$$

რომელშიც *grad* წვერი გაშლილი სახითაა წარმოდგენილი (მათემატიკური ცოდნის მქონე მკითხველი ალბათ მიხვდა, რომ წინა განტოლების მარცხენა ნაწილში მდგომი ორი შუა წვერი x და z ცვლადებზე დამოკიდებული Ψ და τ ფუნქციების იაკობიანის დეტერმინანტებია).

სითხის ნაკადის განტოლებები ნაკადის ფუნქციის საფუძველზეც შეგვიძლია ჩავწეროთ. v_z -ის მიმართ ჩაწერილი განტოლება შემდეგი სახისაა:

$$\frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial x} \right] = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} + R\tau + \nabla^2 \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (\text{C.4-3})$$

ხოლო v_x განტოლება შემდეგი სახისაა:

$$\frac{1}{\sigma} \left[-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial x} \right] = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} - \nabla^2 \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (\text{C.4-4})$$

თუ (C.4-3) განტოლებაზე ვიმოქმედებთ $\partial/\partial x$ -ს ოპერატორით და მოვახდენთ მის გამოკლებას $\partial/\partial z$ -ით აღებული (C.4-4) განტოლებიდან, წნევის წევრები გაბათილდება და მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma} \left[+\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \Psi) - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right\} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial x} \right\} \right] \\ = R \frac{\partial \tau}{\partial x} + \nabla^4 \Psi \end{aligned} \quad (\text{C.4-5})$$

(C.4-2) და (C.4-5) განტოლებები მოიცავს ამომწურავ ინფორმაციას სითხის ნაკადის შესახებ.

C.5 ფურიეს მწკრივები, გალერკინის პროცედურა და სასაზღვრო პირობები

ცხადია, ჩვენი მოდელური სისტემის ამსახველი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნა ურთულესი ამოცანაა. კერძოწარმოებუიანი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნის ჩვეულებრივი პრაქტიკა მდგომარეობს ისეთი ამონახსნების პოვნაში, რომლებიც x, z, t დამოუკიდებელი ცვლადებიდან მხოლოდ ერთ-ერთზე დამოკიდებული ფუნქციების ნამრავლის სახით შეიძლება ჩაიწეროს. ვინაიდან შერჩეული გვაქვს მართკუთხა გეომეტრია, არსებობს შემდეგი ტიპის ამონახსნის მიღების შესაძლებლობა:

$$\Psi(x, z, t) = \sum_{m,n} e^{\omega_{m,n}t} \{A_m \cos \lambda_m z + B_m \sin \lambda_m z\} \times \{C_n \cos \lambda_n x + D_n \sin \lambda_n x\} \quad (C.5-1)$$

სადაც λ -ები ფურიეს სივრცული მოდების შესაბამისი ტალღის სიგრძეებია, ხოლო ω_{mn} - შესაბამისი სიხშირეებია. რასაკვირველია, τ ტემპერატურის ცვლადთან დაკავშირებით არსებობს ანალოგიური განტოლება (დანართი A).

მე-11 თავში ვნახეთ, რომ ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების სისტემის შედგენის სტანდარტული პროცედურა საწყისი კერძოწარმოებუიანი დიფერენციალური განტოლებების სინუსისა და კოსინუსის ფუნქციების სახით წარმოდგენაში გამოიხატება. ეს პროცედურა ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების უსასრულო სიმრავლეს გვაძლევს. პროგრესის მიზნით უნდა მოვახერხოთ განტოლებების უსასრულო სიმრავლის ზღვრულ სიმრავლემდე დაყვანა. შეკვეცის ამგვარ პროცესს **გალიორკინის პროცედურა** ეწოდება.

ლორენცის მოდელის შემთხვევაში ვეძებთ ნაკადის ფუნქციისა და ტემპერატურული გადახრის ფუნქციის დამაკმაყოფილებელ სასაზღვრო პირობებს და შემდეგ ვირჩევთ ამ პირობების დამაკმაყოფილებელი სინუსებისა და კოსინუსების შემცველი წევრების ზღვრულ სიმრავლეს. ამგვარი გაბათილების წინასწარ განსაზღვრა რთულია, მაგრამ განტოლებების შედარებით დიდი სიმრავლის რიცხვითი ამონახსნები მიანიშნებს (SAL62), რომ გაბათილების ფორმა პარამეტრების მნიშვნელობების ზღვრულ დიაპაზონში დინამიკის უმეტეს ნაწილს მოიცავს.

ტემპერატურული გადახრის ფუნქციასთან დაკავშირებული სასაზღვრო პირობები მარტივია. როდესაც წრფივი ტემპერატურის გრადიენტს τ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ, ხოლო უჯრედის ზედა და ქვედა ნაწილებში ტემპერატურები ფიქსირებულია, მაშინ გვექნება

$$\tau = 0 \quad z = 0,1 \quad (C.5-2)$$

ნაკადის ფუნქციის შემთხვევაში, უპირველეს ყოვლისა, სიჩქარის მდგენელებთან დაკავშირებულ სასაზღვრო პირობებს ვადგენთ. ვახდენთ დაშვებას, რომ ზედა და ქვედა ზედაპირებზე v_z -ის მდგენელი ნულის ტოლია. აგრეთვე ვუშვებთ, რომ ზედა და ქვედა ზედაპირებზე წანაცვლების ძალა არ არსებობს. მე-11 თავში ვნახეთ, რომ ეს ძალები სიჩქარის ტანგენსური მდგენელის გრადიენტის მიმართ პროპორციულია, ამიტომ $z=0$ და $z=1$ მნიშვნელობებისათვის გადავდივართ $\partial v_x / \partial z = 0$ პირობაზე. ლორენცის მოდელთან დაკავშირებით, ეს პირობები ნაკადის ფუნქციისა და ტემპერატურის გადახრის ფუნქციისთვის შემდეგი დაშვების თანახმად სრულდება:

$$\begin{aligned} \Psi(x, z, t) &= \Psi(t) = \psi(t) \sin(\pi z) \sin(ax) \\ \tau(x, z, t) &= T_1(t) \sin(\pi z) \cos(ax) - T_2(t) \sin(2\pi z) \end{aligned} \quad (C.5-3)$$

სადაც საძიებელია a პარამეტრი. ფუნქციების ასეთი არჩევანი არა მხოლოდ სასაზღვრო პირობებს აკმაყოფილებს, არამედ საგრძნობლად ამარტივებს მიღებულ განტოლებებს.

ნაკადის Ψ ფუნქციის სივრცითი ნაწილის ფორმა სითხის კონვექციის დაწყებისას არსებული კონვექციური რგოლების მოდელირებას ახდენს. (C.4-1) ტემპერატურის გადახრის ფუნქცია ფორმა ორი ნაწილისგან შედგება. პირველი T_1 ნაწილი კონვექციური უჯრედის ზედა და ქვედა მოძრავ ნაწილებს შორის ტემპერატურულ სხვაობას იძლევა, ხოლო მეორე T_2 ნაწილი კი გვიჩვენებს ტემპერატურის წრფივობიდან გადახრას კონვექციური უჯრედის ცენტრის შესაბამისი z ფუნქციის სახით (T_2 წევრის წინ „-“ ნიშანი ისეა შერჩეული, რომ T_2 დადებითია; სითხის ტემპერატურა T_w -სა და T_c -ს შორის უნდა მერყეობდეს)

C.6 ლორენცის განტოლებების საბოლოო ფორმა

ამჯერად (C.4-2) და (C.4-5) განტოლებებში ჩავსვათ ნაკადისა და ტემპერატურის გადახრის ფუნქციათა გამოსახულებებს. შედეგად წევრთა უმრავლესობა გამარტივდება. მაგალითად, გვექნება:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi &= -(a^2 + \pi^2) \Psi \\ \nabla^4 \Psi &= +(a^2 + \pi^2)^2 \Psi \end{aligned} \quad (C.6-1)$$

შედეგად მივიღებთ, რომ $\dot{v} \cdot \text{grad} v$ წვევრებთან დაკავშირებული ზოგიერთი რთული განტოლება აღარ იარსებებს და დაგვრჩება:

$$-\frac{d\psi(t)}{dt}(a^2 + \pi^2) \sin \pi z \sin ax = -\sigma R T_1(t) \sin \pi z \sin ax + \sigma(a^2 + \pi^2)^2 \psi(t) \sin \pi z \sin ax \quad (\text{C.6-2})$$

მოკლედ შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ:

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{\sigma R}{\pi^2 + a^2} T_1(t) - \sigma(\pi^2 + a^2) \psi(t) \quad (\text{C.6-3})$$

ტემპერატურის გადახრის განტოლება ოდნავ უფრო რთულია. იგი შემდეგ ფორმას ღებულობს:

$$\begin{aligned} \dot{T}_1 \sin \pi z \cos ax - \dot{T}_1 \sin 2\pi z + (\pi^2 + a^2) \dot{T}_1 \sin \pi z \cos ax \\ - 4\pi^2 \dot{T}_2 \sin 2\pi z - a\psi \sin \pi z \cos ax \\ = -[\pi\psi \cos z \sin ax][a\dot{T}_1 \sin \pi z \sin ax] \\ - [a\psi \sin \pi z \cos ax][\pi T_1 \cos \pi z \cos ax] \\ - [\psi \sin \pi z \cos ax][2\pi T_2 \cos 2\pi z] \end{aligned} \quad (\text{C.6-4})$$

თავდაპირველად $\sin \pi z \cos ax$ -ის შემცველ ყველა წევრს ერთად დავაჯგუფებთ. (C.6-4) განტოლების წვევრთაგან უკანასკნელი არის $2a\pi\psi T_2 \sin \pi z \cos 2\pi z$. სტანდარტული ტრიგონომეტრიული იგივეობების გამოყენებით ეს წევრი სინუსებისა და კოსინუსების შემდეგი კომბინაციების სახით შეიძლება დაიწეროს: $(-1/2 \sin \pi z + 1/2 \sin 3\pi z)$. $\sin 3\pi z$ გადავადებთ იმის გამო, რო მას უფრო მაღალი რიგის სივრცული დამოკიდებულება გააჩნია, ვიდრე ამას ჩვენი დაშვება ითვალისწინებს. ამის შემდეგ (C.6-4) განტოლების $\sin \pi z \cos ax$ -ის შემცველი კოეფიციენტების გატოლების გზით მივიღებთ:

$$\dot{T}_1 = a\psi - (\pi^2 + a^2) T_1 - \pi a \psi T_2 \quad (\text{C.6-5})$$

ტემპერატურული გადახრის განტოლების დანარჩენი წევრები $\sin 2\pi z$ კოეფიციენტზეა გამრავლებული. კოეფიციენტთა გატოლების შედეგად კვლავ მივიღებთ:

$$\dot{T}_2 = \frac{\pi a}{2} \psi T_1 - 4\pi^2 T_2 \quad (\text{C.6-6})$$

ლორენცის განტოლებების სტანდარტული ფორმის მისაღებად ცვლადების შეცვლის მცირემასშტაბიან ოპერაციას ვანხორციელებთ. თავდაპირველად ახალი $t' = (\pi^2 + a^2)t$ ცვლადის შემოყვანის გზით დროის ცვლადს კიდევ ერთხელ შევცვლით, შემდეგ კი ასეთი სახის ჩანაცვლებებს განვახორციელებთ:

$$\begin{aligned} X(t) &= \frac{a\pi}{(\pi^2 + a^2)\sqrt{2}} \psi(t) \\ Y(t) &= \frac{r\pi}{\sqrt{2}} T_1(t) \\ Z(t) &= \pi r T_2(t) \end{aligned} \tag{C.6-7}$$

სადაც r ე.წ. რელის დაყვანილი რიცხვია:

$$r = \frac{a^2}{(a^2 + \pi^2)^3} R \tag{C.6-8}$$

ასევე შემოგვაქვს ახალი b პარამეტრი:

$$b = \frac{4\pi^2}{a^2 + \pi^2} \tag{C.6-9}$$

ყველა ჩანაცვლებისა და პრანდტლის σ რიცხვის p -თი შეცვლის შედეგად ლორენცის მივიღებთ განტოლებების სტანდარტულ ფორმას:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= p(Y - X) \\ \dot{Y} &= rX - XZ - Y \\ \dot{Z} &= XY - bZ \end{aligned} \tag{C.6-10}$$

ზემოთ მოყვანილ გამარტივებებში იგულისხმება, რომ ლორენცის მოდელი x მიმართულებით $2\pi/a$ ტალღის სიგრძის მქონე მხოლოდ ერთი სივრცული ფორმისთვისაა დაშვებული. რადგან ზედა და ქვედა ფირფიტებს შორის ტემპერატურული სხვაობის საგრძნობ ზრდასთან ერთად სითხის რეალური მოძრაობა შედარებით რთულ სტრუქტურულ

ფორმას იღებს, მაშინ დინამიკასთან დაკავშირებული ლორენცის განტოლებები მოდელად აღარ გამოგვადგება.

ასევე უნდა აღინიშნოს, თუ სად იჩენს თავს არაწრფივობა ლორენცის მოდელში. (C.6-10) განტოლებიდან ჩანს, რომ არაწრფივი მხოლოდ XZ და XY წევრებია. ეს სითხის მოძრაობასა (ნაკადის ფუნქციისადმი პროპორციული X) და ტემპერატურის გადახრას (T_1 -თან და T_2 -თან პროპორციულ დამოკიდებულებაში მყოფი Y და Z) შორის კავშირს გვიჩვენებს. ლორენცის მოდელი სივრცითი ფორმის ფუნქციების შერჩევის გამო ნავიე-სტოქსის განტოლებები ჩვეულებრივ $\dot{v} \cdot grad v$ არაწრფივ წევრებს აღარ შეიცავს.

C.7 არაკონვექციური მდგომარეობის სტაბილურობის ანალიზი

a პარამეტრი არაკონვექციური მდგომარეობის სტაბილურობასთან დაკავშირებით პირობების შემოწმების გზით განისაზღვრება. არაკონვექციური მდგომარეობის შემთხვევაში $\Psi=0$ და $\tau=0$, რაც შეესაბამება $X, Y, Z=0$ პირობას. თუ x -ს, y -სა და z -ს ამ ფიქსირებული წერტილის მახლობლად X -ით, Y -ითა და Z -ით გამოვსახავთ და ლორენცის განტოლებებიდან ყოველ არაწრფივ წევრს გადავადგებთ, ფიქსირებული წერტილის მიდამოში სისტემის დინამიკა შემდეგი წრფივი დიფერენციალური განტოლებების მეშვეობით იქნება მოდელირებული:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p(x - y) \\ \dot{y} &= rx - y \\ \dot{z} &= -bz \end{aligned} \tag{C.7-1}$$

შენიშნეთ, რომ როდესაც b პარამეტრი დადებითია, $z(t)$ ექსპონენციალურად მცირდება. ამრიგად, მხოლოდ x და y განტოლებების გათვალისწინება გვესაჭიროება. ჩვენთვის უკვე ცნობილი 3.11 პარაგრაფის შედეგების გამოყენებით ჩანს, რომ არაკონვექციური ფიქსირებული წერტილი არასტაბილური ხდება $r > 1$ პირობებში. რელეის საწყის რიცხვზე დაბრუნების შედეგად გვექნება შემდეგი პირობა:

$$R \geq \frac{(\pi^2 + a^2)^3}{a^2} \tag{C.7-2}$$

a პარამეტრის მნიშვნელობას ისე ვირჩევთ, რომ იგი კონვექციის დაწყებისას რელეის უმცირეს რიცხვს გვაძლევდეს. სისტემა ტალღის $2\pi/a$ სიგრძეს რელეის უმცირეს შესაძლო რიცხვზე კონვექციის ფორმის შესაბამისობაში მოყვანის გზით ირჩევს. ეს პირობა გვაძლევს $a=\pi/\sqrt{2}$. ამრიგად, $R=27\pi^4/4$ რელეის ის რიცხვია, რომელზეც კონვექცია იწყება. b პარამეტრი ლორენცის მოდელის ანალიზთა უმრავლესობაში გამოყენებული 8/3-ის ტოლია.

C.8 დამატებითი ლიტერატურა

E. N. Lorenz, "Deterministic Nonperiodic Flow," *J. Atmos. Sci.* 20, 130-41 (1963). Reprinted in [Cvitanovic, 1984]. ეს გახლავთ ისტორიულად პირველი საინტერესო ნაშრომი ლორენცის მოდელის შესახებ.

B. Saltzman, "Finite Amplitude Free convection as an Initial Value Problem-I." *J. Atmos. Sci.* 19, 329-41 (1962). ლორენცის მოდელი იყო ზალცმანისეული ატმოსფერული კონვექციის ადრეული მოდელირების შედეგი.

[Berg, Pomeau, Vidal, 1984]. მოიცავს ლორენცის მოდელის განტოლებათა ოდნავ განსხვავებულ სახესხვაობას.

[Sparrow, 1982]. ლორენცის მოდელისა და მისი ქცევის დეტალური განხილვა.

S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* (Dover, New York, 1984). Chapter II. ვრცელი მსჯელობა რელეი-ბენარის ფიზიკასა და მათემატიკაზე მრავალი ისტორიული წყაროს მოშველიებით.

H. Haken, "Analogy between Higher Instabilities in Fluids and Lasers," *Phys. Lett. A* 53, 77-78 (1975).

R. Graham, "Onset of Self-Pulsing in Lasers and the Lorenz Model," *Phys. Lett. A* 58,440-41 (1976).

C. O. Weiss and J. Brock, "Evidence for Lorenz-Type Chaos in a Laser," *Phys. Rev. Lett.* 57, 2804-6 (1986).

C. O. Weiss, N. B. Abraham, and U. Hubner. "Homoclinic and Heteroclinic Chaos in a Single-Mode Laser," *Phys. Rev. Lett.* 61, 1587-90 (1988).

S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1994).

დანართი D

ქაოსის კვლევასთან დაკავშირებული პერიოდული გამოცემები

განხილვა

არაწრფივი დინამიკისა და ქაოსისადმი მიძღვნილი პუბლიკაციები მეცნიერებისა და ტექნოლოგიის თითქმის ყველა სფეროს ამსახველ ჟურნალში გვხვდება. აქ მოგვყავს იმ ჟურნალების სახელწოდებების ჩამონათვალი, რომლებშიც არაწრფივ სისტემებსა და მათ ანალიზთან, ასევე არაწრფივ დინამიკაში არსებულ პრობლემებთან დაკავშირებულ მრავალ ნაშრომს გაეცნობით. მათი მოპოვება თითქმის ყველა კოლეჯისა თუ უნივერსიტეტის სამეცნიერო ბიბლიოთეკაშია შესაძლებელი.

დანართი E

კომპიუტერული პროგრამები

E.1 ზოგადი კომენტარები

მოცემული დანართი მოიცავს სამ მარტივ კომპიუტერულ პროგრამას. პირველი მათგანის მეშვეობით ხდება ლოჯისტიკურ ასახვასთან დაკავშირებული ტრაექტორიის წერტილების დათვლა და შემდეგ მათი გრაფიკულად გამოსახვა იტერაციათა რიგის ფუნქციის სახით. მეორე პროგრამა აგებს ბიფურკაციულ დიაგრამას ლოჯისტიკურ ასახვასთან დაკავშირებით. თქვენ შეგიძლიათ პარამეტრისა და x ცვლადის მნიშვნელობათა დიაპაზონის შერჩევა. მესამე პროგრამა წარმოგვიდგენს გრაფიკული იტერაციის მეთოდს. ქვემოთ ასევე მოყვანილია კომპიუტერის მონიტორზე გამოტანილი შეტყობინებები.

პროგრამები QuickBasic ენაზეა შედგენილი, მაგრამ ისინი სხვა ენებსაც ადვილად მიესადაგებიან. გამოთვლები საკმაოდ მარტივია. კომენტარებს ' სიმბოლო ახლავს და კომპიუტერი მათ არ ითვალისწინებს.

E.2 ტრაექტორიის წერტილების გამოთვლისა და მათი გრაფიკულად გამოსახვის პროგრამა ლოჯისტიკური ასახვისათვის

(შენიშვნა: პროგრამირების დროს კომენტარები შეგვიძლია ჩავწეროთ მხოლოდ ინგლისურ ენაზე! გთხოვთ გაითვალისწინოთ ეს გარემოება ყველა კომპიუტერულ პროგრამაში! – ბ. კ.)

' ასახვის ფუნქციაა $X = AX(1-X)$.

CLS: ' გაასუფთავეთ ეკრანი

' შეარჩიეთ ეკრანის ფორმა და ფერები

SCREEN 11: VGA640x480 გრაფიკა, ტექსტი მოიცავს 80 სვეტსა და 30 რიგს

CNUMW = 65536*63+256*63+63: ' გვაძლევს მკაფიო თეთრს

CNUMB = 0: ' გვაძლევს შავს

PALETTE 0, CNUMW: ' გვაძლევს თეთრ ფონს

PALETTE 1, CNUMW: ' გვაძლევს შავ ტექსტსა და ზოლებს

'სურვილის შემთხვევაში SCREEN 12 ფერების შერჩევის მეტ საშუალებას გვაძლევს.

'ბეჭდვითი ინფორმაცია მომხმარებლისთვის

PRINT „ეს პროგრამა ლოჯისტიკური ასახვისათვის ტრაექტორიის წერტილებს ითვლის და გრაფიკულად გამოსახავს.“

PRINT

PRINT „ასახვის ფუნქციაა $X=A * X * (1-X)$ “

PRINT

PRINT „თქვენგან მოითხოვეს A პარამეტრის მნიშვნელობა ($0 < A < 4$)“

PRINT „და x-ის საწყისი მნიშვნელობისთვის ($0 < x < 1$)“

PRINT „და გამოსათვლელი და გრაფიკულად ასახები წერტილების რაოდენობისათვის.“

PRINT

PRINT „დააჭირეთ ნებისმიერ ღილაკს პროცესის გაგრძელებისთვის.“

'ეს არის ლოდინის ციკლი

cbase: A\$=INKEY\$: IFA\$="" THEN GOTO cbase

CLS: 'გასუფთავეთ ეკრანი

კვლავ: 'პროგრამა განმეორებით წარმოდგენას უბრუნდება

CLS0: 'სრულიად გასუფთავეთ ეკრანი ტექსტისა და გრაფიკებისგან

LOCATE 1, 1: 'დააბრუნეთ კურსორი უკან, ეკრანის მარცხენა ზედა ნაწილში

AIN: INPUT "A-ს მნიშვნელობა ($0 < A < 4$)“; A

თუ $A < 0$ ან $A > 4$, მაშინ GOTO AIN 'შეამოწმეთ A-ს დიაპაზონი

XIN: INPUT "x-ის საწყისი მნიშვნელობა ($0 < x < 1$)“; xi

თუ $x < 0$ ან $x > 1$ მაშინ GOTO XIN 'შეამოწმეთ x-ის დიაპაზონი

INPUT "გამოსათვლელი და გრაფიკულად ასახები წერტილების რაოდენობა“; NP

$x = xi$: გამოიყენეთ x-ის საწყისი მნიშვნელობის სახით

INPUT "დაუშვით გარდამავალი პროცესის არარსებობა [y ან n]“; T\$

თუ T="y"$ ან T="Y"$ მაშინ

I= 1-დან 200-მდე 'გარდამავალი პროცესებისგან თავის დაღწევა

$x = A * x * (1-x)$: 'ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქცია

NEXT I: გარდამავალი პროცესის მოლოდინის დასასრული

და თუ

J=1-დან NP-მდე 'აღბეჭდეთ შემდეგი NP წერტილები ეკრანზე

$x = A * x * (1-x)$: 'ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქცია

PRINT J, x

NEXT J: ალბეჭდვის მოლოდინის დასასრული

' კომენტარები: შემდეგი პარაგრაფი QuickBasic-ის გრაფიკულ ბრძანებებს – VIEW, WINDOW, LINE და PSET იყენებს. Basic-ის განსხვავებულ ვერსიებსა და სხვა ენებზე გადასვლისას, მათი შეცვლა შეიძლება დაგვჭირდეს. ბრძანება LOCATE უშვებს, რომ ეკრანზე სიმბოლოების 80 სვეტსა და 30 რიგს ვიყენებთ.

' მომხმარებლისგან მოითხოვეთ წერტილების გრაფიკულად გამოსახვა:

INPUT "გამოსახეთ [y ან n]"; B\$

თუ B\$="y" ან B\$="Y" მაშინ CLS0:

' წაშალეთ მთლიანი ტექსტი და გრაფიკა

VIEW (1,1)-(639,439): ' გრაფიკისთვის დაადგინეთ ანალიზის წერტილი

WINDOW (0,0)-(NP, 1): ' გრაფიკული გამოსახვისთვის დაადგინეთ კოორდინატები

LINE (0,0)-(NP, 1), ,B: 'დახატეთ უჯრედი

'დახატეთ სახელოების ნაკერები

J=1-დან NP-მდე დაკავშირებით:

LINE (J,0)-(J, .05)

NEXT J:

LOCATE 30, 40: ალბეჭდეთ „განმეორების რიცხვი“

LOCATE 2, 2: ალბეჭდეთ "X A="; A;

თუ T\$="N" ან T\$="n" მაშინ x=xi:

' თავიდან მოჰყევით გარდამავალი პროცესის დასაანახად

(0, x): ' ააგეთ პირველი წერტილი

J=1-დან NP -მდე დაკავშირებით

$x = A * x * (1 - x)$

LINE-(J,x): ' გაავლეთ მონაკვეთი შემდეგ წერტილამდე

NEXT J

და თუ 'ახლა დაბეჭდეთ მეთოდინილები მომხმარებლის მომავალ ქმედებებთან დაკავშირებით

LOCATE 30, 1: PRINT "დააჭირეთ r-ს განმეორებისათვის. დააჭირეთ q-ს გასვლისათვის.

'დაელოდეთ მოთხოვნას

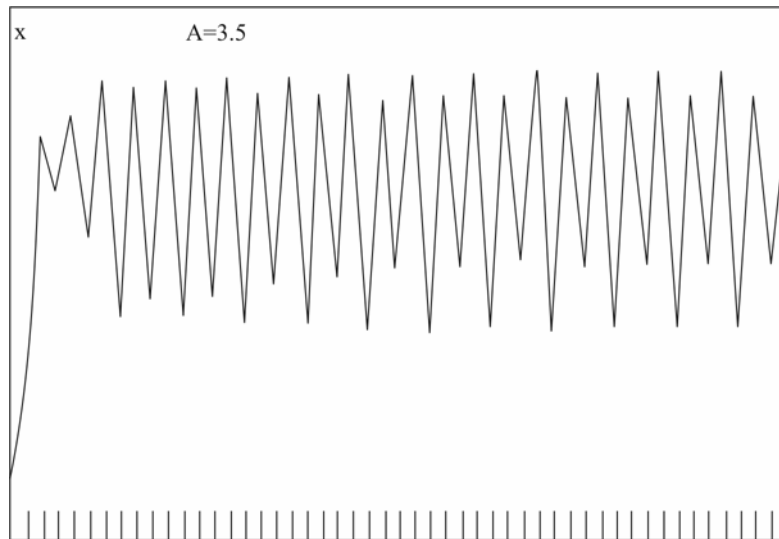
აქ: A\$=INKEY\$: IF A\$="" THEN GOTO Here

თუ A\$="q" ან A\$="Q" THEN GOTO qbase

თუ A\$="r" ან A\$="R" THEN GOTO again

qbase: 'შიატოვე პროგრამა

დასასრული



ნახ. E.1. პროგრამირების გრაფიკული შედეგი ლოჯისტიკური ასახვისათვის. აქ $A=3.5$ და $x_0=0.1$ საწყისი გარდამავალი სტადიის დასრულების შემდეგ ქმდება შეესაბამება პერიოდი-4-ს.

E.3. BIFUR, ბიფურკაციული დიაგრამის ამგები პროგრამა ლოჯისტიკური ასახვისათვის

'ასახვის ფუნქციაა $X=A*X*(1-X)$ '

'გაასუფთავეთ ეკრანი და აკრიფეთ მოთხოვნები

CLS0

PRINT „ეს პროგრამა ლოჯისტიკური ასახვისათვის გაორების დიაგრამას ჰქმნის“

PRINT

PRINT „თქვენ მოგეთხოვებათ პარამეტრის მნიშვნელობების დიაპაზონი“

PRINT „და x-ის მნიშვნელობების დიაპაზონისათვის (ვერტიკალური სექცია).“

PRINT „დააჭირეთ ნებისმიერ ღილაკს პროცესის გაგრძელებისათვის.“

abase: A\$=INKEY\$: IFA\$="" THEN GOTO abase: 'ლოდინის ციკლი

'შეარჩიეთ ეკრანის ფორმა და ფერები

SCREEN 11: VGA640x480 გრაფიკა, ტექსტი მოიცავს 80 სვეტსა და 30 რიგს

CNUMW = 65536*63+256*63+63: 'გვაძლევს მკაფიო თეთრს

CNUMB = 0: 'გვაძლევს შავს

PALETTE 0, CNUMW: 'გვაძლევს თეთრ ფონს

PALETTE 1, CNUMW: 'გვაძლევს შავ ტექსტსა და ზოლებს

'სურვილის შემთხვევაში SCREEN 12 ფერების შერჩევის მეტ საშუალებას გვაძლევს.

rbase: 'აქ დაბრუნდით პროგრამის განმეორებისათვის

CLS0: 'გაასუფთავეთ ეკრანი

'მოითხოვეთ A -სა და x-ის დიაპაზონები

INPUT "A-ს საწყისი მნიშვნელობა A (0<A<4)"; AI

INPUT "A-ს საბოლოო მნიშვნელობა A (0<A<4)"; AF

PRINT

INPUT „უნდა აიგოს x-ის მცირე მნიშვნელობის გრაფიკი (0<x<1)“; XL

INPUT „უნდა აიგოს x-ის მცირე მნიშვნელობებიდან უდიდესის გრაფიკი (0<x<1)“; XU

PRINT

PRINT „რჩევა: ააგეთ $NP=50/(XU-XL)$ წერტილები.“

PRINT

INPUT „A-ს თითოეული მნიშვნელობისათვის გრაფიკის ასაგებად წერტილების რიცხვი“;

NP

CLS0: 'გაასუფთავეთ ეკრანი

'დაადგინეთ ანალიზის წერტილი აღნიშვნებისათვის სივრცის მინიჭებით

' კომენტარები: შემდეგი სექცია QuickBasic-ის გრაფიკულ ბრძანებებს – VIEW, WINDOW, LINE და PSET მოიხმარს. Basic-ის განსხვავებულ ვერსიებსა და სხვა ენებზე გადასვლის დროს, მათი შეცვლა შეიძლება დაგვჭირდეს. ბრძანება LOCATE დაუშვებს, რომ ეკრანზე სიმბოლოების 80 სვეტსა და 30 რიგს ვიყენებთ.

'დაადგინეთ ხედვის სივრცე გრაფიკებისათვის

VIEW (50,0)-(639,479)

'დაადგინეთ ფანჯარა ღერძებით XL-სა და XU-ს შორის

WINDOW (AI,XL)-(AF, XU)

'დახაზეთ უჯრედი

LINE (AI,XL)-(AF, XU), , B

'გრაფიკისათვის გააკეთეთ აღნიშვნები

LOCATE 5, 1: PRINT „X“

LOCATE 28, 1: PRINT „XL“;

```

LOCATE 1,1: PRINT XU;
LOCATE 29,40: PRINT „A“;
LOCATE 29,3: PRINT AI;
LOCATE 29,80: PRINT - LEN(STR$(AF)): PRINT AF;
' აკრიფეთ ინფორმაცია სამოქმედო ღილაკებით
LOCATE 30,1: PRINT “დააჭირეთ r-ს განმეორებისათვის. დააჭირეთ q-ს გასვლისათვის.
' ახლა გამოთვალეთ ტრაექტორიები და ააგეთ დიაგრამა
K=0-დან 639-მდე დროს 'ეკრანზე გამოიყენეთ 640 ბიჯი
A=AI+(AF-AI)* K/639: 'პარამეტრის რეალური მნიშვნელობა
X=.2: 'საწყისი მნიშვნელობა
I= 1-დან 200-მდე დროს: ' გარდამავალი პროცესებისაგან თავის დაღწევა
X= A*X* (1-X)
NEXT I: გარდამავალი პროცესის მოლოდინის დასასრული
J=1-დან NP -მდე დროს: ' აღბეჭდეთ შემდეგი NP წერტილები ეკრანზე
X= A*X* (1-X)
PY=X
PSET (A, PY)
NEXT J: გრაფიკის აგების მოლოდინის დასასრული
' დააჭირეთ ღილაკს
A$=INKEY$
თუ A$="q" ან A$="Q" ან A$="r" ან A$="R" THEN EXIT FOR
' მოეშვით ლოდინს, თუ აქტიური ღილაკი ქმედებაშია
NEXT K: ' პარამეტრის მნიშვნელობის ლოდინის დასასრული
' შემდეგი მოქმედებისათვის გადაწყვეტილების მიღება
თუ A$="q" ან A$="Q" THEN END
თუ A$="r" ან A$="R" THEN GOTO rbase
HERE: A$=INKEY$: თუ A$="" THEN GOTO HERE
' სურვილის შემთხვევაში დაიცადეთ ეკრანის გადასაღებად
თუ A$="r" ან A$="R" THEN GOTO rbase
დასასრული

```

E.4 ასახვის ფუნქციათა გრაფიკული იტერაციების გამომსახველი პროგრამა

ეს პროგრამა განმეორებადი ასახვის ფუნქციას QuickBasic-ის FUNCTION ოპერატორის მეშვეობით განსაზღვრავს იმგვარად, რომ ასახვის სხვა ფუნქციების ჩანაცვლება ადვილი შესაძლებელია. A კონტროლის პარამეტრია, ხოლო x იტერაციის ცვლადი.

```
DECLARE FUNCTION MF! (A!, x!)
```

```
DECLARE SUB Waitsub (A$)
```

'ასახვის ფუნქციის გრაფიკს აგებს და განმეორებითი სქემის გრაფიკულ ვერსიაში აღწევს

'ასახვის ფუნქცია MF(A,x) ფუნქციაშია განსაზღვრული

'დაადგინეთ გრაფიკული ეკრანი

'დაადგინეთ ეკრანის ფორმა და ფერები

```
SCREEN 11: VGA640x480 გრაფიკა, ტექსტი მოიცავს 80 სვეტსა და 30 რიგს
```

```
CNUMW = 65536*63+256*63+63: 'გვაძლევს მკაფიო თეთრს
```

```
CNUMB = 0: 'გვაძლევს შავს
```

```
PALETTE 0, CNUMW: 'გვაძლევს თეთრ ფონს
```

```
PALETTE 1, CNUMW: 'გვაძლევს შავ ტექსტსა და ზოლებს
```

'სურვილის შემთხვევაში SCREEN 12 ფერების შერჩევის მეტ საშუალებას გვაძლევს.

```
CLS0: 'გასუფთავეთ ეკრანი
```

'გაუშვით პირველი მეთოდინილი

```
PRINT "ეს პროგრამა ლოჯისტიკურ ასახვას გრაფიკულად იმეორებს"
```

```
PRINT "ნაბიჯ-ნაბიჯ"
```

```
PRINT
```

```
PRINT "ყოველი ნაბიჯის შემდეგ, პროგრამა ჩერდება. დააჭირეთ ნებისმიერ ღილაკს
```

შემდეგ ნაბიჯზე გადასვლისათვის"

```
PRINT
```

```
PRINT "დააჭირეთ ნებისმიერ ღილაკს პროცესის გაგრძელებისათვის."
```

```
cbase: A$=INKEY$: IFA$="" THEN GOTO cbase: დაელოდეთ
```

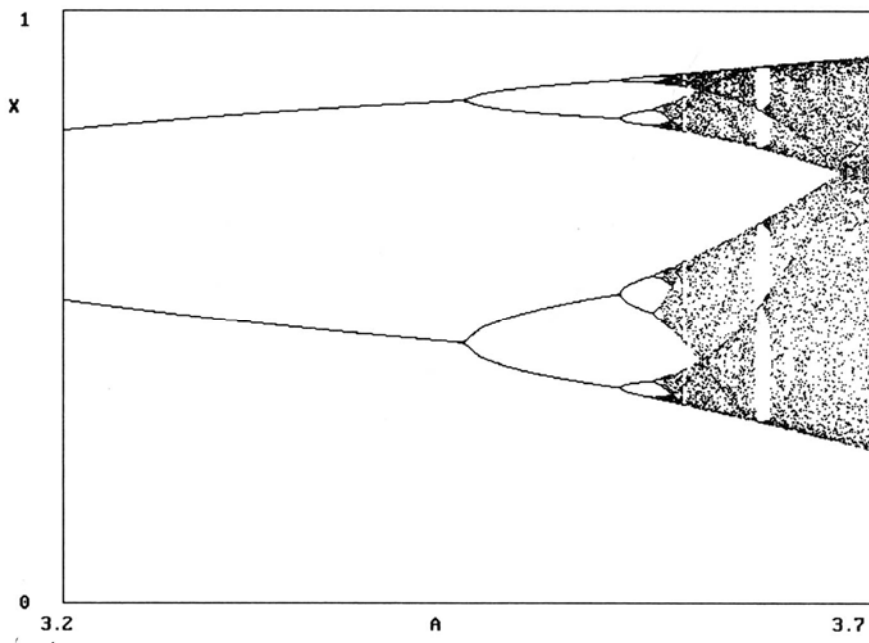
```
rbase: 'დაბრუნდით აქ პროგრამის განმეორებისათვის
```

```
CLS0: 'გასუფთავეთ ეკრანი
```

'შეიყვანეთ პარამეტრის მნიშვნელობა და x-ის საწყისი მნიშვნელობა

INPUT "A პარამეტრი ($0 < A < 4$)"; A

თუ $A < 0$ ან $A > 4$ მაშინ GOTO rbase ' შეამოწმეთ მნიშვნელობების დიაპაზონი



ნახ. E.2. პროგრამა BIFUR-ით შედგენილი გაორების ტიპური დიაგრამა

PRINT

dbase: INPUT "საწყისი x ($0 < x < 1$)="; X1

თუ $x < 0$ ან $x > 1$ THEN GOTO dbase: ' შეამოწმეთ მნიშვნელობების დიაპაზონი

CLS0: ' გაასუფთავეთ ეკრანი

' კომენტარები: შემდეგი სექცია QuickBasic-ის გრაფიკულ ბრძანებებს – VIEW, WINDOW, LINE და PSET მოიხმარს. Basic-ის განსხვავებულ ვერსიებსა და სხვა ენებზე გადასვლის დროს, მათი შეცვლა შეიძლება დაგვჭირდეს. ბრძანება LOCATE დაუშვებს, რომ ეკრანზე სიმბოლოების 80 სვეტსა და 25 რიგს ვიყენებთ.

' დადგინეთ ანალიზის წერტილი აღნიშვნებისათვის სივრცის მინიჭებით

VIEW (35,32)-(425,317): ეს ქმნის კვადრატს

' დადგინეთ ფანჯარა ღერძებით 0 -სა და 1 -ს შორის

```

WINDOW (0,0)-(1, 1)
'დახაზეთ უჯრედი
LINE (0,0)-(1, 1), , B
'გრაფიკისათვის გააკეთეთ აღნიშვნები
LOCATE 3, 1: PRINT „1“
LOCATE 7, 1: PRINT „f(X)“;
LOCATE 29, 28: PRINT "x“;
LOCATE 29, 2: PRINT "0“;
LOCATE 29, 55: PRINT "1“;
LOCATE 5, 10: PRINT "A="; A;
LOCATE 5, 60: PRINT "Hit a key“;
LOCATE 10, 70: PRINT "q=quit“;
LOCATE 15, 70: PRINT "r=restart“;
LOCATE 20, 70: PRINT "n=next step“;

```

```

'ააგეთ x=y წრფე
LINE (0,0)-(1, 1)
'ააგეთ ფუნქცია
J=0-დან 639-მდე დროს
x= J/639
y=MF(A,x)
PSET (x, y)
NEXTj
'გაავლეთ წრფე XI-დან f(x)-მდე, შემდეგ x=y წრფემდე
y=MF(A,XI)
LINE (XI,0)-(XI, y)
LINE -(y, y)
'პაუზისათვის ჩანაცვლება გააკეთეთ
CALL Waitsub (A$)
ახლა პროცესის განმეორებისთვის ციკლი დადგინეთ
xx=y: გადაიყვანეთ y მნიშვნელობა xx-ში

AGAIN:
y=MF(A,xx)

```

```

LINE -(xx, y)
LINE -(y, y)
CALL Waitsub (A$)
თუ A$="r" ან A$="R" THEN GOTO rbase
თუ A$="q" ან A$="Q" THEN GOTOqbase
xx=y
GOTO AGAIN
qbase: 'გაღით პროგრამიდან
END

```

'ოპერატორი FUNCTION განმეორებად ასახვას გამოყენებულად მიიჩნევს.

```
FUNCTION MF(A,x)
```

```
MF= A*x* (1-X)
```

```
END FUNCTION
```

```
SUB Waitsub (A$)
```

'ეს მდგომარეობა მომხმარებლისაგან ღილაკის დაჭერის მოლოდინშია.

'ლოდინის დროს ეკრანი შეიძლება ჩართული იყოს.

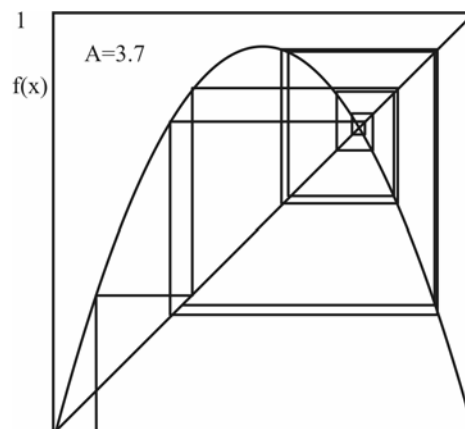
```
DO
```

```
j=1-დან 1000-მდე დროს: NEXTj
```

```
A$=INKEY$
```

```
LOOP WHILE A$=""
```

```
END SUB
```



ნახ. E.3. გრაფიკული იტერაციის შედეგი ლოჯისტიკური ასახვისთვის

დანართი F

ფეიგენბაუმის უნივერსალური რიცხვების თეორია

F.1 ფეიგენბაუმის α

მე-2 თავიდან გვახსოვს, რომ მრავალი ერთგანზომილებიანი იტერაციული ასახვა როგორც საერთო რაოდენობრივ, ისე ხარისხობრივ თვისებებს ამჟღავნებს. კერძოდ, როდესაც სისტემა „მიისწრაფვის“ ქაოსისაკენ პერიოდის გაორმაგების მიმდევრობის გავლით, გვაქვს კრებადობის ზოგადი კოეფიციენტი (ფეიგენბაუმის δ რიცხვი) და ნორმირების კოეფიციენტი (ფეიგენბაუმის α რიცხვი). ამ უნივერსალური რაოდენობრივი თვისებების აღმოჩენამ არაწრფივი დინამიკის მიდგომების მნიშვნელობა და საჭიროება აშკარა გახადა.

მოცემულ დანართში მოგაწვდით ფეიგენბაუმის α და δ რიცხვების უნივერსალობის ეკრისტიკულ თეორიას. აქ მოყვანილი მოსაზრებები ერთდროულად მარტივი და მახვილგონივრულია. მიუხედავად იმისა, რომ ამ თეორიასთან დაკავშირებული მათემატიკური მიდგომა დახვეწას არ ითხოვს, მსჯელობა საკმაოდ რთულია და ზოგიერთ მკითხველს შესაძლოა ამ დანართის გამოტოვების სურვილიც კი გაუჩნდეს.

მთავარი იდეა იმაში მდგომარეობს, რომ α -სა და δ -ს დადგენისას ყურადღება მხოლოდ იტერაციული f ფუნქციის თვისებებზე უნდა გავამახვილოთ x_c მნიშვნელობის მიდამოში, რომელშიც მოცემულ ფუნქციას გააჩნია მაქსიმუმი. ჩვენ აქცენტს x_c -ს შემცველ ტრაექტორიებზე (სუპერციკლებზე) გავაკეთებთ.

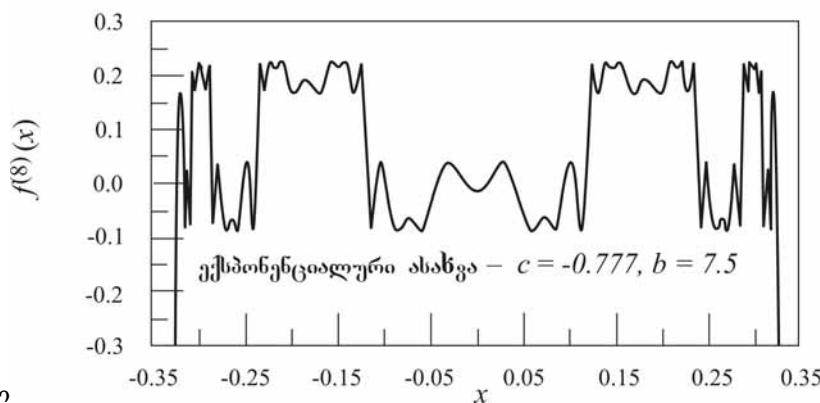
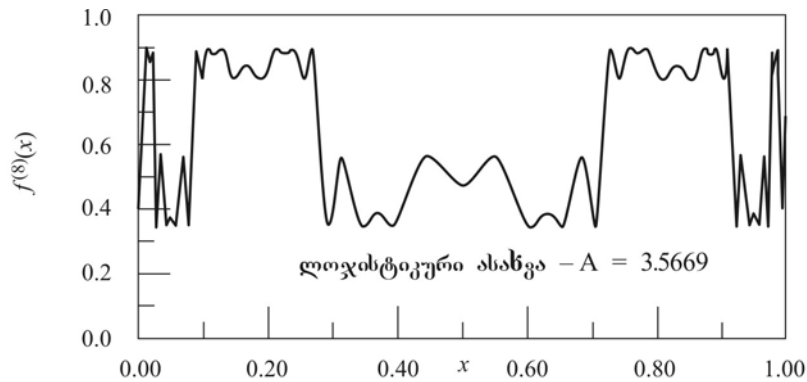
პერიოდის გაორმაგების მიმდევრობასთან ერთად ყურადღებას $f^{(n)}$ ფუნქციების მიმართაც ვამახვილებთ. თუ პერიოდის თითოეულ გაორმაგებაზე ჩვენი გრაფიკის მასშტაბს $\alpha = 2.502\dots$ კოეფიციენტით შევცვლით, მაშინ x_c -ს მიდამოში $f^{(n)}$ მიისწრაფვის ე.წ. უნივერსალური $g(x)$ ფუნქციისაკენ. F.1 ნახაზი წარმოგვიდგენს ორი სხვადასხვა ასახვის ფუნქციის მაღალი რიგის იტერაციებს. x_c -ს ახლომდებარე რეგიონები მოსალოდნელ უნივერსალურ ქმედებას გვიჩვენებს.

ჩვენ ვამტკიცებთ, რომ ამგვარი უნივერსალური ქმედება ზომის ნორმირების დამოკიდებულებას ემორჩილება. ნორმირების დამოკიდებულების ჩაწერისას შემოგვაქვს ახალი $y = x - x_c$ ცვლადი, რომელიც x_c -საგან დაშორებას გვაძლევს (შენიშნეთ, რომ y ცვლადის გამოყენება ექვივალენტურია ასახვის ფუნქციის x ღერძის გასწვრივ ისეთი წანაცვლებისა, რომ მისი მაქსიმუმი $x=0$ მნიშვნელობისათვის ვლინდება). ამ ცვლადზე დაყრდნობით, ზომის ნორმირების დამოკიდებულება ღებულობს ფორმას, რომელსაც ნამრავლის წესი ეწოდება:

$$g(y) = -\alpha g(g(-y/\alpha)) \tag{F.1-1}$$

მოცემული გაოსახულების თანახმად, მიღებული უნივერსალური ფუნქციის იტერაციის შედეგი ზუსტად იგივეა, რასაც $-y/\alpha$ -ით დაწყების, იტერაციის პროცედურის ორჯერ ჩატარებისა და საბოლოო შედეგის α -ზე გამრავლების შემთხვევაში. F.2 ნახაზი ამგვარ ექვივალენტურობას გრაფიკულად წარმოგვიდგენს.

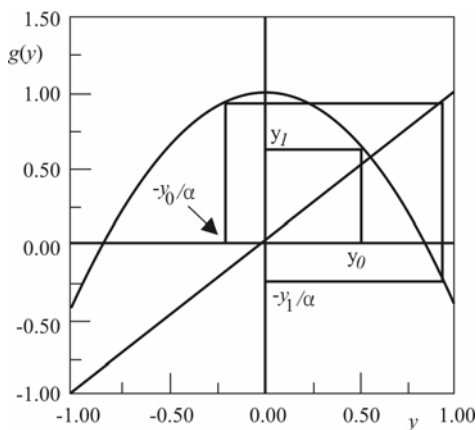
ნახ F.1. ზედა დიაგრამა წარმოგვიდგენს ლოჯისტიკური ასახვის მერვე რიგის იტერაციის გრაფიკს, ქვედა კი ექსპონენციალური ასახვის ფუნქციის მერვე რიგის იტერაციას შეესაბამება. პარამეტრთა მნიშვნელობები მცირედ განსხვავდებიან პერიოდის გაორმაგების ზღვრული წერტილის მნიშვნელობისაგან. შენიშნეთ, რომ x_c წერტილის მიდამოში



(თითო ეული მრუდის ცენტრში)

ორთავე ფუნქციას ერთი და იგივე სახე აქვს. ლოჯისტიკური ასახვის შემთხვევაში $x_c=0.5$, ხოლო ექსპონენციალური ასახვისათვის კი $x_c=0$. განსხვავებები x_c -სგან მოშორებით ვლინდება. ორდინატებისა და აბსცისების სათანადო ნორმირებისას დიაგრამების ცენტრალური ნაწილები თითქმის ერთმანეთს ემთხვევა.

უნივერსალური ფუნქციის არსებობა, x_c -ს მიდამოში ზომის ნორმირება და f -ის ფორმის ცოდნა ყველაფერია, რაც α -სა და β -ს მნიშვნელობების დადგენისათვის გეჭირდება. ასეთ მიდგომას „რენორმალიზაციის თეორია“ ეწოდება და თანამედროვე თეორიულ ფიზიკაში ფართოდ გამოიყენება. რენორმალიზაციის თეორია სტატისტიკურ მექანიკაში ფაზური გარდაქმნების თეორიასა და კვანტურ თეორიაში უაღრესად მნიშვნელოვანია. ნებისმიერ შემთხვევაში ზოგადი თვისება ზომის ნორმირების ცნებაში მდგომარეობს: სისტემის სათანადოდ გადიდებული და წანაცვლებული ვერსიები ერთიდაიგივე სურათს გვიჩვენებენ.



ნახ F.2. (F.1-1) განტოლებით აღწერილი ნამრავლის წესის გრაფიკული გამოსახულება. თუ დავიწყებთ y_0 -ით და მოვახდენთ $g(y)$ ფუნქციის ერთ იტერაციას, მაშინ მოვხვდებით y_1 -ით აღნიშნულ წერტილში. $-y_0/\alpha$ -ით დაწყების, ორგზის იტერაციისა და შემდეგ α -ზე გამრავლების შემთხვევაშიც შეგვიძლია y_1 -ში მოცვედრა. ეს პროცედურა მხოლოდ მაშინ იქნება ვარგისი, როდესაც $g(y)$ სპეციალური უნივერსალური ფუნქციაა.

ამჯერად თეორია უფრო დეტალურად განვიხილოთ (განხილვა ეყრდნობა [Schuster, 1995]-სა და FEI79-ში მოყვანილ არგუმენტებს) და თავდაპირველად α რიცხვი მაღალი სიზუსტით განვსაზღვროთ. რამდენად გვაშორებს ასახვის ფუნქციის ერთი იტერაციას x_c წერტილისაგან, როდესაც x_c პერიოდული ციკლის ნაწილია? თავდაპირველად ვსაზღვრავთ მანძილებს:

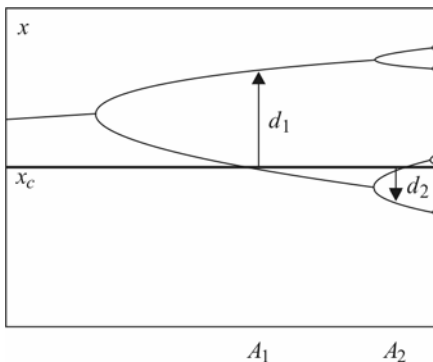
$$\begin{aligned}
 d_1 &= f_{A_1}(x_c) - x_c \\
 d_2 &= f_{A_2}^{(2)}(x_c) - x_c \\
 d_n &= f_{A_n}^{(2^{n-1})}(x_c) - x_c
 \end{aligned}
 \tag{F.1-2}$$

სადაც A_n სუპერციკლის პარამეტრის მნიშვნელობაა, რომლისთვისაც x_c პერიოდი- 2^n -ის შესაბამისი სტაბილური ციკლის ნაწილია (ანუ პერიოდი იქნება 2, 4, 8, 16, . . . რიგისა). (მეორე თავში ჩვენ მას A_n^s ვუწოდებთ, მაგრამ აქ სიმარტივისთვის ინდექსს მოვაცილებთ). d_n არის სხვაობა x_c -სა და f ასახვის ფუნქციის შესაბამისი იტერაციის განმეორებითი გამოყენების შედეგად მიღებული x -ის მნიშვნელობას შორის. F.3 ნახაზი წარმოგვიდგენს მოცემულ სიტუაციას. ამ ნახაზიდან ცხადია, რომ პერიოდული ციკლის შუამდე მიღწევისას ტრაექტორიის x_c -თან ყველაზე ახლოს მყოფ წერტილს მივაკვლევთ. ამრიგად, d_n^s წარმოადგენს ციკლში x_c -სთან ყველაზე ახლომდებარე წერტილამდე მანძილის საზომს.

y ცვლადის გამოყენებით d_n შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ:

$$d_n = f_{A_n}^{(2^{n-1})}(0) \quad (F.1-3)$$

პერიოდის გაორმაგების მიმდევრობასთან დაკავშირებული ზომის ნორმირების ძირითადი განსაზღვრება გვაძლევს:



ნახ. F.3. ფეიგენბაუმის α -ს განსაზღვრებაში გამოყენებული $d_1, d_2,$ და ა.შ. მანძილების განსაზღვრის სქემა. შენიშნეთ, რომ d_n წარმოადგენს პერიოდულ ციკლში x_c -სთან ყველაზე ახლომდებარე წერტილამდე მანძილს სუპერციკლური მნიშვნელობისთვის.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = -\alpha \quad (F.1-4)$$

განტოლებაში „-“ ნიშანი იმის გასათვალისწინებლად არის შესული, რომ F.3 ნახაზის თანახმად, თანმიმდევრული სუპერციკლებისთვის x_c -ს უახლოესი „მეზობელი“ x_c -ს ზემოთ და ქვემოთ ცირკულირებს.

თუ დავუშვებთ, რომ (F.1-4) დამოკიდებულება ძალაშია $n=1$ შემთხვევაშიც, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$(-\alpha)^n d_{n+1} = d_1 \quad (\text{F.1-5})$$

(მე-2 თავის თანახმად, n -ის მცირე მნიშვნელობების შემთხვევაში ნორმირების განსაზღვრაში არსებული ცდომილების მიუხედავად, ლოჯისტიკურ ასახვასთან დაკავშირებით, $n=2,3$ და ა.შ. შემთხვევაშიც კი ნორმირება საკმაოდ კარგი სიზუსტით არის განსაზღვრული). (F.1-3) გამოსახულების გამოყენებით უკანასკნელი დამოკიდებულების ჩაწერა შესაძლებელია იტერაციული ფუნქციის მეშვეობით:

$$(-\alpha)^n f_{A_n}^{(2^n)}(0) = d_1 \quad (\text{F.1-6})$$

ჩვენ ნაწილობრივ F.1 ნახაზზე ნაჩვენებ ქმედებაზე დაყრდნობით, დავუშვათ, რომ დიდი n -ების ზღვარში, y -ის მნიშვნელობებისთვის $y=0$ -ის მიდამოში (F.1-6) განტოლება ძალაშია შემდეგი აზრით:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f_{A_n}^{(2^n)}(y / (-\alpha)^n) = g_1(y) \quad (\text{F.1-7})$$

ეს გამოსახულება y ფუნქციის უნივერსალურობის განმსაზღვრელია, თუმცა იგი გარკვეულ კომენტარებს საჭიროებს. უპირველეს ყოვლისა, იგი გვამცნობს, რომ თუ ფუნქციის ზომის ნორმირებას $(-\alpha)^n$ კოეფიციენტით მოვახდენთ (d_n მანძილის ზომის მასშტაბირების ჩათვლით) და იმავედროულად y ღერძის დიაპაზონს $1/(-\alpha)^n$ კოეფიციენტზე გამრავლებით შევცვლით, მაშინ სათანადოდ „რენორმალიზებული“ ან შეცვლილი მასშტაბის მქონე ფუნქციები ჩვენს მიერ $g_1(y)$ -ად წოდებულ უნივერსალური ფუნქციისაკენ მიისწრაფვიან (გ-ს ინდექსის არსებობის მიზეზი მომდევნო პარაგრაფში გახდება ცნობილი).

რენორმალიზაციის არგუმენტზე დაყრდნობით, გადავდგათ შემდგომი ნაბიჯი, რომელიც შესაძლოა ერთი შეხედვით უცნაურად მოგვეჩვენოს. შემოვიყვანოთ $g_i(y)$ ფუნქციების შემდეგი მწკრივები:

$$g_i(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f_{A_{n+i}}^{(2^n)}(y / (-\alpha)^n) \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{F.1-8})$$

როგორც ვხედავთ, ფუნქციების მოცემული მწკრივი განსაზღვრავს f ფუნქციის უმაღლესი რიგის იტერაციებს პარამეტრის სუპერციკლურ A_n მნიშვნელობისათვის. [ადვილი

საჩვენებელია, რომ (F.1-8) დამოკიდებულება ძალაშია, როდესაც $y=0$. (F.1-8) განტოლების მნიშვნელობა y -ის არანულოვანი მნიშვნელობების მიმართ მის განვრცობაში გამოიხატება]. ჩვენი მსჯელობის მთავარი მომენტი ის არის, რომ $g_i(y)$ ფუნქციები ექვემდებარებიან **გამრავლების წესს**:

$$g_{i-1} = -\alpha g_i [g_i(-y/\alpha)] \quad (\text{F.1-9})$$

ამ შედეგის დამტკიცების მიზნით ამოვწეროთ განტოლების მარჯვენა ნაწილში მყოფი ფუნქციების ნამრავლი და ვაჩვენოთ, რომ იგი დაიყვანება (F.1-9)-ის მარცხენა ნაწილზე. ამისათვის ვიყენებთ (F.1-8) დამოკიდებულებას:

$$\begin{aligned} -\alpha g_i [g_i(-y/\alpha)] &= (-\alpha)(-\alpha)^n f_{A_{n+1}}^{(2^n)} \left[\frac{(-\alpha)^n}{(-\alpha)^n} f_{A_{n+1}}^{(2^n)}(-y/\alpha(-\alpha)^n) \right] \\ &= (-\alpha)^{n+1} f_{A_{n+1}}^{(2^n)} \left[f_{A_{n+1}}^{(2^n)}(y/(-\alpha)^{n+1}) \right] \end{aligned} \quad (\text{F.1-10})$$

ამასთან (5.4-3 ამოცანის შედეგზე დაყრდნობით):

$$f^{(2^n)} \left[f^{(2^n)}(y) \right] = f^{(2 \cdot 2^n)}(y) = f^{(2^{n+1})}(y) \quad (\text{F.1-11})$$

გამოვიყენოთ აღნიშვნა $n+1=m$. შედეგად მივიღებთ, რომ (F.1-10)-ის უკანასკნელი ნამრავლი დაიყვანება

$$(-\alpha)^m f_{A_{m+1}}^{(2^m)} \left(\frac{y}{(-\alpha)^m} \right) \quad (\text{F.1-12})$$

სახეზე. ზღვარზე გადასვლით, როდესაც $m \rightarrow \infty$, (F.1-12) იგივეურად იქნება $g_{i-1}(y)$. ამრიგად, გამრავლების წესი დამტკიცებულია.

ანალიზის საბოლოო და გადამწყვეტ ეტაპზე მტკიცდება (დამტკიცებისთვის იხილეთ FEI79 და [Collet და Eckmann, 1980]), რომ $i \rightarrow \infty$ ზღვარში (როდესაც i -სა და $i-1$ -ს შორის განსხვავება პრაქტიკულად არ არსებობს) $g_i(y)$ ფუნქციები ჩვენს მიერ $g(y)$ -ით აღნიშნული უნივერსალური ფუნქციისაკენ მიისწრაფვის. შენიშნეთ, რომ ზღვარზე გადასვლა,

როდესაც $i \rightarrow \infty$, ტოლფასია A პარამეტრის პერიოდის გაორმაგების ზღვრულ A_∞ მნიშვნელობისთვის აღებისა. უნივერსალური ფუნქცია აკმაყოფილებს გამრავლების წესს:

$$g(y) = -\alpha g[g(-y/\alpha)] \quad (F.1-13)$$

წინა განტოლებას ორმაგ ჩარჩოში იმიტომ ვათავსებთ, რომ იგი რენორმალიზაციის მტკიცებულებას მოიცავს. ამგვარი ფუნქციის არსებობის შესახებ მტკიცება ტოლფასია ფეიგენბაუმის რიცხვების უნივერსალობის შესახებ მტკიცებისა:

α -ს რიცხვითი მნიშვნელობის დასადგენად განვსაზღვროთ $g(y)$ ფუნქციის თვისებები $y=0$ წერტილის მიდამოში, რაც განსაზღვრავს „უნივერსალობის კლასებს“ იტერაციული ასახვებისათვის. $y=0$ წერტილში მაქსიმუმის მქონე კვადრატული ფუნქცია საზოგადოდ, შემდეგი ფორმით ჩაიწერება:

$$g(y) = b - cy^2 \quad (F.1-14)$$

სადაც b და c ფიქსირებული პარამეტრებია, რომელთა მნიშვნელობებსაც უნდა განვსაზღვროთ.

ამოცანა F.1-1. რატომაა (F.1-14) სახე ყველაზე ზოგადი? მოახდინეთ $g(y)$ ფუნქციის ტეილორის მწკრივად წარმოდგენა $y=0$ წერტილის მიდამოში. პირველი რიგის წარმოებული წევრი ქრება (რატომ?). რა შეგვიძლია ვთქვათ პირველ არანულოვან წევრთან დაკავშირებით?

ამოცანა F.1-2. აჩვენეთ, რომ ლოჯისტიკური ასახვა და მე-2 თავში განხილული სინუსური ასახვა x_c წერტილის მიდამოში ტეილორის მწკრივად გაშლისა და b -სა და c -ს კოეფიციენტების დადგენის შედეგად ლებულობს (F.1-14) სახეს.

თუ (F.1-14)-ს ჩავთვლით $g(y)$ -ის მიახლოებით გამოსახულებად, (F.1-13) დამოკიდებულებაში (F.1-14)-ის ჩასმის შედეგად შევძლებთ α -ს მნიშვნელობის განსაზღვრას. შედეგად მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
b - cy^2 &= -\alpha \left[b - c \left\{ b - c \frac{y^2}{\alpha^2} \right\}^2 \right] \\
&= -\alpha \left[b - c \left\{ b^2 - 2bc \frac{y^2}{\alpha^2} + c^2 \frac{y^4}{\alpha^4} \right\} \right] \\
&= -\alpha [b - cb^2] - \frac{2bc^2}{\alpha} y^2 + \frac{c^3 y^4}{\alpha^3}
\end{aligned}
\tag{F.1-15}$$

ამჯერად დამატებითი მიახლოების განხორციელება გვესაჭიროება. თუ y -ს ძლიერ შევამცირებთ, მაშინ y^4 -ის შემცველი წევრი პირველ ორ წევრთან შედარებით ბევრად მცირე იქნება. ამგვარად, შეგვიძლია იმის დაშვება, რომ დანარჩენ წევრებთან შედარებით მისი უგულვებელყოფა შეგვიძლია. ასეთ შემთხვევაში, ტოლობის შენარჩუნებისთვის განტოლების ორ მხარეზე არსებული წევრების y -ისგან დამოუკიდებელი კოეფიციენტები და y^2 -ის მამრავლი კოეფიციენტები შესაბამისად ტოლი უნდა იყვნენ:

$$b = -\alpha [b - cb^2] \tag{F.1-16}$$

$$-c = -\frac{2bc^2}{\alpha} \tag{F.1-17}$$

(F.1-16) გამოსახულებაში (F.1-17)-ის ჩასმის შედეგად მივიღებთ შემდეგ კვადრატულ განტოლებას α -სთვის:

$$\alpha^2 - 2\alpha - 2 = 0 \tag{F.1-18}$$

რომლის ამონახსნებია

$$\alpha = 1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{12} \tag{F.1-19}$$

დადებითი α -ს შემთხვევაში გვექნება: $\alpha = 2.73\dots$, რაც ფეიგენბაუმისეული $2.502\dots$ -ის მიმართ 10%-იანი ცდომილების ფარგლებშია. (F.1-14)-ში $g(y)$ -ისათვის ტეილორის მწკრივის უფრო მაღალი რიგის წევრების აღების გზით შემოთმოყვანილი მიახლოების გაუმჯობესება შეგვიძლია].

კითხვა: გააჩნია თუ არა უარყოფითი ფესვის მქონე ამონახსნს რაიმე ფიზიკური მნიშვნელობა?

შენიშნეთ, რომ b პარამეტრი (F.1-14) დამოკიდებულებაში წარმოადგენს $g(y)$ -ის მნიშვნელობას $y=0$ წერტილში. უნივერსალობის დარღვევის გარეშე შეგვიძლია დავადგინოთ, რომ $b=1$, ვინაიდან b ვერტიკალური ღერძის მასშტაბს განსაზღვრავს. (F.1-17) განტოლებაში α -სთან დაკავშირებით ამ მნიშვნელობის გამოყენებით c -ს მნიშვნელობის პოვნას და აქედან გამომდინარე, $g(y)$ უნივერსალური ფუნქციის მიახლოებითი გამოსახულების დადგენას შევძლებთ:

$$g(y) \approx 1 - 1.36y^2 \quad (F.1-20)$$

(F.1-20) დამოკიდებულება $y=0$ წერტილში მაქსიმუმის მქონე ერთერთი ჩვეულებრივი კვადრატული ფუნქციაა, მაგრამ მნიშვნელოვანია ის ფაქტი, რომ (F.1-13) გამრავლების წესი α -სა და c -ს მხოლოდ თითო კონკრეტული მნიშვნელობის შემთხვევაშია ძალაში. $g(y)$ -ის ერთადერთობაში დარწმუნებისათვის კომპოზიციის წესის გრაფიკული გამოსახულების აგება დაგეხმარებათ.

მსგავსი პროცედურის გამოყენებით ლანფორდმა (LAN82) მოახდინეს $g(y)$ -ის ხარისხოვან მწკრივად წარმოდგენა:

$$g(y) \approx 1 - 1.52763y^2 + 0.104815y^4 + 0.026705y^6 \dots \quad (F.1-21)$$

რომელიც უნივერსალურ ფუნქციას უფრო ზუსტი სახით წარმოგვიდგენს.

F.2. * ფეიგენბაუმის δ რიცხვის განსაზღვრა

ჩავატაროთ იგივე სახის ანალიზი ფეიგენბაუმის δ -ს მნიშვნელობის დასადგენად, რისთვისაც გამრავლების წესის ოდნავ განსხვავებულ აღნიშვნათა სისტემას შემოვიღებთ:

$$g_{i-1}(y) = -\alpha g_i [g_i(-y/\alpha)] \equiv Tg_i(y) \quad (F.2-1)$$

უკანასკნელი ტოლობა განსაზღვრავს T „ოპერატორს“, რომელსაც $g_i(y)$ -ისთვის ორჯერ გამოყენების შემთხვევაში *განმეორების გარდაქმნა* ეწოდება. ამ ოპერატორის $g_i(y)$ ფუნქციაზე მოქმედების შედეგად ხდება ახალი $g_{i-1}(y)$ ფუნქციის წარმოქმნა.

ამ შემთხვევაში $g_i(y)$ უნივერსალური ფუნქცია გაიგივებულია როგორც შემდეგი გარდაქმნის

$$g(y) = Tg(y) \tag{F.2-2}$$

„ფიქსირებული წერტილი“. თუ რაიმე *იტერაციული* ასახვის $x^*=f(x^*)$ ფუნქციისთვის ფიქსირებული წერტილის განსაზღვრებას გავიხსენებთ, მივხვებით, თუ რატომ ეწოდება $g(y)$ -ს გარდაქმნის ფიქსირებული წერტილი. ამ შემთხვევაში რიცხვების ნაცვლად საქმე გვაქვს ფუნქციებთან, მაგრამ იდეა ერთიდაიგივეა.

შემდეგ შევნიშნავთ, რომ გვინტერესებს A_∞ -ის მიდამოში არსებული პარამეტრის მნიშვნელობები. წინა პარაგრაფში აღწერილი შემთხვევის ანალოგიურად, ამ არეში f ფუნქციის იტერაციები მასშტაბის სათანადო ცვლილებების შედეგად დაემთხვევა უნივერსალურ $g(y)$ ფუნქციას. ამრიგად, A_∞ წერტილის მიდამოში მოვახდენთ f ფუნქციის ტეილორის მწკრივად წარმოდგენას პარამეტრის (და არა y ცვლადის) მეშვეობით:

$$f_A(y) = f_{A_\infty}(y) + (A - A_\infty) \left. \frac{\partial f_A(y)}{\partial A} \right|_{A_\infty} + \dots \tag{F.2-3}$$

შენიშნეთ, რომ როდესაც f ფუნქცია როგორც y -ზე, ასევე A -ზეა დამოკიდებული, A ვიყენებთ პარამეტრის კვრძლ წარმოებულს.

მომდევნო საფეხურზე ვადგენთ, გვაახლოვებს თუ არა სულ უფროდაუფრო განმეორების ოპერატორის $f_{A_\infty}(y)$ -ის მიმართ განმეორებითი გამოყენება $g(y)$ -თან. თუ T -ს n -ჯერ გამოვიყენებთ, გვექნება:

$$T^{(n)} f_{A_\infty}(y) = (-\alpha)^n f_{A_\infty}^{(2^n)}(y / (-\alpha)^n) \approx g(y) \tag{F.2-4}$$

$n \gg 1$ -სთვის. ამრიგად, (F.2-3) გამოსახულებას ვწერთ შემდეგი ფორმით:

$$T^{(n)} f_A(y) \approx g(y) + (A - A_\infty) T^{(n)} \left. \frac{\partial f_A(y)}{\partial A} \right|_{A_\infty} + \dots \quad (\text{F.2-5})$$

თუ ყურადღებას $A=A_n$ სუპერციკლურმნიშვნელობაზე გავამახვილებთ, მაშინ გვექნება (სუპერციკლის განსაზღვრების თანახმად):

$$T^{(n)} f_{A_n}(0) = (-\alpha)^n f_{A_n}^{(2^n)}(0) = 0 \quad (\text{F.2-6})$$

ამრიგად

$$-g(0) = (A_n - A_\infty) T^{(n)} \left. \frac{\partial f_{A_n}}{\partial A} \right|_{A_\infty} \quad (\text{F.2-7})$$

სადაც (F.2-5) განტოლების მარჯვენა ნაწილში შენარჩუნებული მხოლოდ პირველი რიგის წარმოებული. თუ (F.2-7) დამოკიდებულება ძალაშია n -ის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის, მაშინ გვექნება:

$$T^{(n)} \left. \frac{\partial f_{A_n}}{\partial A} \right|_{A_\infty} = \delta^n \times \text{constant} \quad (\text{F.2-8})$$

სადაც ფეიგენბაუმის δ განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n - A_{n-1}}{A_{n+1} - A_n} \quad (\text{F.2-9})$$

პარამეტრის იმ მნიშვნელობებზე დაყრდნობით, რომლებზეც სუპერციკლი ვლინდება. (F.2-8) გამოსახულება ამტკიცებს, რომ პარამეტრის ნორმირება ძალაშია n -ის ნებისმიერ მნიშვნელობისათვის.

(F.2-8) დამოკიდებულების სამართლიანობის საჩვენებლად გავიხსენოთ მეორე თავში მიღებული გამოსახულება:

$$(A_\infty - A_n) \times \delta^n = (A_2 - A_1) \frac{\delta^2}{\delta - 1} = \text{constant} \quad (\text{F.2-10})$$

(5.7-8) დამოკიდებულებიდან გამომდინარე, როდესაც T ოპერატორი მოქმედებს $g(y)$ -ზე, $A \rightarrow A_\infty$ ზღვარში გვექნება:

$$Tg(y) = \delta g(y) \quad (\text{F.2-11})$$

$g(0)$ -ის მიღამოში მწკრივად წარმოდგენის გზით ეს გამოსახულება მოგვცემს:

$$\begin{aligned} Tg(y) &= -\alpha g[-y/\alpha] \\ &= -\alpha \left\{ g[g(0)] + \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{g(0)} [g(y) - g(0)] + \dots \right\} \end{aligned} \quad (\text{F.2-12})$$

ვერტიკალური ღერძის ნორმირების თანახმად $g(0)=1$. აგრეთვე შევნიშნოთ, რომ $g(1)=-1/\alpha$ და მივიღებთ:

$$\left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{y=1} = -\alpha \quad (\text{F.2-13})$$

მიღებული შედეგების (F.2-12)-ის მიმართ გამოყენება და ასევე მოთხოვნა, რომ დაკმაყოფილებული იქნას (F.2-11) პირობა, მოგვცემს შემდეგი სახის დამოკიდებულებას ფეიგენბაუმის ორ რიცხვს შორის:

$$-\alpha(-\alpha + 1) = \delta \quad (\text{F.2-14})$$

თუ გავიხსენებთ ჩვენს მიერ ზემოთ გამოთვლილ α -ს მნიშვნელობას, მივიღებთ, რომ $\delta \sim 4.72$, რაც საოცრად ახლოსაა გამოთვლების უფრო დახვეწილი ვერსიით განსაზღვრულ 4.669... მნიშვნელობასთან.

ამოცანა F.2-1. დაამტკიცეთ (F.2-13) და (F.2-14) დამოკიდებულებების მიხედვით მიღებული შედეგების სისწორე და შემდეგ δ -სთან დაკავშირებით ზემოთმიღებული შედეგი შეამოწმეთ. აღსანიშნავია, რომ საოცარი თანხვედრა ნაწილობრივ შემთხვევითია: თუ (F.2-14)-ში უფრო ზუსტ $\alpha=2.502\dots$ მნიშვნელობას გამოვიყენებთ, δ -ს უფრო ზუსტ მნიშვნელობასთან თანხვედრა ნაკლები იქნება.

მე-2 თავში ფეიგენბაუმის δ განვსაზღვრეთ პარამეტრის იმ მნიშვნელობების სხვაობათა ფარდობის სახით, რომელთათვისაც ბიფურკაციები კლინდება. თუ ბიფურკაციის პარამეტრის მნიშვნელობებს a_n -ით, ხოლო სუპერციკლისას A_n -ით აღვნიშნავთ, მივიღებთ $a_n < A_n < a_{n+1} < A_{n+1}$. ამრიგად $n \rightarrow \infty$ პირობებში, თანმიმდევრულ ბიფურკაციებთან და თანმიმდევრულ სუპერციკლებთან დაკავშირებით პარამეტრთა სხვაობების ფარდობებს შორის მოსალოდნელია ტოლობის არსებობა.

შევაჯამოთ ფეიგენბაუმის რიცხვების გამოთვლებისათვის გამოყენებული არგუმენტები. ჩვენ შეგვიძლია სამი ძირითადი მომენტის ჩამოყალიბება: (1) ფუნქციათა კრებალობა უნივერსალური ფუნქციის მიმართ, რომელიც მხოლოდ მაქსიმალური მნიშვნელობის მიდამოში **იტერაციული** ასახვის ფუნქციის თვისებებზეა დამოკიდებული; (2) პერიოდის გაორმაგების ზღვრულ წერტილთან მიახლოებისას ფუნქციის ზომის უნივერსალური ნორმირება, (3) პერიოდის გაორმაგების ზღვრულ მნიშვნელობასთან მიახლოებისას პარამეტრული სხვაობის ნორმირება. მაქსიმალური მნიშვნელობის მიდამოში, **იტერაციული** ასახვის ფუნქციის თვისებების განსაზღვრასთან ერთად, ზემოთმოყვანილი არგუმენტების გამოყენების შედეგი იმაში მდგომარეობს, რომ ფეიგენბაუმის α -სა და δ -ს მნიშვნელობები „ავტომატურადაა“ განსაზღვრული. ეს მნიშვნელობები მაქსიმუმის მახლობლად ერთნაირი მათემატიკური ხასიათის მქონე ნებისმიერი **იტერაციული** ასახვის ფუნქციისთვის უნივერსალურია.

ამჯერად უკვე შეგვიძლია დავასკვნათ, თუ რატომ არსებობს **უნივერსალურობის კლასები** იტერაციული ასახვის ფუნქციებისთვის. უნივერსალურობის კლასები განისაზღვრება ასახვის ფუნქციის თვისებებზე დაყრდნობით მაქსიმალური მნიშვნელობის მიდამოში. კვადრატული მაქსიმუმის მქონე ასახვის ფუნქციები ზემოთ განსაზღვრული უნივერსალური ფუნქციის დადგენისა და α -სა და δ -ს შესაბამისად 2.502-ისა და 4.669-ს ტოლი მნიშვნელობების მიღების წინაპირობაა. თუ ასახვის ფუნქცია y^4 -ის მსგავსად იქცევა, მაშინ შესაბამისი კრებალობისა და ნორმირების კოეფიციენტები განსხვავებული იქნება. მსგავსი მეთოდის გამოყენებით ჰიუმ და სატიამ (HUS83) დაადგინეს α -სა და δ -ს მნიშვნელობები $f(x) = 1 - a|x|^2$ სახის **იტერაციული** ასახვის ფუნქციებისთვის, სადაც z ექსპონენტი უნივერსალურობის კლასს განსაზღვრავს. მათ დაამტკიცეს, რომ ფეიგენბაუმის რიცხვები z -ის

ცვლასთან ერთად მონოტონურად იცვლებიან. კერძოდ, z -ის ზრდასთან ერთად δ მონოტონურად მცირდება და მაღალი z -ის შემთხვევაში 1.27-ის ტოლი მნიშვნელობისაკენ მიისწრაფვის. z -ის დიდი მნიშვნელობისათვის δ წრფივად იზრდება.

სხვა პერიოდული დიაპაზონები

იტერაციული ასახვის მრავალი ფუნქცია გვაძლევს პერიოდული დაპაზონებს ქაოსურ ზოლებში (მაგალითად, იხილეთ ნახ. 5.9). თითოეული დიაპაზონი კი მოიცავს პერიოდის გაორმაგების მიმდევრობას, რომელიც კიდევ უფრო მეტი ქაოსური დიაპაზონის წარმოქმნის წინაპირობაა. თითოეული ასეთი დიაპაზონისათვის არსებობენ ფეიგენბაუმის α -სა და δ -ს ანალოგიური ფეიგენბაუმის რიცხვები. ეს რიცხვები მოყვანილი DHK85-ში ორი განსხვავებული ასახვის ფუნქციისთვის. მეცნიერებმა დაადგინეს, რომ რიცხვები დიაპაზონის პერიოდის ზრდასთან ერთად ექსპონენციალური სახით იზრდებიან. მაგალითად, პერიოდი-3 ფანჯრის შემთხვევაში $\delta_3=55.26$ და $\alpha_3=9.277$. შედარებისთვის ვიტყვით, რომ კვადრატული ექსტრემუმის მქონე იტერაციული ასახვის ფუნქციებისთვის ნებისმიერი პერიოდული ფანჯრის შემთხვევაში ძალაშია $3\delta_N=2\alpha_N^2$ სახის დამოკიდებულება, სადაც N სიდიდე დიაპაზონის შესაბამისი პერიოდია.

F.3 დამატებითი ლიტერატურა

M. Feigenbaum, "The Universal Metric Properties of Nonlinear Transformations," *J. Stat. Phys.* 21, 669-706 (1979) (reprinted in [Hao, 1984]). α -სა და δ -ს უნივერსალურობის დამტკიცება.

M. J. Feigenbaum, "Universal Behavior in Nonlinear Systems," *Los Alamos Science* 1, 4-27 (1980) (reprinted in [Cvitanovic, 1984]). საინტერესო შესავალი კურსი ერთგანზომილებიანი იტერაციული ასახვების უნივერსალური თვისებების შესახებ.

O. E. Lanford III, "A Computer-Assisted Proof of the Feigenbaum Conjectures," *Bull. Am. Math. Soc.* 6, 427-34 (1982) (reprinted in [Cvitanovic, 1984]).

დანართი G

დაფინგის ოსცილატორი ორი პოტენციალური ორმოთი

G.1. მოდელი

ბუნებაში არსებულ მრავალ სისტემას ენერგიული ბარიერებით განცალკევებული სხვადასხვა სტაბილური მდგომარეობა გააჩნია. როდესაც სისტემას სტაბილური მდგომარეობებს შორის „მოძრაობის“ უნარი გააჩნია, დინამიკა საკმაოდ კომპლექსურად ხდება. ამ თვისების მქონე მარტივ მოდელს დაფინგის ოსცილატორი ორი პოტენციალური ორმოთი. ეს მოდელი პირველად გამოიყენეს საწარმოო დანადგარების იძულებითი რხევების შესწავლისთვის [Duffing, 1918]. ამ მოდელში ნაწილაკი იძულებით გადაადგილდება ერთ სივრცით განზომილებაში. ნაწილაკზე გარე ძალა მოქმედებს, რომელიც შემდეგი კანონით გამოისახება:

$$F = +kx - bx^3 \quad (G-1)$$

სახელწოდება „ორმაგი პოტენციალური“ იმიტომ შეიქმნა, რომ პოტენციური ენერგიის შესაბამის ფუნქციას ორმაგი სტრუქტურა გააჩნია. პოტენციური ენერგიის ფუნქცია ჩაიწერება შემდეგი სახით:

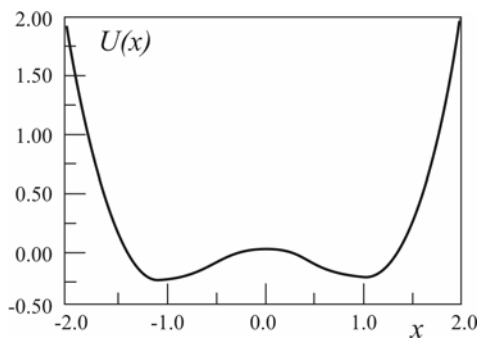
$$U(x) = -\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{4}kx^4 \quad (G-2)$$

G.1 ნახაზი გვიჩვენებს პოტენციური ენერგიის ფუნქციის გრაფიკს. როგორც ვხედავთ, არსებობს $x = \pm\sqrt{k/b}$ მნიშვნელობების შესაბამისი ორი სტაბილური წონასწორული მდგომარეობა, ხოლო $x=0$ შემთხვევაში გვაქვს არასტაბილური წონასწორული წერტილი.

ძილევადი ოსცილატორის მარტივი მექანიკური მოდელის აგების მიზნით ვერტიკალურ მდგომარეობაში დავამაგროთ ელასტიური ლითონის ვიწრო ფირფიტა. შემდეგ ფირფიტაზე დავდოთ მოძრავი მასა. თუ მასა საკმარისად დაბლა მდებარეობს, მაშინ სტაბილური მდგომარეობა ფირფიტის ვერტიკალური მიმართულებით ორიენტაციის შემთხვევაში გამოვლინდება. ამ მდგომარეობიდან მცირედი გადახრები ვერტიკალური მდგომარეობის

მიმართ რხევებს გამოიწვევს. თუ მასას თანდათან ზემოთ გადავანაცვლებთ, მაშინ ვერტიკალური მდგომარეობა საბოლოოდ არასტაბილური ხდება და მასაც ერთ ან მეორე მხარეს „იქანავებს“. ამ შემთხვევაში არსებობს ორი სტაბილური მდგომარეობა და მათ შორის იმყოფება ბარიერი. ასეთი სისტემის აგების დეტალებისთვის იხილეთ BEN97.

ამოცანა G.1. არსებობს მილევადი ოსცილატორის არაერთი სახესხვაობა. თუ ავიღებთ, რომ $k < 0$, მაშინ $b = 0$ მნიშვნელობისთვის ჩვეულებრივ მარტივ ჰარმონიულ ოსცილატორს მივიღებთ. თუ $b \neq 0$, ოსცილატორი არ არის ჰარმონიული. $b > 0$ პირობებში $x = 0$ წერტილისაგან მოშორებით ძალის მოქმედება სუსტია და გვექნება ე.წ. შესუსტებული ზამბარის მდგომარეობა. $b < 0$ პირობებში დიდი გადახრების შემთხვევაში ძალა მატულობს და სახეზეა გამაგრებული ზამბარის მდგომარეობა. ორივე შემთხვევისთვის ააგეთ $U(x)$ ფუნქციის გრაფიკი და მოახდინეთ წონასწორული წერტილების იდენტიფიცირება.



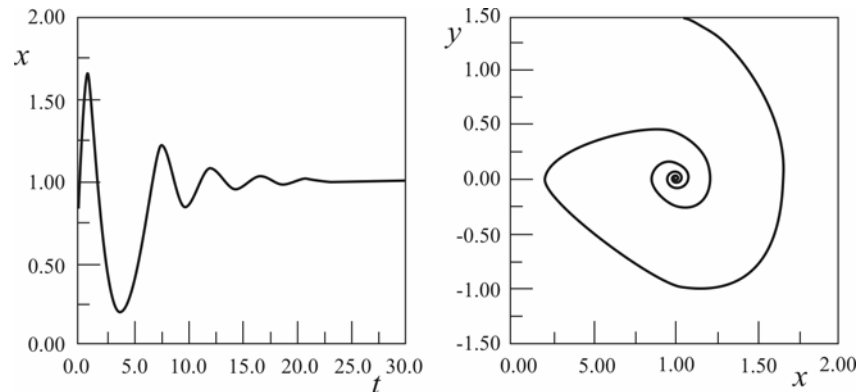
ნახ. G.1. დაფინგის ოსცილატორი ორი პოტენციალური ორმოთი, როდესაც $k = 1$ და $b = 1$.

მდგომარეობათა სივრცეში დინამიკური განტოლებები, როგორც წესი, შედგენილია $k = 1$ და $b = 1$ პირობების დაცვით (უნივერსალურობის თვისების დარღვევის გარეშე) შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^3 - \gamma y \end{aligned} \tag{G-3}$$

სადაც γ წარმოადგენს მილევის კოეფიციენტს, რომელიც ნაწილაკის სიჩქარის პროპორციულია. ასეთ სიტუაციაში ნაწილაკის მოძრაობა შედარებით მარტივია. თუ განსაზღვრული საწყისი კინეტიკური ენერჯის სიდიდის მქონე ნაწილაკი წინ და უკან მოძრაობს მილევის ხარჯზე ენერჯის მცირეოდენი დანაკარგის ფონზე, იგი ბოლოსდაბოლოს გაჩერდება ერთ-ერთი პოტენციალური ორმოს მახლობლად. ოსცილატორი საინტერესო რხევების პერიოდის ამპლიტუდაზე დამოკიდებულების გამოა. ტიპური ტრაექტორია G.2 ნახაზზეა წარმოდგენილი. ყურადღება მიაქციეთ თავდაპირველი ძლიერი რხევის შესაბამისი

პერიოდის განსხვავებას შედარებით მცირე ამპლიტუდის რხევებთან შედარებით. მცირე რხევების შემთხვევაში რხევის პერიოდია $n\sqrt{2}$ ანუ თავისუფალი რხევის ω_0 სიხშირე $\sqrt{2}$ -ის ტოლია.



ნახ. G.2. მარცხნივ გამოსახულია x -ის გრაფიკი დროის ფუნქციის სახით. მარჯვნივ ნაჩვენებია საწყისი $x = 1$ და $y = 1.5$ მნიშვნელობების მქონე მილევადი ოსცილატორის მრუდი მდგომარეობათა სივრცეში ((G-3) განტოლებების მიხედვით). მილევის კოეფიციენტი $\gamma=0.5$.

ამოცანა G.2. დარწმუნდით, რომ მცირე ამპლიტუდის რხევების შემთხვევაში არსებობს რხევის $n\sqrt{2}$ -ის ტოლი პერიოდი. მინიშნება: აიღეთ $\delta = 1 + x$ და გამოიყენეთ იგი (G-3)-ში. დაუშვით, რომ $\delta \ll 1$, კუბური წევრის მიმართ გამოიყენეთ ბინომური მწკრივი და განტოლებები დაიყვანეთ მარტივი ჰარმონიული ოსცილატორის შესაბამის სახეზე.

ქმედება გაცილებით საინტერესო ხდება, როდესაც ნაწილაკის ქმედებას კიდევ ერთი ცვლადი – დროში პერიოდული გარე ძალა“ დაემატება. ამ შემთხვევაში მდგომარეობების სივრცის შესაბამისი განტოლებები იქნება

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^3 - \gamma y + F \cos(\omega t) \end{aligned} \tag{G-4}$$

მარტივ ჰარმონიულ ოსცილატორზე ჩატარებული ექსპერიმენტიდან გამომდინარე, ნაწილაკის ამპლიტუდა შედარებით დიდი იქნება, როდესაც გარე ძალის სიხშირე ნაწილაკის თავისუფალი რხევის სიხშირეს ემთხვევა. სირთულე იმაში მდგომარეობს, რომ თავისუფალი რხევის სიხშირე დამოკიდებულია გადახრის ამპლიტუდაზე. თუ ნაწილაკი გარე მერხვე ძალაზე რეაგირებას იწყებს, მისი ამპლიტუდა იცვლება და აქედან გამომდინარე, თავისუფალი რხევის სიხშირეც იცვლება. თავს იჩენს რამდენიმე ახალი თვისება:

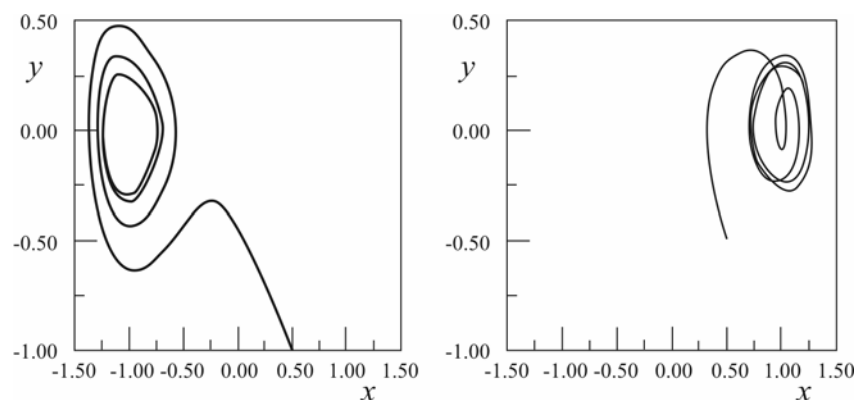
1. გარე მერხვევი ძალის ამპლიტუდის ზრდასთან ერთად სისტემის მახასიათებელი მრუდი ფორმას იცვლის.
2. სისტემის მახასიათებელი მრუდი ავლენს ფაზაში ჩამორჩენას: მახასიათებელი ამპლიტუდა დამოკიდებულია სიხშირის გაზრდასა და შემცირებაზე რეზონანსულ არეში.
3. სისტემამ შესაძლოა გამოავლინოს ქაოსური ქმედება.

პირველი ორი თვისება ანალიზურად არის შესწავლილი [Strogatz, 1994]-სა, გვ. 226-7 და 238-40 და [Jackson, 1991]-ში, ტომი 1. გვ. 308-314. ჩვენ ყურადღებას გავამახვილებთ ქაოსურ ქმედებაზე.

განვიხილოთ შედარებით მცირე ამპლიტუდის მქონე გარე მერხვევი ძალის შემთხვევა. საწყისი გარდამავალი ეტაპების დასრულების შემდეგ სისტემა ასრულებს მარტივ პარამონიულ რხევებს $x=\pm 1$ მნიშვნელობის მიმართ. G.3 ნახაზი გვიჩვენებს ზოგიერთ შესაძლებლო შემთხვევას.

არსებობს ორი მიმზიდველი: $x=1$ და $x=-1$ მნიშვნელობებზე. რომელი საწყისი პირობა (მდგომარეობების სივრცეში) რომელ მიმზიდველს იწვევს? ამ კითხვაზე პასუხის გაცემა ძალზე რთულია, რადგან მიზიდულობის არეები ერთიმეორეშია აღრეული და მათი საზღვრები წარმოქმნის ფრაქტალურ სტრუქტურას მდგომარეობათა სივრცეში (MOL85).

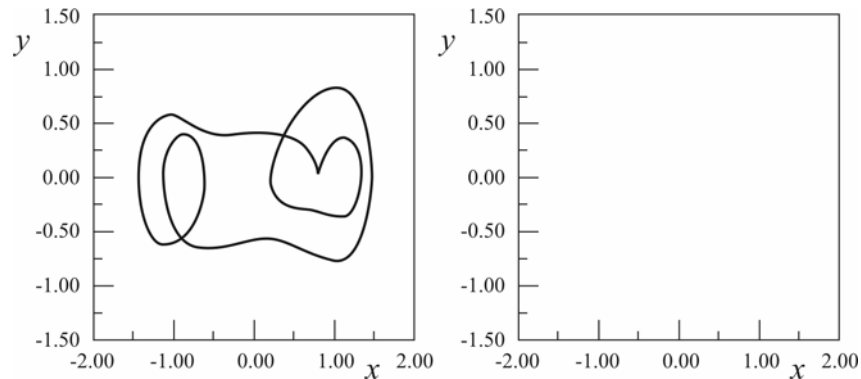
F -ის მნიშვნელობებისთვის 0.38-სა და 0.84-ს შორის (როდესაც $\gamma = 1$ და $\omega = 1.0$) ვღებულობთ ქაოსური ქმედებისა და პერიოდული დიაპაზონების ნარევს. G.4 ნახაზზე ასეთი შემთხვევის ორი მაგალითია მოყვანილი.



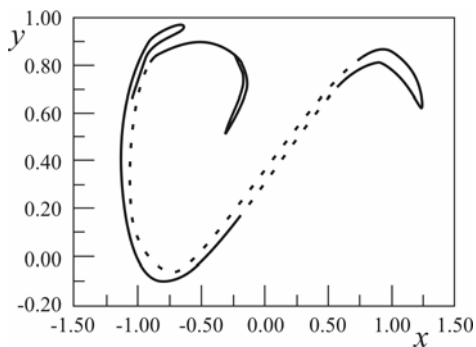
ნახ. G.3. მდგომარეობების სივრცის ტრაექტორიები მიღევადი ოსცილტორის მოდელისთვის, როდესაც $F=0.25$, $\gamma=0.25$ და $\omega=1.0$. მარცხნივ $\gamma_0 = -1.0$, $x_0=0.5$. მარჯვნივ $\gamma_0 = -0.5$, $x_0=0.5$. ორი ტრაექტორია ორ სხვადასხვა ზღვრულ ციკლს შეესაბამება.

G.5 ნახაზი გვიჩვენებს მდგომარეობათა სივრცის პუნკარეს კვეთას (სტრობოსკოპული სურათი) იმ ფაზის შემთხვევაში, როდესაც მაიძულეელ ძალას გააჩნია უდიდესი მნიშვნელობა ანუ როდესაც $\cos(\omega t)=1$. ცხადია, ქაოსურ მიმზიდველს აქვს კომპლექსური სტრუქტურა. F -ის დიდი მნიშვნელობების შემთხვევაში ქმედება პერიოდულია მაიძულებელი ძალის ტოლი პერიოდით.

შედარებით მარტივი მათემატიკური მიდგომის მიუხედავად, მიღების ოსცილატორი საოცრად მრავალფეროვან ქმედებას იძლევა. დამატებითი ლიტერატურის შესახებ ცნობები მომდევნო პარაგრაფშია მოყვანილი.



ნახ. G.4. მარცხნივ ნაჩვენებია პერიოდი-4-ის შესაბამისი მიმზიდველი, როდესაც $F=0.5$. მარჯვნივ მოყვანილი ქაოსური მიმზიდველი, როდესაც $F=0.7$. ორივე შემთხვევაში $\gamma=0.5$ და $\omega=1.0$.



ნახ. G.5. G.4 ნახაზის მარჯვენა ნაწილში მოყვანილი მდგომარეობათა სივრცის პუნკარეს კვეთა ქაოსური მიმზიდველისათვის.

G-2. დამატებითი ლიტერატურა

G. Duffing, *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz and ihre technische Bedeutung* (Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1918).

F. C. Moon and G.-X. Li, "Fractal Basin Boundaries and Homoclinic Orbits for Periodic Motion in a Two-Well Potential," *Phys. Rev. Lett.* 55,1439-42 (1985).

[Moon, 1992]. მოიცავს საინტერესო მსჯელობას დაფინგის მოდელის შესახებ.

C. L. Olson and M. G. Olsson, "Dynamical symmetry breaking and chaos in Duffing's equation," *Am. J. Phys.* 59, 907-11 (1991).

J. E. Berger and G. Nunes, Jr., "A mechanical Duffing oscillator for the undergraduate laboratory," *Am. J. Phys.* 65, 841-846 (1997).

G-3. კომპიუტერული ამოცანები

CEG-1. დაფინგის ოსცილატორის დინამიკის კვლევისთვის ისარგებლეთ *Chaos Dynamics Workbench*-ით. c -სა და ω -ს ფიქსირებული მნიშვნელობებისთვის დაადგინეთ ქაოსური ქმედების გამომწვევი F -ის დიაპაზონი. შეძლებისდაგვარად დაადგინეთ პერიოდის გაორმაგების მიმდევრობა.

CEG-2. გამოიყენეთ *Dynamics: Numerical Explorations* [Nusse და Yorke, 1998] G-3 ნახაზზე წარმოდგენილი ზღვრული ციკლების ორი ტიპის მიზიდულობის არეის კვლევისთვის. შენიშვნა: თუ არეებთან დაკავშირებით მაღალი სიზუსტის სურათის შექმნა გსურთ, გამოთვლით ოპერაციებს შესაძლოაა დიდი დრო დასჭირდეს.

CEG-3. გამოიყენეთ *Dynamics: Numerical Explorations* [Nusse და Yorke, 1998] ცვლადი F პარამეტრის მქონე მილევის ოსცილატორის შესაბამისი ბიფურკაციული დიაგრამის ასაგებად. რამდენად ხართ დარწმუნებულნი, რომ მიღებულ დიაგრამაზე გამოისახება ნებისმიერი მიმზიდველი?

დანართი H

ერთგანზომილებიანი იტერაციული ასახვების დამახასიათებელი სხვა უნივერსალური თვისებები

H.1 შესავალი

მოცემულ დანართში დამატებით ვისაუბრებთ მე-5 თავში წარმოდგენილ თვისებებზე და ყოველგვარი გამოყვანისა და მტკიცებულების გარეშე ერთგანზომილებიანი იტერაციული ასახვების ზოგიერთ რაოდენობრივ უნივერსალურ თვისებას აღვწერთ. ამ თვისებების რიცხვითი მნიშვნელობების მიღება მე-5 თავსა და F დანართში გამოყენებულის მსგავსი მეთოდებითაა შესაძლებელი. გამოყვანის დეტალები ძალიან შორს წავგიყვანს, ამიტომ მსჯელობა მხოლოდ აღწერითი ხასიათისა იქნება.

H.2 ენერგეტიკული სპექტრი

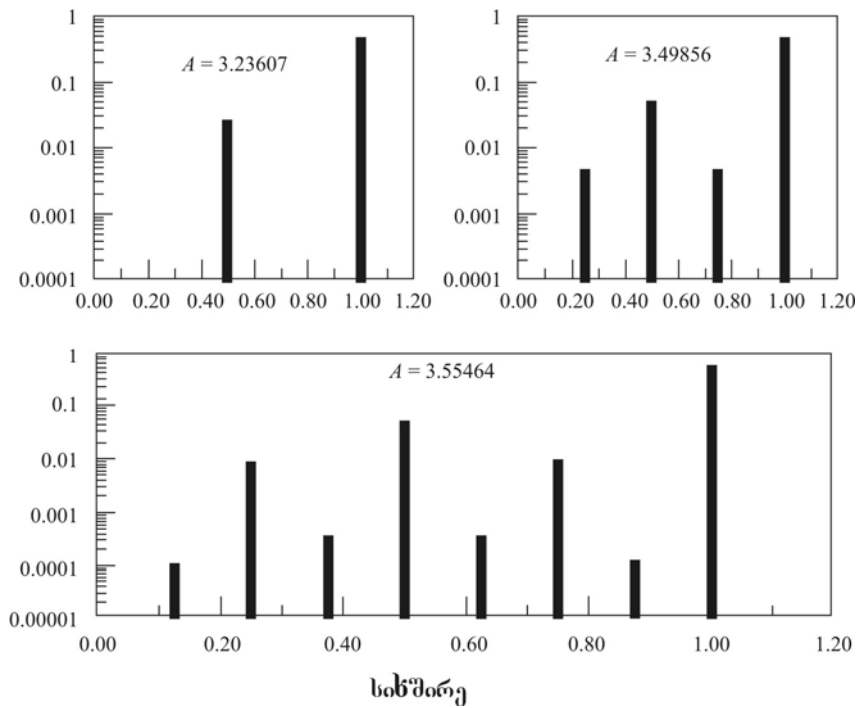
ჩვენთვის უკვე ცნობილია, რომ პერიოდის გაორმაგების ბიფურკაციების მიმდინარეობისას, თითოეულ ახალ ბიფურკაციასთან ერთად ვლინდება სისტემის ძირითადი პერიოდის ახალი სუბჰარმონიკები. ამრიგად, თუ ავაგებთ იტერაციული ასახვის ფუნქციის ტრაექტორიების შესაბამის ენერგეტიკულ სპექტრს, n რიგის ბიფურკაციისას პერიოდი 2^n -ის „დაბადებისას“ მოსალოდნელია ახალი სუბჰარმონიკების გამოჩენაც. მაგრამ რადგანაც სისტემა არაწრფივია, უნდა ველოდოთ ჰარმონიკების შესაბამისი სინშირების ჯამებისა და სხვაობების შესაბამისი კომპონენტების გამოვლენასაც. ყველაზე უკეთ ამ საკითხებს მარტივი მაგალითის მოყვანის მეშვეობით გავიაზრებთ.

იტერაციული ასახვის ფუნქციასთან დაკავშირებით პირველი რიგის პერიოდის შესაბამის ბიფურკაციაზე დაბალი მნიშვნელობის მქონე პარამეტრისთვის ტრაექტორიას გააჩნია პერიოდი, რომელსაც ჩვენ $T=1$ ვუწოდებთ. გარდამავალი პროცესების დასრულების შემდეგ ნებისმიერი იტერაციის მნიშვნელობა ერთი და იგივე იქნება. ამრიგად, ენერგეტიკული სპექტრი ზუსტად ერთი მდგენელისგან იქნება შემდგარი, რომელიც დაიკვირვება $\nu=1/T=1$

სიხშირეზე. პირველი რიგის პერიოდის გაორმაგების ბიფურკაციის აღძვრის შემდეგ უკვე $T=2$ პერიოდის მქონე ქმედება აღინიშნება. ამრიგად, ენერგეტიკულ სპექტრს მდგენელი უკვე $\nu=1/2$ მნიშვნელობაზე გააჩნია. რადგან სისტემა არაწრფივია, $\nu=2X(1/2)=1$ მნიშვნელობაზე იარსებებს ჰარმონიკის მეორე მდგენელიც (ჩვენ უგულვებელყოფთ ნებისმიერი უფრო მაღალი სიხშირის მქონე ჰარმონიკას). მეორე რიგის პერიოდის გაორმაგების ბიფურკაციის აღძვრის შემდეგ სისტემა უკვე $T=4$ პერიოდის შესაბამის ქმედებას ამჟღავნებს და, ამრიგად, ენერგეტიკული სპექტრის მდგენელი $\nu=1/4$ მნიშვნელობაზე დაიკვირვება. არაწრფივობის გამო ენერგეტიკული სპექტრის მდგენელები $\nu=1/2, 3/4$ -სა და 1 მნიშვნელობებზეც წარმოიქმნება. ენერგეტიკული სპექტრის ამგვარი ევოლუცია H-1 ნახაზზეა ნაჩვენები.

ფეიგენბაუმმა (FEI80) დაამტკიცა, რომ სიხშირის ახალ მდგენელებთან დაკავშირებული სრული „ინტენსივობა“ (ფურიეს გარდაქმნის ამპლიტუდების ჯამი)

წინა ბიფურკაციასთან ასოცირებულ „ინტენსივობასთან“ შედარებით უნივერსალურ მუდმივ მამრავლჯერ მცირეა, რომლის სიდიდეც მიახლოებით 0.1525-ის ტოლია.

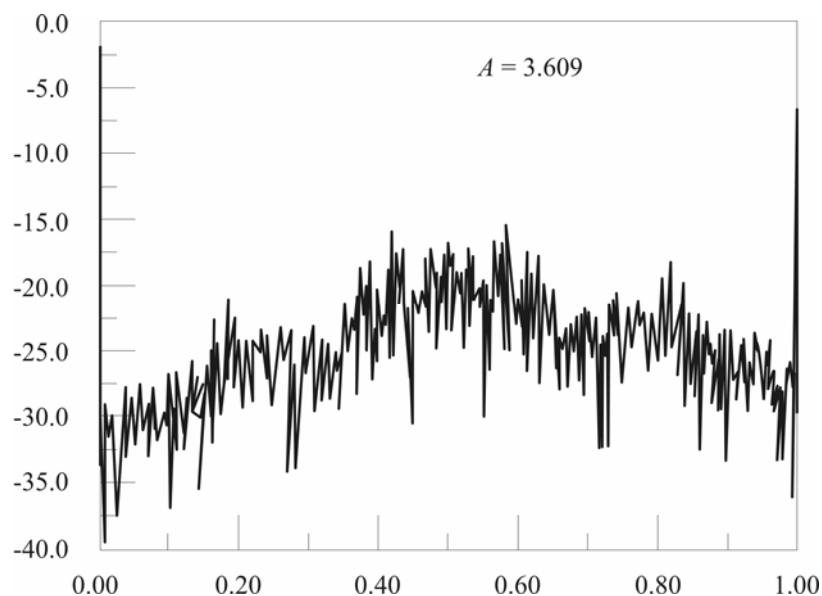


ნახ. H.1. ენერგეტიკული სპექტრის ევოლუცია რამდენიმე პერიოდის გაორმაგების ბიფურკაციის შემთხვევაში. ფურიეს ამპლიტუდის ლოგარითმი გამოსახულია სიხშირის ფუნქციის სახით. სიხშირე ისეა ნორმირებული, რომ პერიოდი 1 ტიპის ქმედებას შეესაბამება ერთის ტოლი სიხშირე აღინიშნება. $\nu=1$ მნიშვნელობაზე მაღალი სიხშირეები უგულვებელყოფილია. მარცხენა ზედა ნაწილი: პერიოდი-2-ის სუპერციკლი. მარჯვენა ზედა ნაწილი: პერიოდი-4-ის სუპერციკლი. შენიშნეთ ახალი მდგენელები $\nu=1/4$ და $\nu=1/4$ მნიშვნელობებზე. ქვედა ნაწილი: პერიოდი-8-ის სუპერციკლი. ახლა მდგენელები $\nu=1/8, 3/8, 5/8$ და $7/8$ -ზე ვლინდება. ამპლიტუდების ჯამთა თორიის თანახმად, პერიოდის თითოეულ

გაორმაგებისას სიხშირის ახალი მდგენელების ამპლიტუდების ჯამი უნდა იყოს 8.17 დეციბელით მცირე, ვიდრე აქამდე არსებულ სიხშირესთან ასოცირებული მდგენელი. მოცემულ დიაგრამებზე 8.17 დეციბელი შეესაბამება ვერტიკალური სკალის დაახლოებით 0.8 ერთეული.

(რადგანაც ენერგეტიკული სპექტრი ხშირად გამოსახულია ლოგარითმულ მასშტაბში, ეს მამრავლი შეესაბამება $10 \log_{10} (0.1525) = -8.17 \text{ dB}$ (dB = დეციბელი)-ის ტოლ სხვაობას]. ენერგეტიკული სპექტრის ზემოთხსენებული თანაფარდობა რამდენიმე ექსპერიმენტშია გამოკვლეული (GMP81, TPJ82), რომელთა შედეგები თანხმობაშია უნივერსალობის ამგვარ პროგნოზთან, მიუხედავად იმისა, რომ სხვადასხვა კენტი რიცხვის შესაბამისი ჰარმონიკების განსხვავებული სიმძლავრეების გამო, ექსპერიმენტული მონაცემებით საშუალო მნიშვნელობების განსაზღვრა ხშირად საკმაოდ რთულია (იხილეთ გასაშუალოების სხვადასხვა მეთოდთან დაკავშირებით მოყვანილი ცნობები).

თუ ფურიეს ენერგეტიკული სპექტრს ქაოსური სიგნალისთვის ვსაზღვრავთ, მაშინ ვღებულობთ სიხშირის მიხედვით უწყვეტ გადანაწილებას. H.2. ნახაზი გვიჩვენებს ენერგეტიკულ სპექტრს ლოჯისტიკური ასახვის ფუნქციის მიხედვით მიღებული სიგნალისთვის, როდესაც $A=3.609$. პარამეტრის ეს მნიშვნელობა აისახება ქაოსურ ტრაექტორიებზე, რომლებიც 5.9 ნახაზის მიხედვით, ორ კვანძს შორის ცირკულირებენ. ენერგეტიკული სპექტრი უწყვეტია, მაგრამ ფართო მაქსიმუმს ორ ქაოსურ დიაპაზონში $\nu=0.5$ მნიშვნელობის მახლობლად ავლენს, რაც შეესაბამება ცირკულაციას ორ ქაოსურ დიაპაზონს შორის შორის.



ნახ. H.2. ორდიაპაზონიანი ქაოსური ქმედების შესაბამისი ენერგეტიკული სპექტრის (ათობით) ლოგარითმი ლოჯისტიკური ასახვისთვის, როდესაც $A=3.609$. შენიშნეთ, რომ ქაოსურ ქმედებისთვის არსებობს სინშირეთა უწყვეტი დიაპაზონი. ორ დიაპაზონს შორის ცირკულაციაა აისახება სპექტრის ფართო მაქსიმუმში $\nu=0.5$ მნიშვნელობის მახლობლად.

H.3 ხმაურისათვის დამახასიათებელი ეფექტები

არაწრფივი სისტემების შესახებ მსჯელობისას აქამდე სრულიად ვერიდებოდით ხმაურის საკითხს ანუ გარედან მომართულ და მოუწესრიგებელი ბუნების მქონე არაკონტროლირებად ქმედებებს, რომლებიც ნებისმიერ რეალურ მეცნიერულ გაზომვებში პროგნოზირების შესაძლებლობებს ზღუდავს. არაწრფივ სისტემებში ხმაური ზოგიერთ ამკარა ეფექტს იწვევს. მაგალითად, თუ სისტემის მაკონტროლებელი პარამეტრის შესაბამისი ექსპერიმენტული სიდიდე „ხმაურის შემცველია“, მაშინ პარამეტრის რაიმე სრულიად განსაზღვრულ მნიშვნელობაზე (თეორიულად) აღძვრადი ნებისმიერი ეფექტი ხმაურში „ჩაიკარგება“. კერძოდ, განვიხილოთ პირველ თავში მოყვანილ დიოდის წრედში კონტროლის პარამეტრის სახით გამოყენებული ძაბვის შესახებ. ამ უკანასკნელის საკმაო სიზუსტით კონტროლის მცდელობის შემთხვევაშიც კი ყოველთვის იარსებებს ელექტრული „ხმაურის“ გარკვეული რაოდენობა. ამ შემთხვევაში ხმაური საკუთარ თავს ძაბვაში არსებული მცირე რხევების სახით წარმოგვიდგენს. ამრიგად, როდესაც ვამბობთ, რომ პირველი პერიოდის გაორმაგების ბიფურკაცია $\nu=1.3345$ ვოლტზე აღიძვრება, რეალურად ვგულისხმობთ, რომ ეს ბიფურკაცია $\nu=1.3345\pm 0.0002$ ვოლტზე ვლინდება, სადაც ხმაურის სიდიდე მიახლოებით 0.0002 ვოლტია.

ცხადია, როდესაც მაღალი რიგის ბიფურკაციებთან გვაქვს საქმე, თანმიმდევრულ ბიფურკაციებს შორის არსებულ ძაბვათა სხვაობა ხმაურის დონესთან შედარებით მცირე იქნება და ქაოსში გარდამავალი სტადიის შესაბამისი ბიფურკაციები ერთიმეორისაგან განურჩეველი იქნებიან.

ხმაურის არსებობა საკვლევ ცვლადის მნიშვნელობებშიც შესაძლებელია იჩენდეს თავს (მაგალითად, ხმაური ერთგანზომილებიანი **იტერაციული** ასახვიას გამოყენებულ x -ის მნიშვნელობებში). **იტერაციული** ასახვებისთვის ხმაურის ამ სახეობის რიცხვითი შესწავლა ასახვის ფუნქციის მიხედვით გამოთვლილ x_{n+1} მნიშვნელობაზე ხმაურის მცირე დოზის დამატებითაა შესაძლებელი. ეს ოპერაცია მრავალ კომპიუტერულ ენაში დანერგილი „შემთხვევითი რიცხვის გენერატორის“ გამოყენებით სრულდება. ფორმალურად ვწერთ:

$$x_{n+1} = f(x_n) + \sigma_n \quad (\text{H.3-1})$$

სადაც σ_n საზოგადოდ, იმგვარად შერჩეული შემთხვევითი რიცხვია, რომ σ_n -ების საშუალო არითმეტიკული ნულის ტოლი უნდა იყოს (ნულის საშუალო მნიშვნელობას ისე ვირჩევთ, რომ დადებითი და უარყოფითი მნიშვნელობების ალბათობა თანაბარია). შემთხვევითი რიცხვების კვადრატების საშუალო მნიშვნელობა გარკვეული ფიქსირებული სიდიდეა, რომლის კვადრატული ფესვი σ სიმბოლოთი აღინიშნება. კრაიფილდმა, ფარმერმა და ჰუბერმანმა (CFH82) ლოჯისტიკური ასახვის იტერაციებთან დაკავშირებით „დამატებითი ხმაურის“ ეფექტი შეისწავლეს. მათ აღმოაჩინეს, რომ ხმაურის არსებობისას ქაოსური ქმედება, სავარაუდოდ, მაკონტროლებელი A პარამეტრის მცირე მნიშვნელობების შემთხვევაში აღიძვრება. მათ გვიჩვენეს, რომ A_∞ (პარამეტრის ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც ქაოსი თავს იჩენს ხმაურის არარსებობის პირობებში) და A^* (პარამეტრის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც ქაოსი თავს იჩენს ხმაურის არსებობისას) პარამეტრებს შორის სხვაობა ექვემდებარება უნივერსალური ხარისხოვან კანონს:

$$A_\infty - A^* \approx k\sigma^\gamma \quad (\text{H.3-2})$$

სადაც $\gamma = \log d / \log \mu$, ხოლო $\mu = 1/0.1525$ ენერგეტიკული სპექტრის ნორმირების რიცხვის შებრუნებული სიდიდეა (d , რასაკვირველია, ფეიგენბაუმის რიცხვია 4.669....-ის ტოლი მნიშვნელობით). თუ σ_m საკმარისად დიდია საშუალო ზომის ხმაურის მიერ გარკვეულ m მნიშვნელობაზე მეტი ინდექსის მქონე ყველა სუბჰარმონიკის „დამალვისთვის“, მაშინ ქაოსი, სავარაუდოდ, თავს იჩენს $A = A_m$ მნიშვნელობაზე. მომდევნო, უფრო დაბალი სუბჰარმონიკის დამალვისთვის ანუ ქაოსური ქმედების A -ს შედარებით მცირე მნიშვნელობებისთვის გადატანისთვის, როდესაც ენერგეტიკული სპექტრის მიმდევრული მდგენელების ფარდობით სიდიდეს გვაძლევს, σ -ს გაზრდა μ -სადმი პროპორციული სახით გვკვირდება. ამრიგად, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_1} \sim \mu^{-m} \quad (\text{H.3-3})$$

სადაც σ_1 წარმოადგენს ქაოსის პარამეტრის A_1 მნიშვნელობიდან დაწყებისათვის საჭირო ხმაურის სიდიდეს. m -ის ამოსახსნელად (H.3-3) განტოლების გალოგარითმება და მიღებული მნიშვნელობის 2.4-1 ამოცანის შედეგში ჩასმა შეგვიძლია. საბოლოოდ მივიღებთ

$$(A_\infty - A_m) = (A_2 - A_1) \frac{\delta^2}{\delta - 1} \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_1} \right)^{\gamma} \quad (\text{H.3-4})$$

(H.3-4) გამოსახულება იგივეა, რაც (H.3-2). ამგვარი ქმედება ლოჯისტიკურ ასახვასთან (CFH82) და ელექტრონულ ოსცილატორებთან (TPJ82 და YEK82) დაკავშირებით ჩატარებულ ექსპერიმენტებში რიცხობრივად დადასტურებული იქნა.

ამოცანა H-1. მიიღეთ (H.3-4) გამოსახულება (H.3-3)-დან.

პრაქტიკაში მდგომარეობა ოდნავ უფრო რთულია. ზოგიერთ შემთხვევაში ხმაურმა ქაოსური ქმედების გამოწვევის გარეშე პერიოდის გაორმაგების კასკადი უბრალოდ შეიძლება გადაფაროს, ხოლო სხვა შემთხვევაში ხმაურმა შესაძლოა ქაოსური ქმედება გამოიწვიოს. ლოჯისტიკური ასახვის კონტექსტში ამ ორი შემთხვევის საფუძვლიანი შესწავლისთვის იხილეთ GHL99.

თუ ქაოსური ქმედების მქონე სისტემები საწყისი პირობების უმნიშვნელო ცვლილებებზე რეაგირებენ, ისინი „ხმაურის გამაძლიერებლებად“ ფუნქციონირებენ (FOE93). მაშასადამე მცირე, მიკროსკოპული ხმაურმა შესაძლოა მაკროსკოპული მასშტაბები მიიღოს.

H.4 დამატებითი ლიტერატურა

M. J. Feigenbaum, "Universal Behavior in Nonlinear Systems," *Los Alamos Science* 1,4-27 (1980) (reprinted in [Cvitanovic, 1984]). გვაწვდის საკმაოდ საინტერესო შესავალ კურსს ერთგანზომილებიანი იტერაციული ასახვების უნივერსალური თვისებების შესახებ.

M. Giglio, S. Musazzi, and U. Perini, "Transition to Chaotic Behavior Via a Reproducible Sequence of Period-Doubling Bifurcations," *Phys. Rev. Lett.* **47**, 243-46(1981).

J. Testa, J. Perez, and C. Jeffries, "Evidence for Universal Chaotic Behavior of a Driven Nonlinear Oscillator," *Phys. Rev. Lett.* **48**,714-17 (1982).

J. P. Crutchfield, J. D. Farmer, and B. A. Huberman, "Fluctuations and Simple Chaotic Dynamics," *Phys. Reports* 92,45-82 (1982).

J. P. Crutchfield and B. A. Huberman, "Fluctuations and the onset of chaos," *Phys. Lett. A* 77,407-10 (1980).

J. Crutchfield, M. Nauenberg, and J. Rudnick, "Scaling for external noise at the onset of chaos," *Phys. Rev. Lett.* 46, 933-35 (1981).

B. Shraiman, C. E. Wayne, and P. C. Martin, "Scaling theory for noisy period-doubling transitions to chaos," *Phys. Rev. Lett.* 46, 935-9 (1981).

R. F. Fox and T. C. Elston, "Amplification of intrinsic fluctuations by the Lorenz equations," *Chaos* 3, 313-23 (1993).

J. B. Gao, S. K. Hwang, and J. M. Liu, "When Can Noise Induce Chaos?" *Phys. Rev. Lett.* 82,1132-35 (1999).

დანართი I

ვან დერ პოლის ოსცილატორი

I.1 ვან დერ პოლის მოდელი

ზოგიერთ მოდელში ზღვრული ციკლები აღწერენ დროზე დამოკიდებული პერიოდული ქმედების სპონტანურ აღძვრას. გამოვიყენოთ ორგანზომილებიან მოდელი იმის გასაგებად, თუ როგორ ურთიერთქმედებენ სისტემის სხვადასხვა ნაწილები ზღვრული ციკლის წარმოქმნისას. მათემატიკისადმი ნაკლები მიდრეკილების მქონე მკითხველს შეუძლია მოცემულ დანართს ზედაპირულად გადაავლოს თვალი.

მოცემულ მოდელს საინტერესო წარსული გააჩნია. თავდაპირველად იგი 1920-იან წლებში ვან დერ პოლმა (VDP26) გამოიყენა ტრიოდის ელექტრონული ოსცილატორის აღწერისთვის (ტრიოდი სამი ელემენტისგან შემდგარი ვაკუუმოვანი ელექტრონული მილაკია). ვან დერ პოლის კვლევის დეტალებს ჩვენ არ განვიხილავთ და ვეცდებით გადმოგვცეთ მხოლოდ ძირითადი მომენტები. შემდეგ კი ვაჩვენოთ, თუ როგორ უნდა გავიგოთ ზღვრული ციკლის არსებობის შესახებ. დანართის დარჩენილი ნაწილი ვან დერ პოლის ოსცილატორის მიახლოებით აღმწერი ანალიზური მეთოდების განხილვას დაეთმობა.

ვან დერ პოლის მოდელის თანახმად, ტრიოდის მილაკში გამავალი ელექტრონული მუხტი წრფივი, მილევადი მარტივი ჰარმონიული ოსცილატორის ამსახველი განტოლებით აღიწერება:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \gamma \frac{dq}{dt} + \omega^2 q = 0 \quad (\text{I-1})$$

სადაც γ ე.წ. მილევის სიჩქარეა, ხოლო ω - მუხტის რხევის სიხშირე მილევის არარსებობის პირობებში. ვან დერ პოლის იდეის არსი გამოიხატება ტრიოდის ქმედების ისეთი სახით მოდელირებაში, რომ მილევის პარამეტრი q მუხტის სიდიდეზე უნდა იყოს დამოკიდებული. მცირე q -ს შემთხვევაში აღინიშნება რხევის ამპლიტუდის ზრდის ტენდენცია. დიდი q -ს შემთხვევაში მერხვეი მუხტის სიდიდე მილაკთან და წრედთან დაკავშირებული ე.წ. გაჯერების ეფექტის მიერ იქნება შეზღუდული. ამგვარი ქმედების მოდელირება შესაძლებელი ხდება γ სიდიდის q მუხტზე იმგვარი ფუნქციონალური დამოკიდებულების შემოღებით, რომ

მცირე q -ს შემთხვევაში $\gamma < 0$. „დისიპაციის“ უარყოფითი მნიშვნელობა გვიჩვენებს, რომ რხევების ამპლიტუდა იზრდება. დიდი q -ს შემთხვევაში γ დადებითი ხდება და ადგილი აქვს მერხვეი მუხტის ენერჯის დისიპაციას. ვან დერ პოლმა შეარჩია შემდეგი მარტივი ფუნქცია:

$$\gamma = -\gamma_0 \left(1 - \frac{q^2}{q_0^2} \right) \quad (\text{I-2})$$

სადაც $\gamma_0 > 0$. როდესაც $q < q_0$, მიღების γ პარამეტრი უარყოფითია და $q > q_0$ შემთხვევაში კი, პირიქით, დადებითი. თუ (I-2) გამოსახულებას (I-1) განტოლებაში ჩავსვათ და შემოვანთ შემდეგ ცვლადებს

$$\begin{aligned} Q &= \frac{q}{q_0} \sqrt{\gamma_0 / \omega} \\ \tau &= t\omega \\ R &= \gamma_0 / \omega \end{aligned} \quad (\text{I-3})$$

მაშინ ვან დერ პოლის განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{d^2 Q}{d\tau^2} - (R - Q^2) \frac{dQ}{d\tau} + Q = 0 \quad (\text{I-4})$$

$U = \dot{Q} = dQ/dt$ ცვლადის შემოყვანის შედეგად (I-4) განტოლება დაიყვანება პირველი რიგის განტოლებაზე და გვექნება:

$$\dot{Q} = U = f_1(Q, U) \quad (\text{I-5})$$

$$\dot{U} = (R - Q^2)U - Q \equiv f_2(Q, U) \quad (\text{I-6})$$

შემდეგ $f_1(Q, U) = 0$ და $f_2(Q, U) = 0$ პირობების მეშვეობით ვპოულობთ სისტემის შესაბამის ფიქსირებულ წერტილებს. ცხადია, ფიქსირებული წერტილი იქნება მხოლოდ ($U=0$; $Q=0$), რაც რხევის არარსებობის პირობას შეესაბამება. სტაბილურია ეს წერტილი თუ

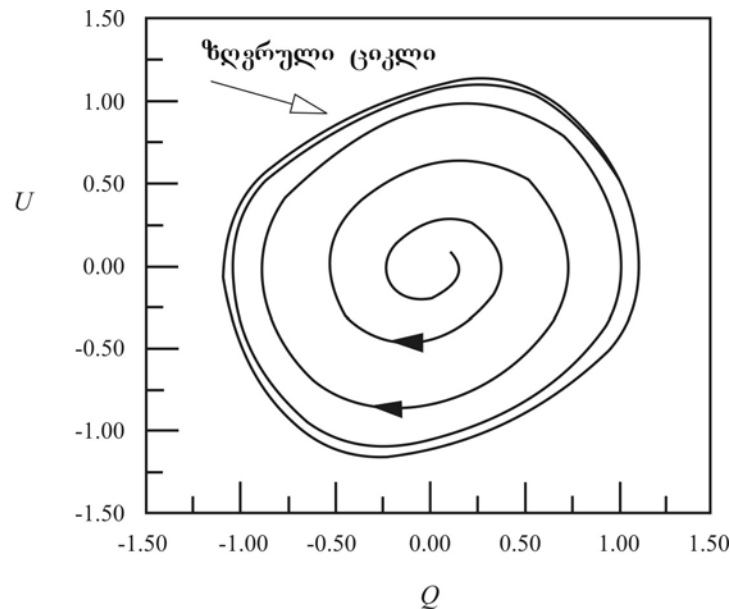
არასტაბილური? ამ კითხვაზე პასუხის გაცემისთვის I.5 და I.6 განტოლებათა სისტემისთვის განვსაზღვრავთ იაკობიანს.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial Q} & \frac{\partial f_1}{\partial U} \\ \frac{\partial f_2}{\partial Q} & \frac{\partial f_2}{\partial U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2QU - 1 & R - Q^2 \end{pmatrix} \quad (I-7)$$

ამრიგად $(0;0)$ წერტილებში დეტერმინანტი $\Delta=1$ და $TrJ= R$. განსაზღვრების თანახმად, როდესაც R დადებითია, არარსევადი ფიქსირებული წერტილი არასტაბილურია. მისი შესაბამისი მახასიათებელი მნიშვნელობებია

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(R \pm \sqrt{R^2 - 4} \right) \quad (I-8)$$

ამრიგად, $R < 2$ შემთხვევაში ფიქსირებული წერტილი სპირალური განმზიდველია. $R > 2$ შემთხვევაში ფიქსირებული წერტილი ჩვეულებრივი გამბნევაა. I.1 ნახაზზე მოყვანილია $R=0.3$ მნიშვნელობის შესაბამისი ქმელება.



ნახ. I.1. $(U=0.1; O=0.1)$ წერტილის მიდამოში დაწყებული ტრაექტორია ვან დერ პოლის ოსცილატორისათვის მდგომარეობათა სივრცეში, როდესაც $R=0.3$. $(0;0)$ ფიქსირებული წერტილი აშკარად სპირალური ტიპის განმზიდველია. როდესაც $t \rightarrow \infty$, ტრაექტორიები მიისწრაფვიან ზღვრულ ციკლისაკენ.

გავიხსენოთ, რომ ფიქსირებული წერტილის სტაბილურობის ანალიზი ამ წერტილის მიერ განზიდული ტრაექტორიების შესახებ ინფორმაციას არ გვაწვდის. ინტუიციაზე დაყრდნობით შეგვიძლია ვიფიქროთ, რომ ტრაექტორიები $(0,0)$ წერტილიდან „შორს ვერ წავლენ“, რადგან მილევასთან დაკავშირებული წვერი დადებითი ხდება და ენერჯის შესაბამისი დისიპაცია ტრაექტორიის ზომებს ზღუდავს.

გამოვიკვლიოთ მუხტის რხევებთან დაკავშირებული ენერჯის დროზე დამოკიდებულება. მოცემული ენერჯის გამოსახვა შეგვიძლია იმ წვერების ჯამის სახით, რომლებიც მექანიკური ოსცილატორის შემთხვევაში კინეტიკური და პოტენციური ენერჯების ანალოგიურია (Berg, Pomeau და Vidal, 1986], გვ. 28-29):

$$W(U, Q) = \frac{1}{2}LU^2 + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \quad (I-9)$$

L ოსცილატორის წრედის ინდუქციაა, ხოლო C - ტევადობაა. ერთეულები ისე შეგვიძლია შევარჩიოთ, რომ შესრულდეს პირობები $L = 1$ და $C = 1$. მაშინ ამ ენერჯის ცვლილების სიჩქარე იქნება

$$\frac{dW}{d\tau} = U \frac{dU}{d\tau} + Q \frac{dQ}{d\tau} \quad (I-10)$$

U -სა და Q -ს დროის მიმართ I.5 და I.6 დამოკიდებულებების გამოყენება მოგვცემს:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\tau} &= U^2(R - Q^2) - QU + QU \\ &= U^2(R - Q^2) \end{aligned} \quad (I-11)$$

ენერჯის ცვლილებას ვასაშუალოებთ რხევის ერთ ციკლზე:

$$\begin{aligned} \overline{\frac{dW}{d\tau}} &= \overline{RU^2} - \overline{U^2Q^2} \\ &= \overline{R\dot{Q}^2} - \overline{\dot{Q}^2Q^2} \end{aligned} \quad (I-12)$$

(გასაშუალებას ვახდენთ რხევის დაახლოებით ერთი პერიოდისთვის საჭირო დროის მიხედვით, რაც დაშვების თანახმად, მილევის $1/\gamma_0$ დროზე მცირეა). მიღებული

გამოსახულების მარჯვენა ნაწილში მყოფი პირველი წევრი გვიჩვენებს ენერჯის გენერაციის სიმძლავრეს წრედში, უარყოფითი ნიშნის მქონე მეორე წევრი კი - ენერჯის დისიპაციის სიჩქარეს. სტაბილური მდგომარეობა ამ წევრებს შორის ბალანსის შემთხვევაში მიიღწევა.

თუ დავუშვებთ, რომ წრედში მყარდება სინუსოიდურ რხევები (განმზიდველის სპირალური ბუნებიდან გამომდინარე, ეს შემთხვევა ფაქტობრივად R -ის მცირე მნიშვნელობებისას ვლინდება). შეგვიძლია დავწეროთ:

$$Q(t) = Q_0 \sin \omega t = Q_0 \sin \tau \quad (I-13)$$

სადაც Q_0 რხევის ამპლიტუდაა, ხოლო ω - რხევის სიხშირეა. გამოვიყენოთ ზემოთმოყვანილი დაშვება რხევების ამპლიტუდის R -ზე დამოკიდებულების ხასიათის განსაზღვრისთვის. თავდაპირველად ვსაზღვრავთ დროში გასაშუალოებულ სიდიდეებს:

$$\overline{\dot{Q}^2} = \overline{(\omega Q_0)^2 \cos^2 \omega t} = \frac{1}{2} \omega^2 Q_0^2 \quad (I-14)$$

$$\overline{Q^2 \dot{Q}^2} = \frac{1}{8} \omega^2 Q_0^4 \quad (I-15)$$

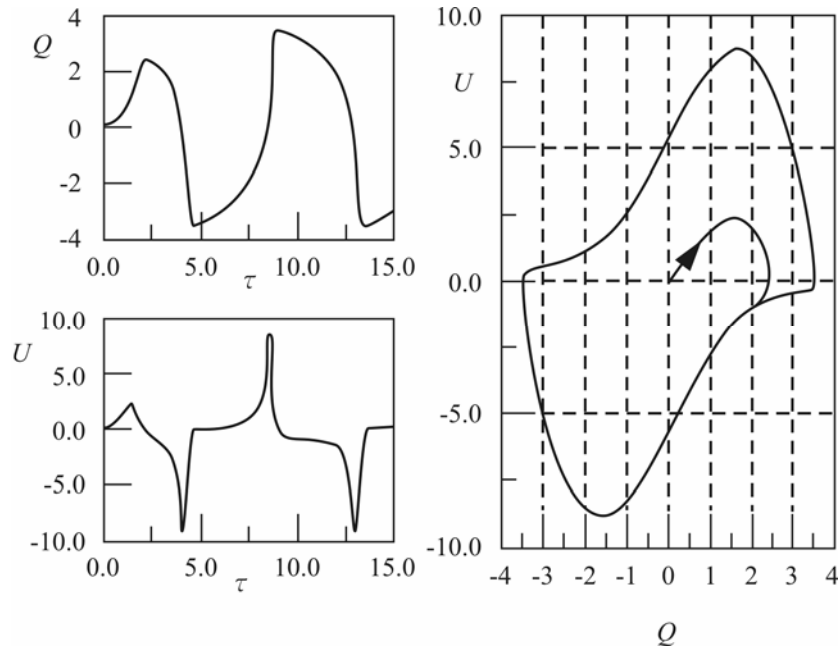
წონასწორული მდგომარეობის შესაბამის რხევებთან დაკავშირებით (I-12) ავიღებთ $dW/dt=0$ და შემდეგ ვიყენებთ I.14 და I.15 გამოსახულებებს:

$$Q_0 = 2\sqrt{R} \quad (I-16)$$

სავარჯიშო I-1. გამოიყვანეთ (I-16) ფორმულა.

მცირე R -ის შემთხვევაში მდგომარეობების სივრცეში $2\sqrt{R}$ რადიუსის მქონე წრეწირით წარმოდგენილი სინუსოიდური რხევების არსებობას უნდა ველოდეთ. R -ის შედარებით დიდი

მნიშვნელობებისას რხევები უკვე არასინუსოიდურ ხასიათს იძენს. ტიპური ქმედება ნაჩვენებია I.2 ნახაზზე, როდესაც $R=3.0$.



ნახ. I.2. ვან დერ პოლის ოსცილატორის ქმედება, როდესაც $R=3.0$. მარცხნივ გამოსახულია $Q(t)$ და $U(t)$. მარჯვნივ მოყვანილია გრაფიკული დამოკიდებულება Q და U სიდიდეთა შორის მდგომარეობების სივრცეში. მიაქციეთ ყურადღება კოორდინატთა სისტემის სათავეში მდებარე ფიქსირებული წერტილის გამმზიდველ ბუნებას.

ერთი უკიდურესი მნიშვნელობიდან მეორეში გარდამავალ რხევებს ვან დერ პოლმა „რელაქსაციური რხევები“ უწოდა. მდგომარეობების სივრცის ასეთი ტრაექტორია I.2 ნახაზის მარჯვენა ნაწილშია ნაჩვენები.

ამრიგად, ჩვენთვის უკვე ცხადია თუ როგორ უნდა გავაანალიზოთ ზღვრული ციკლის სტაბილურობა ანუ გავერკვეთ ზღვრული ციკლის სიახლოვეს ტრაექტორიების მიზიდვისა თუ განზიდვის საკითხში. ამ მეთოდს „ამპლიტუდისა და ფაზის მცირედ შეცვლის მეთოდი“ ეწოდება. არაწრფივი დინამიკაში იგი ფართოდ გამოიყენება (მაგალითად იხილეთ [Sanders და Verhulst, 1984]). მას შემდეგ, რაც მათემატიკოსებმა – კრილოვმა, ბოგოლიუბოვმა და მიტროპულსკიმ განავითარეს მოცემულ მეთოდთან დაკავშირებული ზოგადი ფორმალური მიდგომა, მას ასევე KBM გასაშუალების მეთოდი ეწოდება.

გადავწეროთ (I-4) დიფერენციალური განტოლება შემდეგნაირად:

$$\frac{d^2 Q}{d\tau^2} + Q = (R - Q^2) \frac{dQ}{d\tau} \tag{I-17}$$

თუ განტოლების მარჯვენა ნაწილი იგივეურად ნულის ტოლია, მაშინ Q -ს ცვლილება დროში იქნება სინუსოიდური. ამგვარად, მიზანშეწონილია შემდეგი წარმოდგენა:

$$Q(\tau) = a(\tau) \sin(\tau + \phi(\tau)) \quad (\text{I-18a})$$

$$\dot{Q}(\tau) = a(\tau) \cos(\tau + \phi(\tau)) \quad (\text{I-18b})$$

აქ a ცვლადი ამპლიტუდაა, ხოლო ϕ - ცვლადი ფაზა. შენიშნეთ, რომ ჩვენ $a(\tau)$ -სა და $\phi(\tau)$ -ს ისე ვსაზღვრავთ, რომ ზემოთმოყვანილი პირობები ძალაში დარჩეს \dot{Q} არაა მიღებული. პირველი გამოსახულების გაწარმოების გზით, მაგრამ თუ ჩავატარებთ ამ ოპერაციას, გვექნება შემდეგი ტოლობა

$$\dot{a} \sin(\tau + \phi(\tau)) + a(\dot{\phi} + 1) \cos(\tau + \phi) = a \cos(\tau + \phi) \quad (\text{I-19})$$

ანუ

$$\dot{a} \sin(\tau + \phi) + a\dot{\phi} \cos(\tau + \phi) = 0 \quad (\text{I-20})$$

შემდეგ (I-18)-ის მეორე განტოლების გაწარმოების საშუალებით Q -ს მეორე რიგის წარმოებულს გამოვთვლით და მივიღებთ:

$$\ddot{Q} = \dot{a} \cos(\tau + \phi) - a(1 + \dot{\phi}) \sin(\tau + \phi) \quad (\text{I-21})$$

შემდეგ I.21 და I.18 განტოლებების (I-17)-ჩასმის შედეგად გვექნება:

$$\dot{a} \cos(\tau + \phi) - a\dot{\phi} \sin(\tau + \phi) = [R - a^2 \sin^2(\tau + \phi)] a \cos(\tau + \phi) \quad (\text{I-22})$$

გამოვყოთ განტოლებები \dot{a} და $\dot{\phi}$ ცვლადების მიმართ. ამისათვის ჯერ (I-20) განტოლებას ვამრავლებთ $\sin(\tau + \phi)$ -ზე, ხოლო (I-22)-ს $-\cos(\tau + \phi)$ -ზე და მიღებულ ორ განტოლებას შევკრებთ. შემდეგ (I-20) განტოლებას $\cos(\tau + \phi)$ -ზე, ხოლო (I-22)-ს კი $-\sin(\tau + \phi)$ -ზე

გავამრავლებთ და მათაც შევაჯამებთ. ალგებრული მოქმედებების დასრულების შემდეგ მივიღებთ:

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \{R - a^2 \sin^2(\tau + \phi)\} a \cos^2(\tau + \phi) \\ \dot{\phi} &= -[R - a^2 \sin^2(\tau + \phi)] \sin(\tau + \phi) \cos(\tau + \phi)\end{aligned}\quad (\text{I-23})$$

აღბათ შენიშნეთ, რომ (I-23) განტოლებები (I-17)-ის ექვივალენტურია, ჩვენ უბრალოდ ცვლადები შევცვალეთ. როდესაც ტრაექტორია ზღვრული ციკლის მანლობლად გადის, მისი a ამპლიტუდა და ϕ ფაზა განიცდიან ნელ ცვლილებებს რხევის პერიოდის რიგის დროის განმავლობაში. ამრიგად, რხევის ერთი პერიოდის განმავლობაში ამ სიდიდეების დროით წარმოებულები თითქმის მუდმივი სიდიდეებია. თუ ეს პარამეტრები ზღვრული ციკლის სიახლოვეს მდებარე ტრაექტორიებისთვის გამოვიყენებთ, მაშინ ერთი პერიოდის განმავლობაში (I-23) განტოლებათა მარჯვენა ნაწილების ინტეგრების შედეგად შევძლებთ ამპლიტუდისა და ფაზის მიღებას. ამისათვის გამოვიყენოთ შემდეგი ინტეგრალები:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\tau \cos^2(\tau) = \frac{1}{2} \quad (\text{I-24a})$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\tau \sin^2(\tau) \cos^2(\tau) = \frac{1}{8} \quad (\text{I-24b})$$

$$\int_0^{2\pi} d\tau \sin^2(\tau) \sin \tau \cos \tau = 0 \quad (\text{I-24c})$$

შედეგად მივიღებთ მიახლოებით განტოლებებს:

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \frac{a}{2} \left[R - \frac{a^2}{4} \right] \\ \dot{\phi} &= 0\end{aligned}\quad (\text{I-25})$$

სავარჯიშო I-2. გამოიყვანეთ (I-25) განტოლებები.

აღსანიშნავია, რომ ზღვრული ციკლი გვექნება $\dot{a}=0$ შემთხვევაში ანუ ჩვენს მიერ ზემოთ ნაპოვნი $a = 2\sqrt{R}$ მნიშვნელობისათვის მიიღწევა. მოცემული მეთოდი გვაძლევს ახლომდებარე

ტრაექტორიების ზღვრული ციკლისაკენ კრებადობის სიჩქარის დადგენის საშუალებასაც. ამ უკანასკნელს (I-25) განტოლებების პირველი განტოლების მარჯვენა ნაწილს ზღვრული $a^* = 2\sqrt{R}$ ციკლის მიდამოში წარმოვადგენთ ტეილორის მწკრივის სახით:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= f(a) \\ &= f(a^*) + \frac{df}{da}(a - a^*) + \dots \\ &= R(a - a^*) + \dots \end{aligned} \quad (\text{I-26})$$

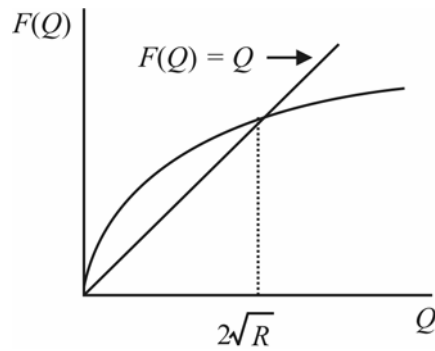
(I-26) გამოსახულება გვამცნობს, რომ ტრაექტორიები ექსპონენციალური სახით მიისწრაფვიან ზღვრული ციკლისაკენ. თუ დავუშვებთ, რომ წარმოადგენს სხვაობას ტრაექტორიის $a(t)$ ამპლიტუდასა და ზღვრული ციკლის a^* ამპლიტუდას შორის, გვექნება:

$$d(t) = d_0 e^{-Rt} \quad (\text{I-27})$$

სადაც d_0 წამოადგენს d სიდიდის მნიშვნელობას, როდესაც $t=0$. ამრიგად, ზღვრული ციკლი სტაბილურია, რადგან ზღვრული ციკლის ერთ ან მეორე მხარეზე განლაგებული ტრაექტორიები დროთა განმავლობაში ამ ციკლისაკენ მიისწრაფვიან.

გამოვიყენოთ ჩვენს მიერ დაგროვილი ცოდნა ვან დერ პოლის ოსცილატორთან დაკავშირებით პუნკარეს ასახვის ფუნქციის მიახლოებითი აგების მიზნით. თუ პუნკარეს კვეთის სახით ავირჩევთ დადებით Q ღერძს მდგომარეობათა სივრცეში, მაშინ $a(\tau)$ ამპლიტუდა მოგვცემს ტრაექტორიის მიერ მასთან გადაკვეთის წერტილის მდებარეობას. თუ ჩვენს მიერ შერჩეულ დროის ერთეულში კვეთებს შორის დროის ინტერვალები 2π -ს ტოლია, მაშინ (I-27)-ის ძალით, ზღვრული ციკლიდან მანძილის მე შვეობით გამოსახული პუნკარეს ასახვის ფუნქცია მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$d_{n+1} = d_n e^{-2\pi R} \quad (\text{I-28})$$



ნახ. I-3. ვან დერ პოლის ოსცილატორის პუნკარეს ასახვის ფუნქციის ესკიზი. ვუშვებთ, რომ $R < 1$.

ზღვრული ციკლის გადაკვეთის ის წერტილი, რომლისთვისაც $d_n = 0$, წარმოადგენს პუნკარეს ასახვის სტაბილურ ფიქსირებულ წერტილს.

სავარჯიშო I-3. ვან დერ პოლის ოსცილატორის პუნკარეს ასახვის გრაფიკული ანალიზი $R < 1$ შემთხვევაში. პარამეტრის იმ მნიშვნელობებისათვის, რომელთათვისაც $(U=0; Q=0)$ კოორდინატთა სისტემის სათავე განმზიდველია და $(2\sqrt{R}, 2\sqrt{R})$ წარმოადგენს მიმზიდველს, პუნკარეს ასახვის $F(Q)$ ფუნქცია I-3 ნახაზზე მოყვანილი სახით მოიცემა. გამოიყენეთ 1.4 პარაგრაფში წარმოდგენილი გრაფიკული მეთოდი და დაადგინეთ, თუ რა სახით მიისწარფვის Q სიდიდე ფიქსირებული $Q = 2\sqrt{R}$ მნიშვნელობისაკენ.

სავარჯიშო I-4. $R < 1$ და Q -ს მცირე ამპლიტუდის რხევების შემთხვევაში (როდესაც ქმედება სინუსოიდურია) მდგომარეობების სივრცის $Q - U$ სიბრტყეზე ნებისმიერ მონაკვეთთან დაკავშირებით შესაძლებელია პუნკარეს ასახვის ფუნქციის სახის დადგენა. იპოვეთ ეს ფუნქცია.

I.2 დამატებითი ლიტერატურა

B. van der Pol, "On Relaxation Oscillations," *Phil. Mag.*(7) 2,978-92 (1926).

I.3 კომპიუტერული ამოცანები

CEI-1. ისარგებლეთ *Chaos Demonstrations* ვან დერ პოლის განტოლების ზღვრული ციკლების შესწავლის მიზნით. ცვალებად h პარამეტრი (ეკვივალენტურია ტექსტში გამოყენებული R პარამეტრისა) რხევების მარტივი ჰარმონიულიდან (მცირე მნიშვნელობები) რელაქსაციურ რხევებზე (დიდი მნიშვნელობები) გადასვლის ხასიათის წარმოდგენის მიზნით.

CEI-2. გამოიყენეთ *Chaos Dynamics Workbench* და შეისწავლეთ შოუ – ვან დერ პოლის ოსცილატორი, როდესაც ძალისმიერ წევრს გააჩნია ნულის ტოლი მნიშვნელობა (მდგომარეობათა ორგანზომილებიანი სივრცის მიღების მიზნით). შეისწავლეთ დინამიკური ცვლადების დროზე დამოკიდებულება და მდგომარეობათა სივრცის დიაგრამები A კოეფიციენტის ზრდასთან ერთად.

დანართი J

ლაზერის დინამიკის მარტივი მოდელები

J.1 მარტივი მოდელი

მოცემულ დანართში ლაზერული დინამიკის მოდელირებასთან დაკავშირებით მე-3 თავში მოყვანილ მოსაზრებებს გამოვიყენებთ. როგორც ირკვევა, ბიფურკაციის ცნება ლაზერის ფიზიკის შესწავლაში გარკვეულ დახმარებას გვიწევს. განვიხილოთ ლაზერში აღძრული სინათლის გაძლიერების პროცესის მეტად მარტივი მოდელი. გავამახვილოთ ყურადღებას ლაზერში ფოტონების (სინათლის ენერჯის „ნაწილაკების“) რაოდენობის დროში ცვლილებაზე. ლაზერის მიერ გამოსხივებული სინათლის ინტენსივობა პროპორციულია ფოტონების რაოდენობისა, რომელიც აღვნიშნოთ N სიმბოლოთი.

ლაზერში სინათლის ინტენსივობას აძლიერებს მისი ურთიერთქმედება „აქტიურ გარემოსთან“, რომელსაც ქმნის ატომთა ერთობლიობა. როდესაც გამოსხივება ატომებთან ურთიერთქმედებს, ატომებს დაბალი ენერგეტიკული მდგომარეობიდან მაღალში გადასვლისას გააჩნია გამოსხივების შთანთქმის უნარი. მაღალი ენერგეტიკული მდგომარეობიდან დაბალში გადასვლისას კი პირიქით, ადგილი აქვს ფოტონთა გამოსხივებას. გადასვლისთვის საჭირო ატომის ენერჯის ცვლილება გადასვლის დროს გამოსხივებული ან შთანთქმული ფოტონის ენერჯის ტოლია. გამოსხივების ინტენსივობა გადასვლის დროს პროპორციულია ატომების რაოდენობისა. ამგვარად, ლაზერში გამოსხივების გაძლიერება მაღალ და დაბალ დონეებზე არსებულ ატომთა რაოდენობებს შორის სხვაობის პროპორციულია. ეს სხვაობას ავლნიშნოთ N_a სიმბოლოთი.

N -ის დროში ცვლილების ფენომენოლოგიური მოდელი ემყარება ფოტონთა კანონს:

$$\dot{N} = GNN_a - \gamma N \quad (J-1)$$

სადაც როგორც N , ასევე N_a მოცულობის ერთეულზეა გათვლილი. γ წარმოადგენს ლაზერიდან ფოტონების გამოსვლის სიჩქარეს. G სიდიდეს ლაზერის „გაძლიერების“ კოეფიციენტი ეწოდება. ზემოთმოყვანილი გამოსახულება გვამცნობს, რომ ლაზერში ფოტონების რაოდენობა, *იძულებითი გამოსხივების* გაძლიერების პროცესიდან გამომდინარე,

იზრდება (მოგებითი ნაწილი) და კლებულობს ლაზერიდან ფოტონების კარგვის (კარგვითი ნაწილი). ლაზერის გამოსხივების ამგვარ სახეს იძულებითი გამოსხივება ეწოდება, რადგან ფოტონების არსებობა სინათლეს უფრო დიდი ინტენსივობით გამოსხივებას აიძულებს.

როდესაც იძულებით გამოსხივებას (რომლის ალბათობაც პროპორციულია ფოტონების რაოდენობისადმი) ატომი აგზნებული მდგომარეობიდან რაიმე უფრო დაბალი ენერგეტიკულ მდგომარეობაში გადაჰყავს, ხოლო შთანთქმას კი დაბლიდან – მაღალში, ატომების დასახლებულობათა სხვაობა ფოტონების რაოდენობაზე იქნება დამოკიდებული.

ამრიგად, ვწერთ:

$$N_a = N_{ap} - BN \quad (J-2)$$

სადაც N_{ap} წარმოადგენს გარკვეული „დატუმბვის“ პროცესიდან (მაგალითად, ატომების ელექტრონებთან ან ერთმანეთთან შეჯახებით გაოწვეული) გამომდინარე ატომის დასახლებულობათა სხვაობა, ხოლო B – არსებული ფოტონების რაოდენობისადმი პროპორციული იძულებითი გამოსხივების კოეფიციენტი. ((J-2) განტოლების ჭეშმარიტებასთან დაკავშირებით ბუნებრივად შეიძლება გაჩნდეს კითხვა. ჩვენ მოკლედ მოგაწვდით დასახლებულობათა სხვაობაში ცვლილების შედარებით „რეალურ“ აღწერას). მოცემული გამოსახულების (J-1)-ში ჩასმის შედეგად ჩანს, რომ ფოტონების რაოდენობის დროში ცვლილება შემდეგნაირად აღიწერება:

$$\dot{N} = k_1 N - k_2 N^2 \equiv f(N) \quad (J-3)$$

სადაც $k_1 = GN_{ap} - \gamma$ და $k_2 = GB$.

ეს გახლავთ მდგომარეობათა ერთგანზომილებიანი სივრცის მოდელი. ლაზერის სტაბილური მდგომარეობის შესაბამისი ქმედება კი შეესაბამება (J-3)-ის ფიქსირებულ წერტილებს. ადვილი სანახავია, რომ არსებობს ორი ფიქსირებული წერტილი, რომელთაც N_0 -ითა და N^* -ით აღვნიშნავთ:

$$\begin{aligned} N_0 &= 0 \\ N^* &= \frac{k_1}{k_2} \end{aligned} \quad (J-4)$$

თუ N_{ap} სიდიდეს განვიხილავთ, როგორც მაკონტროლებელ პარამეტრს, მაშინ k_1 და k_2 სიდიდეების შესაბამისი გამოსახულებებიდან ვნახავთ, რომ $N_{ap} < \gamma/G$ შემთხვევაში N^* უარყოფითია, რაც ფიზიკურად უინტერესოა, ვინაიდან ფოტონთა რიცხვი ნულის ტოლი ან დადებითია. $N_{ap} > \gamma/G$ შემთხვევაში გვექნება ორი მნიშვნელოვანი N_0 და N^* ფიქსირებული წერტილი. $N_{ap} = \gamma/G$ „ზღვრული მნიშვნელობა“, როდესაც ლაზერული გაძლიერება მასზე მაღალი მნიშვნელობებისათვის იწყებს გამოვლინებას.

დავადგინოთ ფიქსირებული წერტილების სტაბილურობა მათში წარმოებულების განსაზღვრის გზით:

$$\left. \frac{df}{dN} \right|_o = +k_1$$

$$\left. \frac{df}{dN} \right|_* = -k_1$$
(J-5)

ზღვრული γ/G მნიშვნელობაზე დაბალი N_{ap} -თვის (არაწრფივი დინამიკის ენით რომ ვთქვათ, ბიფურკაციულზე მცირე მნიშვნელობის შემთხვევაში), N_0 სტაბილური ფიქსირებული წერტილია, ხოლო N^* – არასტაბილურია. ამრიგად, ზღვრული მნიშვნელობის ქვემოთ ფოტონთა რიცხვი ნულისაკენ მიისწრაფვის და ლაზერიც მისთვის დამახასიათებელ გამოსხივებას არ ავლენს (კვლავ არსებებს „მოუწესრიგებელი“ სპონტანური გამოსხივებისათვის დამახასიათებელი გარკვეული სინათლე, მაგრამ გაძლიერებული გამოსხივება უკვე აღარ გვაქვს). ზღვრული მნიშვნელობაზე მეტობისას N^* გარდაიქმნება სტაბილურ ფიქსირებულ წერტილად და N_{ap} პარამეტრის ზრდასთან ერთად ფოტონების რაოდენობაც წრფივად მატულობს. მათემატიკური თვალსაზრისით, N^* სასაზღვრო მნიშვნელობაზე ქვემოთ მყოფი არასტაბილური ფიქსირებული წერტილი და ვამბობთ, რომ ბიფურკაციის წერტილში აღინიშნება **სტაბილურობის ცვლილება**.

ლაზერის ამგვარი მოდელის შესაბამისი დინამიკური განტოლების ზუსტად ამოხსნა შესაძლებელია, რადგან ახალ $u = k_1/(k_2 N)$ ცვლადზე გადასვლის საშუალებით იგი წრფივ დიფერენციალურ განტოლებამდე დაიყვანება. u -სთვის დინამიკურ განტოლებს ექნება შემდეგი სახე:

$$\dot{u} = k_1(2 - u)$$
(J-6)

რომელსაც გააჩნია შემდეგი სახის ამონახსნი:

$$1 - u(t) = \{1 - u(0)\}e^{-k_1 t} \quad (J-7)$$

საწყის $N(t)$ ცვლადზე დაბრუნება მოგვცემს

$$N(t) = \frac{k_1 / k_2}{1 - \left(1 - \frac{k_1}{k_2 N(0)}\right) e^{-k_1 t}} \quad (J-8)$$

ამრიგად ზღვრული მნიშვნელობის ქვემოთ, როდესაც $k_1 < 0$, ადგილი აქვს მოცემული გამოსახულების მნიშვნელობის ექსპონენციალური ფუნქციის დომინირებას და დროთა განმავლობაში $N(t) \rightarrow 0$. სასწინააღმდეგ შემთხვევაში:

$$N(t) \rightarrow \frac{k_1}{k_2} = \frac{N_{ap}}{B} - \frac{\gamma}{GB} \quad (J-9)$$

რომელიც N_{ap} პარამეტრის ზრდასთან ერთად წრფივად იზრდება ანუ მეტი ენერჯის “ჩატუმბვით” მეტი ფოტონი “გამოიღვენება”.

ამოცანა **J-1**. გამოიყვანეთ (J-8) გამოსახულება.

ზემოთმოყვანილი შემთხვევიდან გამომდინარე, უნდა გავიაზროთ რამდენიმე მნიშვნელოვანი მომენტი: 1) ნებისმიერი არაწრფივი დიფერენციალური განტოლება ამოუხსნელი არ არის. მაგალითად, N ცვლადის თვალსაზრისით (J-3) განტოლება არაწრფივია, მაგრამ ცვლადის შეცვლის შედეგად მისი წრფივი დიფერენციალური ფორმის მქონე (J-6) განტოლებაზე დაყვანა ხდება შესაძლებელი; 2) წრფივი დიფერენციალური განტოლებების ამონახსნებმა შესაძლებელია ბიფურკაციები გამოავლინონ. (J-6) განტოლებას ფიქსირებული წერტილი $u=1$ მნიშვნელობის შემთხვევაში აღენიშნება. $k_1 < 0$ -სთვის იგი არასტაბილური იქნება და დროთა განმავლობაში შესაბამისი ამონახსნი $u(t) \rightarrow \infty$ (რაც ფოტონების რაოდენობის ნულისაკენ მისწრაფებას შეესაბამება). $k_1 > 0$ პირობებში ფიქსირებული წერტილი სტაბილურია. ყურადღება მიაქციეთ, რომ (J-6) გამოსახულების მიხედვით, $N=0$ შემთხვევაში ფიქსირებული წერტილი ცხადი ახით უკვე აღარ გვაქვს; 3) ზემოთმოყვანილი მოდელი ფრიად გამარტივებულია და ჭეშმარიტი ლაზერების რთულ

დინამიკას არ აღწერს. (J-2) განტოლებაში N_a -სა და N -ს შორის მოყვანილი მარტივი კავშირი ლაზერთა უმრავლესობასთან დაკავშირებით ჯერჯერობით დადასტურებული არაა.

J.2 ლაზერის გაუმჯობესებული მოდელი

ლაზერის გაუმჯობესებული მოდელის თანახმად, რომ დასახლებულობათა შორის N_a სხვაობის ცვლილების სიჩქარე იძულებითი პროცესის შესაბამისი “ჩატუმბვისა” და გადასვლის სიჩქარეთა სხვაობისადმი პროპორციულია. ამრიგად:

$$\dot{N}_a = -BN_a N + \gamma_r(N_{ap} - N_a) \quad (J-10)$$

ეს განტოლება გვაუწყებს, რომ გაძლიერების არარსებობის პირობებში ($B=0$) ატომების რაოდენობა N_a მნიშვნელობას უახლოვდება, რაც გარედან მოქმედი ჩატუმბვის პროცესის მიერ განისაზღვრება. γ_r პარამეტრი გვაძლევს აგზნებულ მდგომარეობაში მყოფი ატომების რაოდენობის ამ მნიშვნელობამდე შემცირების სიჩქარეს. განტოლების პირველი წევრი გვაძლევს გაძლიერების პროცესთან დაკავშირებული აგზნებული ატომების რაოდენობის ცვლილების (კლების) ინტენსივობის ხარისხს, რომელსაც ატომი აგზნებული მდგომარეობიდან რაიმე უფრო სტაბილურ მდგომარეობაში გადაჰყავს. მთლიანობაში (J-1) და (J-10) განტოლებები ლაზერის ქმედების ორგანოზომილებიან მოდელს უქმნიან საფუძველს. N_a და N მდგომარეობების სივრცის ცვლადებია. ამჯერად სისტემასთან დაკავშირებული ფიქსირებული წერტილებისა და ბიფურკაციების შესწავლის მიზნით ვიყენებთ მე-3 თავში აღწერილი მეთოდს.

თავდაპირველად (J-1) განტოლებაში ვუშვებთ, რომ $G=B$, ვინაიდან განტოლების პირველი წევრი უკავშირდება (J-10)-ში აღწერილ იმავე იძულებითი გამოსხივების პროცესს. შემდეგ ახალი ცვლადების შემოყვანის გზით ხდება დინამიკური განტოლებების უგანზომილებო ფორმაში გადაყვანა:

$$\begin{aligned} P &= \frac{BN_{ap}}{\gamma} & R &= \frac{\gamma}{\gamma_r} & n_a &= \frac{BN_{ap}}{\gamma} \\ & & \tau &= t\gamma_r & n &= \frac{BN}{\gamma_r} \end{aligned} \quad (J-11)$$

სადაც P სიდიდე „ჩატუმბული“ აგზნებული ატომებისთვის დამახასიათებელი ფოტონების გაძლიერების სიჩქარეა ფოტონების გადინების სიჩქარის მიმართ, R - ფოტონის გადინების სიჩქარე აგზნებული მდგომარეობის რელაქსაციის სიჩქარის მიმართ. τ აგზნებული მდგომარეობის რელაქსაციის სიჩქარის შებრუნებული სიდიდეა, n და n_a შესაბამისად „ნორმალიზებული“ ფოტონების რაოდენობა და ატომის დასახლებულობათა სხვაობაა. ლალისფერი ლაზერისთვის $P=30$, $R=10^5$, ხოლო Nd-YAG ლაზერისთვის კი $P=2$, $R=10^4$. ამ ცვლადების გამოყენებით დინამიკურ განტოლებას გამოვსახავთ შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned}\frac{dn}{d\tau} &= Rn(n_a - 1) \\ \frac{dn_a}{d\tau} &= P - n_a(n + 1)\end{aligned}\tag{J-12}$$

სავარჯიშო J-2. გამოიყენეთ უგანზომილებო ცვლადების განსაზღვრებები (J-12) განტოლების (J-1) და (J-10) განტოლებებიდან გამომდინარეობის შესამოწმებლად.

ამის შემდეგ გვესაჭიროება n და n_a ცვლადების მქონე ორგანზომილებიანი სისტემისთვის ფიქსირებული წერტილების იდენტიფიცირება. (J-12) განტოლებაში დროითი წარმოებულების ნულთან გატოლების შემდეგ ვპოულობთ, რომ არსებობს ორი ფიქსირებული წერტილი:

$$\begin{aligned}n &= 0, \quad n_a = P \\ n &= P - 1, \quad n_a = 1\end{aligned}\tag{J-13}$$

ფიქსირებული წერტილი II - ლაზერის გენერაციის პირობა გვაქვს მხოლოდ $P > 1$ შემთხვევაში. მეორე ფიქსირებული წერტილი ნულის ტოლი მნიშვნელობის მქონე ფოტონების რაოდენობის შესაბამისია და ამრიგად, $P < 1$ შემთხვევაში იგი სტაბილური ფიქსირებული წერტილია. ამგვარად $P = 1$ ზღვრული (ან ბიფურკაციული) მნიშვნელობაა.

შევამოწმოთ ფიქსირებული წერტილების სტაბილურობა, რათა განისაზღვროს ამონახსნების ხასიათი ფიქსირებული წერტილების მიდამოში. შესაბამისი იაკობიანი იქნება:

$$J = \begin{pmatrix} R(n_a - 1) & Rn \\ -n_a & -(n + 1) \end{pmatrix}\tag{J-14}$$

ფიქსირებული წერტილი I-სთვის იარსებებს ორი საკუთრივი მნიშვნელობა:

$$\begin{aligned}\lambda_+ &= R(P-1) \\ \lambda_- &= -1\end{aligned}\tag{J-15}$$

ამრიგად, $P < 1$ შემთხვევაში ორივე საკუთრივი მნიშვნელობა უარყოფითია, ფიქსირებული წერტილი I სტაბილურია და კვანძია. $P < 1$ (სასაზღვრო მნიშვნელობაზე მცირე) შემთხვევაში, სისტემა არაფოტონური ($n=0$) მდგომარეობისკენ მიისწრაფვის ნებისმიერი საწყისი პირობისათვის. $P > 1$ შემთხვევაში, ფიქსირებული წერტილი I არასტაბილურია. იგი “უნაგირის” წერტილია და მდგომარეობათა სივრცის ყოველი ტრაექტორია ($n=0$ წერტილში დაწყებული ტრაექტორიების გარდა) მოცემულ ფიქსირებულ წერტილს შორდება.

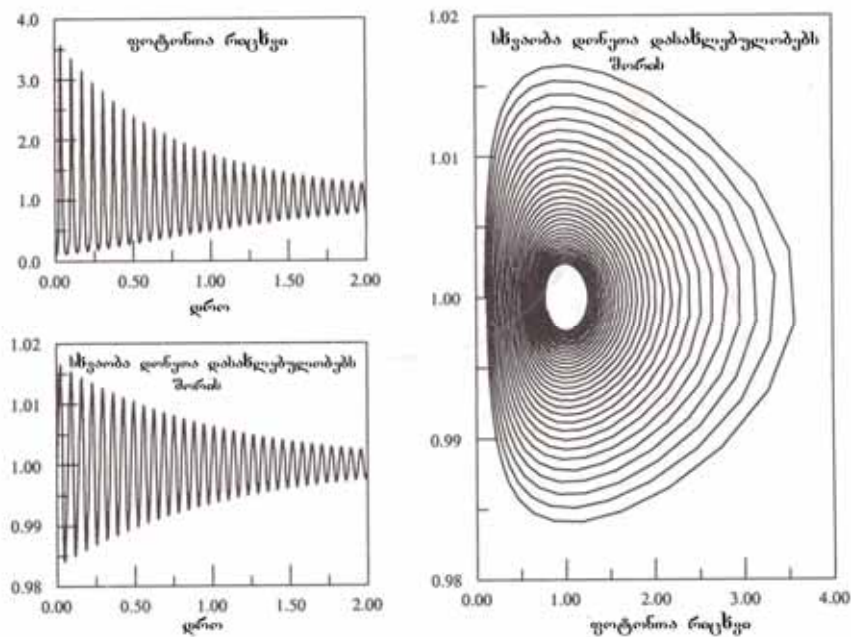
ფიქსირებული წერტილი II -ის (როდესაც $n_a=1$ და $n=P-1$) ორი საკუთრივი მნიშვნელობა შეიძლება ასე გამოისახოს:

$$\lambda_{\pm} = -\frac{P}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{P^2 - 4R(P-1)}\tag{J-16}$$

ჩვენ უკვე ვნახეთ, რომ ლალისფერი და Nd-YAG ლაზერების შემთხვევაში $4R(P-1) \gg P^2$. ამ დროს კვადრატული ფესვის ფუნქციის არგუმენტი $P > 1$ -სათვის უარყოფითია და ვწერთ:

$$\lambda_{\pm} = -\frac{P}{2} \pm i\sqrt{R(P-1)}\tag{J-17}$$

$P > 1$ შემთხვევაში ფიქსირებული წერტილი II სტაბილური სპირალური კვანძია, როდესაც საკუთარ მნიშვნელობებს უარყოფითი ნამდვილი და არანულოვანი წარმოსახვითი ნაწილები გააჩნიათ. მოცემული სისტემის შესაბამისი მდგომარეობათა სივრცის ტრაექტორიების დეტალური ანალიზისათვის იხ. [Tarasov, 1983]. J.1 ნახაზი ამ მოდელთან დაკავშირებულ მდგომარეობათა სივრცის ტიპურ ტრაექტორიას წარმოგვიდგენს. აქვე ნაჩვენებია ფოტონთა რაოდენობის დროზე დამოკიდებულებაც. ლაზერის სტაბილურ მუშა მდგომარეობასთან მიახლოებისას ფოტონების რაოდენობა “წვეტიანი” ფორმის მწკრივებს გვაძლევს (ფიქსირებული წერტილი II).



ნახ. J.1. მარცხნივ, ფოტონის n რაოდენობასა და n_a ატომური დასახლებულობის სხვაობის დროზე დამოკიდებულებაა ნაჩვენები ლაზერული მოდელისათვის, როდესაც $R=10^4$ და $P=2.0$. მარჯვნივ მოყვანილია შესაბამისი ტრაექტორია მდგომარეობათა სივრცეში. საწყისი პირობებია $n=0.1$ და $n_a=1$. ფიქსირებული წერტილი II წარმოადგენს სტაბილურ სპირალურ კვანძს.

ქმედების ამგვარი სახე გამოკვლეულია ლალისფერ და Nd-YAG ლაზერებთან დაკავშირებით.

ამოცანა J-3. ჩაატარეთ დეტალურად საკუთრივე მნიშვნელობების გამოთვლა ორივე ფიქსირებული წერტილისთვის და გადაამოწმეთ ზემოთმოყვანილი შედეგები. შეამოწმეთ ფიქსირებული წერტილი II-ის სტაბილურობა $P < 1$ შემთხვევაში. ფიქსირებული წერტილის რომელ ტიპს მიეკუთვნება იგი? არსებობს თუ არა რაიმე საწყისი პირობები $P < 1$ შემთხვევაში, რომლებიც არ განაპირობებენ ფიქსირებულ წერტილ I-ზე დასრულებულ ტრაექტორიებს? ბიფურკაციის რა ტიპი ვლინდება, როდესაც $P=1$?

სისტემის სტაბილურ მდგომარეობაში გადასვლის მომენტში რხევების გამოვლინების შემთხვევაში ფოტონის რაოდენობისა და დასახლებულობათა სხვაობის ამგვარ მერყეობას **რელაქსაციურ რხევებს** უწოდებენ. რაიმე სახის შემფოთების შემთხვევაში რხევები ვლინდება ყველგან, სადაც ეს შესაძლებელია, მაგალითად, ჩატუმბვის ინტენსივობის არათანაბარ

მიმდინარეობას ან სპონტანური გამოსხივებიდან გამომდინარე დამატებით ფოტონს სისტემა სტაბილური მდგომარეობიდან გამოჰყავს. მიუხედავად იმისა, რომ ამგვარი რელაქსაციური რხევები მრავალ მყარ სხეულსა და ნახევარგამტარულ ლაზერებში მნიშვნელოვან როლს ასრულებენ, ისინი არ დაიკვირვებიან გაზოვანი ლაზერების უმრავლესობაში, რადგან აქ ფოტონის დანაკარგისა და დასახლებულობის რელაქსაციის ხარისხების ფარდობა მცირე სიდიდეა. მცირე R -ის შემთხვევაში, (J-16) გამოსახულებაში კვადრატული ფესვის ქვეშ მდებარე P^2 წვერი დომინირებს და საკუთრივი მნიშვნელობებიც ნამდვილია.

უნდა აღინიშნოს ასევე, რომ $P=1$ ზღვრული მნიშვნელობის შემთხვევაში ლაზერული მოდელის გაუმჯობესებული ვერსია საინტერესო დინამიკურ ეფექტებს ავლენს, თუმცა მოდელი საკმაოდ გამარტივებულია. კერძოდ, ჩვენ უგულებელვყოფთ ატომურ დასახლებულობათა შორის სხვაობების მნიშვნელოვან ცვლილების არსებობასა და რეალურ ლაზერებში წარმოშობილ ფოტონთა რაოდენობას.

J.3 დამატებითი ლიტერატურა

ლაზერული დინამიკაში სიჩქარის განტოლების გამოყენების საინტერესო განხილვა მოცემულია: L. V. Tarasov, *Laser Physics* (Mir Publishers, Moscow, 1983).

L. M. Narducci and N. B. Abraham, *Laser Physics and Laser Instabilities* (World Scientific, Singapore, New Jersey, Hong Kong, 1988).

Ya. I. Khanin, "Low-frequency dynamics of lasers," *Chaos* 6, 373-80 (1996).

J.4 კომპიუტერული ამოცანა

CEJ-1. შეადგინეთ (J-12) განტოლებების ინტეგრების კომპიუტერული პროგრამა მარტივი ლაზერული მოდელისთვის და ტექსტში და შეამოწმეთ J.1 ნახაზზე მოყვანილი შედეგები. ფოტონის რაოდენობასა და დასახლებულობათა სხვაობასთან დაკავშირებით ცვალებად საწყისი პირობები და ახსენით მიღებული შედეგების ფიზიკური არსი.

წიგნები

- [Abarbanel, 1996]. H. Abarbanel, *Analysis of Observed Chaotic Data* (Springer-Verlag, New York, 1996).
- [Abraham and Marsden, 1978]. R. Abraham and J. Marsden, *Foundations of Classical Mechanics* (Benjamin/Cummings, Reading, MA, 1978).
- [Abraham and Shaw, 1992]. R. H. Abraham and C. D. Shaw, *Dynamics—The Geometry of Behavior* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1992).
- [Abraham, Abraham, and Shaw, 1996]. F. D. Abraham, R. H. Abraham, and C. D. Shaw, *Dynamical Systems: A Visual Introduction* (Science Frontier Express, 1996).
- [Alligood, Sauer, and Yorke, 1997]. Kathleen Alligood, Timothy Sauer and James A. Yorke, *Chaos, An Introduction to Dynamic Systems* (Springer-Verlag, New York, 1997).
- [Arnold, 1978]. V. I. Arnold, *Mathematical Methods in Classical Mechanics* (Springer-Verlag, New York, 1978).
- [Arnold, 1983]. V. I. Arnold, *Geometric Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations* (Springer-Verlag, New York, 1983).
- [Arnold and Avez, 1968]. V. I. Arnold and A. Avez, *Ergodic Problems of Classical Mechanics* (Benjamin, New York, 1968).
- [Baierlein, 1971]. R. Baierlein, *Atoms and Information Theory* (W. H. Freeman, San Francisco, 1971).
- [Bak, 1996]. P. Bak, *How Nature Works: The Science of Self-Organized Criticality* (Springer-Verlag, New York, 1996).
- [Baker and Gollub, 1996]. Gregory Baker and Jerry Gollub, *Chaotic Dynamics, An Introduction*, 2nd ed. (Cambridge University Press, New York, 1996).
- [Ball, 1999]. Philip Ball, *The Self-Made Tapestry, Pattern Formation in Nature* (Oxford University Press, New York, 1999).
- [Barnsley, 1988]. M. Barnsley, *Fractals Everywhere* (Academic Press, San Diego, 1988).
- [Berge, Pomeau, and Vidal, 1986]. P. Berge, Y. Pomeau, and C. Vidal, *Order within Chaos* (Wiley, New York, 1986).
- [Blümel and Reinhardt, 1997]. R. Blümel and W. P. Reinhardt, *Chaos in Atomic Physics* (Cambridge University Press, New York, 1997).
- [Boas, 1983]. Mary L. Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences*, 2nd ed. (John Wiley and Sons, New York, 1983).
- [Born and Wolf, 1975]. M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, 5th ed. Pergamon Press, New York, 1975).
- [Briggs and Peat, 1989]. John Briggs and F. David Peat, *Turbulent Mirror* (Harper & Row, New York, 1989).
- [Burrus, Gopinath, and Guo, 1997]. C. S. Burrus, R. A. Gopinath, and H. Guo, *Introduction to Wavelets and Transforms: A Primer* (Prentice-Hall, 1997).
- [Cartwright, 1983]. Nancy Cartwright, *How the Laws of Physics Lie* (Oxford University Press, Oxford and New York, 1983).
- [Chaitin, 1987]. G. J. Chaitin, *Algorithmic Information Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
- [Chandler, 1987]. D. Chandler, *Introduction to Modern Statistical Mechanics* (Oxford University Press, New York, 1987).
- [Chandrasekhar, 1981]. S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* (Dover, New York, 1984).
- [Collet and Eckman, 1980]. P. Collet and J. P. Eckmann, იტერაციული ასახვების *on the Interval as Dynamical Systems* (Birkhauser, Cambridge, MA, 1980).

- [Coveney and Highfield, 1995]. Peter Coveney and Roger Highfield, *Frontiers of Complexity: The Search for Order in a Chaotic World* (Fawcett/Columbine, New York, 1995).
- [Crichton, 1990]. Michael Crichton, *Jurassic Park* (Ballantine Books, New York, 1990).
- [Cvitanovic, 1989]. Pedrag Cvitanovic, *Universality in Chaos*, 2nd ed. (Adam Hilger, Bristol, 1989).
- [Davies, 1999]. Brian Davies, *Exploring Chaos: Theory and Experiment* (Perseus Books, Reading, MA, 1999).
- [Devaney, 1986]. R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* (Benjamin-Cummings, Menlo Park, CA, 1986).
- [Devaney, 1990]. R. L. Devaney, *Chaos, Fractals, and Dynamics, Computer Experiments in Mathematics* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1990).
- [Devaney, 1992]. R. L. Devaney, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1992).
- [Duffing, 1918]. G. Duffing, *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung* (Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1918).
- [Enns and McGuire, 1997]. R. H. Enns and G. C. McGuire, *Nonlinear Physics with Maple for Scientists and Engineers* (Birkhauser, Boston, 1997) and *Nonlinear Physics with Maple for Scientists and Engineers: A Laboratory Manual* (Birkhauser, Boston, 1997).
- [Epstein and Pojman, 1998]. Irving R. Epstein and John A. Pojman, *An Introduction to Nonlinear Chemical Dynamics: Oscillations, Waves, Patterns, and Chaos* (Oxford University Press, New York, 1998).
- [Feynman, Leighton, and Sands, 1963]. R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands, *Feynman Lectures on Physics* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1963).
- [Fleischmann and Teldesley, 1990]. M. Fleischmann and D. J. Teldesley, eds. *Fractals in the Natural Sciences* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990).
- [Frank, 1957]. Philipp Frank, *Philosophy of Science* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1957).
- [Gardner, 1983]. M. Gardner, *Wheels, Life and Other Mathematical Amusement* (W. H. Freeman, New York, 1983).
- [Gibbs, 1902]. J. W. Gibbs, *Elementary Principles in Statistical Mechanics* (C. Scribner's Sons, New York, 1902).
- [Gibbs, 1948]. J. W. Gibbs, *The Collected Works of J. W. Gibbs* (Yale University Press, New Haven, 1948).
- [Glass and Mackey, 1988]. L. Glass and M. C. Mackey, *From Clocks to Chaos, The Rhythms of Life* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1988).
- [Gleick, 1987]. James Gleick, *Chaos, Making a New Science* (Viking, New York, 1987).
- [Goldstein, 1980]. H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 2nd ed. (Addison-Wesley, Reading, MA, 1980).
- [Golubitsky, Stewart, and Schaeffer, 1988]. M. Golubitsky, I. Stewart, and D. Schaeffer, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Applied Mathematical Sciences Vol. 69 (Springer-Verlag, New York, 1988), Vol. II. [Gould and Tobochnik, 1996]. Harvey Gould and Jan Tobochnik, *An Introduction to Computer Simulation Methods*, 2nd ed. (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1996).
- [Gouyet, 1995]. J.-F. Gouyet, *Physics of Fractal Structures* (Springer-Verlag, New York, 1995).
- [Griffiths, 1981]. David J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1981).
- [Guckenheimer and Holmes, 1990]. J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, 3rd ed. (Springer-Verlag, New York, 1990).
- [Gulick, 1992]. D. Gulick, *Encounters with Chaos* (McGraw-Hill, New York, 1992).
- [Gutzwiller, 1990]. M. C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (Springer-Verlag, New York, 1990).

- [Guyon and Stanley, 1991]. E. Guyon and H. E. Stanley, *Fractal Forms* (Elsevier, New York, 1991).
- [Hagedorn, 1981]. P. Hagedorn, *Nonlinear Oscillations* (Clarendon Press, Oxford, 1981).
- [Haken, 1983]. H. Haken, *Synergetics, An Introduction*, 3rd ed. (Springer-Verlag, Berlin, 1983).
- [Hale and Kocak, 1991]. J. Hale and H. Kocak, *Dynamics and Bifurcations* (Springer-Verlag, New York, 1991).
- [Hao, 1984]. Hao Bai-Lin, ed. *Chaos*, Vol. 1 (World Scientific, Singapore, 1984).
- [Hao, 1988]. Hao Bai-Lin, ed. *Directions in Chaos*, Vol. 2 (World Scientific, Singapore, 1988).
- [Hao, 1989]. Hao Bai-Lin, *Chaos, Vol II* (World Scientific, Singapore, 1989).
- [Hao, 1990]. Hao Bai-Lin, ed. *Directions in Chaos*, Vol. 3. (World Scientific, Singapore, 1990).
- [Hassani, 1991]. S. Hassani, *Foundations of Mathematical Physics* (Allyn and Bacon, Boston, 1991).
- [Hayashi, 1964]. C. Hayashi, *Nonlinear Oscillations in Physical Systems* (McGraw-Hill, New York, 1964; reprinted by Princeton University Press, Princeton, NJ, 1985)
- [Hilborn and Tufillaro]. Robert C. Hilborn and Nicholas B. Tufillaro, *Chaos and Nonlinear Dynamics* (American Association of Physics Teachers, College Park, MD, 1999).
- [Hayles, 1991]. N. Katherine Hayles, ed. *Chaos and Order: Complex Dynamics in Literature and Science* (University of Chicago Press, Chicago, 1991).
- [Hille, 1969]. E. Hille, *Lectures on Ordinary Differential Equations* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1969).
- [Hirsch and Smale, 1974]. M. W. Hirsch and S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra* (Academic Press, New York, 1974).
- [Holden, 1986]. A. V. Holden, ed. *Chaos* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1986).
- [Holland, 1995]. John H. Holland, *Hidden Order: How Adaptation Builds Complexity* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1995)
- [Huntley, 1970]. H. E. Huntley, *The Divine Proportion* (Dover, New York, 1970).
- [Infeld and Rowlands, 1990]. E. Infeld and G. Rowlands, *Nonlinear Waves, Solitons and Chaos* (Cambridge University Press, Cambridge, 1990).
- [Iooss and Joseph, 1980]. G. Iooss and D. D. Joseph, *Elementary Stability and Bifurcation Theory* (Springer-Verlag, New York, 1980).
- [Jackson, 1989, 1991]. E. Atlee Jackson, *Perspectives of Nonlinear Dynamics*, Vol. 1 and Vol. 2 (Cambridge University Press, New York, 1989, 1991).
- [Jensen, 1998]. Henrik Jeldtoft Hensen, *Self-Organized Criticality: Emergent Complex Behavior in Physical and Biological Systems* (Cambridge University Press, New York, 1998).
- [Kahn and Zarmi, 1997]. P. Kahn and Y. Zarmi, *Nonlinear Dynamics: Exploration through Normal Forms* (Wiley, New York, 1997).
- [Kaiser, 1994]. G. Kaiser, *A Friendly Guide to Wavelets* (Springer-Verlag, New York, 1994).
- [Kapitaniak, 1996]. T. Kapitaniak, *Controlling Chaos* (Academic Press, San Diego, 1996).
- [Kapitaniak and Bishop, 1999]. T. Kapitaniak and S. R. Bishop, *The Illustrated Dictionary of Nonlinear Dynamics and Chaos* (Wiley, Chichester and New York, 1999).
- [Kaplan and Glass, 1995]. Daniel Kaplan and Leon Glass, *Understanding Nonlinear Dynamics* (Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1995).
- [Kaufman, 1993]. Stuart A. Kaufman, *Origins of Order: Self-Organization and Selection in Evolution* (Oxford University Press, New York, 1993).
- [Kaufman, 1995]. Stuart A. Kaufman, *At Home in the Universe, The Search for the Laws of Self-Organization and Complexity* (Oxford University Press, New York, 1995).
- [Khinchin, 1992]. A. Ya Khinchin, *Continued Fractions* (The University of Chicago Press, Chicago, 1992).
- [Lam and De Cola, 1993]. N. Lam and L. De Cola, *Fractals in Geography* (PTR Prentice-Hall, Upper Saddle Rive, NJ, 1993).
- [Landau and Lifshitz, 1959]. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Pergamon, London, 1959).

- [Laplace, 1812]. Pierre Simon de Laplace, *A Philosophical Essay on Probabilities* (Dover, New York, 1951).
- [Liebovitch, 1998]. Larry S. Liebovitch, *Fractals and Chaos Simplified for the Life Sciences* (Oxford University Press, New York, 1998).
- [Lichtenberg and Liebermann, 1992]. A. J. Lichtenberg and M. A. Liebermann, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2nd ed. (Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1992).
- [Lipschutz, 1968]. Seymour Lipschutz, *Linear Algebra* (Schaum's Outline Series) (McGraw-Hill, New York, 1968).
- [Mackay and Meiss, 1987]. R. S. Mackay and J. D. Meiss, *Hamiltonian Dynamical Systems* (Adam Hilger, Bristol, 1987).
- [Mackey and Glass, 1988]. L. Glass and M. C. Mackey, *From Clocks to Chaos, the Rhythms of Life* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1988). [Mammeiulle, Boccasa, Vichniac, and Bidaux, 1989]. P. Mammeiulle, N. Boccasa, C. Y. Vichniac, and R. Bidaux, eds. *Cellular Automata and Modeling of Complex Physical Systems* (Springer-Verlag, Berlin, 1989).
- [Mandelbrot, 1982]. B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature* (W. H. Freeman, San Francisco, 1982).
- [Mandelbrot, 1997]. B. B. Mandelbrot, *Fractals and Scaling in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk* (Springer-Verlag, New York, 1997). Mandelbrot, 1999]. B. B. Mandelbrot, *Multifractals and If Noise: Wild Self-Affinity in Physics* (Springer-Verlag, New York, 1999).
- [Mantegna and Stanley, 1999]. Rosario N. Mantegna and H. Eugene Stanley, *An Introduction to Econophysics* (Cambridge University Press, New York, 1999). [Marion and Thornton, 1988]. J. B. Marion and S. T. Thornton, *Classical Dynamics of Particles and Systems* (Harcourt Brace Jovanovic, San Diego, 1988). [Meakin, 1997]. Paul Meakin, *Fractals, Scaling and Growth Far from Equilibrium* (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).
- [Meyer and Hall, 1992]. K. R. Meyer and G. R. Hall, *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-body Problem* (Springer-Verlag, New York, 1992). [Moon, 1992]. Francis C. Moon, *Chaotic and Fractal Dynamics, An Introduction for Applied Scientists and Engineers* (Wiley, New York, 1992). [Morse, 1964]. P. M. Morse, *Thermal Physics* (W. A. Benjamin, New York, 1964).
- [Moser, 1973]. J. Moser, *Stable and Random Motions in Dynamical Systems* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1973).
- [Murray, 1989]. J. D. Murray, *Mathematical Biology* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1989).
- [Narducci and Abraham, 1988]. L. M. Narducci and N. B. Abraham, *Laser Physics and Laser Instabilities* (World Scientific, Singapore, New Jersey, Hong Kong, 1988).
- [Nicolis and Prigogine, 1989]. G. Nicolis and I. Prigogine, *Exploring Complexity* (W. H. Freeman, San Francisco, 1989).
- [Nusse and Yorke, 1998]. Helena Nusse and James A. Yorke, *Dynamics: Numerical Explorations*, 2nd ed. (Springer-Verlag, New York, 1998).
- [Ott, 1993]. E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).
- [Ott, Sauer, and Yorke, 1997]. E. Ott., T. Sauer, and J. A. Yorke, *Coping with Chaos* (Wiley, New York, 1994).
- [Ottino, 1989]. J. M. Ottino, *The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos, and Transport* (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).
- [Paterson, 1983]. A. R. Paterson, *A First Course in Fluid Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1983).
- [Peitgen and Richter, 1986]. H.-O. Peitgen and P. H. Richter, *The Beauty of Fractals* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1986).
- [Peters, 1991]. E. E. Peters, *Chaos and Order in the Capital Markets* (Wiley, New York, 1991).
- [Pippard, 1985]. A. P. Pippard, *Response and Stability* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985).

- [Poincare, 1892]. H. Poincare, *Les Methods Nouvelles de la Mechanique Celeste*, Vol. I, Chap. III, Art. 36. (Gauthier-Villars, Paris, 1892).
- [Poincare, 1993]. H. Poincare, *New Methods of Celestial Mechanics* (American Institute of Physics, Woodbury, NY, 1993)
- [Press, Flannery, Teukolsky, and Vetterling, 1986]. W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling, *Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing* (Cambridge University Press, Cambridge, 1986). [Purcell, 1985]. Edward M. Purcell, *Electricity and Magnetism*, 2nd ed. (McGraw-Hill, New York, 1985).
- [Rasband, 1990]. S. Neil Rasband, *Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems* (Wiley, New York, 1990).
- [Reichl, 1992]. L. Reichl, *The Transition to Chaos in Conservative Classical Systems: Quantum Manifestations* (Springer-Verlag, New York, 1992).
- [Renyi, 1970]. A. Renyi, *Probability Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1970).
- [Robinson, 1995]. C. Robinson, *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos* (CRC Press, Boca Raton, 1995).
- [Rothschild, 1998]. W. G Rothschild, *Fractals in Chemistry* (Wiley, New York, 1998).
- [Ruelle, 1989]. D. Ruelle, *Chaotic Evolution and Strange Attractors* (Cambridge University Press, New York, 1989).
- [Ruelle, 1991]. David Ruelle, *Chance and Chaos* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1991).
- [Sanders and Verhulst, 1984]. J. A. Sanders and F. Verhulst, *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*, Applied Mathematical Sciences (Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1984).
- [Scholz and Mandelbrot, 1989]. C. H. Scholz and B. B. Mandelbrot, eds. *Fractals in Geophysics* (Birkhauser Verlag, Basel and Boston, 1989).
- [Scott, 1994]. S. K. Scott, *Oscillations, Waves, and Chaos in Chemical Kinetics* (Oxford University Press, New York, 1994).
- [Schuster, 1995]. H. G. Schuster, *Deterministic Chaos, An Introduction*, 3rd rev. ed. (Wiley, New York, 1995).
- [Schuster, 1999]. H. G. Schuster, *Handbook of Chaos Control* (Wiley, New York, 1999).
- [Shaw, 1984]. R. Shaw, *The Dripping Faucet as a Model Chaotic System* (Aerial Press, Santa Cruz, CA, 1984).
- [Smith, 1998]. Peter Smith, *Explaining Chaos* (Cambridge University Press, Cambridge, 1998).
- [Sparrow, 1982]. C. T. Sparrow, *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors* (Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982).
- [Stewart, 1989]. Ian Stewart, *Does God Play Dice? The Mathematics of Chaos* (Blackwell, New York, 1989).
- [Stockman, 1999]. H.-J. Stockman, *Quantum Chaos, An Introduction* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).
- [Stoppard, 1993]. Tom Stoppard, *Arcadia* (Faber and Faber, London and Boston, 1993).
- [Strogatz, 1994]. Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications in Physics, Biology, Chemistry and Engineering* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1994).
- [Tarasov, 1983]. L. V. Tarasov, *Laser Physics* (Mir Publishers, Moscow, 1983).
- [Thompson and Stewart, 1986]. J. M. T. Thompson and H. B. Stewart, *Nonlinear Dynamics and Chaos* (Wiley, New York, 1986).
- [Toffoli and Margolus, 1987]. T. Toffoli and N. Margolus, *Cellular Automata Machines* (MIT Press, Cambridge, 1987).
- [Tufillaro, Abbott, and Reilly, 1992]. N. Tufillaro, T. Abbott, and J. Reilly, *An Experimental Approach to Nonlinear Dynamics and Chaos* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1992).
- [Turcotte, 1997]. D. L. Turcotte, *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics*, 2nd ed. (Cambridge University Press, 1997).

- [Vicsek, 1991]. T. Vicsek, *Fractal Growth Phenomena*, 2nd ed. (World Scientific Publishing, River Edge, NJ, 1991).
- [Waldrop, 1992]. M. Mitchell Waldrop, *Complexity: The Emerging Science at the Edge of Order and Chaos* (Simon and Schuster, New York, 1992).
- [West, 1990]. B. J. West, *Fractal Physiology and Chaos in Medicine* (World Scientific Publishing, River Edge, NJ, 1990).
- [Wigen, 1994]. Philip E. Wigen, ed., *Nonlinear Phenomena and Chaos in Magnetic Materials* (World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1994).
- [Wiggins, 1988]. S. Wiggins, *Global Bifurcations and Chaos, Analytical Methods* (Springer-Verlag, New York, 1988).
- [Wilhelm, 1991]. Kate Wilhelm, *Death Qualified, A Mystery of Chaos* (Fawcett Crest, New York, 1991).
- [Williams, 1997]. Garnett P. Williams, *Chaos Theory Tamed* (National Academy Press, Washington, DC, 1997).
- [Winfrey, 1980]. A. T. Winfrey, *The Geometry of Biological Time* (Springer-Verlag, New York, 1980).
- [Wright and Hardy, 1980]. E. M. Wright and G. H. Hardy, *An Introduction to the Theory of Numbers* (Oxford University Press, Oxford, New York, 1980).
- [Wolfram, 1986]. S. Wolfram, ed. *Theory and Applications of Cellular Automata* (World Scientific Press, Singapore, 1986).
- [Yuznetsov, 1998]. Y. A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, 2nd ed. (Springer-Verlag, New York, 1998).
- [Zaslavsky, Sagdeev, Usikov, and Chernikov, 1991] G. M. Zaslavsky, R. Z. Sagdeev, D. A. Usikov, and A. A. Chernikov, *Weak Chaos and Quasi-Regular Patterns* (Cambridge University Press, Cambridge, 1991).
- [Zaslavsky, 1998]. G. M. Zaslavsky, *Physics of Chaos in Hamiltonian Systems* (Imperial College Press, London, 1998).
- [Zuckerman, Montgomery, Niven, and Niven, 1991]. H. S. Zuckerman, H. L. Montgomery, I. M. Niven, and A. Niven, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5th ed. (John Wiley, New York, 1991).

სტატისტიკა

- AAC84. A. M. Albano, N. B. Abraham, D. E. Chyba, and M. Martelli, "Bifurcation, Propagating Solutions, and Phase Transitions in a Nonlinear Reaction with Diffusion," *Aw. J. Phys.* 52,161-67 (1984).
- AAD86. N. B. Abraham, A. M. Albano, B. Das, G. De Guzman, S. Yong, R. S. Gioggia, G. P. Puccioni, and J. R. Tredicce, "Calculating the Dimension of Attractors from Small Data Sets," *Phys. Lett. A* 114, 217-21 (1986).
- AAG88. F. Argoul, A. Arneodo, G. Grasseau, and H. L. Swinney, "Self-Similarity of Diffusion-Limited Aggregates and Electrodeposition Clusters," *Phys. Rev. Lett.* 61,2558-61(1988).
- ABB86. A. K. Agarwal, K. Banerjee, and J. K. Bhattacharjee, "Universality of Fractal Dimension at the Onset of Period-Doubling Chaos," *Phys. Lett. A* 119, 280-83 (1986).
- ABE90. S. Aberg, "Onset of Chaos in Rapidly Rotating Nuclei," *Phys. Rev. Lett.* 64,3119-22(1990).
- ABG95. A. Arneodo, E. Bacry, P. V. Graves, and J. F. Muzy, "Characterizing Long-Range Correlations in DNA Sequences from Wavelet Analysis," *Phys. Rev.Lett.* 74,3293-96 (1995).
- ABH98. L Amaral, S. Buldyrev, S. Havlin, M. Salinger, and H. E. Stanley, "Power Law Scaling for a System of Interacting Units with Complex Internal Structure," *Phys. Rev. Lett.* 80 1385-88 (1998).

- ABM95. A. Arneodo, E. Bacry, and J. F. Muzy, "Oscillating Singularities in Locally Self-Similar Functions," *Phys. Rev. Lett.* 74,4823-26 (1995).
- ABS86. R. H. Abraham and C. Simo, "Bifurcations and Chaos in Forced van der Pol Systems," in *Dynamical Systems and Singularities* (S. Pnevmatikos, ed.) (North-Holland, Amsterdam, 1986), pp. 313-23.
- ABS93. H. D. I. Abarbanel, R. Brown, J. J. Sidorowich, and L. Sh. Tsimring, "The analysis of observed chaotic data in physical systems," *Rev. Mod. Phys.* 65, 1331-92 (1993).
- ACE87. D. Auerbach, P. Cvitanovic, J.-P. Eckmann, G. Gunaratne, and I. Procaccia, "Exploring Chaotic Motion Through Periodic Orbits," *Phys. Rev. Lett.* 58, 2387-89(1987).
- ACL88. P. Alstrom, B. Christiansen, and M. T. Levinsen, "Nonchaotic Transition from Quasi-periodicity to Complete Phase Locking," *Phys. Rev. Lett.* 61, 1679-82 (1988).
- AG092. D. Auerbach, C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke, "Controlling Chaos in High Dimensional Systems," *Phys. Rev. Lett.* 69, 3479-82 (1992).
- AGS84. N. B. Abraham, J. P. Gollub, and H. L. Swinney, "Testing Nonlinear Dynamics," *Physica D* 11, 252-64 (1984).
- AHK94. D. Armbruster, R. Heiland, and F. Kostelich, "KLTOOL: A tool to analyze spatiotemporal complexity," *Chaos* 4,421-24 (1994).
- ALN85. N. B. Abraham, L. A. Lugiato, and L. M. Narducci, "Overview of Instabilities in Laser Systems," *J. Opt. Soc. Am. B* 2,7-13 (1985).
- ALY81. V. M. Alekseev and M. V. Yakobson "Symbolic Dynamics and Hyperbolic Dynamic Systems," *Phys. Rep.* 75,287-325 (1981).
- AMS88. A. M. Albano, J. Muench, C. Schwartz, A. I. Mees, and P. E. Rapp, "Singular-Value Decomposition and the Grassberger-Procaccia Algorithm," *Phys. Rev. A* 38, 3017-26 (1988).
- ANT98. C. Anteneodo and C. Tsallis, "Breakdown of Exponential Sensitivity to Initial Conditions: Role of the Range of Interactions," *Phys. Rev. Lett.* 80, 5313-16 (1998).
- ARE83. H. Aref, "Integrable, Chaotic, and Turbulent Vortex Motion in Two-Dimensional Flow," *Ann. Rev. Fluid Mech.* 15, 345-89 (1983).
- ARE84. H. Aref, "Stirring by Chaotic Advection," *J. Fluid Mech.* **143**, 1-21 (1984).
- ASV88. H. Atmanspacker, H. Scheingraber, and W. Voges, "Global Scaling Properties of a Chaotic Attractor Reconstructed from Experimental Data," *Phys. Rev. A* 37, 1314-22(1988).
- ATI88. S. Adachi, M. Toda, and K. Ikeda, "Quantum-Classical Correspondence in Many-Dimensional Quantum Chaos," *Phys. Rev. Lett.* **61**, 659-61 (1988).
- ATY91. K. T. Alligood, L. Tedeschi-Lalli, and J. A. Yorke, "Metamorphoses: Sudden Jumps in Basin Boundaries," *Commun. Math. Phys.* **141**, 1-8 (1991).
- AUS89. R. Aurich and F. Steiner, "Periodic-Orbit Sum Rules for the Hadamard-Gutzwiller Model," *Physica D* 39, 169-93 (1989).
- AYY87. K. T. Alligood, E. D. Yorke, and J. A. Yorke, "Why Period-Doubling Cascades Occur: Periodic Orbit Creation Followed by Stability Shedding," *Physica D* **28**,197-203 (1987).
- AYY92. J. C. Alexander, J. A. Yorke, Z. You, and I. Kan, "Riddled Basins," *Int. J. Bifur. and Chaos* 2,795-80 (1992).
- BAA99. A.-L. Barabasi and R. Albert, "Emergence of Scaling in Random Networks," *Science* **286**,509-12 (1999).
- BAB89. W. J. Baumol and J. Benhabib, "Chaos: Significance, Mechanism, and Economic Applications," *J. Econ. Perspectives* 3, 77-105 (1989).
- BAC89. P. Bak and K. Chen, "The Physics of Fractals," *Physica D* **38**, 5-12 (1989).
- BAC91. P. Bak and K. Chen, "Self-Organized Criticality," *Scientific American* **264** (1), 46-53 (January, 1991).
- BAD97. R. Badii, "Generalized entropies of chaotic maps and flows: A unified approach," *Chaos* 7, 694-700 (1997).
- BAP98. M. S. Baptista, "Cryptography with chaos," *Phys. Lett. A* **240**, 50-54 (1998).
- BAT88. P. M. Battelino, "Persistence of Three-Frequency Quasiperiodicity under Large Perturbation," *Phys. Rev. A* **38**,1495-502 (1988).

- BBD88. R. Badii, G. Broggi, B. Derighetti, M. Ravani, S. Ciliberto, A. Politi, and M. A. Rubio, "Dimension Increase in Filtered Chaotic Signals," *Phys. Rev. Lett.* **60**, 979-82 (1988).
- BCG80. G. Benettin, C. Cercignanni, L. Galgani, and A. Giorgilli, "Universal Properties in Conservative Dynamical Systems," *Lett. Nouvo. dm.* **28**,1-4 (1980).
- BCG89. J. E. Bayfield, G. Casati, I. Guarneri, and D. W. Sokol, "Localization of Classically Chaotic Diffusion for Hydrogen Atoms in Microwave Fields," *Phys. Rev. Lett.* **63**, 364-67 (1989).
- BEN97. J. E. Berger and G. Nunes, Jr., "A mechanical Duffing oscillator for the undergraduate laboratory," *Am. J. Phys.* **65**, 841-846 (1997).
- BER89. M. V. Berry, "Quantum Scars of Classical Closed Orbits in Phase Space," *Proc. Roy. Soc. London A* **423**, 219-31 (1989).
- BES78. G. Benettin and J.-M. Strelcyn, "Numerical Experiments on the Free Motion of a Point Mass Moving in a Plane Convex Region: Stochastic Transition and Entropy," *Phys. Rev. A* **17**, 773-85 (1978).
- BGH95. J. Belair, L. Glass, U. an der Heiden, and J. Milton, "Dynamical disease: Identification, temporal aspects and treatment strategies," *Chaos* **5**,1-7 (1995).
- BGS85. G. Benettin, L. Galgani, and J.-M. Strelcyn, "Kolmogorov Entropy and Numerical Experiments," *Phys. Rev. A* **14**, 2338-45 (1976). Reprinted in [Hao, 1985].
- BHG97. E. Barreto, B. R. Hunt, C. Grebogi, and J. A. Yorke, "From High Dimensional Chaos to Stable Periodic Orbits: The Structure of Parameter Space," *Phys. Rev. Lett.* **78**,4561-64 (1997).
- BHM93. M. Bauer, H. Heng, and W. Martienssen, "Characterizing of Spatiotemporal Chaos from Time Series," *Phys. Rev. Lett.* **71**,521-24 (1993).
- BIB84. M. Bier and T. C. Bountis, "Re-merging Feigenbaum Trees in Dynamical Systems," *Phys. Lett. A* **104**,239-44 (1984).
- BIR35- G. D. Birkhoff, "Nouvelle recherches sur les systemes dynamique," *Pont. Acad. Set Novi Lyncaei*, **1**, 85 (1935).
- BIW89. O. Biham and W. Wentzel, "Characterization of Unstable Periodic Orbits in Chaotic Attractors and Repellers," *Phys. Rev. Lett.* **63**, 819-22 (1989).
- BKL86. D. Bensimon, L. P. Kadanoff, S. Liang, B. Shraiman, and C. Tang, "Viscous Flows in Two Dimensions," *Rev. Mod. Phys.* **58**,977-99 (1986).
- BLD95. Y. Braiman, J. F. Lindner, and W. L. Ditto, "Taming spatiotemporal chaos with disorder," *Nature* **378**,465-67 (1995).
- BLG97. E. Bollt, Y.-C. Lai, and C. Grebogi, "Coding, Channel Capacity, and Noise Resistance in Communicating with Chaos," *Phys. Rev. Lett.* **79**, 3787-90 (1997).
- BLR95. A. Bonasera, V. Latora, and A. Rapisarda, "Universal Behavior of Lyapunov Exponents in Unstable Systems," *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3434-37 (1995).
- BLT91. E. Brener, H. Levine, and Y. Tu, "Mean-Field Theory for Diffusion-Limited Aggregation in Low Dimensions," *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1978-81 (1991).
- BLW93. D. Beigie, A. Leonard, and S. Wiggins, "Statistical Relaxation under Nonturbulent Chaotic Flows: Non-Gaussian High-Stretch Tails of Finite-Time Lyapunov Exponent Distributions," *Phys. Rev. Lett.* **70**, 275-78 (1993).
- BOA96. Th. Pierre, G. Bonhomme, and A. Atipo, "Controlling the Chaotic Regime of Nonlinear Ionization Waves using the Time-Delay Autosynchronization Method," *Phys. Rev. Lett.* **76**,2290-93 (1996).
- BON98. C. Bowman and A. C. Newell, "Natural patterns and wavelets," *Rev. Mod. Phys.* **70**,289-301 (1998).
- BOP96. S. Boettcher and M. Paczuski, "Exact Results for Spatiotemporal Correlations in a Self-Organized Model of Punctuated Equilibrium," *Phys. Rev. Lett.* **76**, 348-51 (1996).
- BOT88. T. Bohr and T. Tel, "The Thermodynamics of Fractals." In B. Hao (ed.) *Chaos*, Vol. 2 (World Scientific, Singapore, 1988).

- BOU81. T. C. Bountis, "Period Doubling Bifurcations and Universality in Conservative Systems," *Physica D* 3,577-89 (1981).
- BOW88. O. Bohigas and H. A. Weidenmuller, "Aspects of Chaos in Nuclear Physics," *Ann. Rev. Nucl. Part. Science* 38,421-53 (1988). BRA89. R. N. Bracewell, "The Fourier Transform," *Scientific American* 260 (6), 86-95 (June, 1989).
- BRG91. Y. Braiman and I. Goldhirsch, "Taming Chaotic Dynamics with Weak Periodic Perturbations," *Phys. Rev. Lett.* 66,2545-48 (1991).
- BRI87. K. Briggs, "Simple Experiments in Chaotic Dynamics," *Am. J. Phys.* 55, 1083-89 (1987).
- BRJ87. P. Bryant and C. Jeffries, "The Dynamics of Phase Locking and Points of Resonance in a Forced Magnetic Oscillator," *Physica D* 25, 196-232 (1987).
- BRS87. A. Brandstater and H. L. Swinney, "Strange Attractors in Weakly Turbulent Couette-Taylor Flow," *Phys. Rev. A* 35,2207-20 (1987).
- BRS88. W. A. Brooks and C. L. Sayers, "Is the Business Cycle Characterized by Deterministic Chaos?" *J. of Monetary Economics* 22, 71-90 (1988).
- BSK95. J. R. Buchler, T. Serre, and Z. Kollath, "A Chaotic Pulsating Star: The Case of R Scuti," *Phys. Rev. Lett.* 73, 842-45 (1995).
- BSS90. M. J. Ballico, M. L. Sawley, and F. Skiff, "The Bipolar Motor: A Simple Demonstration of Deterministic Chaos," *Am. J. Phys.* 58,58-61 (1990).
- BTW87. P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, "Self-Organized Criticality: An Explanation of 1/Noise," *Phys. Rev. Lett.* 59, 381-84 (1987).
- BTW88. P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, "Self-Organized Criticality," *Phys. Rev. A* 38, 364-74 (1988).
- BUD97. T. Burns and M. Davies, "Nonlinear Dynamics Model for Chip Segmentation in Machining," *Phys. Rev. Lett.* 79,447-50 (1997).
- BUG96. A. R. Bulsara and L. Gammaitoni, "Tuning in to Noise," *Physics Today* 49 (3), 39-45 (1996).
- BUJ85. R. Van Buskirk and C. Jeffries, "Observation of Chaotic Dynamics of Coupled Nonlinear Oscillators," *Phys. Rev. A* 31 3332-57 (1985).
- BYG98. S. Banerjee, J. A. Yorke, and C. Grebogi, "Robust Chaos," *Phys. Rev. Lett.* 80 3049-52 (1998).
- CAG88. J. K. Cannizzo and D. A. Goodings, "Chaos in SS Cygni?" *Astrophys. J.* 334, L31-34 (1988).
- CAL45. M. L. Cartwright and J. E. Littlewood, "On Nonlinear Differential Equations of the Second Order. I. The Equation $\ddot{y} - k(I - y^2)\dot{y} + y = b\lambda k \cos(\lambda t + \alpha)$, k Large," *J. London Math. Soc.* 20, 180-89 (1945).
- CAL89. J. M. Carlson and J. S. Langer, "Properties of Earthquakes Generated by Fault Dynamics," *Phys. Rev. Lett.* 62, 2632-35 (1989).
- CAM99. D. M. Campbell, "Nonlinear dynamics of musical reed and brass wind instruments," *Contemporary Physics* 40, 415-431 (1999).
- CAR48. M. L. Cartwright, "Forced Oscillations in Nearly Sinusoidal Systems," *J. Inst. Electr. Eng.* 95, 88-96 (1948).
- CAR95. Thomas L. Carroll, "A simple circuit for demonstrating regular and synchronized chaos," *Am. J. Phys.* 63, 377-379 (1995).
- CAR97. C. Cellucci, A. Albano, R. Rapp, R. Pittenger, and R. Josiassen, "Detecting noise in a time series," *Chaos* 7,414-22 (1997).
- CAS89. M. Casdagli, "Nonlinear Predictions of Chaotic Time Series," *Physica D* 35,335-56(1989).
- CCG85. G. Casati, B. V. Chirikov, and I. Guarneri, "Energy-Level Statistics of Integrable Quantum Systems" *Phys. Rev. Lett.* 54,1350-53 (1985).
- CCG90. J. Carlson, J. Chayes, E. Grannan, and G. Swindle, "Self-Organized Criticality and Singular Diffusion," *Phys. Rev. Lett.* 65, 2547-50 (1990).

- CCI79. G. Casati, B. V. Chirikov, F. M. Izrailev, and J. Ford, in *Stochastic Behavior in Classical and Hamiltonian Systems*, G. Casati and J. Ford, eds. Lecture Notes in Physics, Vol. 93 (Springer-Verlag, New York, 1979).
- CDB90. V. Castets, E. Dulos, J. Boissonade, and P. DeKepper, "Experimental Evidence of a Sustained Standing Turing-Type Nonequilibrium Chemical Pattern," *Phys. Rev. Lett.* 64,2953-56 (1990).
- CDC99. C. Caravati, F. Delogu, G. Cocco, and M. Rustici, "Hyperchaotic qualities of the ball motion in a ball milling device," *Chaos* 9,219-26 (1999).
- CEF91. M. Casdagli, S. Eubank, J. D. Farmer, and J. Gibson, "State Space Reconstruction in the Presence of Noise," *Physica D* 51,52-98 (1991).
- CFH82. J. P. Crutchfield, J. D. Farmer, and B. A. Huberman, "Fluctuations and Simple Chaotic Dynamics," *Phys. Reports* 92,45-82 (1982).
- CFH92. J. J. Collins, M. Fanciulli, R. G. Hohlfeld, D. C. Finch, G. V. H. Sandri, and E. S. Shtatland, "A random number generator based on the logit transform of the logistic variable," *Computers in Physics* 6,630-2 (1992).
- CFP86. J. P. Crutchfield, J. D. Farmer, N. H. Packard, and R. S. Shaw, "Chaos," *Scientific American* 255 (6), 46-57 (1986).
- CGB89. M. Courtemancho, L. Glass, J. Belari, D. Scagliotti, and D. Gordon, "A Circle Map in a Human Heart," *Physica D* 40,299-310 (1989).
- CGM90. J. K. Cannizzo, D. A. Goodings, and J. A. Mattei, "A Search for Chaotic Behavior in the Light Curves of Three Long-Period Variables," *Astrophys. J.* 357, 235-42(1990).
- CGP88. P. Cvitanovic, G. H. Gunaratne, and I. Procaccia, "Topological and metric properties of Henon-type strange attractors," *Phys. Rev. A* 38,1503-1520 (1988).
- CHA75. G. J. Chaitin, "Randomness and Mathematical Proof," *Scientific American* 232 (5), 47-52 (1975).
- CHA88. A. Chao et al., "Experimental Investigation of Nonlinear Dynamics in the Fermilab Tevatron," *Phys. Rev. Lett.* 61,2752-55 (1988).
- CHC97. D. J. Christini and J. J. Collins, "Control of chaos in excitable physiological systems: A geometric analysis," *Chaos* 7, 544-49 (1997).
- CHI79. B. V. Chirikov, "A Universal Instability of Many Dimensional Oscillator Systems," *Physics Reports* 52,263-379 (1979).
- CHJ89. A. Chhabra and R. V. Jensen, "Direct Determination of the $f(\alpha)$ Singularity Spectrum," *Phys. Rev. Lett.* 62, 1327-30 (1989).
- CJK85. P. Cvitanovic, M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, and I. Procaccia, "Renormalization, Unstable Manifolds, and the Fractal Structure of Mode Locking," *Phys. Rev. Lett.* 55,343-6 (1985).
- CLC90. R. F. Cahalan, H. Leidecker, and G. D. Cahalan, "Chaotic Rhythms of a Dripping Faucet," *Computers in Physics* 4, 368-83 (1990).
- CLP97. U. M. S. Costa, M. L. Lyra, A. R. Plastino, and C. Tsallis, "Power-law sensitivity to initial conditions within a logistic-like family of maps: Fractality and nonextensivity," *Phys. Rev. E.* 56,245-50 (1997).
- CMM95. B. K. Clark, R. F. Martin, Jr., R. J. Moore, and K. E. Jesse, "Fractal dimension of the strange attractor of the bouncing ball circuit," *Am. J. Phys.* 63, 157-63 (1995).
- CMN99. D. Caroppo, M. Mannarelli, G. Nardulli, and S. Stramaglia, "Chaos in neural networks with a nonmonotonic transfer function," *Phys. Rev.* 60, 2186-92 (1999).
- CMS86. K. Coffman, W. D. McCormick, and H. L. Swinney, "Multiplicity in a Chemical Reaction with One-Dimensional Dynamics," *Phys. Rev. Lett.* 56, 999-1002 (1986).
- CNR81. J. Crutchfield, M. Nauenberg, and J. Rudnick, "Scaling for External Noise at the Onset of Chaos," *Phys. Rev. Lett.* 46,933-35 (1981).
- COF85. P. Constantin and C. Foias, *Commun. PureAppl. Math.* 38,1 (1985).
- COP99. S. N. Coppersmith, "A simpler derivation of Feigenbaum's renormalization group equation for the period-doubling bifurcation sequence," *Am. J. Phys.* 67,52-54 (1999).

- COR00. E. Cohen and L. Rondoni, "Comment on 'Universal Relation between the Kolmogorov-Sinai Entropy and the Thermodynamic Entropy in Simple Liquids,'" *Phys. Rev. Lett.* 84, 394 (2000).
- CRA91. J. D. Crawford, "Introduction to Bifurcation Theory," *Rev. Mod. Phys.* 63, 991-1037 (1991).
- CRH80. J. P. Crutchfield and B. A. Huberman, "Fluctuations and the Onset of Chaos," *Phys. Lett. A* 11,407-10 (1980).
- CRK88. J. P. Crutchfield and K. Kaneko, "Are Attractors Relevant to Turbulence," *Phys. Rev. Lett.* 60,2715-18 (1988).
- CR095. D. Crighton and L. A. Ostrovsky, "Introduction to acoustical chaos," *Owo** 5 (3), 495 (1995).
- CSE90. F. Caserta, H. E. Stanley, W. D. Eldred, G. Daccord, R. E. Hausman, and J. Nittmann, "Physical Mechanisms Underlying Neurite Outgrowth: A Quantitative Analysis of Neuronal Shape," *Phys. Rev. Lett.* 64, 95-98 (1990).
- CSZ88. A. Chernikov, R. Sagdeev, and G. Zaslavsky, "Chaos: How Regular Can It Be?" *Physics Today* 41 (11), 27-35 (November, 1988).
- CUL87. A. Cumming and P. S. Linsay, "Deviations from Universality in the Transition from Quasi-Periodicity to Chaos," *Phys. Rev. Lett.* 59,1633-36 (1987).
- CUL88. A. Cumming and P. S. Linsay, "Quasiperiodicity and Chaos in a System with Three Competing Frequencies," *Phys. Rev. Lett.* 60,2719-22 (1988).
- CU093. K. M. Cuomo and A. V. Oppenheim, "Circuit Implementation of Synchronized Chaos with Applications to Communications," *Phys. Rev. Lett.* 71, 65-68 (1993).
- CVI88a. P. Cvitanovic, "Invariant Measurement of Strange Sets in Terms of Cycles," *Phys. Rev. Lett.* 61, 2729-32 (1988).
- CVI88b. P. Cvitanovic, "Topological and Metric Properties of Henon-Type Strange Attractors," *Phys. Rev. A* 38, 1503-20 (1988).
- DAV98. M. Dzugutov, E. Aurell, and A. Vulpiani, "Universal Relation between the Kolmogorov-Sinai Entropy and the Thermodynamic Entropy in Simple Liquids," *Phys. Rev. Lett.* 81, 1762-65 (1998).
- DBG91. D. Delande, A. Bommier, and J. C. Gay, "Positive-Energy Spectrum of the Hydrogen Atom in a Magnetic Field," *Phys. Rev. Lett.* 66,141-44 (1991).
- DEN90. P. J. Denning, "Modeling Reality," *American Scientist* 78,495-98 (1990).
- DFV95. C. S. Daw, C. Finney, M. Vasudevan, N van Goor, K. Nguyen, D. Bruns, E. Kostelich, C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke, "Self-Organization and Chaos in a Fluidized Bed," *Phys. Rev. Lett.* 75, 2308-11 (1995).
- DGE99. M. Dolnik, T. Gardner, I. Epstein, and J. Collins, "Frequency Control of an Oscillatory Reaction by Reversible Binding of an Autocatalyst," *Phys. Rev. Lett.* 82,1582-85 (1999).
- DGS94. S. Dawson, C. Grebogi, T. Sauer, and J. A. Yorke, "Obstructions to Shadowing When a Lyapunov Exponent Fluctuates about Zero," *Phys. Rev. Lett.* 73,1927-30(1994).
- DGH86. D. Dangoisse, P. Glorieux, and D. Hennequin, "Laser Chaotic Attractors in Crisis," *Phys. Rev. Lett.* 57, 2657-60 (1986).
- DGK96. T. W. Dixon, T. Gherghetta, and B. G. Kenny, "Universality in the quasi-periodic route to chaos," *Chaos* 6, 32² (1996).
- DG093a. M. Ding, C. Grebogi, E. Ott, T. Sauer, and J. A. Yorke, "Plateau Onset for Correlation Dimension: When Does It Occur?" *Phys. Rev. Lett.* 70, 3872-75 (1993).
- DG093b. M. Ding, C. Grebogi, E. Ott, T. Sauer, and J. A. Yorke, "Estimating correlation dimension from a chaotic time series: when does plateau onset occur?" *Physica D* 69,404-24 (1993).
- DHB92. K. Davies, T. Huston, and M. Baranger, "Calculations of Periodic Trajectories for the Henon -Heiles Hamiltonian Using the Monodromy Method," *Chaos* 2,215-24 (1992).
- DHK85. R. Delbourgo, W. Hart, and B. G. Kenny, "Dependence of Universal Constants upon Multiplication Period in Nonlinear Maps," *Phys. Rev. A* 31, 514-6 (1985).

- DIH96. M. Ding and R. C. Hilborn, "Optimal Reconstruction Space for Estimating Correlation Dimension," *Int. J. Bifur. Chaos* 6, 377-381 (1996).
- DIP93. W. L. Ditto and L. Pecora, "Mastering Chaos," *Scientific American* 269 (2), 78-84 (1993).
- DIS97. W. L. Ditto and K. Showalter, "Introduction: Control and synchronization of chaos," *Chaos* 7,509-11 (1997).
- DN099. M. Dutta, H. E. Nusse, E. Ott, J. A. Yorke, and G. Yuan, "Multiple Attractor Bifurcations: A Source of Unpredictability in Piecewise Smooth Systems," *Phys. Rev. Lett.* 83,4281-284 (1999).
- D0088. M. F. Doherty and J. M. Ottino, "Chaos in Deterministic Systems: Strange Attractors, Turbulence, and Applications in Chemical Engineering," *Chemical Engineering Science* 43, 139-83 (1988).
- DRB83. M. Dubois, M. A. Rubio, and P. Berg,, "Experimental Evidence of Intermittency Associated with a Subharmonic Bifurcation," *Phys. Rev. Lett.* 51, 1446-49(1983).
- DRC89. W. L. Ditto, S. Rauseo, R. Cawley, C. Grebogi, G.-H. Hsu, E. Kostelich, E. Ott, H. T. Savage, R. Segnan, M. L. Spano, and J. A. Yorke, "Experimental Observation of Crisis-Induced Intermittency and Its Critical Exponent," *Phys. Rev. Lett.* 63,923-26 (1989).
- DRE92. Max Dresden, "Chaos: A New Scientific Paradigm—or Science by Public Relations," *The Physics Teacher* 30, 10-14 and 74-80 (1992).
- DRH91. K. Dreyer and F. R. Hickey, "The Route to Chaos in a Dripping Faucet," *Am. J. Phys.* 59,619-27 (1991).
- DRJ90. S. DeSouza-Machado, R. W. Rollins, D. T. Jacobs, and J.L. Hartman, "Studying Chaotic Systems Using Microcomputer Simulations and Lyapunov Exponents," *Am. J. Phys.* 58, 321-29 (1990).
- DRN92. U. Dressier and G. Nitsche, "Controlling Chaos Using Time Delay Coordinates," *Phys. Rev. Lett.* 68,1-4 (1992).
- DRS90. W. L. Ditto, S. N. Rauseo, and M. L. Spano, "Experimental Control of Chaos," *Phys. Rev. Lett.* 65, 3211-14 (1990).
- DSB98. F. K. Diakonov, P. Schmelcher, and O. Biham, "Systematic Computation of the Least Unstable Periodic Orbits in Chaotic Attractors," *Phys. Rev. Lett.* 81, 4349-52 (1998).
- DSF90. E. Doron, U. Smilansky, and A. Frenkel, "Experimental Demonstration of Chaotic Scattering of Microwaves," *Phys. Rev. Lett.* 65, 3072-75 (1990).
- DUD87. M. L. Du and J. B. Delos, "Effect of Closed Classical Orbits on Quantum Spectra: Ionization of Atoms in a Magnetic Field," *Phys. Rev. Lett.* 58, 1731-33 (1987).
- DUZ00. M. Dzugutov, "Dzugutov Replies," *Phys. Rev. Lett.* 84, 395 (2000).
- ECK81. J.-P. Eckmann, "Roads to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems," *Rev. Mod. Phys.* 53,643-54 (1981).
- ECK88a. B. Eckhardt, "Quantum Mechanics of Classically Non-Integrable Systems," *Phys. Rep.* 163,205-97 (1988).
- ECK88b. B. Eckhardt, "Irregular Scattering," *Physica D* 33, 89-98 (1988).
- ECP86. J.-P. Eckmann and I. Procaccia, "Fluctuations of Dynamical Scaling Indices in Nonlinear Systems," *Phys. Rev. A* 34,659-61 (1986).
- ECP91. J.-P. Eckmann and I. Procaccia, "Onset of Defect-Mediated Turbulence," *Phys. Rev. Lett.* 66, 891-94 (1991).
- ECR85. J.-P. Eckmann and D. Ruelle, "Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors," *Rev. Mod Phys.* 57, 617-56 (1985).
- EGM99. M. C. Eguia and G. B. Mindlin, "Semiconductor laser with optical feedback: From excitable to deterministic low-frequency fluctuations," *Phys. Rev.* 60,1551-57(1999).
- EGO00. D. A. Egolf, "Equilibrium Regained: From Nonequilibrium Chaos to Statistical Mechanics," *Science* 287,101-104 (2000).
- EIN17. A. Einstein, "Zum Quantensatz vom Sommerfeld und Epstein," *Verh. Dtsch. Phys. Ges.* 19,82-92 (1917).

- EKR86. J.-P. Eckmann, S. O. Kamphorst, D. Ruelle, and S. Ciliberto, "Liapunov Exponents from Time Series," *Phys. Rev. A* **34**,4971-79 (1986).
- ELT95. S. Ellner and P. Turchin, "Chaos in a Noisy World: New Methods and Evidence from Time-Series Analysis," *The American Naturalist* **145**, 343-75 (1995).
- ELY88. P. V. Elyatin, "The Quantum Chaos Problem," *Sov. Phys. Usp.* **31**, 597-622(1988).
- ERE97. A. Erzan and J.-P. Eckmann, " \wedge -analysis of Fractal Sets," *Phys. Rev. Lett.* **78**,3245-18(1997).
- EPP99. I. R. Epstein and J. A. Pojman, "Overview: Nonlinear dynamics related to polymeric systems," *Chaos* **9**,255-59 (1999).
- ESN90. C. Essex and M. Nerenberg, "Fractal Dimension: Limit Capacity or Hausdorff Dimension?" *Am. J. Phys.* **58**,986-88 (1990).
- ESN91. C. Essex and M. A. H. Nerenberg, "Comments on 'Deterministic Chaos: the Science and the Fiction' by D. Ruelle," *Proc. Roy. Soc. London A* **435**,287-92 (1991).
- EYU86. R. Eykholt and D. K. Umberger, "Characterization of Fat Fractals in Nonlinear Dynamical Systems," *Phys. Rev. Lett.* **57**,2333-36 (1986).
- FAR82a. J. D. Farmer, "Chaotic Attractors of an Infinite-Dimensional Dynamical System," *Physica D* **4**, 366-93 (1982).
- FAR82b. J. D. Farmer, "Information Dimension and the Probabilistic Structure of Chaos," *Z Naturforsch.* **37a**, 1304-25 (1982).
- FAS87. J. D. Farmer and J. J. Sidorowich, "Predicting Chaotic Time Series," *Phys.Rev. Lett.* **59**, 845-18 (1987).
- FAS91. J. D. Farmer and J. J. Sidorowich, "Optimal Shadowing and Noise Reduction," *Physica D* **47**, 373-92 (1991).
- FEI79. M. Feigenbaum, "The Universal Metric Properties of Nonlinear Transformations," *Stat. Phys.* **21**, 669-706 (1979).
- FEI80. M. J. Feigenbaum, "Universal Behavior in Nonlinear Systems," *Los Alamos Science* **1**, 4-27 (1980).
- FFP92. M. Finardi, L. Flepp, J. Parisi, R. Holzner, R. Badii, and E. Brun, "Topological and Metric Analysis of Heteroclinic Crisis in Laser Chaos," *Phys. Rev. Lett.* **68**,2989-2991 (1992).
- FIT99. R. Fitzgerald, "Phase Synchronization May Reveal Communication Pathways in Brain Activity," *Physics Today* **52** (3), 17-19 (1999).
- FK098. G. O. Fountain, D. V. Khakhar, and J. M. Ottino, "Visualization of Three-Dimensional Chaos," *Science* **281**,683-86 (1998).
- FKS82. M. J. Feigenbaum, L. P. Kadanoff, and S. J. Shenker, "Quasiperiodicity in Dissipative Systems: A Renormalization Group Analysis," *Physica D* **5**, 370-86 (1982). (Reprinted in [Hao, 1984].)
- FL089. J. Franjione, C.-W. Leong, and J. M. Ottino, "Symmetries within Chaos: A Route to Effective Mixing," *Physics of Fluids A* **1**, 1772-83 (1989).
- FMP89. F. Family, B. Masters, and D. E. Piatt, "Fractal Pattern Formation in Human Retinal Vessels," *Physica D* **38**, 98-103 (1989).
- FMR91. J. Ford, G. Mantica, and G. H. Ristow, "The Arnold Cat: Failure of the Correspondence Principle," *Physica D* **50**,493-520 (1991).
- FOE93. R. F. Fox and T. C. Elston, "Amplification of intrinsic fluctuations by the Lorenz equations," *Chaos* **3**, 313-23 (1993).
- FOI92. J. Ford and M. Ilg, "Eigenfunctions, Eigenvalues, and Time Evolution of Finite Bounded, Undriven, Quantum Systems are not Chaotic," *Phys. Rev. A* **45**, 6165-73 (1992).
- FOM92. J. Ford and G. Mantica, "Does Quantum Mechanics Obey the Correspondence Principle? Is it Complete?" *Am. J. Phys.* **60**,1086-98 (1992).
- FOR83. J. Ford, "How Random is a Coin Toss," *Physics Today* **36** (4), 40-47 (1983).
- FOR88. J. Ford, "Quantum Chaos, Is There Any?" in [Hao, 1989], pp. 128-47.
- FOR89. J. Ford, "What Is Chaos That We Should Be Mindful of It?" In P. W. Davies, ed. *The New Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).

- FOY83. J. D. Farmer, E. Ott, and J. A. Yorke, "The Dimension of Chaotic Attractors," *Physica D* 7,153-80 (1983).
- FRO90. U. Frisch and S. A. Orszag, "Turbulence: Challenges for Theory and Experiment," *Physics Today* 43 (1), 24-32 (January, 1990).
- FV098. G. O. Fountain, D. V. Khakhar, and J. M. Ottino, "Visualization of Three-Dimensional Chaos," *Science* **281**, 683-86 (1998).
- GA099. J. B. Gao, "Recurrence Time Statistics for Chaotic Systems and Their Applications," *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3178-81 (1999).
- GAR70. M. Gardner, "The Fantastic Combinations of John Conway's New Solitaire Game of Life," *Scientific American* **223**, 120-23 (April, 1970).
- GER90. N. Gershenfeld, "An Experimentalist's Introduction to the Observation of Dynamical Systems." In [Hao, 1990], pp. 310-84.
- GGB84. L. Glass, M. R. Guevar, J. Belair, and A. Shrier, "Global Bifurcations and Chaos in a Periodically Forced Biological Oscillator," *Phys. Rev. A* 29, 1348-57 (1984).
- GGR90. A. V. Gaponov-Grekhov and M. I. Rabinovich, "Disorder, Dynamical Chaos, and Structures," *Physics Today* 43 (7), 30-38 (July, 1990).
- GGY93. J. A. C. Gallas, C. Grebogi, and J. A. Yorke, "Vertices in Parameter Space: Double Crises Which Destroy Chaotic Attractors," *Phys. Rev. Lett.* 71, 1359-1362(1993).
- GHJ98. L. Gammaitoni, P. Hanggi, P. Jung, F. Marchesoni, "Stochastic Resonance," *Rev. Mod. Phys.* 70,223-87 (1998).
- GHL99. J. B. Gao, S. K. Hwang, and J. M. Liu, "When Can Noise Induce Chaos?" *Phys. Rev. Lett.* **82**,1132-35 (1999).
- GHY90. C. Grebogi, S. M. Hammel, J. A. Yorke, and T. Sauer, "Shadowing of Physical Trajectories in Chaotic Dynamics: Containment and Refinement," *Phys. Rev. Lett.* 65,1527-30 (1990).
- GIP96. G. Giacomelli and A. Politi, "Relationship between Delayed and Spatially Extended Dynamical Systems," *Phys. Rev. Lett.* 76, 2686-89 (1996).
- GIR92. Z. Gills, C. Iwata, R. Roy, I. Schwartz, and I. Triandof, "Tracking Unstable Steady States: Extending the Stability Regime of a Multimode Laser System," *Phys. Rev. Lett.* 69, 3169-72 (1992).
- GLA75. L. Glass, "Combinatorial and topological methods in nonlinear chemical kinetics," *Chem. Phys.* 63,1325-35 (1975).
- GLA91. L. Glass, "Nonlinear dynamics of physiological function and control," *Chaos* 1,247-50 (1991).
- GLA96. L. Glass, "Dynamics of Cardiac Arrhythmias," *Physics Today* 49 (8), 40-45 (1996).
- GLP98. J.-P. Goedgebuer, L. Larger, and H. Porte, "Optical Cryptosystem Based on Synchronization of Hyperchaos Generated by a Delayed Feedback Tunable Laser Diode," *Phys. Rev. Lett.* 80,2249-52 (1998).
- GLV89. G. H. Gunaratne, P. S. Linsay, and M. J. Vinson, "Chaos beyond Onset: A Comparison of Theory and Experiment," *Phys. Rev. Lett.* 63, 1-4 (1989).
- GMD90. C. Green, G. Mindlin, E. D'Angelo, H. Solari, and J. Tredicce, "Spontaneous Symmetry Breaking in a Laser: The Experimental Side," *Phys. Rev. Lett.* 65, 3124-27 (1990).
- GM083. C. Grebogi, S. W. McDonald, E. Ott, and J. A. Yorke, "Final State Sensitivity: An obstruction to predictability," *Phys. Lett. A* 99,415-418 (1983).
- GMP81. M. Giglio, S. Musazzi, and U. Perini, "Transition to Chaotic Behavior Via a Reproducible Sequence of Period-Doubling Bifurcations," *Phys. Rev. Lett.* 47,243^6(1981).
- GMV81. J. M. Greene, R. S. MacKay, F. Vivaldi, and M. J. Feigenbaum, "Universal Behavior in Families of Area-Preserving Maps," *Physica D* 3, 468-86 (1981).
- GOK99. N. Goldenfeld and L. P. Kadanoff, "Simple Lessons from Complexity," *Science* **284**,87-89 (1999).
- GOP84. C. Grebogi, E. Ott, S. Pelikan, and J. A. Yorke, "Strange Attractors that are not Chaotic," *Physica D* **13**, 261-68 (1984).

- GOR87. C. Grebogi, E. Ott, F. Romeiras, and J. A. Yorke, "Critical Exponents for Crisis-Induced Intermittency," *Phys. Rev. A* 36,5365-80 (1987).
- GOS75. J. P. Gollub and H. L. Swinney, "Onset of Turbulence in a Rotating Fluid," *Phys. Rev. Lett.* 35,927-30 (1975).
- GOT90. H. Gould and J. Tobochnik, "More on Fractals and Chaos: Multifractals," *Computers in Physics* 4 (2), 202-7 (March/April 1990).
- GOY82. C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke, "Chaotic Attractors in Crisis," *Phys. Rev. Lett.* 48, 1507-10 (1982).
- GOY83. C. Grebogi, and E. Ott, and J. A. Yorke, "Crises, Sudden Changes in Chaotic Attractors and Transient Chaos," *Physica D* 7,181-200 (1983).
- GOY87. C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke, "Basin Boundary Metamorphoses: Changes in Accessible Boundary Orbits," *Physica D* 24, 243-62 (1987).
- GRA76. R. Graham, "Onset of Self-Pulsing in Lasers and the Lorenz Model," *Phys. Lett. A* 58,440-41 (1976).
- GRA81. P. Grassberger, "On the Hausdorff Dimension of Fractal Attractors," *J. Stat. Phys.* 26,173-79 (1981).
- GRA83. P. Grassberger, "Generalized Dimensions of Strange Attractors," *Phys. Lett. A* 97,227-30 (1983).
- GRP83a. P. Grassberger and I. Procaccia, "Characterization of Strange Attractors," *Phys. Rev. Lett.* 50, 346-49 (1983).
- GRP83b. P. Grassberger and I. Procaccia, "Estimation of the Kolmogorov Entropy from a Chaotic Signal," *Phys. Rev. A* 28,2591-93 (1983).
- GRP84. P. Grassberger and I. Procacci, "Dimensions and Entropies of Strange Attractors from a Fluctuating Dynamics Approach," *Physica D* 13, 34-54 (1984).
- GSB86. L. Glass, A. Shrier, and J. Belair, "Chaotic Cardiac Rhythms," in *Chaos* (A. V. Holden, ed.) (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1986).
- GSB99. J. Geddes, K. Short, and K. Black, "Extraction of Signals from Chaotic Laser Data," *Phys. Rev. Lett.* 83,5389-92 (1999).
- GSC94. D. J. Gauthier, D. W. Sukow, H. M. Concannon, and J. E. S. Socolar, "Stabilizing unstable periodic orbits in a fast diode resonator using continuous time-delay autosynchronization," *Phys. Rev. E* 50,2343-46 (1994).
- GSM88. E. J. Galvex, B. E. Sauer, L. Moorman, P. M. Koch, and D. Richards, "Microwave Ionization of H Atoms: Breakdown of Classical Dynamics for High Frequencies," *Phys. Rev. Lett.* 61, 2011-14 (1988).
- GUC81. J. Guckenheimer, "One-Dimensional Dynamics," *Ann. N. Y. Acad. Sci.* 357, 343⁷ (1981).
- GUT67. M. Gutzwiller, "Phase-Integral Approximation in Momentum Space and the Bound State of Atoms," *J. Math. Phys.* 8,1979-2000 (1967).
- GUT71. M. C. Gutzwiller, "Periodic Orbits and Classical Quantization Conditions," *J. Math. Phys.* 12, 343-58 (1971).
- GUT92. M. C. Gutzwiller, "Quantum Chaos," *Scientific American* 266 (1), 78-84 (January, 1992).
- GW85. E. G. Gwinn and R. M. Westervelt, "Intermittent Chaos and Low-Frequency Noise in the Driven Damped Pendulum," *Phys. Rev. Lett.* 54, 1613-16 (1985).
- GW86a. E. G. Gwinn and R. M. Westervelt, "Horseshoes in the Driven, Damped Pendulum," *Physica D* 23,396-401 (1986).
- GW86b. E. G. Gwinn and R. M. Westervelt, "Fractal Basin Boundaries and Intermittency in the Driven Damped Pendulum," *Phys. Rev. A* 33,4143-55 (1986).
- HAB80. J. H. Hannay and M. V. Berry, "Quantization of Linear Maps on a Torus-Fresnel Diffraction by a Periodic Grating," *Physica D* 1,267-90 (1980).
- HAE89. J. W. Havstad and C. L. Ehlers, "Attractor Dimension of Nonstationary Dynamical Systems from Small Data Sets," *Phys. Rev. A* 39, 845-53 (1989).

- HAK75. H. Haken, "Analogy between Higher Instabilities in Fluids and Lasers," *Phys. Lett. A* 53, 77-78 (1975).
- HAK83. H. Haken, "At Least One Lyapunov Exponent Vanishes if the Trajectory of an Attractor does not Contain a Fixed Point," *Phys. Lett. A* 94, 71-74 (1983). HAK89. H. Haken, "Synergetics: An Overview," *Rep. Prog. Phys.* 52, 515-33 (1989).
- HAL89. P. Halpern, "Sticks and Stones: A Guide to Structurally Dynamic Cellular Automata," *Am. J. Phys.* 57,405-8 (1989).
- HAL99. M. A. Harrison and Y.-C. Lai, "Route to high-dimensional chaos," *Phys. Rev. A* 59, R3799-R3802 (1999).
- HAS92. D. Hansel and H. Sompolinsky, "Synchronization and Computation in a Chaotic Neural Network," *Phys. Rev. Lett.* 68,718-21 (1992).
- HCM91. M. Hassell, H. Comins, and R. May, "Spatial Structure and Chaos in Insect Population Dynamics," *Nature* 353,255-58 (1991).
- HCP94. J. F. Hagey, T. L. Carroll, and L. M. Pecora, "Experimental and Numerical Evidence for Riddled Basins in Coupled Chaotic Systems," *Phys. Rev. Lett.* 73,3528-31(1994).
- HCT97. K. Hall, D. J. Christini, M. Tremblay, J. J. Collins, L. Glass, and J. Billette, "Dynamic Control of Cardiac Alternans," *Phys. Rev. Lett.* 78, 4518-21 (1997).
- HEG99. R. Hegger, "Estimating the Lyapunov spectrum of time delay feedback systems from scalar time series," *Phys. Rev. E* 60, 1563-66 (1999).
- HEH64. M. Henon and C. Heiles, "The Applicability of the Third Integral of Motion: Some Numerical Experiments," *Astrophys. J.* 69,73-79 (1964).
- HEI90. J. Heidel, "The Existence of Periodic Orbits of the Tent Map," *Phys. Lett. A* 43, 195-201(1990).
- HEL80. R. H. G. Helleman, "Self-Generated Chaotic Behavior in Nonlinear Mechanics," in *Fundamental Problems in Statistical Mechanics*, Vol. 5. (E. G. D. Cohen, ed.) (North-Holland, Amsterdam, 1980), pp. 165-233.
- HEN76. M. Henon "A Two-Dimensional Mapping with a Strange Attractor," *Comm. Math. Phys.* 50,69-77 (1976).
- HEP83. H. Hentschel and I. Procaccia, "The Infinite Number of Generalized Dimensions of Fractals and Strange Attractors," *Physica D* 8,435⁴ (1983).
- HET93. E. J. Heller and S. Tomsovic, "Postmodern Quantum Mechanics," *Physics Today* 46 (7), 38⁶ (1993).
- HIH83. H. Hayashi, S. Ishizuka, and K. Hirakawa, "Transition to Chaos Via Intermittency in the Onchidium Pacemaker Neuron," *Phys. Lett. A* 98, 474-76 (1983).
- HJL85. R. C. Hilborn, "Quantitative Measurement of the Parameter Dependence of the Onset of a Crisis in a Driven Nonlinear Oscillator," *Phys. Rev. A* 31, 378-82 (1985).
- HIT97. R. C. Hilborn and N. B. Tufillaro, "Resource Letter: ND-1: Nonlinear Dynamics," *Am. J. Phys.* 65, 822-834 (1997).
- HJK86. T. C. Halsey, M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, I. Procaccia, and B. I. Schraiman, "Fractal Measures and Their Singularities: The Characterization of Strange Sets," *Phys. Rev. A* 33,1141-51 (1986).
- HKG82. F. A. Hopf, D. L. Kaplan, H. M. Gibbs, and R. L. Shoemaker, "Bifurcations to Chaos in Optical Bistability," *Phys. Rev. A* 25, 2172-82 (1982).
- HKS99. R. Hegger, H. Kantz, and T. Schreiber, "Practical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package," *Chaos* 9,413-35 (1999).
- HOF81. D. R. Hofstadter, "Metamagical Themas," *Scientific American* 245, (5) 22-43(1981).
- HOL90. P. Holmes, "Poincaré, Celestial Mechanics, Dynamical-Systems Theory and 'Chaos'," *Phys. Rep.* 193, 137-63 (1990).
- HOR95. John Horgan, "From Complexity to Perplexity," *Scientific American* 272 (6), 104-109(1995).

- HPH94. P. W. Hammer, N. Piatt, S. M. Hammel, J. F. Heagy, and B. D. Lee, "Experimental Observation of On-Off Intermittency," *Phys. Rev. Lett.* **73**, 1095-98 (1994).
- HUB88. B. A. Huberman, "Computing with Attractors: From Self-repairing Computers, to Ultradiffusion, and the Application of Dynamical Systems to Human Behavior," in *Emerging Syntheses in Science*, D. Pines, ed. Vol. I, (Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1988).
- HUB89. B. A. Huberman, "An Ecology of Machines, How Chaos Arises in Computer Networks," *The Sciences* (New York Academy of Sciences), 38-44 (July/August, 1989).
- HUH84. B. A. Huberman and T. Hogg, "Adaptation and Self-Repair in Parallel Computing Structures," *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1048-51 (1984).
- HUK87. J.-Y. Huang and J.-J. Kim, "Type-II Intermittency in a Coupled Nonlinear Oscillator: Experimental Observation," *Phys. Rev. A* **36**, 1495-97 (1987).
- HUN91. E. R. Hunt, "Stabilizing High-Period Orbits in a Chaotic System: The Diode Resonator," *Phys. Rev. Lett.* **67**, 1953-55 (1991).
- HU096. B. R. Hunt and E. Ott, "Optimal Periodic Orbits of Chaotic Attractors," *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2254-57 (1996).
- HUR80. B. A. Huberman and J. Rudnick, "Scaling Behavior of Chaotic Flows," *Phys. Rev. Lett.* **45**, 154-56 (1980).
- HUR82. B. Hu and J. Rudnick, "Exact Solutions to the Feigenbaum Renormalization Equations for Intermittency," *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1645-48 (1982).
- HUR84. E. R. Hunt and R. W. Rollins, "Exactly Solvable Model of a Physical System Exhibiting Multidimensional Chaotic Behavior," *Phys. Rev. A* **29**, 1000-2 (1984).
- HUS83. B. Hu and I. Satija, "A spectrum of universality classes in period doubling and period tripling," *Phys. Lett. A* **98**, 143-146 (1983).
- HVP90. B. Hu, A. Valinai, and O. Piro, "Universality and Asymptotic Limits of the Scaling Exponents in Circle Maps," *Phys. Lett. A* **144**, 7-10 (1990).
- IPS96. D. K. Ivanov, H. A. Posch, and Ch. Stumpf, "Statistical measures derived from the correlation integrals of physiological time series," *Chaos*, **6**, 243-53 (1996).
- IWK91. C.-H. Iu, G. R. Welch, M. M. Kasch, D. Kleppner, D. Delande, and J. C. Gay, "Diamagnetic Rydberg Atom: Confrontation of Calculated and Observed," *Phys. Rev. Lett.* **66**, 145-48 (1991).
- IZR90. F. M. Izrailev, "Simple Models of Quantum Chaos: Spectrum and Eigenfunctions," *Phys. Rep.* **196**, 299-392 (1990).
- JAT94. I. M. Janosi and T. Tel, "Time-Series Analysis of Transient Chaos," *Phys. Rev. Lett.* **73**, 2756-63 (1994).
- JBB83. M. H. Jensen, P. Bak, and T. Bohr, "Complete Devil's Staircase, Fractal Dimension and Universality of Mode-Locking Structure in the Circle Map," *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1637-39 (1983).
- JBB84. M. H. Jensen, P. Bak, and T. Bohr, "Transition to Chaos by Interaction of Resonances in Dissipative Systems I, II," *Phys. Rev. A* **30**, 1960-69 and 1970-81 (1984).
- JBT94. A. Jedynek, M. Bach, and J. Timmer, "Failure of dimension analysis in a simple five-dimensional system," *Phys. Rev. Lett.* **73**, 1170-80 (1994).
- JEM85. R. V. Jensen and C. R. Myers, "Images of the Critical Points of Nonlinear Maps," *Phys. Rev. A* **32**, 1222-1 (1985).
- JEN87a. R. V. Jensen, "Classical Chaos" *American Scientist* **75**, 168-81 (1987).
- JEN87b. R. V. Jensen, "Chaos in Atomic Physics," in *Atomic Physics* **10**, H. Narumi and I. Shimamura, eds. (Elsevier North-Holland, Amsterdam, 1987).
- JEN90. R. V. Jensen, "The Bohr Atom Revisited: A Test Case for Quantum Chaos," *Comments At. Mol. Phys.* **25**, 119-31 (1990).
- JEP82. C. Jeffries and J. Perez, "Observation of a Pomeau-Manneville Intermittent Route to Chaos in a Nonlinear Oscillator," *Phys. Rev. A* **26**, 2117-22 (1982).
- JKL85. M. H. Jensen, L. Kadanoff, A. Libchaber, I. Pröccacia, and J. Stavans, "Global Universality at the Onset of Chaos: Results of a Forced Rayleigh-Benard Experiment," *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2798-801 (1985).

- JNB96. H. Jaeger, S. Nagel, and R. Behringer, "The Physics of Granular Materials," *Physics Today* **49** (4), 32-38 (1996).
- JOH88. S. C. Johnston and R. C. Hilborn, "Experimental Verification of a Universal Scaling Law for the Lyapunov Exponent of a Chaotic System," *Phys. Rev. A* **37**, 2680-82 (1988).
- JOS88. J. V. Jose, "Quantum Manifestations of Classical Chaos: Statistics of Spectra," in [Hao, 1988].
- JPS90. H. Jurgens, H.-O. Peitgen, and D. Saupe, "The Language of Fractals," *Scientific American* **263** (2), 60-67 (1990).
- JSS89. R. V. Jensen, M. M. Sanders, M. Saraceno, and B. Sundaram, "Inhibition of Quantum Transport Due to 'Scars' of Unstable Periodic Orbits," *Phys. Rev. Lett.* **63**, 2771-15 (1989).
- JSS91. R. V. Jensen, S. M. Susskind, and M. M. Sanders, "Chaotic Ionization of Highly Excited Hydrogen Atoms: Comparison of Classical and Quantum Theory with Experiment," *Phys. Rep.* **201**, 1-56 (1991).
- KAM85. N. G. van Kampen in *Chaotic Behavior in Quantum Systems. Theory and Applications*. G. Casati, ed. (Plenum, NY, 1985).
- KAN89a. K. Kaneko, "Chaotic but Regular Posi-Nega Switch among Coded Attractors by Cluster-Size Variation," *Phys. Rev. Lett.* **63**, 219-23 (1989).
- KAN89b. K. Kaneko, "Pattern Dynamics in Spatiotemporal Chaos," *Physica D* **34**, 1-41 (1989).
- KAN90. K. Kaneko, "Globally Coupled Chaos Violates the Law of Large Numbers but not the Central-Limit Theorem," *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1391-94 (1990).
- KAN92. K. Kaneko, "Overview of coupled map lattices," *Chaos* **2**, 279-82 (1992).
- KAP87. H. Kaplan, "A Cartoon-Assisted Proof of Sarkowskii's Theorem," *Am. J. Phys.* **55**, 1023-32 (1987).
- KAS86. F. Kaspar and H. G. Schuster, "Scaling at the Onset of Spatial Disorder in Coupled Piecewise Linear Maps," *Phys. Lett. A* **113**, 451-53 (1986).
- KAT94. K. Kaneko and I. Tsuda, "Constructive complexity and artificial reality: an introduction," *Physica D* **75**, 1-10 (1994).
- KAU91. Stuart A. Kaufman, "Antichaos and Adaptation," *Scientific American* **265** (2), 78-84 (August, 1991).
- KAY79. J. Kaplan and J. A. Yorke, *Springer Lecture Notes in Mathematics* **730**, 204 (1979).
- KER88. R. A. Kerr, "Pluto's Orbital Motion Looks Chaotic," *Science* **240**, 986-87 (1988).
- KES93. Th.-M. Kruel, M. Eiswirth, and F. W. Schneider, "Computation of Lyapunov spectra: Effect of interactive noise and application to a chemical oscillator," *Physica D* **63**, 117-37 (1993).
- KHA96. Ya. I. Khanin, "Low-frequency dynamics of lasers," *Chaos* **6**, 373-80 (1996).
- K1089. S. Kim and S. Ostlund, "Universal Scaling in Circle Maps," *Physica D* **39**, 365-92 (1989).
- KIW90. Y. S. Kim and E. P. Wigner, "Canonical Transformations in Quantum Mechanics," *Am. J. Phys.* **58**, 439-48 (1990).
- KKK97. R. Ketzmerick, K. Kruse, S. Kraut, and T. Geisel, "What Determines the Spreading of a Wave Packet?" *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1959-63 (1997).
- KMG99. D. V. Khakhar, J. J. McCarthy, J. F. Gilchrist, and J. M. Ottino, "Chaotic mixing of granular materials in two-dimensional tumbling mixers," *Chaos* **9**, 195-205 (1999).
- KOL58. A. N. Kolmogorov, "A New Invariant for Transitive Dynamical Systems," *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **119**, 861-64 (1958).
- KOP95. L. Kocarev and U. Parlitz, "General Approach for Chaotic Synchronization with Applications to Communication," *Phys. Rev. Lett.* **74**, 5028-31 (1995).
- KRG85. H. Krantz and P. Grassberger, "Repellers, Semi-attractors, and Long-lived Chaotic Transients," *Physica D* **17**, 75-86 (1985).
- KUH87. J. Kurths and H. Herzel, "An Attractor in a Solar Time Series," *Physica D* **25**, 165-72 (1987).

- KU092. H. A. Kusch and J. M. Ottino, "Experiments on Mixing in Continuous Chaotic Flows," *FluidMech.* **236**, 319[^]8 (1992).
- KUR81. Y. Kuramoto, "Rhythms and Turbulence in Populations of Chemical Oscillators," *Physica A* **106**, 128[^]3 (1981).
- KUS91. H. A. Kusch, "Continuous Chaotic Mixing of Viscous Liquids," Ph.D. Thesis (Department of Chemical Engineering, University of Massachusetts, 1991).
- KYR98. C.-M. Kim, G.-S. Yim, J.-W. Ryu, and Y.-J. Park, "Characteristic Relations of Type-III Intermittency in an Electronic Circuit," *Phys. Rev. Lett.* **80**, 5317-20(1998).
- LAB99. V. Latora and M. Baranger, "Kolmogorov-Sinai Entropy Rate versus Physical Entropy," *Phys. Rev. Lett.* **82**, 520-23 (1999).
- LAC98. Y. Lee, L. Amaral, D. Canning, M. Meyer and H. E. Stanley, "Universal Features in the Growth Dynamics of Complex Organizations," *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3275-78 (1998).
- LAG99. Y.-C. Lai and C. Grebogi, "Modeling of Coupled Chaotic Oscillators," *Phys. Rev. Lett.* **82**,4803-06 (1999).
- LAI99. Y.-C. Lai and C. Grebogi, "Riddling of Chaotic Sets in Periodic Windows," *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2926-29 (1999).
- LAN44. L. D. Landau, "On the Problem of Turbulence," *Akad. Nauk. Doklady* **44**, 339(1944).
- LAN82. O. E. Lanford III, "A Computer-Assisted Proof of the Feigenbaum Conjectures," *Bull. Am. Math. Soc.* **6**,427-34 (1982).
- LAN87. R. Landauer, "Nonlinearity: Historical and Technological Review," in *Nonlinearity in Condensed Matter*, A. R. Bishop, D. K. Campbell, P. Kumar, and S. E. Trullinger, eds. (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1987).
- LAP88. W. Lauterborn and U. Parlitz, "Methods of chaos physics and their application to acoustics," *J. Acoust. Soc. Am.* **84**, 1975-93 (1988).
- LAW94. Y.-C. Lai and R. L. Winslow, "Riddled Parameter Space in Spatio-temporal Chaotic Dynamical Systems," *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1640-43 (1994).
- LAW95. M. Latka and B. J. West, "Nature of Quantum Localization in Atomic Momentum Transfer Experiments," *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4202-5 (1995).
- LEE85. K. A. H. van Leeuwen, et al. "Microwave Ionization of Hydrogen Atoms: Experiment versus Classical Dynamics," *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2231-34 (1985).
- LEE98. K. Lehnertz and C. E. Elger, "Can Epileptic Seizures be Predicted? Evidence from Nonlinear Time Series Analysis of Brain Electrical Activity," *Phys. Rev. Lett.* **80**,5019-22 (1998).
- LES88. J. Lee and H. E. Stanley, "Phase Transition in the Multifractal Spectrum of Diffusion-Limited Aggregation," *Phys. Rev. Lett.* **61**,2945[^]8 (1988).
- LEV49. N. Levinson, "A Second-Order Differential Equation with Singular Solutions," *MAma/y of Mathematics* **50**, 127-53 (1949).
- LEV93. M. T. Levinson, "The Chaotic Oscilloscope," *Am. J. Phys.* **61**, 155-165 (1993).
- LF091. Y.T. Lau, J. M. Finn, and E. Ott, "Fractal Dimension in Nonhyperbolic Chaotic Scattering," *Phys. Rev. Lett.* **66**, 978-81 (1991).
- LIB90. W. A. Lin and L. E. Ballentine, "Quantum Tunneling and Chaos in a Driven Anharmonic Oscillator," *Phys. Rev. Lett.* **65**, 2927-30 (1990).
- LIC89. P. S. Linsay and A. W. Cumming, "Three-Frequency Quasiperiodicity, Phase Locking, and the Onset of Chaos," *Physica D* **40**, 196-217 (1989).
- LIG86. J. Lighthill, "The Recently Recognized Failure of Predictability in Newtonian Dynamics," *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **407**, 35-50 (1986).
- LIY75. T.-Y. Li and J. A. Yorke, "Period Three Implies Chaos," *Amer. Math. Monthly* **82**, 985-992 (1975).
- LKF90. P. Leboeuf, J. Kurchan, M. Feingold, and D. P. Arovas, "Phase-Space Localization: Topological Aspects of Quantum Chaos," *Phys. Rev. Lett.* **65**, 3076-79 (1990).

- LMS97. Elisa Lanzara, Rosario N. Mangegna, Bernardo Spagnolo, and Rosalia Zangara, "Experimental study of a nonlinear system in the presence of noise: The stochastic resonance," *Am. J. Phys.* **65**, 341-49 (1997).
- LNG97. Y.-C. Lai, Y. Nagai, and C. Grebogi, "Characterization of the Natural Measure by Unstable Periodic Orbits in Chaotic Attractors," *Phys. Rev. Lett.* **79**, 649-52 (1997).
- LOR63. E. N. Lorenz, "Deterministic Nonperiodic Flow," *J. Atmos. Sci.* **20**, 130— 41 (1963). (Reprinted in [Cvitanovic, 1984J).
- LOR84. E. N. Lorenz, "The Local Structure of a Chaotic Attractor in Four Dimensions," *Physica D***13**,90-104 (1984).
- LOR91. E. N. Lorenz, "Dimension of Weather and Climate Attractors," *Nature* **352**,241-44 (1991).
- LSW99. R. Larter, B. Speelman, and R. W. Worth, "A coupled ordinary differential equation lattice model for the simulation of epileptic seizures," *Chaos* **9**, 795-804 (1999).
- LUB81. G. B. Lubkin, "Period-Doubling Route to Chaos Shows Universality," *Physics Today* **34**, 17-19 (1981).
- LUB95. G. B. Lubkin, "Oscillating granular layers produce stripes, squares, hexagons,...," *Physics Today* **48** (10), 17-19 (October, 1995).
- LYT98. M. L. Lyra and C. Tsallis, "Nonextensivity and Multifractality in Low-Dimensional Dissipative Systems," *Phys. Rev. Lett.* **80**, 53-56 (1998).
- MAF87. B. F. Madure and W. L. Freedman, "Self-Organizing Structures," *American Scientist* **75**, 252-59 (1987).
- MAH97. J. Maron and S. Harrison, "Spatial Pattern Formation in an Insect Host-Parasitoid System," *Science* **278**, 1619-21 (1997).
- MAM86a. S. Martin and W. Martienssen, "Circle Maps and Mode Locking in the Driven Electrical Conductivity of Barium Sodium Niobate Crystals," *Phys. Rev. Lett.* **56**, 1522-25 (1986).
- MAM86b. S. Martin and W. Martienssen, "Small-signal Amplification in the Electrical Conductivity of Barium Sodium Niobate Crystals," *Phys. Rev. A* **34**, 4523-24(1986).
- MAN80. P. Manneville, "Intermittency, Self-Similarity and $1/f$ -Spectrum in Dissipative Dynamical Systems," *Phys. (Paris)* **41**, 1235 (1980).
- MAN85. B. B. Mandelbrot, "Self-Affine Fractals and Fractal Dimensions," *Phys. Scr.* **32**, 257-60 (1985).
- MAN99. B. B. Mandelbrot, "A Multifractal Walk down Wall Street," *Scientific American* **280** (2), 70-73 (February, 1999).
- MAP79. P. Manneville and Y. Pomeau, "Intermittency and the Lorenz Model," *Phys. Lett. A* **75**,1-2(1979).
- MAS97. A. Mandell and K. Selz, "Entropy conservation as $h_{\mu} \approx \lambda_{\mu}^+ d_{\mu}$ in neurobiological dynamical systems," *Chaos* **7**, 67-81 (1997).
- MAY76. R. May, "Simple Mathematical Models with very Complicated Dynamics," *Nature* **261**, 459-67 (1976).
- MBA91. J. F. Muzy, E. Bacry, and A. Arneodo, "Wavelets and Multifractal Formalism for Singular Signals: Application to Turbulence Data," *Phys. Rev. Lett.* **67**,3515-18(1991).
- MBC99. K. Myneni, T. A. Barr, N. J. Corron, S. d. Pethel, "New Method for the Control of Fast Chaotic Oscillations," *Phys. Rev. Lett.* **83**,2175-78 (1999).
- MBE88. G. E. Mitchell, E. G. Bipluch, P. M. Endt, and J. F. Shringer, Jr., "Broken Symmetries and Chaotic Behavior in ^{26}Al ," *Phys. Rev. Lett.* **61**, 1473-76 (1988).
- MCT84. T. Matsumoto, L. O. Chua, and S. Tanaka, "Simplest Chaotic Non-autonomous Circuit," *Phys. Rev. A* **30**, 1155-57 (1984).
- MCW94. S. C. Miiller, P. Coulet, and D. Walgraef, "From oscillations to excitability: A case study in spatially extended systems," *Chaos* **4**,439-42 (1994).
- MEP87. E. Meron and I. Proccacia, "Gluing Bifurcations in Critical Flows: The Route to Chaos in Parametrically Excited Surface Waves," *Phys. Rev. A* **35**, 4008-11(1987).

- MES86. H. Meissner and G. Schmidt, "A Simple Experiment for Studying the Transition from Order to Chaos," *Am. J. Phys.* **54**, 800-4 (1986).
- MES87. C. Meneveau and K. R. Sreenivasan, "Simple Multifractal Cascade Model for Fully Developed Turbulence," *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1424-27 (1987).
- MET87. T. M. Mello and N. B. Tufillaro, "Strange Attractors of a Bouncing Ball," *Am. J. Phys.* **55**, 316-20 (1987).
- MG085. S. W. McDonald, C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke, "Fractal Basin Boundaries," *Physica D* **17**, 125-153 (1985).
- MHS90. G. B. Mindlin, X.-J. Hou, H. G. Solari, R. Gilmore, and N. B. Tufillaro, "Classification of Strange Attractors by Integers," *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2350-3 (1990).
- MIS81. M. Misiurewicz, *Publ. Math. I.H.E.S.* **53**, 17 (1981).
- MLM89. M. Moller, W. Lange, F. Mitschke, N. B. Abraham, and U. Hiibner, "Errors from Digitizing and Noise in Estimating Attractor Dimensions," *Phys. Lett.* **4138**, 176-82 (1989).
- MMK91. S. A. Meyer, M. Morgenstern, S. Knudson, and D. Noid, "Novel Method for WKB Analysis of Multidimensional Systems," *Am. J. Phys.* **59**, 145-51 (1991).
- MML88. F. Mitschke, M. Moller, and W. Lange, "Measuring Filtered Chaotic Signals," *Phys. Rev. A* **37**, 4518-21 (1988).
- MMS91. P. Matthews, R. Mirollo, and S. Strogatz, "Dynamics of a Large System of Coupled Nonlinear Oscillators," *Physica D* **52**, 293-331 (1991).
- MNC95. A. Mekis, J. U. Nockel, G. Chen, A. D. Stone, and R. K. Chang, "Ray Chaos and Q Spoiling in Lasing Droplets," *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2682-85 (1995).
- MOH85. F. C. Moon and W. T. Holmes "Double Poincare Sections of a Quasi-Periodically Forced, Chaotic Attractor," *Phys. Lett. A* **111**, 157-60 (1985).
- MOL85. F. C. Moon and G.-X. Li, "Fractal Basin Boundaries and Homoclinic Orbits for Periodic Motion in a Two-Well Potential," *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1439-42 (1985).
- M0093. H.-T. Moon, "Approach to chaos through instabilities," *Rev. Mod. Phys.* **65**, 1535-43 (1993).
- MOW95. F. Moss and K. Wiesenfeld, "The Benefits of Background Noise," *Scientific American* **273** (3) 66-69 (1995).
- MPS85. P. Martien, S. C. Pope, P. L. Scott, and R. S. Shaw, "The Chaotic Behavior of the Leaky Faucet," *Phys. Lett. A* **110**, 399-404 (1985).
- MRB94. F. L. Moore, J. C. Robinson, C. Bharucha, P. E. Williams, and M. G. Raizen, "Observation of Dynamical Localization in Atomic Momentum Transfer: A New Testing Ground for Quantum Chaos," *Phys. Rev. Lett.* **73**, 2974-77 (1994).
- MSM95. G. Metcalf, T. Shinbrot, J. J. McCarthy and J. M. Ottino, "Avalanche mixing of granular solids," *Nature* **374**, 39-41 (1995).
- MSS73. N. Metropolis, M. L. Stein, and P. R. Stein, "On Finite Limit Sets for Transformations of the Unit Interval," / *Combinatorial Theory (A)* **15**, 25-44 (1973).
- MTL83. E. V. Mielczarek, J. S. Turner, D. Leiter, and L. Davis, "Chemical Clocks: Experimental and Theoretical Models of Nonlinear Behavior," *Am. J. Phys.* **51**, 32-42 (1983).
- MTV86. N. Margolis, T. Toffoli, and G. Vichniac, "Cellular-Automata Supercomputers for Fluid Dynamics Modeling," *Phys. Rev. Lett.* **56**, 1694-96 (1986).
- MUL86. G. Muller, "Nature of Quantum Chaos in Spin Systems," *Phys. Rev. A* **34**, 3345-55 (1986).
- MUL97. P. Muruganandam and M. Lakshmanan, "Bifurcation analysis of the travelling waveform of FitzHugh-Nagumo nerve conduction model equation," *Chaos* **7**, 476-87 (1997).
- MUS95. F. Melo, P. Umbanhowar, and H. L. Swinney, "Hexagons, Kinks, and Disorder in Oscillated Granular Layers," *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3838-41 (1995).
- MYR62. P. J. Myrberg, "Sur l'Iteration des Polynomes Reels Quadratiques," *J. Math. PureAppl.* **41**, 339-51 (1962).

- NAG94. T. C. Newell, P. M. Alsing, A. Gavrielides, and V. Kovanis, "Synchronization of Chaotic Diode Resonators by Occasional Proportional Feedback," *Phys. Rev. Lett.* 72, 1647-50 (1994).
- NKG96. T. C. Newell, V. Kovanis, and A. Gavrielides, "Experimental Demonstration of Antimonotonicity: The Concurrent Creation and Destruction of Periodic Orbits in a Driven Nonlinear Electronic Resonator," *Phys. Rev. Lett.* 77, 1747-50(1996).
- NPW84. L. Niemeyer, L. Pietronero, and H. J. Wiesmann, "Fractal Dimension of Dielectric Breakdown," *Phys. Rev. Lett.* 52, 1033-36 (1984).
- NRT78. S. E. Newhouse, D. Ruelle, and R. Takens, "Occurrence of Strange Axiom A Attractors near Quasi-Periodic Flows on T_w ($m = 3$ or more)," *Commun. Math. Phys.* 64, 35 (1978).
- NSC99. A. Neiman, L. Schimanksy-Geier, A. Cornell-Bell, and F. Moss, "Noise-Enhanced Phase Synchronization in Excitable Media," *Phys. Rev. Lett.* 83, 4896-99(1999).
- NSM99. A. Neiman, L. Schimanksy-Geier, F. Moss, B. Shulgin, and J. J. Collins, "Synchronization of noisy systems by stochastic signals," *Phys. Rev. E* 60, 284-92 (1999).
- OC083. R. F. O'Connell, "The Wigner Distribution Function—50th Birthday," *Found. Phys.* 13, 83-93 (1983).
- OGY90. E. Ott, C. Grebogi, and J. A. Yorke, "Controlling Chaos," *Phys. Rev. Lett.* 64,1196-99(1990).
- OLR88. J. M. Ottino, C. Leong, H. Rising, and P. Swanson, "Morphological Structure Produced by Mixing in Chaotic Flows," *Nature* 333,419-25 (1988).
- OLS91. C. L. Olson and M. G. Olsson, "Dynamical symmetry breaking and chaos in Duffing's equation," *Aw. J. Phys.* 59,907-11 (1991).
- OLU98. J. S. Olafsen and J. S. Urbach, "Clustering, Order, and Collapse in a Driven Granular Monolayer," *Phys. Rev. Lett.* 81,4369-72 (1998).
- OMH91. A. Ojha, S. Moon, B. Hoeling, and P. B. Siegel, "Measurements of the Transient Motion of a Simple Nonlinear System," *Aw. J. Phys.* 59, 614-19 (1991).
- OMT92. J. M. Ottino, F. J. Muzzio, M. Tjahjadi, J. G. Frangione, S. C. Jano, and H. A. Kusch, "Chaos, Symmetry, and Self-Similarity: Exploiting Order and Disorder in Mixing Processes," *Science* 257, 754-60 (1992).
- OTS95. E. Ott and M. Spano, "Controlling Chaos," *Physics Today* 48 (5), 34-40 (1995).
- OTT81. E. Ott, "Strange Attractors and Chaotic Motions of Dynamical Systems," *Rev. Mod. Phys.* 53, 655-72 (1981).
- OTT89. J. M. Ottino, "The Mixing of Fluids," *Scientific American* 260 (1), 56-67 (January, 1989).
- OTT93. E. Ott and T. Tel, "Chaotic scattering: an introduction," *Chaos* 3,417-426 (1993).
- OUS91a. Q. Ouyang and H. L. Swinney, "Transition from a Uniform State to Hexagonal and Striped Turing Patterns," *Nature* 352, 610-12 (1991).
- OUS91b. Q. Ouyang and H. L. Swinney, "Transition to Chemical Turbulence," *Chaos* 1,411-19 (1991).
- PAH94. R. Palmer, W. B. Arthur, J. Holland, B. LeBaron, and P. Tayler, "Artificial economic life: a simple model of a stockmarket," *Physica D* 75, 264-74 (1994).
- PAN99. M. Palus and D. Novotna, "Sunspot Cycle: A Driven Nonlinear Oscillator?" *Phys. Rev. Lett.* 83, 3406-9 (1999).
- PAR92. U. Parlitz, "Identification of True and Spurious Lyapunov Exponents from Time Series," *Int. J. Bifur. Chaos*, 2, 155-65 (1992).
- PAS87. K. Pawelzik and H. G. Schuster, "Generalized Dimensions and Entropies from a Measured Time Series," *Phys. Rev. A* 35,481-84 (1987).
- PAV86. G. Paladin and A. Vulpiani, "Intermittency in chaotic systems and Renyi entropies," *Phys. A* 19,997-1001 (1986).
- PCF80. N. H. Packard, J. P. Crutchfield, J. D. Farmer, and R. S. Shaw, "Geometry from a Time Series," *Phys. Rev. Lett.* 45, 712-15 (1980).

- PCF87. J. P. Pique, Y. Chen, R. W. Field, and J. L. Kinsey, "Chaos and Dynamics on 0.5-300 ps Time Scales in Vibrationally Exited Acetylene: Fourier Transform of Stimulated-Emission Pumping Spectrum," *Phys. Rev. Lett.* 58,475-78 (1987).
- PEC91. L. Pecora and T. Carroll, "Driving Systems with Chaotic Signals," *Phys. Rev. A* 44, 2374-83 (1991).
- PEC91. L. Pecora and T. Carroll, "Pseudo-periodic Driving: Eliminating Multiple Domains of Attraction Using Chaos," *Phys. Rev. Lett.* 67, 945-48 (1991).
- PES77. Ya. B. Pesin, *Russ. Math. Surveys* 32,55 (1977).
- PET89. M. Peterson, "Non-uniqueness in Singular Viscous Fingering," *Phys. Rev. Lett.* 62, 284-87 (1989).
- POM80. Y. Pomeau and P. Manneville, "Intermittent Transition to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems," *Commun. Math. Phys.* 74, 189-97 (1980).
- P0089. R. Pool, "Ecologists Flirt with Chaos," *Science* 243, 310-13 (1989). PPG85. G. P. Puccioni, A. Poggi, W. Gadamski, J. R. Tredicce, and F. T. Arecchi, "Measurement of the Formation and Evolution of a Strange Attractor in a Laser," *Phys. Rev. Lett.* 55, 339-41 (1985).
- PPV86. G. Paladin, L. Peliti, and A. Vulpiani, "Intermittency as multifractality in history space," *J. Phys. A* 19, L991-6 (1986).
- PRF89. R. E. Prange and S. Fishman, "Experimental Realizations of Kicked Quantum Chaotic Systems," *Phys. Rev. Lett.* 63, 704-7 (1989).
- PRS83. I. Procaccia and H. G. Schuster, "Functional Renormalization Group Theory of Universal $1/f^{\alpha}$ -Noise in Dynamical Systems," *Phys. Rev. A* 28, 1210-12 (1983).
- PRT94. D. Prichard and J. Theiler, "Generating Surrogate Data for Time Series with Several Simultaneously Measured Variables," *Phys. Rev. Lett.* 73, 951-54 (1994).
- PST93. N. Piatt, E. A. Spiegel, and C. Tresser, "On-Off Intermittency: A Mechanism for Bursting," *Phys. Rev. Lett.* 70, 279-82 (1993).
- PST97. A. Provenzale, E. A. Spiegel, and R. Thieberger, "Cosmic lacunarity," *Chaos* 7, 82-88 (1997).
- PTT87. I. Procaccia, S. Thome, and C. Tresser, "First-Return Maps as a Unified Renormalization Scheme for Dynamical Systems," *Phys. Rev. A* 35, 1884-1900 (1987).
- RAI99. M. Raizen, "Quantum Chaos and Cold Atoms," in *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics* 41, 43-81. B. Bederson and H. Walther, eds. (Academic Press, San Diego, 1999).
- RA098. C. Robert, K. T. Alligood, E. Ott, and J. A. Yorke, "Outer Tangency Bifurcations of Chaotic Sets," *Phys. Rev. Lett.* 80,4867-70 (1998).
- RAS99. K. Ramasubramanian and M. S. Sriram, "Alternative algorithm for the computation of Lyapunov spectra of dynamical systems," *Phys. Rev. E* 60, R1 126-29(1999).
- RBM95. J. C. Robinson, C. Bharucha, F. L. Moore, R. Jahnke, G. A. Georgakis, Q. Niu, and M. G. Raizen, and B. Sundaram, "Study of Quantum Dynamics in the Transition from Classical Stability to Chaos," *Phys. Rev. Lett.* 74, 3963-66 (1995).
- RBW96. N. Regez, W. Breyman, S. Weigert C. Kaufman, and G. Müller, "Hamiltonian Chaos IV," *Computers in Physics* 10, 39^t5 (1996). See, also SKM90,SKM91.
- RCB95. F. Rodelsperger, A. Cenys, and H. Benner, "On-Off Intermittency in Spin-Wave Instabilities," *Phys. Rev. Lett.* 75, 2594-97 (1995).
- RCD94. M. T. Rosenstein, J. J. Collins, and C. J. De Luca, "Reconstruction expansion as a geometry-based framework for choosing proper delay times," *Physica D* 73, 82-98 (1994).
- RDC93. M. T. Rosenstein, J. J. Collins, and C. J. DeLuca, "A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets," *Physica D* 65, 117-34(1993).
- RED89. M. A. Rubio, C. A. Edwards, A. Dougherty, and J. P. Gollub, "Self-Affine Fractal Interfaces from Immiscible Displacements in Porous Media," *Phys. Rev. Lett.* 63, 1685-87 (1989).
- REN99. C. Reichardt and F. Nori, "Phase Locking, Devil's Staircases, Farey Trees, and Arnold Tongues in Driven Vortex Lattices with Periodic Pinning," *Phys. Rev. Lett.* 82,414-17(1999).

- RHO80. D. A. Russell, J. D. Hansen, and E. Ott, "Dimensions of Strange Attractors," *Phys. Rev. Lett.* 45, 1175-78 (1980).
- RIG98. K. Richardson, T. Imhoff, P. Grigg, and J. J. Collins, "Using electrical noise to enhance the ability of humans to detect subthreshold mechanical cutaneous stimuli," *Chaos* 8, 599-603 (1998).
- RIS87. G. H. Ristow, "A Quantum Mechanical Investigation of the Arnold Cat Map," Master's Thesis, School of Physics, Georgia Institute of Technology (1987).
- RIZ99. R. De Los Rios and Y.-C. Zhang, "Universal $1/\text{Noise}$ from Dissipative Self-Organized Criticality Models," *Phys. Rev. Lett.* 82,472-75 (1999).
- RKZOO. V. Rom-Kedar and G. M. Zaslavsky, "Chaotic kinetics and transport (Overview)," *Chaos* 10 (1), 1-2 (2000).
- RLG97. P. Rohani, T. Lewis, D. Grunbaum, and G. Ruxton, "Spatial self-organization in ecology: pretty patterns or robust reality," *TREE* 12 (2), 70-74 (1997).
- RMM92. R. Roy, T. Murphy, T. Maier, Z. Gills, and E. R. Hunt, "Dynamical Control of a Chaotic Laser: Experimental Stabilization of a Globally Coupled System," *Phys. Rev. Lett.* 68, 1259-62 (1992).
- ROC94. M. T. Rosenstein and J. J. Collins, "Visualizing the Effects of Filtering Chaotic Signals," *Computers and Graphics* 18,587-92 (1994).
- ROH82. R. W. Rollins and E. R. Hunt, "Exactly Solvable Model of a Physical System Exhibiting Universal Chaotic Behavior," *Phys. Rev. Lett.* 49, 1295-98 (1982).
- ROH84. R. W. Rollins and E. R. Hunt, "Intermittent Transient Chaos at Interior Crises in the Diode Resonator," *Phys. Rev. A* 29, 3327-34 (1984).
- ROS76. O. E. Rossler, "An equation for continuous chaos," *Phys. Lett. A* 57, 397 (1976).
- ROS82. D. Rand, S. Ostlund, J. Sethna, and E. Siggia, "Universal Transition from Quasi-Periodicity to Chaos in Dissipative Systems," *Phys. Rev. Lett.* 49, 132-35 (1982). (Reprinted in [Hao, 1984].)
- RTV99. M. Rabinovich, J. Torres, P. Varona, R. Huerta, and P. Weidman, "Origin of coherent structures in a discrete chaotic medium," *Phys. Rev. E* 60, R1 130-33 (1999).
- RUE90. D. Ruelle, "Deterministic Chaos: The Science and the Fiction," *Proc. Roy. Soc. Lond. A* 421, 241-48 (1990).
- RUE94. D. Ruelle, "Where can one hope to profitably apply the ideas of chaos," *Physics Today* 47 (7), 24-30 (1994).
- RUT71. D. Ruelle and F. Takens, "On the Nature of Turbulence," *Commun. Math. Phys.* 20, 167-92 (1971).
- SAL62. B. Saltzman, "Finite Amplitude Free Convection as an Initial Value Problem-I," *Atmos. Sci.* 19, 329-41 (1962).
- SAN87. L. M. Sander, "Fractal Growth," *Scientific American* 256, 94-100 (January, 1987).
- SAW86. J. Salem and S. Wolfram, "Thermodynamics and Hydrodynamics of Cellular Automata," in [S. Wolfram, ed., 1986].
- SAY91. C. L. Sayers, "Statistical Inference Based Upon Nonlinear Science," *European Economic Review* 35, 306-12 (1991).
- SCC85. C. L. Scofield and L. N. Cooper, "Development and Properties of Neural Networks," *Contemporary Physics* 26, 125-45 (1985).
- SCD97. P. Schmelcher and F. K. Diakonov, "Detecting Unstable Periodic Orbits of Chaotic Dynamical Systems," *Phys. Rev. Lett.* 78,4733-36 (1997).
- SCG91. M. Schreiber and H. Grussbach, "Multifractal Wave Functions at the Anderson Transition," *Phys. Rev. Lett.* 67, 607-10 (1991).
- SCH83. J. N. Schulman, "Chaos in Piecewise-Linear Systems," *Phys. Rev. A* 28, 477-79 (1983).
- SCH88. G. Schmidt, "Universality of Dissipative Systems," in [Hao, 1988], pp. 1-15.
- SCK99. T. Shibata, T. Chawanya, and K. Kaneko, "Noiseless Collective Motion out of Noisy Chaos," *Phys. Rev. Lett.* 82,4424-27 (1999).

- SCL99. W. L. Shew, H. A. Coy, and J. F. Lindner, "Taming chaos with disorder in a pendulum *may*" *Am. J. Phys.* 67,703-708 (1999).
- SCS88. H. Sompolinsky, A. Crisanti, and H. J. Sommers, "Chaos in Random Neural Networks," *Phys. Rev. Lett.* 61, 259-62 (1988).
- SCS96. T. Schreiber and A. Schmitz, "Improved Surrogate Data for Nonlinearity Tests," *Phys. Rev. Lett.* 77,635-38 (1996).
- SCT96. I. B. Schwartz and I. Triandaf, "Chaos and intermittent bursting in a reaction-diffusion process," *Chaos* 6, 229-37 (1996).
- SCW85. G. Schmidt and B. H. Wang, "Dissipative Standard Map," *Phys. Rev. A* 32,2994-99(1985).
- SDG86. Y. Sawado, A. Dougherty, and J. P. Gollub, "Dendritic and Fractal Patterns in Electrolytic Metal Deposits," *Phys. Rev. Lett.* 56, 1260-63 (1986).
- SDG91. J. C. Sommerer, W. L. Ditto, C. Grebogi, E. Ott, and M. L. Spano, "Experimental Confirmation of the Scaling Theory of Noise-Induced Crises," *Phys. Rev. Lett.* 66, 1947-50 (1991).
- SDG92. T. Shinbrot, W. Ditto, C. Grebogi, E. Ott, M. Spano, and J. A. Yorke, "Using the Sensitive Dependence of Chaos (the 'Butterfly Effect') to Direct Trajectories in an Experimental Chaotic System," *Phys. Rev. Lett.* 68, 2863-66 (1992).
- SEG89. J. Sacher, W. Elsasser, and E. Gobel, "Intermittency in the Coherence Collapse of a Semiconductor Laser with External Feedback," *Phys. Rev. Lett.* 63, 2224-27(1989).
- SFM88. E. Sorensen, H. Fogedby, and O. Mouritsen, "Crossover from Nonequilibrium Fractal Growth to Equilibrium Compact Growth," *Phys. Rev. Lett.* 61,2770-73(1988).
- SFP97. A. Siahmakoun, V. A. French, and J. Patterson, "Nonlinear dynamics of a sinusoidally driven pendulum in a repulsive magnetic field," *Am. J. Phys.* 65 (5), 393-400(1997).
- SG093. T. Shinbrot, C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke, "Using small perturbations to control chaos," *Nature* 363,411-17 (1993).
- SGY97. T. Sauer, C. Grebogi, J. A. Yorke, "How Long Do Numerical Chaotic Solutions Remain Valid?" *Phys. Rev. Lett.* 79, 59-62 (1997).
- SHA81. R. Shaw, "Strange Attractors, Chaotic Behavior, and Information Flow," *Z Naturf.* 36a, 80-112 (1981).
- SHA95. A. Sharma, "Assessing the magnetosphere's nonlinear behavior: Its dimension is low, its predictability, high," *Rev. Geophysics Suppl.* 645-50 (July, 1995).
- SHE82. S. Shenker, "Scaling Behavior in a Map of a Circle onto Itself: Empirical Results," *Physica D* 5,405-11 (1982).
- SHG84. M. Shapiro and G. Goelman, "Onset of Chaos in an Isolated Energy Eigenstate," *Phys. Rev. Lett.* 53, 1714-17 (1984).
- SHL85. J. Stavans, F. Heslot, and A. Libchaber, "Fixed Winding Number and the Quasiperiodic Route to Chaos in a Convective Fluid," *Phys. Rev. Lett.* 55, 596-99 (1985).
- SHM98. T. Shinbrot and F. J. Muzzio, "Reverse Buoyancy in Shaken Granular Beds," *Phys. Rev. Lett.* 81,4365-68 (1998).
- SH093. T. Shinbrot and J. M. Ottino, "Geometric Method to Create Coherent Structures in Chaotic Flows," *Phys. Rev. Lett.* 71, 843-46 (1993).
- SHU89. A. Shudo, "Algorithmic Complexity of the Eigenvalue Sequence of a Nonintegrable Hamiltonian System," *Phys. Rev. Lett.* 63, 1897-901 (1989).
- SID98. S. Sinha and W. L. Ditto, "Dynamics Based Computation," *Phys. Rev. Lett.* 81,2156-59(1998).
- SIL70. L. P. Sil'nikov, "A Contribution to the Problem of the Structure of an Extended Neighborhood of a Rough Equilibrium State of Saddle-Focus Type," *Math. USSR Sbornik* 10, 91-102 (1970).
- SIM99. N. S. Simonovic, "Calculations of periodic orbits: The monodromy method and application to regularized systems," *Chaos* 9, 854-64 (1999).

- SIN78. D. Singer, "Stable Orbits and Bifurcations of Maps of the Interval," *SIAM J. Appl. Math.* **35**, 260-7 (1978).
- SKM90. SKM91. N. Srivastava, C. Kaufman, and G. Miiller, "Hamiltonian Chaos," *Computers in Physics* **4**, 549-53 (1990) and "Hamiltonian Chaos II," *Computers in Physics* **5**, 239-43 (1991). "Hamiltonian Chaos III," *Computers in Physics* **6**, 84-8 (1991). See, also RBW96.
- SMA63. S. Smale, "Diffeomorphisms with Many Periodic Points." In *Differential and Combinatorial Topology*, S. S. Cairns, ed. (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963).
- SMA67. S. Smale, "Differentiable Dynamical Systems," *Bull. Amer. Math. Soc.* **73**, 747-817 (1967).
- SOG88. H. G. Solari and R. Gilmore, "Relative Rotation Rates for Driven Dynamical Systems," *Phys. Rev. A* **37**, 3096-109 (1988).
- SOG90. T. Shinbrot, E. Ott, C. Grebogi, and J. A. Yorke, "Using Chaos to Direct Trajectories to Targets," *Phys. Rev. Lett.* **65**, 3215-18 (1990).
- S0093a. J. C. Sommerer and E. Ott, "A physical system with qualitatively uncertain dynamics," *Nature* **365**, 136-140 (1993).
- S0093b. J. C. Sommerer and E. Ott, "Particles Floating on a Moving Fluid: A Dynamical Comprehensible Physical Fractal," *Science* **259**, 335-39 (1993).
- SOS96. P. So, E. Ott, S. J. Schiff, D. T. Kaplan, T. Sauer, and C. Grebogi, "Detecting Unstable Periodic Orbits in Chaotic Experimental Data," *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4705-8 (1996).
- SRH87. Z. Su, R. W. Rollins, and E. R. Hunt, "Measurements of the Spectrum of Attractors at Transitions to Chaos in Driven Diode Resonator Systems," *Phys. Rev. A* **36**, 3515-17 (1987).
- SRS97. E. Simonott, M. Riani, C. Seife, M. Roberts, J. Twitty, and F. Moss, "Visual Perception of Stochastic Resonance," *Phys. Rev. Lett.* **78**, 1186-89 (1997).
- SSD95. D. A. Sadovskif, J. A. Shaw, and J. B. Delos, "Organization of Sequences of Bifurcations of Periodic Orbits," *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2120-23 (1995). SS098. C. G. Schroer, T. Sauer, E. Ott, and J. A. Yorke, "Predicting Chaos Most of the Time from Embeddings with Self-Intersections," *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1410-13 (1998).
- STF82. C. W. Smith, M. J. Tejwani, and D. A. Farris, "Bifurcation Universality for First-Sound Subharmonic Generation in Superfluid Helium-4," *Phys. Rev. Lett.* **48**, 492-94 (1982).
- STM88. H. E. Stanley and P. Meakin, "Multifractal Phenomena in Physics and Chemistry," *Nature* **335**, 405-9 (1988).
- STS93. S. H. Strogatz and I. Stewart, "Coupled Oscillators and Biological Synchronization," *Scientific American* **269** (6), 102-109 (1993).
- STY98. T. D. Sauer, J. A. Tempkin, and J. A. Yorke, "Spurious Lyapunov Exponents in Attractor Reconstruction," *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4341-44 (1998).
- SUG95. H. B. Stewart, Y. Ueda, C. Grebogi, and J. A. Yorke, "Double Crises in Two-Parameter Dynamical Systems," *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2478-2481 (1995).
- SUW92. G. J. Sussman and J. Wisdom, "Chaotic Evolution of the Solar System," *Science* **257**, 56-62 (1992).
- SWM81. B. Shraiman, C. E. Wayne, and P. C. Martin, "Scaling Theory for Noisy Period-Doubling Transitions to Chaos," *Phys. Rev. Lett.* **46**, 935-9 (1981).
- SWS82. R. H. Simoyi, A. Wolf, and H. L. Swinney, "One-Dimensional Dynamics in a Multicomponent Chemical Reaction," *Phys. Rev. Lett.* **49**, 245-48 (1982).
- SYC91. T. Sauer, J. A. Yorke, and M. Casdagli, "Embedology," *J. Stat. Phys.* **65**, 579-616 (1991).
- TAH87. D. Tank and J. Hopfield, "Collective Computation in Neuronlike Circuits," *Scientific American* **257** (6), 104-14 (1987).
- TAK81. F. Takens in *Dynamical Systems and Turbulence*. Vol. 898 of *Lecture Notes in Mathematics*, D. A. Rand and L. S. Young, eds. (Springer-Verlag, Berlin, 1981).
- TEL87. T. Tel, "Dynamical Spectrum and Thermodynamic Functions of Strange Sets from an Eigenvalue Problem," *Phys. Rev. A* **36**, 2507-10 (1987).

- TEL90. T. Tel, "Transient Chaos," in [Hao, 1990].
- TEL92. J. Theiler, S. Eubank, A. Longtin, B. Galdrikian, and J. D. Farmer, "Testing for nonlinearity in time series: the method of surrogate data," *Physica D* 58,77-94 (1992).
- TES85. J. Testa, "Fractal Dimension at Chaos of a Quasiperiodic Driven Tunnel Diode," *Phys. Lett. A* 111, 243-45 (1985).
- TGL91. J. Theiler, B. Galdrikian, A. Longtin, S. Eubank, and J. D. Farmer, in *Nonlinear Modeling and Forecasting*, Santa Fe Institute Studies in the Sciences of Complexity, Proc. Vol. XII, pp. 163-88. M. Casdagli and S. Eubank, eds. (Addison-Wesley, Reading, MA, 1991).
- THE86. J. Theiler, "Spurious Dimension from Correlation Algorithms Applied to Limited Time-Series Data," *Phys. Rev. A* 34, 2427-32 (1986).
- THE90. J. Theiler, "Estimating Fractal Dimension," *J. Opt. Soc. Am. A* 7, 1055-73 (1990).
- TLA95. L. Tsimring, H. Levine, I. Aranson, E. Ben-Jacob, I. Cohen, O. Shochet, and W. Reynolds, "Aggregation Patterns in Stressed Bacteria," *Phys. Rev. Lett.* 75, 1859-62(1995).
- TPJ82. J. Testa, J. Perez, and C. Jeffries, "Evidence for Universal Chaotic Behavior of a Driven Nonlinear Oscillator," *Phys. Rev. Lett.* 48, 714-17 (1982).
- TPW91. D. Y. Tang, J. Pujol, and C. O. Weiss, "Type III Intermittency of a Laser," *Phys. Rev. A* 44, 35-38 (1991).
- TRS97. I. Triandaf and I. B. Schwartz, "Karhunen-Loeve mode control of chaos in a reaction-diffusion process," *Phys. Rev. E* 56,204-212 (1997).
- TSA88. C. Tsallis, "Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs Statistics," *J. Stat. Phys.* 52,479-87 (1988).
- TSB91. G. Tanner, P. Scherer, E. B. Bogomolny, B. Eckhardt, and D. Wintgen, "Quantum Eigenvalues from Classical Periodic Orbits," *Phys. Rev. Lett.* 67,2410-13(1991).
- TUA86. N. B. Tufillaro and A. M. Albano, "Chaotic Dynamics of a Bouncing Ball/Mm. *J. Phys.* 54,939-44 (1986).
- TUF89. N. B. Tufillaro, "Nonlinear and Chaotic String Vibrations," *Am J. Phys.* 57,408-14 (1989).
- TUR52. A. M. Turing, "The Chemical Basis of Morphogenesis," *Phil. Trans. Roy. Soc. London B* 237, 37-72 (1952).
- TVS88. W. Y. Tarn, J. A. Vastano, H. L. Swinney, and W. Horsthemke, "Regular and Chaotic Chemical Spatiotemporal Patterns," *Phys. Rev. Lett.* 61, 2163-66 (1988).
- TWB87. C. Tang, K. Wiesenfeld, P. Bak, S. Coppersmith, and P. Littlewood, "Phase Organization," *Phys. Rev. Lett.* 58, 1161-64 (1987).
- UMF85. D. K. Umberger and J. D. Farmer, "Fat Fractals on the Energy Surface," *Phys. Rev. Lett.* 55,661-64 (1985).
- VAR98a. G. VanWiggeren and R. Roy, "Optical Communication with Chaotic Waveforms," *Phys. Rev. Lett.* 81, 3547-50 (1998).
- VAR98b. G. VanWiggeren and R. Roy, "Communication with Chaotic Lasers," *Science* 279, 1198-1200 (1998).
- VAS97. Stephen J. Van Hook and Michael F. Schatz, "Simple Demonstrations of Pattern Formation," *The Physics Teacher* 35, 391-95 (1997).
- VDP26. B. Van der Pol, "On Relaxation Oscillations," *Phil. Mag.* (7) 2, 978-92 (1926).
- VDP28. B. Van der Pol and J. Van der Mark, "The Heartbeat Considered as a Relaxation Oscillation and an Electrical Model of the Heart," *Phil. Mag.* 6, 763 -75 (1928).
- VIL96. W. Vieira and P. Letelier, "Chaos around a Henon-Heiles-Inspired Exact Perturbation of a Black Hole," *Phys. Rev. Lett.* 76, 1409-12 (1996).
- VOS89. R. F. Voss, "Random Fractals, Self-Affinity in Noise, Music, Mountains, and Clouds," *Physica D* 38, 362-71 (1989).
- WAH88. C. O. Weiss, N. B. Abraham, and U. Hübner. "Homoclinic and Heteroclinic Chaos in a Single-Mode Laser," *Phys. Rev. Lett.* 61, 1587-90 (1988).
- WAL87. J. Walker, "Fluid Interfaces, Including Fractal Flows can be Studied in a Hele-Shaw Cell," *Scientific American* 257 (5), 134-38 (November, 1987).

- WEB86. C. O. Weiss and J. Brock, "Evidence for Lorenz-Type Chaos in a Laser," *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2804-6 (1986).
- WEI89. S. Weinberg, "Testing Quantum Mechanics," *Annals of Physics* **194**, 336-86 (1989).
- WGC90. N. D. Whelan, D. A. Goodings, and J. K. Cannizzo, "Two Balls in One Dimension with Gravity," *Phys. Rev. A* **42**, 742-54 (1990).
- WIB91. J. Wilkie and P. Brumer, "Time-Dependent Manifestations of Quantum Chaos," *Phys. Rev. Lett.* **67**, 1185-88 (1991).
- WIG32. E. Wigner, "On the Quantum Correction for Thermodynamic Equilibrium," *Phys. Rev.* **40**, 749-59 (1932).
- WIN74. A. Winfree, *SIAM-AMS Proceedings* **8**, 13 (1974).
- WIS81. T. A. Witten, Jr. and L. M. Sander, "Diffusion-Limited Aggregation, a Kinetic Critical Phenomenon," *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1400-03 (1981).
- WIS87. J. Wisdom, "Chaotic Behavior in the Solar System," in *Dynamical Chaos*, M. Berry, I. Percival, and N. Weiss, eds. (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1987). First published in *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **413**, 1-199 (1987).
- WKP84. R. W. Walden, P. Kolodner, A. Passner, and C. Surko, "Nonchaotic Rayleigh-Benard Convection with Four and Five Incommensurate Frequencies," *Phys. Rev. Lett.* **53**, 242-45 (1984).
- WKP95. F. Witkowski, K. Kavanagh, P. Penkoske, R. Plonsey, M. Spano, W. Ditto, and D. Kaplan, "Evidence for Determinism in Ventricular Fibrillation," *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1230-33 (1995).
- WOL84a. S. Wolfram, "Cellular Automata as Models of Complexity," *Nature* **341**, 419-24 (1984).
- WOL84b. S. Wolfram, "Universality and Complexity in Cellular Automata," *Physica D* **10**, 1-35 (1984).
- WOL86a. A. Wolf, "Quantifying Chaos with Lyapunov Exponents." In [Holden, 1986].
- WOL86b. S. Wolfram, "Cellular Automaton Fluids 1: Basic Theory," *J. Stat. Phys.* **45**, 471-526 (1986).
- WON88. Po-Zen Wong, "The Statistical Physics of Sedimentary Rock," *Physics Today* **41** (12), 24-32 (December, 1988).
- WRI84. J. Wright, "Method for Calculating a Lyapunov Exponent," *Phys. Rev. A* **29**, 2924-27 (1984).
- WSS85. A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, and J. A. Vasano, "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series," *Physica D* **7**, 285-317 (1985).
- YEK82. W. J. Yeh and Y. H. Kao, "Universal Scaling and Chaotic Behavior of a Josephson-Junction Analog," *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1888-91 (1982).
- YG085. J. A. Yorke, C. Grebogi, E. Ott, and L. Tedeschini-Lalli, "Scaling Behavior of Windows in Dissipative Dynamical Systems," *Phys. Rev. Lett.* **54**, 1095-98 (1985).
- YLH99. D. Yu, W. Lu, and R. G. Harrison, "Detecting dynamical nonstationarity in time series data," *Chaos* **9**, 865-70 (1999).
- ZAM97. D. Zanette and S. Manrubia, "Role of Intermittency in Urban Development: A Model of Large-Scale City Formation," *Phys. Rev. Lett.* **79**, 523-26 (1997).
- ZAS99. G. M. Zaslavsky, "Chaotic Dynamics and the Origin of Statistical Laws," *Physics Today* **52** (8), 39-45 (1999).
- ZDD95. J. Zakrzewski, K. Dupret, and D. Delande, "Statistical Properties of Energy Levels of Chaotic Systems: Wigner or Non-Wigner," *Phys. Rev. Lett.* **74**, 522-25 (1995).
- ZEP91. X. Zeng, R. Eykholt, and R. Pielke, "Estimating the Lyapunov-Exponent Spectrum from Short Time Series of Low Precision," *Phys. Rev. Lett.* **66**, 3229-32 (1991).
- ZOB98. R. Zorzenon dos Santos and A. Bernardes, "Immunization and Aging: A Learning Process in the Immune Network," *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3034-37 (1998).