

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ოთარ ლაბაძე

სიბნალების თეორია

(საღმწიფო კურსი)

თბილისი
2012

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ოთარ ლაბაძე

სიბნალების თეორია

(საღმწიფო კურსი)

დამტკიცებულია ოსუ-ს ელექტრული
და ელექტრონული ინჟინერიის
დეპარტამენტის საბჭოს მიერ

თბილისი
2012

წიგნში მოყვანილი მასალები ძირითადად ეყდნობა ს.ი.ბასკაკოვის მიერ გამოქვეყნებული წიგნის “რადიოტექნიკური წრედები და სიგნალები”-ს პირველ და ნაწილობრივ მეორე ნაწილს.

ვრცლად განიხილება სიგნალების თანამედროვე კლასიფიკაცია, მათი აღწერის ფუნდამენტური მათემატიკური მიდგომები, გარდაქმნები, მოდელები, დამუშავების თეორიული საკითხები, პრაქტიკაში გამოსაყენებელი თანამედროვე საკითხები და რეალიზების საშუალებები.

ყურადღება გამახვილებულია სიგნალების არა მარტო მათემატიკური მოდელების მიღებაზე, არამედ დამუშავების სტატისტიკურ მეთოდებზე, რაც იძლევა ალბათობის თეორიის მიღწევების ფართო გამოყენების შესაძლებლობას.

წიგნი ძირითადად განკუთვნილია ივანე ჯავახიშვილის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის საბუნებისმეტყველო ფაკულტეტის ელექტრული და ელექტრონული ინჟინერიის მიმართულების სტუდენტებისათვის. იგი დაეხმარება მათ არა მარტო ძირითადი სასწავლო კურსის საფუძვლიან შესწავლაში, არამედ ხელს შეუწყობს სხვა მომიჯნავე ტექნიკური დარგის საგნების ადვილად ათვისებაშიც.

	გვ.
სარჩევი	3
მიღებული აღნიშვნები, სიმბოლოები, შემოკლებები და ზოგადი შესავალი	10
	11
თავი I. რადიოტექნიკური სიბნალების ზოგადი თეორიის ელემენტები	12
1.1. რადიოტექნიკური სიბნალების კლასიფიკაცია.....	13
1.1.1. სიბნალების აღწერა მათემატიკური მოდელებით.....	14
1.1.2. ერთგანზომილებიანი და მრავალგანზომილებიანი სიბნალები.....	14
1.1.3. დეტერმინირებული და შემთხვევითი სიბნალები.....	14
1.1.4. ანალოგური, დისკრეტული და ციფრული სიბნალები...	15
1.1.5. იმპულსური სიბნალები.....	18
1.2. სიბნალების დინამიური წარმოდგენა.....	18
1.2.1. დინამიური წარმოდგენის პრინციპი.....	19
1.2.2. დინამიური წარმოდგენის პირველი ხერხი (ჩართვის ფუნქცია).....	20
1.2.3. ნებისმიერი სიბნალის დინამიური წარმოდგენა ჩართვის ფუნქციის გამოყენებით.....	22
1.2.4. დელტა-ფუნქცია.....	23
1.2.5. სიბნალის დინამიური წარმოდგენა დელტა-ფუნქციის გამოყენებით.....	23
1.3. გეომეტრიული მეთოდები სიბნალების თეორიაში.....	25
1.3.1. სიბნალების ხაზოვანი სივრცე.....	26
1.3.2. კოორდინატული ბაზისის ცნება.....	27
1.3.3. ნორმირებული ხაზოვანი სივრცე. სიბნალის ენერგია...	28
1.3.4. მეტრული სივრცე.....	29
1.4. ორთოგონალური სიბნალების თეორია.....	32
1.4.1 სიბნალების სკალარული ნამრავლი.....	32
1.4.2. ორთოგონალური სიბნალები და ფურიეს განზოგადო- ებული მწკრივები.....	34
1.4.3. ორთონორმირებული ბაზისების მაგალითები.....	35
1.4.3.1. ჰარმონიული რხევის ორთონორმირებული სისტემა.....	35
1.4.3.2. უოლშის ფუნქციების ორთონორმირებული სისტემა.....	36
1.4.4. სიბნალების ორთოგონალური დაშლის აპარატურული რეალიზაცია.....	38

	გვ.
1.5. I-ლი თავის მოკლე მიმოხილვა	39
1.5.1. შედეგები	39
1.5.2. საკონტროლო კითხვები.....	40
1.5.3. ამოცანების ამოხსნის ზოგადი მეთოდიკა.....	40
1.5.4. ტიპური ამოცანების ამოხსნის მაგალითები	40
თავი II. სიგნალების სპექტრული წარმოშობა	
2.1. პერიოდული სიგნალები და ფურიეს მწკრივი	47
2.1.2. ფურიეს მწკრივი	48
2.1.3. პერიოდული სიგნალების სპექტრული დიაგრამა.....	49
2.1.4. ფურიეს მწკრივის კომპლექსური ფორმა.....	52
2.1.5. ფურიეს მწკრივის ტრიგონომეტრიული ფორმა.....	53
2.2. არაპერიოდული სიგნალის სპექტრული ანალიზი. ფურიეს გარდაქმნა.....	54
2.2.1. იმპულსის პერიოდული გაგრძელება.....	54
2.2.2. სიგნალის სპექტრული სიმკვრივის ცნება	55
2.2.3. სპექტრული სიმკვრივის ცნების ფიზიკური აზრი.....	56
2.2.4. ფურიეს შექცევადი გარდაქმნა	57
2.2.5. სიგნალის სპექტრული სიმკვრივის არსებობის პირობა.....	59
2.2.6. მართკუთხა ვიდეოიმპულსის სპექტრული სიმკვრივე.....	59
2.2.7. ექსპონენციალური ვიდეოიმპულსის სპექტრული სიმკვრივე.....	60
2.2.8. გაუსის ვიდეოიმპულსის სპექტრული სიმკვრივე.....	62
2.2.9. დელტა-ფუნქციის სპექტრული სიმკვრივე.....	63
2.2.10. კავშირი იმპულსის ხანგრძლივობასა და მისი სპექტრის სიგანეს შორის.....	63
2.3. ფურიეს გარდაქმნის ძირითადი თვისებები	65
2.3.1. ფურიეს გარდაქმნის წრფივობა	65
2.3.2. სპექტრული სიმკვრივის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილების თვისებები.....	65
2.3.3. დროში წანაცვლებული სიგნალის სპექტრული სიმკვრივე.....	66
2.3.4. სიგნალის სპექტრული სიმკვრივის დამოკიდებულება დროის გაზომვის მასშტაბის ამორჩევაზე.....	66
2.3.5. წარმოებულის და განუსაზღვრელი ინტეგრალის სპექტრული სიმკვრივე.....	66
2.3.6. სიგნალის სპექტრული სიმკვრივე ინტეგრატორის გამოსასვლელზე.....	69
2.3.7. სიგნალების ნამრავლის სპექტრული სიმკვრივე	69

2.4. არაინტეგრირებადი სიგნალების სპექტრული სიმკვრივები	71
2.4.1. რელეის განზოგადებული ფორმულა	71
2.4.2. სპექტრული სიმკვრივის განზოგადებული ცნება	72
2.4.3. დროში მუდმივი სიგნალის სპექტრული სიმკვრივე	72
2.4.4. კომპლექსური ექსპონენციალური სიგნალის სპექტრული სიმკვრივე	73
2.4.5. ჰარმონიული რხევების სპექტრული სიმკვრივე	73
2.4.6. ნებისმიერი პერიოდული სიგნალის სპექტრული სიმკვრივე	74
2.4.7. ჩართვის ფუნქციის სპექტრული სიმკვრივე	74
2.4.8. რადიომპულსის სპექტრული სიმკვრივე	75
2.5. ლაპლასის გარდაქმნა	78
2.5.1. კომპლექსური სიხშირის ცნება	78
2.5.2. ძირითადი თანაფარდობანი	79
2.5.3. ლაპლასის გარდაქმნების გამოთვლის მაგალითები	81
2.5.4. წარმოებულების გამოსახულება	83
2.6. ვეივლეტ-ანალიზი	84
2.6.1. ვეივლეტ-ანალიზის ცნება	84
2.6.2. დისკრეტული ვეივლეტ-ანალიზი	85
2.6.3. ვეივლეტ-გარდაქმნა	87
2.7. მე-II თავის მოკლე მიმოხილვა	88
2.7.1. შედეგები	88
2.7.2. საკონტროლო კითხვები	89
2.7.3. ამოცანების ამოხსნის ზოგადი მეთოდიკა	90
2.7.4. ტიპური ამოცანების ამოხსნის მაგალითები	90
2.7.4.1. პერიოდული სიგნალები და ფურიეს მწკრივები	90
2.7.4.2. ლაპლასის გარდაქმნა	100

თავი III. სიგნალების ენერგეტიკული სპექტრები.

კორელაციური ანალიზის პრინციპები

103

3.1. სიგნალების ურთიერთსპექტრული სიმკვრივე	103
3.1.1. სიგნალების ენერგეტიკული სპექტრი	107
3.1.2. ენერჯის განაწილება მართკუთხა ვიდეოიმპულსის სპექტრში	109
3.2. სიგნალების კორელაციური ანალიზი	110
3.2.1. დროში დაძრული სიგნალების შედარება	111
3.2.2. სიგნალის ავტოკორელაციური ფუნქცია	112
3.2.3. უსაზღვროდ გაჭიმული სიგნალის ავტოკორელაციური ფუნქცია	115

3.2.4.	სიგნალის ენერგეტიკულ სპექტრსა და მის ავტოკორელაციურ ფუნქციას შორის კავშირი.....	116
3.2.5.	შეზღუდვები, რომელიც დადის სიგნალის ავტოკორელაციური ფუნქციის სახეზე.....	118
3.3.	დისკრეტული სიგნალის ავტოკორელაციური ფუნქცია.....	119
3.3.1.	რთული დისკრეტული სტრუქტურის მქონე სიგნალების აღწერა.....	119
3.3.2.	დისკრეტული ავტოკორელაციური ფუნქცია (აპშ).....	120
3.3.3.	ზოგიერთი მაგალითი.....	121
3.3.4.	ბარკერის სიგნალები.....	123
3.4.	ორი სიგნალის შპშ.....	124
3.4.1.	შპშ განსაზღვრის პრინციპი.....	124
3.4.2.	შპშ ზოგიერთი თვისება.....	125
3.4.3.	კავშირი შპშ და ურთიერთსპექტრალურ სიმკრივეს შორის.....	127
3.4.4.	შპშ განზოგადოება დისკრეტული სიგნალების შემთხვევისათვის.....	127
3.5.	მე-III თავის მოკლე მიმოხილვა.....	129
3.5.1.	შედგენები.....	129
3.5.2.	საკონტროლო კითხვები.....	129
3.5.3.	ამოცანების ამოხსნის ზოგადი მეთოდიკა.....	130
3.5.4.	ტიპური ამოცანების ამოხსნის მაგალითები.....	130
3.5.4.1.	რელეის განზოგადოებული ფორმულა, ენერგეტიკული სპექტრები.....	130
3.5.4.2.	ავტოკორელაციური ფუნქცია.....	133
3.5.4.3.	ურთიერთკორელაციის ფუნქცია.....	135
თხზი IV. მოდულირებადი სიგნალები		136
4.1.	სიგნალები ამპლიტუდური მოდულაციით.....	136
4.1.1.	გადამტანი რხევის ცნება.....	136
4.1.2.	ამპლიტუდური მოდულაციის პრინციპი.....	137
4.1.3.	ერთტონალური ამპლიტუდური მოდულაცია.....	138
4.1.4.	ამ-სიგნალის ენერგეტიკული მახასიათებლები.....	139
4.1.5.	ამპლიტუდური მოდულაცია რთული მამოდულირებელი სიგნალის დროს.....	139
4.2.	სიგნალები ამპლიტუდური მოდულაციით.....	142
4.2.1.	კუთხური მოდულაციის სახეები.....	142
ა)	ფაზური მოდულაცია.....	142
ბ)	სიხშირული მოდულაცია.....	143
4.2.2.	ერთტონალური სიგნალები კუთხური მოდულაციით...	144

4.2.3. შმ- და სმ- სიგნალებს შორის განსხვავებები.....	145
4.3. სიგნალები შიდაიმპულსური მოდულაციით.....	146
4.3.1. ხაზოვანი სიხშირული მოდულაციის პრინციპი (ხსმ).	146
4.3.2. მართკუთხა ხსმ-იმპულსის სპექტრი.....	147
4.3.3. ხსმ-სიგნალი დიდი ბაზით.....	149
4.3.2. ხსმ-სიგნალის ავტოკორელაციური ფუნქცია.....	150
4.4. მე-IV თავის მოკლე მიმოხილვა	152
4.4.1. შედეგები	152
4.4.2. საკონტროლო კითხვები.....	153
4.4.3. ამოცანის/მაგალითის ამოხსნის ზოგადი მეთოდოლოგია.....	154
4.4.4. ტიპური ამოცანების ამოხსნის მაგალითები.....	154
4.4.4.1. სიგნალები ამპლიტუდური მოდულაციით.....	154
4.4.4.2. სიგნალები კუთხური მოდულაციით.....	157
4.4.4.3. სიგნალები ხაზოვან-სიხშირული მოდულირებით.....	158

თავი V. სიგნალები შეზღუდული სიხშირით 160

5.1. შეზღუდული სიხშირის სიგნალების ზოგიერთი მათემატიკური მოდელები.....	160
5.1.1. დაბალსიხშირული იდეალური სიგნალი.....	160
5.1.2. იდეალური ზოლური სიგნალი.....	162
5.1.3. ორთოგონალური სიგნალი შეზღუდული სიხშირით.....	162
5.2. კოტელნიკოვის თეორემა.....	164
5.2.1. ორთოგონალურებული ბაზისის აგება	164
5.2.2. კოტელნიკოვის მწკრივი და თეორემა.....	165
5.2.3. კოტელნიკოვის მწკრივით წარმოდგენილი სიგნალის სინთეზის აპარატურული რეალიზაცია.....	167
5.2.4. ცდომილების შეფასება, რომელიც აღიძვრება ნებისმიერი სიგნალის კოტელნიკოვის მწკრივით აპროქსიმაციისას.....	168
5.2.5. სიგნალების სივრცის ზომა, რომლებიც შეზღუდულია სიხშირისა და ხანგრძლივობის მიხედვით.....	170
5.3. ვიწროზოლოვანი სიგნალები.....	171
5.3.1. ვიწროზოლოვანი სიგნალის მათემატიკური მოდელი.....	171
5.3.2. ვიწროზოლოვანი სიგნალების კომპლექსური წარმოდგენა.....	173
5.3.3. ფიზიკური მომენტები, სრული ფაზა და მყისიერი სიხშირე.....	174
5.3.4. ვიწროზოლოვანი სიგნალის ფიზიკური მომენტების თვისებები	175
5.3.5. ვიწროზოლოვანი სიგნალის მყისიერი სიხშირის თვისებები	175

5.4. მე-V თავის მოკლე მიმოხილვა	177
5.4.1. შედეგები	178
5.4.2. საკონტროლო კითხვები.....	179
5.4.3. ამოცანის/მაგალითის ამოხსნის ზოგადი მეთოდოლოგია	179
5.4.4. ტიპური ამოცანების ამოხსნის მაგალითები.....	180
5.4.4.1. დაბალსიხშირული ტიპის სიგნალები შეზღუდული სპექტრით. კოტელნიკოვის რიგი.....	180
5.4.4.2. ზოლოვანი ტიპის სიგნალები. კომპლექსური მომკვლეები.....	182
5.4.4.3. ანალიტიკური სიგნალი. გილბერტის გარდაქმნა ..	183
თავი VI. შემთხვევითი სიდიდეების თეორიის საფუძვლები	185
6.1. შემთხვევითი სიდიდეები და მათი მახასიათებლები	186
6.1.1. ალბათობა	186
6.1.2. ალბათობების გაზომვა	186
6.1.3. განაწილების ფუნქცია და ალბათობის სიმკვრივე.....	187
6.1.4. გაშუალდება. შემთხვევითი სიდიდის მომენტები.....	188
6.1.5. თანაბარი განაწილება.....	190
6.1.6. გაუსის (ნორმალური) განაწილება.....	190
6.1.7. შემთხვევითი სიდიდის ალბათობის ფუნქციის სიმკვრივე.....	192
6.1.8. მახასიათებელი ფუნქცია.....	193
6.2. შემთხვევითი სიდიდეების სისტემების სტატისტიკური მახასიათებლები.....	195
6.2.1. განაწილების ფუნქცია და ალბათობის სიმკვრივე	195
6.2.2. მომენტების გამოთვლა.....	196
6.2.3. კორელაცია	196
6.2.4. შემთხვევითი სიდიდეების სტატისტიკური დამოუკიდებლობა.....	198
6.2.5. მრავალგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდეების ფუნქციონალური გარდაქმნები	198
6.2.6. მრავალგანზომილებიანი გაუსის განაწილება	199
6.2.7. მრავალგანზომილებიანი მახასიათებელი ფუნქცია.....	201
6.2.8. შემთხვევით სიდიდეთა ჯამის ალბათობის სიმკვრივე.....	202
6.3 შემთხვევითი პროცესები	203
6.3.1. რეალიზაციის ანსამბლი.....	203
6.3.2. შემთხვევითი პროცესების ალბათობის სიმკვრივე	203
6.3.3. შემთხვევითი პროცესების მომენტური ფუნქციები	205
6.3.4. სტაციონარული შემთხვევითი პროცესები.....	206

6.4. მე-VI თავის მოკლე მიმოხილვა	208
6.4.1. შედეგები	208
6.4.2. საკონტროლო კითხვები.....	209
6.4.3. ამოცანის/მაგალითის ამოხსნის ზოგადი მეთოდოლოგია	210
6.4.4. ტიპური ამოცანების ამოხსნის მაგალითები.....	210
6.4.4.1. შემთხვევითი ხდომილობა და მისი ალბათობა.....	210
6.4.4.2. განაწილების ფუნქცია და ალბათობის სიმკვრივე. მომენტები.....	211
6.4.4.3. შემთხვევითი სიდიდის ფუნქციონალური გარ- დაქმნა. მრავალგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდეები	215
6.4.4.4. შემთხვევითი სიდიდის მახასიათებელი ფუნქცია	217
რეკომენდირებული ლიტერატურის ნუსხა	219
საბნობრივი საპიუბელი	220

- ამ** – ამპლიტუდური მოდულაცია
- კმ** – კუთხური მოდულაცია
- სმ** – სისშირული მოდულაცია
- ფმ** – ფაზური მოდულაცია
- აბჟ** – ავტოკორელაციური ფუნქცია
- ფსმ** – ფაზო-სისშირული მოდულაცია
- შმს** – ურთიერთენერგეტიკული სპექტრი
- შპჟ** – ურთიერთკორელაციური ფუნქცია

ხსმ – ხაზოვან-სისშირული მოდულაცია

- $s(t), u(t), v(t), \dots$ – სიგნალები
- $\sigma(t)$ – ჩართვის ფუნქცია
- $\delta(t)$ – დელტა-ფუნქცია
- τ – ფორმალური დროის ცვლადი, ან დროის წანაცლება.
- $\|x\|$ – სიგნალის ნორმა
- E_s – სიგნალის ენერჯია
- $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ – ვექტორების ერთობლიობა
- (u, v) – სკალარული ნამრავლი
- $\rho(u, v)$ – მეტრიკა, ანუ მანძილი u და v ელემენტებს შორის
- $\vartheta = t/T$ – უგანზომილებო დრო
- $wal(k, \vartheta)$ – **ჟოლშის** ფუნქცია
- $(u_i, u_j) = \begin{cases} 1, & \text{თუ } i = j \\ 0, & \text{თუ } i \neq j \end{cases}$ – ორთონორმირებული ბაზისი
- ω_0 – ნამდვილი კუთხური სისშირე
- $f = \omega/2\pi$ – ციკლური სისშირე
- $T = 1/f$ – სიგნალის პერიოდი
- **ეილერის ფორმულები:**

$$\begin{cases} e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t, \\ e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \omega t = (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})/2 \\ j \sin \omega t = (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})/2 \end{cases}$$
- $S(\omega)$ – სპექტრული სიმკვრივე.
- **ფურიეს** მწკრივის პირდაპირი გარდაქმნა: $S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$.

• **ფურიეს** მწკრივის შუქც-ი გარდაქმნა:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

• **ფურიეს** მწკრივის კომპლექსური ფორმა:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega t}; \quad C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega t} dt$$

სადაც ω_1 – პარმონიული რხევის ძირითადი სისშირეა.

• **რელეას** ფორმულა:

$$(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) V^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} (U, V)$$

• $p = \sigma + j\omega$ – კომპლექსური სისშირე.

• **ლაპლასის** პირდაპირი გარდაქმნა

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt,$$

სადაც $F(p)$ – გამოსახულებაა.

• **ლაპლასის** უკუ გარდაქმნა

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(p) e^{-j\omega t} d\omega,$$

სადაც $f(t)$ – ორიგინალია.

როცა $\sigma = const$ და

$$d\omega = (1/j) dp, \text{ მაშინ}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) e^{pt} dp.$$

• $u(t)$ და $v(t)$ სიგნალების **ურთიერთ-ენერგეტიკული სპექტრის** ფუნქცია:

$$W_{uv}(\omega) = U(\omega) V^*(\omega), \text{ ხოლო}$$

$$(u, v) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Re} W_{uv}(\omega) d\omega.$$

• სიგნალის **ავტოკორელაციური ფუნქცია:** $B_u(\tau) = \int_{-j\infty}^{+j\infty} u(t) u(t-\tau) dt$.

• სიგნალების **ურთიერთკორელაციური ფუნქცია:** $B_{uv}(\tau) = \int_{-j\infty}^{+j\infty} u(t) v(t-\tau) dt$.

• **კოში-ბუნიაკოვსკის** უტოლობა $\| (u, u_\tau) \| \leq \| u \| \cdot \| u_\tau \| = E_u$

• **გაუსის განაწილების ფუნქცია**

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{(\xi-m)^2}{2\sigma^2}\right] d\xi,$$

m – მათემატიკური მოლოდინი,

σ^2 – შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია

შესავალი

სიგნალების თეორიის კურსი წარმოადგენს ძირითად თეორიულ დისციპლინას რადიო და ტელეკავშირის, ტელეხედვის, რადიოტექნიკის, ავტომატური და მრავალარხიანი ელექტრული კავშირის, ელექტრული ქსელების, ელექტრომაგნიტურ კანონებზე აგებული ახალი გარდამქნელების, მართვის სისტემების აგების, ტექნოლოგიური პროცესის შესწავლის, ტექნიკური ელექტრონიკის და სხვა მომიჯნავე სპეციალობებისათვის.

წიგნში მოყვანილია თანამედროვე მეთოდები, რომლებიც დღეს არის მიღებული სიგნალების აღწერისათვის და თვისებების შესწავლისათვის. განიხილება სიგნალების კლასიფიკაცია, სიგნალების სივრცის გეომეტრიული გააზრების ფუნდამენტალური პრინციპები, დეტერმინირებული რხევების სპექტრული და კორელაციური ანალიზი, მოდულირებული რადიოსიგნალების თეორია, ასევე შეზღუდული სპექტრის მქონე უწყვეტი სიგნალების დისკრეტული წარმოდგენა. ვრცლად არის გადმოცემული შემთხვევითი სიგნალების აღწერის და გაზომვის მეთოდები.

საკითხები, რომლებიც შეისწავლება ამ კურსში, პირდაპირ არის დაკავშირებული პრაქტიკულ ამოცანებთან და ამიტომ განხილული მასალის შესწავლა დაეხმარება მომავალ ბაკალავრებს, მაგისტრებს და დოქტორანტებს ცნობილი და ჯერ კიდევ უამრავი შეუსწავლელი მოვლენების ანალიზში, მათი ფიზიკური საფუძვლების დადგენაში, და მიღებული ცოდნის მომდევნო გამოყენებაში მრეწველობაში და სხვა დარგებში.

შეიძინეთ წინა თაობების მიერ დაგროვებული ცოდნა და გამოიყენეთ ის ახალი შემოქმედებითი პრაქტიკულ ან/და სამეცნიერო საქმიანობაში.

**თაშო I. რადიოტექნიკური სიგნალის ფორმირების
თეორიის ელემენტები**

ტერმინი “სიგნალი” ხშირად გვხვდება არამარტო ტექნიკურ ლიტერატურაში, არამედ ყოველდღიურ ცხოვრებაში. ზოგჯერ არც ვაკვირდებით ტერმინოლოგიის სიმკაცრეს და ვაიგივებთ ისეთ ცნებებს, როგორცაა **სიგნალი**, **შეტყობინება**, **ინფორმაცია**. ჩვეულებრივ ეს არ იწვევს გაურკვეველობას, ვინაიდან მოცავს ფართო აზრობრივ დიაპაზონს.

ტერმინი “სიგნალი” წარმოიშვა ლათინური სიტყვიდან «signum» - “ნიშანი”. სიგნალი წარმოადგენს ფიზიკურ პროცესს, რომელიც იცვლება დროში გადასაცემი შეტყობინების კანონით.

სიგნალების თეორიის კურსის შესასწავლად დავაზუსტდეთ სიგნალის ცნების მნიშვნელობა. ტრადიციულად გამოდინარე ზოგადად მიღებულია, რომ **სიგნალი** ეწოდება დროში რაიმე ობიექტის ფიზიკური მდგომარეობის ცვლილებას, რომელიც გამოიყენება შეტყობინების ასახვის, რეგისტრაციის და გადაცემისათვის.

ცნობილ და, შეიძლება ითქვას, ნებისმიერი სახის სისტემაში **სიგნალი** ინფორმაციის გადაცემის ძირითადი საშუალებაა. აქედან გამომდინარე ცხადია, რომ მეტად მნიშვნელოვანია მისი გამოყენების თეორიის შესწავლა.

ვინაიდან საკითხებს, რომლებიც ეხება გადაცემული სიგნალის ფიზიკურ სახეს (მაგალითად, გეომეტრიულ ფორმას) და მასში ჩადებულ **შეტყობინებას** და **ინფორმაციას**, გააჩნია ფრიად მნიშვნელოვანი არა მარტო აზრობრივი დატვირთვა, არამედ მასში ჩადებული ინფორმაციის ფასეულობებთან დაკავშირებული საკითხები, ამ კურსში არ განიხილება. ეს საკითხები სხვა კურსების შესწავლის საგანია.

სასწავლო კურსის მიზანია:

- ანალოგური და დისკრეტული სიგნალების აღწერისა და ანალიზის დაუფლება;
- სიგნალების ფურიე-ანალიზის ათვისება;
- ციფრული სიგნალების დამუშავების მეთოდების ათვისება;
- ფილტრების დიზაინისა და ანალიზის მეთოდების შესწავლა;
- საბაზო CAD სისტემის გამოყენების ათვისება (SPICE, PSPICE).

1.1. რადიოტექნიკური სიბნალების კლასიფიკაცია

სიბნალების თეორიული შესწავლისა და ანგარიშისათვის იქმნება გამოსაკვლევი სიბნალის **მათემატიკური მოდელი** (მმ), რაც საშუალებას იძლევა შედარდეს სიბნალები ერთმანეთს, გამოიყოს მათი ძირითადი თვისებები, მოვახდინოთ კლასიფიკაცია და რაც ძალზე მნიშვნელოვანია, დავადგინოთ გარკვეული ტერმინოლოგია.

1.1.1. სიბნალების აღწერა მათემატიკური მოდელებით

სიბნალები, როგორც ფიზიკური პროცესები, შესაძლებელია შევისწავლოთ ხელსაწყოების გამოყენებით – ელექტრონული ოსცილოგრაფით, ვოლტმეტრით, მიმღებებით. ასეთ ემპირიულ მეთოდს აქვს მნიშვნელოვანი ნაკლი. ექსპერიმენტით დამკვირვებელი ახდენს დაკვირვებას მხოლოდ ცალკეულ მოვლენაზე. მსჯელობა ფუნდამენტურ თვისებებზე, შედეგების წინასწარმეტყველება შეცვლილ პირობებში შესაძლებელია მხოლოდ გამოსაკვლევი სიბნალების მათემატიკური მოდელის (მმ) შექმნის შემდეგ.

სიბნალის მმ შესაძლებელია იყოს, მაგალითად, ფუნქციური დამოკიდებულება, რომლის არგუმენტი არის დრო

$$s(t), u(t), f(t) \text{ და ასე შემდეგ.}$$

მოდელის შექმნა პირველი ნაბიჯია მოვლენის თვისებების სისტემატიური შესწავლისათვის. რადიოტექნიკაში ერთი და იგივე მმ თანაბარი წარმატებით აღწერს დენს, ძაბვას, ელექტრომაგნიტური ველის დაძაბულობას და სხვა სიდიდეებს.

უმეტეს შემთხვევაში ძნელია მმ-ის ზუსტი ამორჩევა. ამიტომ მმ-ის დიდი რაოდენობიდან უნდა ამოირჩეს ის მმ, რომელიც ყველაზე მარტივად აღწერს ფიზიკურ პროცესს, ანუ მმ-ის შერჩევა შემოქმედებითი პროცესია.

ფუნქციებს, რომლებიც აღწერენ **სიბნალებს**, შეუძლიათ მიიღონ როგორც **ნამდვილი**, ასევე **კომპლექსური** მნიშვნელობები. ამიტომ ხშირად გამოვიყენებთ როგორც ნამდვილი, ასევე კომპლექსური სიბნალების ტერმინოლოგიას იმისდა მიხედვით, თუ რომელია მათემატიკურად ხელსაყრელი.

მმ-ის ცოდნა საშუალებას გვაძლევს ერთმანეთს შევადაროთ სიბნალები, დავადგინოთ მათი იგივეობა და განსხვავება, ჩავატაროთ კლასიფიკაცია.

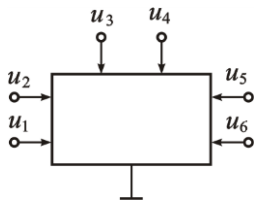
12. ერთგანზომილებიანი და მრავალგანზომილებიანი სიზნალები

რადიოტექნიკისათვის ტიპური სიგნალი არის ძაბვა რაიმე წრედში ან დენი შტოში. ასეთი სიგნალს, რომელიც აღიწერება ერთი დროის ფუნქციით, ეწოდება **ერთგანზომილებიანი**. ზოგჯერ განსახილველად ხელსაყრელია შემოვიტანოთ შემდეგი სახის **მრავალგანზომილებიანი**, ანუ **ვექტორული** სიგნალები:

$$\vec{V}(t) = \{s_1(t), s_2(t), \dots, s_N(t)\},$$

რომლებიც შეიქმნება ერთგანზომილებიანი სიგნალების სიმრავლით. მთელი რიცხვი N არის სიგნალის **განზომილება**.

მრავალგანზომილებიანი სიგნალის მაგალითად შეიძლება იყოს ძაბვების სისტემა მრავალპოლუსას მომჭერებზე. მრავალგანზომილებიანი სიგნალის მოდელი მოყვანილია ნახ. 1.1-ზე.



ნახ. 1.1.

აღსანიშნავია, რომ მრავალგანზომილებიანი სიგნალი ერთგანზომილებიანი სიგნალების მოწესრიგებული ერთობლიობაა. ამიტომ ზოგად შემთხვევაში, სიგნალები კომპონენტების განსხვავებული მიმდევრობით არ უდრის ერთმანეთს:

$$\{s_1, s_2\} \neq \{s_2, s_1\}.$$

სიგნალების მრავალგანზომილებიანი მოდელები გაცილებით სასარგებლოა იმ შემთხვევებში, როდესაც რთული სისტემების ფუნქციონირება ანალიზდება **მმმ**-ის გამოყენებით.

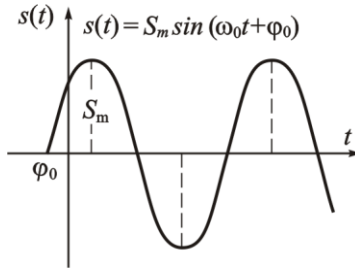
1.1.3. დეტერმინირებადი და უმითხვევითი სიზნალები

დეტერმინირებადი სიგნალი – ესაა სიგნალი, რომლის მყისიერი მნიშვნელობა დროის ნებისმიერ მომენტში შეიძლება ივარაუდოს ერთის ტოლი ალბათობით.

დეტერმინირებადი სიგნალის მაგალითია: იმპულსების თანმიმდევრობანი (რომელთა ფორმა, ამპლიტუდა და დროის მიხედვით მდგომარეობა ცნობილია), უწყვეტი სიგნალები მოცემული ამპლიტუდურ-ფაზური თანაფარდობებით.

სიგნალის მმ-ის მოცემის ხერხებია: ანალიზური გამოსახულება (ფორმულა), ოსცილოგრამა, სპექტრალური წარმოდგენა. დეტერმინირებადი (პარამონიული) სინუსოიდალური სიგნალის მმ-ის მაგალითია

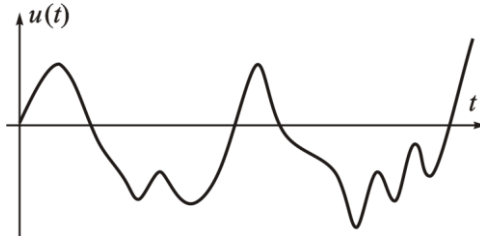
$$s(t) = S_m \sin(\omega_0 t + \phi_0) \text{ (იხ. ნახ. 1.2);}$$



ნახ. 1.2.

შემთხვევითი სიგნალი – ესაა სიგნალი, რომლის მყისიერი მნიშვნელობა დროის ნებისმიერ მომენტში წინასწარ არ არის ცნობილი, მაგრამ შეიძლება ნავარაუდები იყოს რაღაც ალბათობით, რომელიც ერთზე ნაკლებია.

შემთხვევითი პროცესის (ნახ. 1.3.) მაგალითი შეიძლება იყოს ძაბვა, რომელიც შეესაბამება ადამიანის მეტყველებას, მუსიკას, რადიოიმპულსების მიმდევრობა რადიოლოკაციური მიმღების შესასვლელზე, ხელშემღები, სმაური.



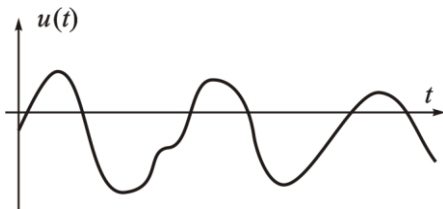
ნახ. 1.3.

1.1.4. ანალოგური, დისკრეტული და ციფრული სიბნალები

თავდაპირველად რადიოტექნიკაში გამოიყენებოდა მხოლოდ ანალოგური სიგნალები. ისინი გამოიყენებოდა უბრალო ტექნიკური ამოცანების გადასაწყვეტად (რადიოკავშირი, ტელეხედვა და სხვა). მარტივი იყო ანალოგური სიგნალის გენერირება, მიღება და დამუშავება.

სიდიდის (დონის) მიხედვით უწყვეტი და დროის მიხედვით უწყვეტი (უწყვეტი ანუ ანალოგური) სიგნალები $u(t)$ -ლებულობენ ნებისმიერ მნიშვნელობას და არსებობენ დროის მოცემული ინტერვალის ნებისმიერ მომენტში (ნახ. 1.4).

ტერმინი **ანალოგური სიგნალი** ხაზს უსვამს იმას, რომ სიგნალი მისი შემქმნელ ფიზიკური პროცესის ანალოგიურია.

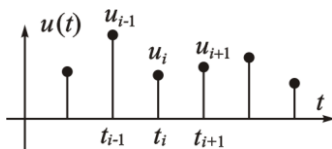


ნახ. 14.

რადიოტექნიკური სისტემების მიმართ გაზრდილმა მოთხოვნებმა გამოიწვია ახალი გზების ძებნა. ზოგ შემთხვევაში ანალოგურ სიგნალებს ჩაენაცვლნენ იმპულსური სიგნალები.

სიდიდის მიხედვით უწყვეტი და დროის მიხედვით დისკრეტული სიგნალები მოცემულია დროის დისკრეტულ მნიშვნელობებში (წერტილთა სასრულ სიმრავლეზე) (ნახ. 1.5). ამ წერტილებში სიგნალი $u(t)$ დებულობს ნებისმიერ მნიშვნელობას ორდინატთა ღერძის განსაზღვრულ ინტერვალზე.

ტერმინი “დისკრეტული” ახასიათებს სიგნალის მოცემის ხერხს დროის ღერძზე. დისკრეტული სიგნალის მოდელი მოყვანილია ნახ. 1.5-ზე. მისი უმარტივესი მათემატიკური მოდელი არის $u_d(t)$, ანუ დროის ღერძზე სასრული რაოდენობის $\{t_i\}$ წერტილების სიმრავლის შესაბამისი მნიშვნელობები, რომლებშიც განსაზღვრულია მისი u_i მნიშვნელობა. როგორც წესი, დისკრეტიზაციის ბიჯი $\Delta = t_{i+1} - t_i$ ყოველი სიგნალისათვის მუდმივი სიდიდეა.

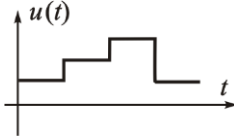


ნახ. 1.5.

დისკრეტული სიგნალების ერთ-ერთი უპირატესობა სიგნალის უწყვეტად ასახვის აუცილებლობის გამორიცხვაა. ეს კი შესაძლებლობას იძლევა ერთიდაიგივე რადიოარხით გადავცეთ შეტყობინობა სხვადასხვა წყაროებიდან. ამით შესაძლებელი ხდება არხების დროითი დაყოფის მეშვეობით მრავალარხიანი კავშირის ორგანიზება.

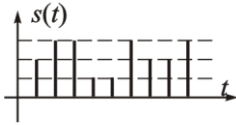
სიდიდის მიხედვით დაქვანტული და დროის მიხედვით უწყვეტი სიგნალები (ნახ. 1.6) მოცემულია მთელ დროის ღერძზე,

მაგრამ სიდიდე $u(t)$ -ს შეუძლია მიიღოს მხოლოდ დისკრეტული (დაქვანტული) მნიშვნელობები.



ნახ. 1.6.

სიდიდის მიხედვით დაქვანტული და დროის მიხედვით დისკრეტული (ციფრული) სიგნალები (ნახ. 1.7.) გადასცემენ სიგნალის დონეების მნიშვნელობებს ციფრული ფორმით.



ნახ. 1.7

.
111001011
101110010
010011100
100110011
.

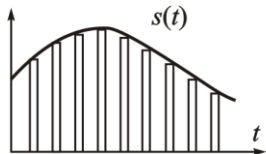
ნახ. 1.8



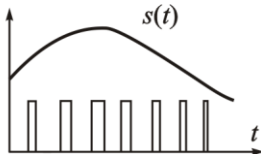
ნახ. 1.9

ტექნიკური რეალიზაციის გამარტივების თვალსაზრისით ჩვეულებრივ იყენებენ ორობით კოდს, როგორც წესი, განსაზღვრული თანრიგების რიცხვით (ნახ. 1.8). ბოლო დროს, მიკროელექტრონიკის და ინტეგრალური სქემოტექნიკის მიღწევების შედეგად ინერგება სისტემები ციფრული სიგნალებით, რომლებიც პირობითი 0-ის და 1-ის კოდირებას იყენებენ (ნახ. 1.9).

მხედველობაში უნდა გვქონდეს, რომ ფიზიკური პროცესის ნებისმიერი დისკრეტული ან ციფრული სიგნალი არის ანალოგური სიგნალი. მაგალითად, ნელა ცვლად ანალოგურ სიგნალს შეგვიძლია შევუსაბამოთ დისკრეტული, ერთნაირი ხანგრძლივობის მქონე, მართკუთხა ფორმის ვიდეოიმპულსი. ამ იმპულსების სიმაღლე პროპორციულია აღრიცხვის წერტილებში აღებული მნიშვნელობების (იხ. ნახ. 1.10), მაგრამ, შეგვიძლია სხვაგვარადაც მოვიქცეთ, იმპულსის სიმაღლე დავტოვოთ უცვლელი, ხოლო მისი ხანგრძლივობა ვცვალოთ შესაბამის ათვლით წერტილებში (იხ. ნახ. 1.11).



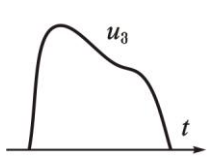
ნახ. 1.10.



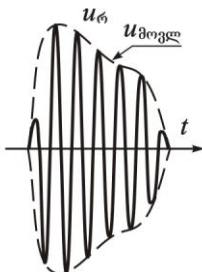
ნახ.1.11.

1.1.5. იმპულსური სიგნალები

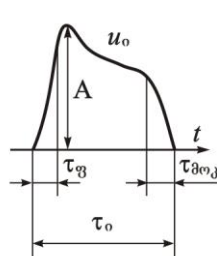
იმპულსი – ესაა რხევა, რომელიც არსებობს მხოლოდ დროის სასრული მონაკვეთის საზღვრებში. ამასთან განასხვავებენ **ვიდეოიმპულსებს** და **რადიოიმპულსებს**. განსხვავება მდგომარეობს შემდეგში. თუ $u_{\text{ვ}}(t)$ (ნახ. 1.12) – ვიდეოიმპულსია, მაშინ მისი შესაბამისი რადიოიმპულსი (ნახ. 1.13) $u_{\text{რ}}(t) = u_{\text{ვ}}(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, სადაც **სიხშირე** ω_0 და **საწყისი ფაზა** φ_0 ნებისმიერია. ამასთან $u_{\text{ვ}}(t)$ -ს ეწოდება რადიოიმპულსის **მომგლები**, ხოლო $\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ ფუნქციას – მისი **შემგსები**.



ნახ. 1.12.



ნახ. 1.13.



ნახ. 1.14.

ტრაპეციოდალური ვიდეოიმპულსისათვის (ნახ. 1.14.) შემოტანილია პარამეტრები:

A – ამპლიტუდა;

τ_0 – ვიდეოიმპულსის ხანგრძლივობა;

$\tau_{\text{ფ}}$ – ფრონტის ხანგრძლივობა;

$\tau_{\text{მთვ}}$ – მოკვეთის ხანგრძლივობა.

1.2. სიგნალების დინამიური წარმოდგენა

რადიოტექნიკის ბევრი ამოცენა, მაგალითად, ფიზიკურ სისტემაზე ზემოქმედების გამოძახილის გამოთვლა, მოითხოვს სიგნალის სპეციფიურ წარმოდგენას. აუცილებელია არა მარტო

სიგნალის მყისიერ მნიშვნელობაზე ინფორმაციის ფლობა, არამედ მთელ დროის ღერძზე მისი ყოფაქცევის ცოდნა როგორც “წარსულში”, ასევე “მომავალში”.

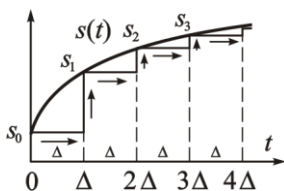
1.2.1. დინამიური წარმოდგენის პრინციპი

ასეთი მოდელების წარმოდგენის ხერხი მდგომარეობს შემდეგში. რეალური სიგნალი მიახლოებით უნდა წარმოვიდგინოთ რაიმე ელემენტარული სიგნალების ჯამად, რომლებიც წარმოიქმნება დროის მომდევნო მომენტებში. ამის შემდეგ ცალკეული ელემენტარული სიგნალების ხანგძლივობები მივასწრაფოთ ნულისაკენ. მაშინ, ბუნებრივია, ზღვარში მივიღებთ საწყისი სიგნალის ზუსტ წარმოდგენას. სიგნალების წარმოდგენის ასეთ ხერხს ეწოდება **დინამიური წარმოდგენა**, ამით ხაზი ესმევა პროცესის დროში განვითარებას.

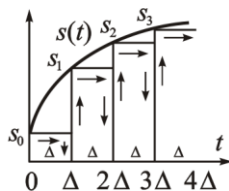
დინამიური წარმოდგენის ორმა ხერხმა ჰპოვა ფართო გამოყენება. პირველის თანახმად ელემენტარულ სიგნალებად გამოიყენება საფეხუროვანი ფუნქციები, რომლებიც შეიქმნებიან დროის ტოლი Δ შუალედების შემდეგ (იხ. ნახ. 1.15). თითოეული საფეხურის სიმაღლე უდრის სიგნალის ნაზრდს დროის Δ ინტერვალში.

მეორე ხერხის მიხედვით ელემენტარულ სიგნალებს წარმოადგენენ მართკუთხა იმპულსები. ეს იმპულსები უშუალოდ მიედგებიან ერთმანეთს და ქმნიან მიმდევრობას, რომელიც ჩაწერვლია მრუდში ან მასზეა შემოწერილი (იხ. ნახ. 1.16).

ნახ. 1.15. და 1.16 ისრებით ნაჩვენებია ცალკეული ელემენტარული შესაკრებების ცვლილებების გზები.



ნახ. 1.15.

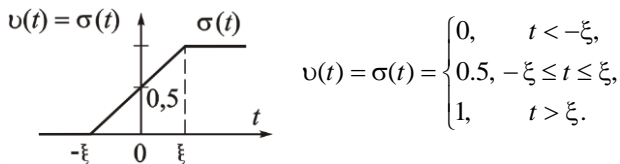


ნახ. 1.16.

განვიხილოთ ელემენტარული სიგნალი, რომელიც გამოიყენება დინამიური წარმოდგენისათვის პირველი ხერხით (ნახ. 1.15).

1.2.2. დინამიური წარმოდგენის პირველი ხერხი (ჩართვის უზნძცია)

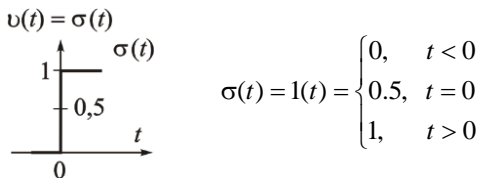
ვთქვათ, მოცემულია სიგნალი, რომლის მათემატიკური მოდელი აღიწერება ტოლობათა სისტემით:



ნახ. 1.17.

მოცემული ფუნქცია აღწერს რაიმე ფიზიკური ობიექტის “ნულოვანიდან” “ერთეულოვან” მდგომარეობაში გადასვლის პროცესს (იხ. ნახ. 1.17). გადასვლა წარმოებს ხაზოვანი კანონით.

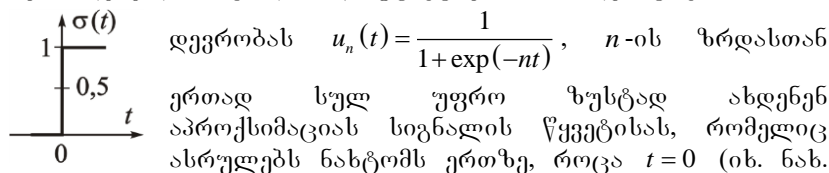
ეს გადასვლა ხდება მყისიერად, თუ $|\xi| \rightarrow 0$. ასეთი გადასვლის მათემატიკურმა მოდელმა მიიღო დასახელება **ჩართვის უშნძცია** ანუ **ხევისაიძის უშნძცია** (ოლივერ ხეისაიდი (1850-1925) –ინგლისელი მეცნიერი).



ნახ. 1.18.

ჩართვის ფუნქციის საშუალებით მოსახერხებელია აღიწეროს ელექტრულ წრედებში კომუტაციის სხვადასხვაგვარი პროცესები.

ჩართვის ფუნქციის მოყვანილი ხერხი არ არის ერთადერთი შესაძლებელი. მაგალითად, ფუნქციები, რომლებიც ქმნიან მიმ-



დევრობას $u_n(t) = \frac{1}{1 + \exp(-nt)}$, n -ის ზრდასთან

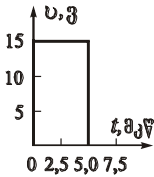
ერთად სულ უფრო ზუსტად ახდენენ აპროქსიმაციას სიგნალის წვევებისას, რომელიც ასრულებს ნახტომს ერთზე, როცა $t = 0$ (იხ. ნახ.

1.19).

ნახ. 1.19.

მაგალითი 1.1. მართკუთხა ფორმის ν იმპულსურ სიგნალს აქვს ხანგრძლივობა 5 მკწმ და ამპლიტუდა 15 ვ (იხ. ნახ. 1.20). დროის ათვლის დასაწყისი ემთხვევა იმპულსის ფრონტს. ჩაწერეთ ამ სიგნალის ანალიზური გამოსახულება.

ამოხსნა. ცხადია, რომ დონის სიგნალის ნახტომის ეფექტი, როცა $t = 0$, აღიწერება ფუნქციით $\nu = 15\sigma(t)$. იმისათვის, რომ იმპულსი



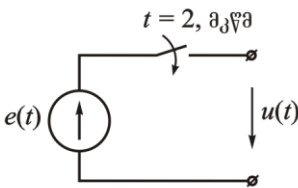
დამთავრდეს, როცა $t_0 = 5 \cdot 10^{-6}$ წმ, აუცილებელია გამოვავლოთ ჩართვის იგივე იმპულსი, რომელიც დაყოვნებულია იგივე დროის მონაკვეთით. საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\nu(t) = 15 \cdot \sigma(t) - 15 \cdot \sigma(t - 5 \cdot 10^{-6}) \text{ ვ.}$$

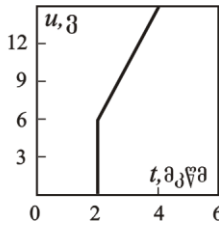
ნახ. 1.20.

მაგალითი 1.2. წყაროს ემდ დროში ხაზოვნად იცვლება შებმდები კანონის მიხედვით $e(t) = 3 \cdot 10^6 \cdot t$ ვ. წყარო იდეალური კომპუტატორით მიერთებულია გარე წრედებთან. კომპუტატორი ამუშავდება დროის $t_0 = 2$ მკწმ მომენტში. ჩაწერეთ ძაბვის მათემატიკური მოდელი ხელსაწყოს გამოსახულებზე.

ამოხსნა. წყაროს გამოსახულებზე (ნახ. 1.21) ძაბვა დროის 2 მკწმ-ზე ნაკლებ მონაკვეთზე, უდრის ნულს, ამიტომ ცხადია, რომ მათემატიკურ მოდელს ექნება სახე $u(t) = 3 \cdot 10^6 \cdot t \cdot \sigma(t - 2 \cdot 10^{-6})$ ვ. (ნახ. 1.22).

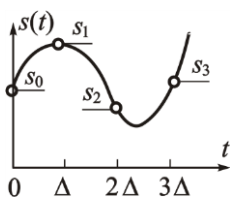


ნახ. 1.21.



ნახ. 1.22.

1.2.3. ნებისმიერი სიბნალის დინამიური წარმოდგენა ჩართვის ფუნქციის გამოყენებით



ნახ. 1.23.

განვიხილოთ რაიმე სიბნალი $s(t)$ (ნახ. 1.23.), ამასთან განსაზღვრულობისათვის დავუშვათ, რომ $s(t) = 0$, როცა $t < 0$. ვთქვათ $\{\Delta, 2\Delta, 3\Delta, \dots\}$ - დროის მომენტების მიმდევრობაა და მათ შეესაბამება $\{s_1, s_2, s_3, \dots\}$ - სიბნალების მნიშვნელობების მიმდევრობა.

თუ $s_0 = s(0)$ - საწყისი მნიშვნელობაა, მაშინ, როგორც ჩანს აგებულობიდან, სიბნალის მიმდინარე მნიშვნელობა ნებისმიერი t -ის მიახლოებით უდრის საფეხუროვანი ფუნქციების ჯამს:

$$s(t) \approx s_0 \sigma(t) + (s_1 - s_0) \sigma(t - \Delta) + (s_2 - s_1) \sigma(t - 2\Delta) + \dots = \\ = s_0 \sigma(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (s_k - s_{k-1}) \sigma(t - k\Delta).$$

თუ ბიჯს $\Delta \rightarrow 0$, მაშინ დისკრეტული ცვლადი $k\Delta$ შეგვიძლია შევცვალოთ უწყვეტი ცვლადით τ . ამასთან მცირე ნაზრდები $(s_k - s_{k-1})$ გარდაიქმნება დიფერენციალებში $ds = (ds/d\tau)d\tau$ და ჩვენ მივიღებთ ნებისმიერი სიბნალის დინამიურ წარმოდგენას ჩართვის (ხმვისაიფის) ფუნქციის გამოყენებით:

$$s(t) = s_0 \sigma(t) + \int_0^{\infty} \frac{ds}{d\tau} \sigma(t - \tau) d\tau$$

მაგალითი 1.3. $s(t)$ სიბნალი უდრის ნულს, როცა $t < 0$ და იცვლება კვადრატული პარაბოლის კანონით $s(t) = At^2$ როცა $t > 0$. იპოვეთ ამ სიბნალის დინამიური წარმოდგენა.

ამოხსნა: ვინაიდან $s_0 = 0$, ხოლო $ds/d\tau = 2A\tau$, ამიტომ

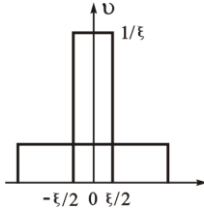
$$s(t) = 2A \int_0^{\infty} \tau \sigma(t - \tau) d\tau.$$

ბოლო ფორმულის შესაბამისად ელემენტარული საფეხურების სიმაღლეები, რომლებიდანაც იკრიბება სიბნალი, დროის მიხედვით ხაზოვნად იზრდება.

სიბნალის დინამიური წარმოდგენის სხვა ხერხზე გადასვლისას, როდესაც დაშლის ელემენტებად გამოიყენება მოკლე იმპულსები, უნდა გამოვიყენოთ ახალი მნიშვნელოვანი ცნება.

1.2.4. დელტა-ფუნქცია

განვიხილოთ მართკუთხა ფორმის იმპულსური სიგნალი, მოცემული შემდეგნაირად: $v(t; \xi) = \frac{1}{\xi} \left[\delta\left(t + \frac{\xi}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{\xi}{2}\right) \right]$. პარა-



ნახ. 1.24.



ნახ. 1.25.

მეტრის ξ ნებისმიერად არჩევისას ამ იმპულსის ფართობი უდრის ერთს: $S_v = \int_{-\infty}^{\infty} v dt = 1$. (იხ.

ნახ. 1.24.)

მაგალითად, თუ v ძაბვაა, მაშინ $S_v = 1$ ვ·წმ.

ეთქვათ, სიდიდე ξ მისწრაფის ნულისაკენ. იმპულსის ხანგრძლივობა მცირდება, მაგრამ ფართობის სიდიდე ინარჩუნებს თავის მნიშვნელობას. ამ დროს იმპულსის სიმაღლე უსაზღვროდ იზრდება. ასეთი ფუნქციების მიმდევრობების ზღვარს, როცა $\xi \rightarrow 0$, ეწოდება **დელტა-ფუნქცია**, ან **დირაკის ფუნქცია**:

$$\delta(t) = \lim_{\xi \rightarrow 0} v(t; \xi).$$

$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$ **დელტა-ფუნქცია** – საინტერესო მათემატიკური ობიექტია. გარდა $t = 0$ წერტილისა, ის უდრის ნულს. მიღებულია გამოხატვაში, რომ ფუნქცია თავმოყრილია ამ წერტილში. ამრიგად,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$

ნახ. 1.25.-ზე მოყვანილია დელტა-ფუნქციის სიმბოლური გამოხატულება.

ამ კურსში მუდმივად გამოიყენება დელტა-ფუნქციის აპარატი. ძირითადი მიზეზი, რომელიც განაპირობებს დელტა-ფუნქციის გამოყენების მოხერხებულობას ფიზიკური ამოცანების გადაწყვეტაში, მდგომარეობს შემდეგში.

გაეხსენოთ მექანიკის ცნობილი დებულება: თუ m მასის მატერიალურ წერტილზე (t_1, t_2) დროის ინტერვალში მოქმედებს ცვლადი $F(t)$ ძალა, მაშინ წერტილის მოძრაობის რაოდენობა

$$mv_2 - mv_1 = \int_{t_1}^{t_2} F(t) dt.$$

მაშასადამე, მნიშვნელოვანი არის არა თვით ძალა, არამედ მისი იმპულსი, რომელიც ფიგურირებს განტოლების მარჯვენა ნაწილში. დელტა-ფუნქცია ზუსტად არის გარედან მოქმედი მოკლე ერთეული იმპულსის (ფართობის) მათემატიკური მოდელი.

მათემატიკიდან ცნობილია, რომ დელტა-ფუნქციის თვისებები ბევრი კლასიკური მიმდევრობის ზღვრების ნიშანდობლივია. მოვიყვანოთ ორი დამახასიათებელი მაგალითი:

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n/(2\pi)} \exp(-nt^2/2);$$

$$\text{და } \delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\sin nt/(\pi t)].$$

აქ n -ის ზრდასთან ერთად იმპულსის ხანგრძლივობა მცირდება, ხოლო მისი სიმაღლე იზრდება.

12.5. სიგნალის დინამიური წარმოდგენა დელტა-ფუნქციის გამოყენებით

(აქ აღწერილი სიგნალის დინამიური წარმოდგენის ხერხში, იმისათვის, რომ მივიღოთ რაიმე მყისიერი მნიშვნელობა, უნდა გვკონდეს მონაცემები სიგნალის ყოფაქცევაზე მთელ დროის დერძზე).

დაუბრუნდეთ ნახ. 1.16.-ზე მოყვანილი ანალოგური სიგნალის აღწერილობას ერთმანეთთან მიბჯენილი მართკუთხა იმპულსების სახით. თუ s_k - არის სიგნალის მნიშვნელობა k -რ აღრიცხვის წერტილში, მაშინ ელემენტარული იმპულსი k ნომრით წარმოიდგინება ასე:

$$\eta_k(t) = s_k [\delta(t-t_k) - \delta(t-t_k - \Delta)]. \quad (1.10)$$

დინამიური წარმოდგენის პრინციპის შესაბამისად საწყისი $s(t)$ სიგნალი უნდა განიხილებოდეს როგორც ელემენტალური

შესაკრებების ჯამი:
$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \eta_k(t). \quad (1.11)$$

ამ ჯამში ნულისგან განსხვავებული იქნება მხოლოდ ერთი k -ური წევრი, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $t_k < t < t_{k+1}$.

თუ (1.10) ჩავსვავთ (1.11)-ში, წინასწარ გაყოფილ და გამრავლებული ბიჯის Δ სიდიდეზე, მაშინ

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k \frac{1}{\Delta} [\delta(t-t_k) - \delta(t-t_k - \Delta)] \Delta$$

ზღვარზე გადასვლისას, როცა $\Delta \rightarrow 0$, აუცილებელია შეიცვალოს აჯამვა ინტეგრირებით ფორმალური τ ცვლადით,

რომლის დიფერენციალი dt შეცვლის Δ სიდიდეს. ვინაიდან

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} [\sigma(t-t_k) - \sigma(t-t_k - \Delta)] \frac{1}{\Delta} = \delta(t-t_k),$$

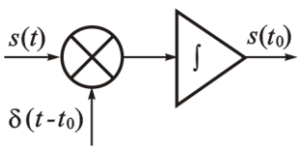
მივიღებთ საძიებელი სიგნალის დინამიური წარმოდგენის ფორმულას

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \delta(t-\tau) d\tau. \quad (1.12)$$

შესაძლებელია დავინახოთ დელტა-ფუნქციის მნიშვნელოვანი თვისება: მისი ფიზიკური განზომილება იგივეა, რაც სიხშირის განზომილება, ანუ წმ^{-1} .

მაშასადამე, თუ უწყვეტ ფუნქციას გაგამრავლებთ დელტა-ფუნქციაზე, ნამრავლს კი დროში გავაინტეგრირეთ, მაშინ შედეგი იქნება უწყვეტი ფუნქციის მნიშვნელობის ტოლი იმ წერტილში, სადაც თავმოყრილია δ -იმპულსი. მიღებულია გამონათქვამი, რომ ამაში მდგომარეობს დელტა-ფუნქციის **მაფილტრებელი თვისება**.

აქედან გამომდინარეობს სისტემის სტრუქტურული სქემა, რომელიც განახორციელებს ანალოგური სიგნალის $s(t)$



ნახ. 1.26

მყისიერი მნიშვნელობების გაზომვას (იხ. ნახ. 1.26.), სისტემა შედგება ორი რგოლისაგან: გადამამრავლებელი და ინტეგრატორი. ნათელია, რომ $s(t_0)$ გაზომვის სიზუსტე დამოკიდებულია

რეალური სიგნალის (მაგალითად, მართკუთხა ფორმის ვიდეოიმპულსის) ხანგძლივობაზე.

რაც უფრო მცირეა იმპულსის ხანგძლივობა, მით მეტია გაზომვის სიზუსტე.

13. გეომეტრიული მეთოდები სიბნალების თეორიაში

სიგნალების შედარების ჩასატარებლად მათი მსგავსობის დასადგენად და სხვა ამოცანების გადასატრეად საჭიროა შესაბამისი მათემატიკური აპარატის გამოყენება.

მე-XX საიკუნეში შეიქმნა ფუნქციონალური ანალიზი – მათემატიკის მიმართულება, რომელიც აერთიანებს ჩვენს ინტუიციურ წარმოდგენას სივრცის გეომეტრიულ სტრუქტურაზე. აღმოჩნდა, რომ ფუნქციონალური ანალიზის იდეები იძლევა გამართული სიგნალების თეორიის შექმნის საშუალებას, რომლის საფუძველში დევს სიგნალის კონცეფცია, როგორც ვექტორისა, სპეციალური ხერხით კონსტრუირებულ უსასრულო-განზომილებიან სივრცეში.

1.3.1. სიბნალეზის ხაზოვანი სიმრცე

ვთქვათ $M = \{s_1(t), s_2(t), \dots\}$ - სიბნალეზის სიმრავლეა. ამ ობიექტების გაერთიანების მიზეზია საერთო თვისებების არსებობა M სიმრავლის ყველა ელემენტისათვის.

მაგალითი 14. M სიმრავლე შექმნილია სხვადასხვანაირი ანალოგური სიბნალეზით, რომლებიც განსხვავებულია ნული-საგან დროის ინტერვალში $(0, 15$ მკწმ). ამ ინტერვალის გარეთ სიბნალეზის მნიშვნელობები უდრის ნულს.

მაგალითი 15. M სიმრავლე შეიცავს $s_n = A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$ პარმონიული რხევების სახის სიბნალეზს, რომლებიც განსხვავდებიან ამპლიტუდებით, სიხშირეებით და საწყისი ფაზებით.

სიბნალეზის თვისებების შესწავლა, რომლებიც გაერთიანებულია ასეთ სიმრავლეში, მარტივდება იმ შემთხვევაში, როდესაც შესაძლებელია სიმრავლის ერთი ელემენტები გამოვსახოთ ამ სიმრავლის სხვა ელემენტებით. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ სიბნალეზის სიმრავლეს გააჩნია განსაზღვრული **სტრუქტურა**. სტრუქტურის ამორჩევა ნაკარნახევაა ფიზიკური მოსაზრებებით. მაგალითად, ცნობილია, რომ ელექტრული რხევები შესაძლებელია არა მარტო შეიკრიბოს, არამედ გამრავლდეს ნებისმიერ მასშტაბურ კოეფიციენტზე. ეს იძლევა საშუალებას სიბნალეზის სიმრავლეში შემოვიტანოთ **ხაზოვანი სივრცის სტრუქტურა**.

სიბნალეზის M სიმრავლე ქმნის **ნამდვილ ხაზოვან სივრცეს**, თუ ჰქმნარიტია შემდეგი აქსიომები:

1. ნებისმიერი სიბნალი $u \in M$ ნებისმიერი t -სთვის დებულობს მხოლოდ ნამდვილ მნიშვნელობებს.
2. ნებისმიერი $u \in M$ -ისა და $v \in M$ -ისათვის არსებობს ჯამი $w = u + v$, ამასთან $w \in M$. შეკრების ოპერაცია კომუტაციურია: $u + v = v + u$ და ასოციური: $u + (v + x) = (u + v) + x$.
3. ნებისმიერი სიბნალისთვის $s \in M$ და ნებისმიერი ნამდვილი α რიცხვისათვის განსაზღვრული სიბნალი $f = \alpha \cdot s \in M$.
4. M სიმრავლე შეიცავს განსაკუთრებულ ნულოვან ელემენტს \emptyset , ისეთს, რომ $u + \emptyset = u$ ყველა $u \in M$.

(მოყვანილი აქსიომატიკა არ არის სრული და მას შეიძლება დაემატოს სხვა აქსიომები).

თუ სიგნალების მათემატიკური მოდელები იღებენ კომპლექსურ მნიშვნელობებს, მაშინ თუ მე-3 აქსიომაში დავეუშვებთ გამრავლებას კომპლექსურ რიცხვზე, მივიღებთ **ხაზოვანი კომპლექსური სივრცის** ცნებასთან.

მოყვანილი აქსიომატიკა საკმაოდ მკაცრია. სიგნალების სიმრავლეები შესაძლოა აღმოჩნდეს ხაზოვანი სიმრავლის მიღმა.

მაგალითი 1.6. M სიმრავლე შეიცავს განსხვავებული სახის ძაბვის მართკუთხა ვიდეომიპულსებს, რომლებიც არსებობენ დროის (0, 20 მკწმ) ინტერვალში, ამასთან იმპულსების ამპლიტუდები არ აღემატება 10 ვ. არის თუ არა ხაზოვანი სივრცე, თუ იმპულსების ამპლიტუდები უდრის 6 და 8 ვ ?

ამოხსნა: არა, ვინაიდან თუ იმპულსების ამპლიტუდებს შევკრებთ, მივიღებთ სიგნალს, რომელიც არ მიეკუთვნება M სიმრავლეს. ამიტომ M არ არის ხაზოვანი სივრცე.

1.3.2. კოორდინატული ბაზისის ცნება

როგორც ჩვეულებრივ სამგანზომილებიან სივრცეში, ასევე სიგნალების ხაზოვან სივრცეში შესაძლებელია გამოვიყოს სპეციალური ქვესიმრავლე, რომლებიც შეასრულებენ კოორდინატთა ღერძების როლს.

ამბობენ, რომ ვექტორების ერთობლიობა $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$, რომლებსაც მიეკუთვნება M , არის **ხაზოვნად დამოუკიდებელი**, თუ ტოლობა $\sum_i \alpha_i e_i = 0$ შესაძლებელია მხოლოდ იმ შემთხვევაში,

როდესაც ყველა α_i კოეფიციენტები ერთდროულად განულებია.

ხაზოვნად დამოუკიდებელი ვექტორების სისტემა ხაზოვან სივრცეში ქმნის კოორდინატულ ბაზისს. თუ მოცემულია რაიმე სიგნალის $s(t)$ დაშლა შემდეგი სახით $s(t) = \sum_i c_i e_i$, მაშინ

რიცხვები $\{c_1, c_2, c_3, \dots\}$ არის $s(t)$ სიგნალის პროექციები ამორჩეული ბაზისის მიმართ.

სიგნალების თეორის ამოცანებში ბაზისური ვექტორების რაოდენობა განუსაზღვრელად დიდია. ასეთ ხაზოვან სივრცეებს უწოდებენ **უსასრულოგანზომილებიან სივრცეს**. ბუნებრივია, რომ ამ სივრცეების თეორია არ შეიძლება მოთავსდეს ხაზოვანი ალგებრის ფორმალურ სქემაში, სადაც ბაზისური ვექტორების რიცხვი ყოველთვის სასრულია.

მაგალითი 17. ხაზოვანი სივრცე შედგენილია სიგნალებით, რომლებიც

აღიწერებიან მაღალი რიგის მრავალწევრებით: $s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n t^n$ (ასეთ

ფუნქციებს ეწოდება **ანალიზური**).

ამ სივრცეში კოორდინატთა ბაზისი არის ერთწევრების სისტემა $\{e_0 = 1; e_1 = t; e_2 = t^2; \dots\}$.

13.3. ნორმირებული ხაზოვანი სივრცე. სიბნალის ენერჯია

სიგნალების თეორიის გეომეტრიული წარმოდგენის გასადრმაველად, აუცილებელია შემოვიტანოთ ახალი ცნება, რომელიც აზრობრივად შეესაბამება **ვექტორის სიგრძეს**. ეს მოგვცემს საშუალებას სიგნალები შევადაროთ ერთმანეთს.

მათემატიკაში ვექტორის სიგრძეს უწოდებენ **ნორმა**-ს. სიგნალების ხაზოვანი სივრცე არის **ნორმირებული**, თუ თითოეულ ვექტორს $s(t) \in L$ ცალსახად შეესაბამება რიცხვი $\|s\|$ – ამ ვექტორის ნორმა, ამასთან სრულდება ნორმირებული სივრცის შემდეგი აქსიომები:

1. ნორმა არ არის უარყოფითი, ანუ $\|s\| \geq 0$. ნორმა $\|s\| = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $s = \emptyset$.
2. ნებისმიერი α რიცხვისათვის ჰკმმარტია ტოლობა $\|\alpha \cdot s\| = |\alpha| \cdot \|s\|$.
3. თუ $s(t)$ და $p(t)$ ორი ვექტორია L -დან, მაშინ სრულდება სამკუთხედის უტოლობა: $\|s + p\| \leq \|s\| + \|p\|$.

(ეს აქსიომატიკა გამოიყენება, როგორც ანალოგური, ასევე დისკრეტული სიგნალებისათვის).

რადიოტექნიკაში მიღებულია, რომ ანალოგური სიგნალების

ნორმაა
$$\|s\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt} \tag{1.15}$$

(ფესვის ორი მნიშვნელობებიდან ირჩევენ დადებითს). კომპლექ-

სური სიგნალებისათვის ნორმა
$$\|s\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} s(t) s^*(t) dt},$$

სადაც * სიმბოლოთი აღინიშნება კომპლექსურად შეუღლებული სიდიდე.

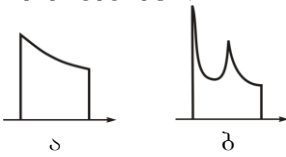
ნორმის კვადრატს უწოდებენ **სიგნალის ენერჯიას**

$$E_s = \|s\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt.$$

ზუსტად ასეთი ენერგია გამოიყოფა 1 ომ რეზისტორში, თუ მის მომჭერებზე მოდებულია ძაბვა $s(t)$.

სიგნალის **ნორმა** მიზანშეწონილია გამოითვალოს ფორმულა (1.15)-ით შემდეგი მიზეზების გამო:

1. რადიოტექნიკაში სიგნალის სიდიდეზე მსჯელობენ გამომდი ნარე ჯამური ენერგეტიკული ეფექტიდან, მაგალითად, **რეზისტორში გამოყოფილი სითბოს რაოდენობა**.



ნახ. 1.27

2. ენერგეტიკული ნორმა არამგრძნობიარეა სიგნალის ფორმის ცვლილების მიმართ და შეიძლება იყოს მნიშვნელოვანი დროის მოკლე მონაკვეთებში.

(ნახ. 1.27–ზე მოყვანილია სიგნალები უმნიშვნელოდ განსხვავებული ენერგიებით).

ხაზოვანი ნორმირებული სივრცის (1.15) სახის ნორმის ზღვრული მნიშვნელობით ეწოდება **ფუნქციების სივრცის ინტეგრირების კვადრატი** და მოკლედ აღინიშნება L_2 .

1.3.4. მეტრული სივრცე

შემოვიტანოთ ფუნდამენტური ცნება, რომელიც აერთიანებს ჩვენს წარმოდგენას სივრცეში ორ წერტილს შორის მანძილზე.

ამბობენ, რომ ხაზოვანი სივრცე L დგება მეტრულ სივრცედ, თუ $u, v \in L$ ელემენტების თითოეულ წყვილს შეესაბამება არაუარყოფითი $\rho(u, v)$ მეტრიკად წოდებული რიცხვი, ან მანძილი ამ ელემენტებს შორის.

მეტრიკის განსაზღვრის ხერხის მიუხედავად, მეტრიკა უნდა ექვემდებარებოდეს **მეტრული სივრცის აქსიომებს**:

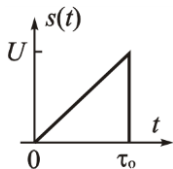
1. $\rho(u, v) = \rho(v, u)$ (მეტრიკის რეფლექსიობა);
2. $\rho(u, u) = 0$ ნებისმიერი $u \in L$;
3. როგორც არ უნდა იყოს ელემენტი $w \in L$, ყოველთვის $\rho(u, v) \leq \rho(u, w) + \rho(w, v)$.

ჩვეულებრივ მეტრიკა განისაზღვრება როგორც ორი სიგნალის ნორმა: $\rho(u, v) = \|u - v\|$. (1.17)

ნორმის ქვეშ შეგვიძლია ვივულისხმოთ მანძილი სივრცეში ამორჩეულ ელემენტსა და ნულოვან ელემენტს შორის:

$$\|u\| = \rho(u, \emptyset).$$

მეტრიკის ცოდნით, შეიძლება ვიმსჯელოთ, მაგალითად, იმაზე, თუ რამდენად კარგად აპროქსიმირებს ერთი სიბნალი მეორეს.



ნახ. 1.28

მაგალითი 1.8. სიბნალი $s(t)$ წარმოადგენს ძაბვის სამკუთხა იმპულსს U ამპლიტუდით და τ_0 ხანგრძლივობით (ნახ. 1.28). გამოთვალეთ ასეთი სიბნალის ენერგია და ნორმა.

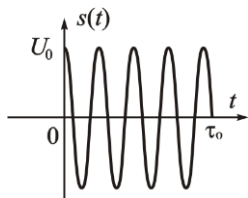
ამოხსნა: დროის $(0, \tau_0)$ ინტერვალში სიბნალი აღიწერება ფუნქციით $s(t) = Ut / \tau_0$. სიბნალის ენერგია გამოითვლება (1.16) გამოსახულებით

$$E_s = \|s\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt. \quad \text{ინტეგრირების ზღვრების შეცვლით}$$

და ინტეგრალიდან მუდმივი სიდიდეების გამოტანის შემდეგ მივიღებთ

$$E_s = \left(\frac{U^2}{\tau_0^2} \right) \int_0^{\tau_0} t^2 dt = \frac{U^2}{\tau_0^2} \cdot \frac{t^3}{3} \Big|_0^{\tau_0} = U^2 \cdot \frac{\tau_0}{3}.$$

$$\text{სიბნალის ნორმა } \|s\| = \sqrt{E_s} = U \frac{\sqrt{\tau_0}}{\sqrt{3}}.$$



ნახ. 1.29

მაგალითი 1.9. გამოთვალეთ რადიოიმპულსის ენერგია მართკუთხა ფორმის მქონე მომენტებით. იმპულსი არსებობს $(0, \tau_0)$ ინტერვალში და აღიწერება ფუნქციით $s(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ (იხ. ნახ. 1.29)

ამოხსნა: ფორმულა (1.16)-ის გამოყენებით $E_s = \|s\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt$,

ინტეგრირების ზღვრების შეცვლით და ინტეგრალიდან მუდმივი სიდიდეების გამოტანის შემდეგ მივიღებთ

$$E_s = U_0^2 \int_0^{\tau_0} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) dt = \frac{U_0^2}{\omega_0} \int_0^{\omega_0 \tau_0 + \varphi_0} \cos^2 x dx.$$

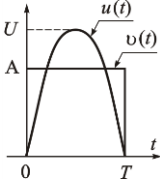
ინტეგრირების შესრულების შემდეგ მივიღებთ

$$E_s = U_0^2 \int_0^{\tau_0} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) dt = \frac{U_0^2}{4\omega_0} [2(\omega_0 \tau_0 + \varphi_0) + \sin 2(\omega_0 \tau_0 + \varphi_0)].$$

გეომეტრიული მეთოდები სიხანალების თეორიაში

თუ რადიომპულსი შეიცავს ისეთ მადალსისშირულ შევსებს ელექტრომაგნიტურ რხევებს, რომ $\omega_0 \tau_0 \ll 1$, მაშინ $E_s \approx \frac{U_0^2 \tau_0}{2}$ პარამეტრების ω_0 და τ_0 არჩევს მიუხედავად.

მაგალითი 1.10. $u(t)$ სიხანალი წარმოადგენს სინუსოიდის მონაკვეთს, რომელიც მონაკვეთის $[0, T]$ ბოლოებში დებულობს ნულთან მნიშვნელობებს. იმპულსის სიმაღლე U ცნობილია. ამორჩიეთ მართკუთხა ფორმის იგივე ხანგრძლივობის იმპულსის ამკლიტუდა A ისე, რომ მანძილი ამ ორივე სიხანალს შორის იყოს მინიმალური (იხ. ნახ. 1.30)



ნახ. 1.30

ამოხსნა: ვინაიდან სინუსოიდალური ფორმის $u(t)$ სიხანალის პერიოდი ამ შემთხვევაში იქნება $2T$, მაშინ მივიღებთ

$$u(t) = U \sin \omega t = U \sin \frac{2\pi}{2T} t = U \sin \frac{\pi t}{T}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

სიხანალებს $u(t)$ და $v(t)$ შორის მანძილის კვადრეტი გამოითვლება ფორმულით

$$\rho^2(u, v) = \int_0^T \left(U \sin \frac{\pi t}{T} - A \right)^2 dt.$$

ინტეგრირების ჩატარების შემდეგ მივიღებთ

$$\rho^2(u, v) = U^2 T/2 - 4AU T/\pi + A^2 T.$$

მიღებული ფუნქციიდან თუ ავიღებთ მეორე წარმოებულს, დავრწმუნდებით, რომ ის დადებითია. აქედან გამომდინარეობს, რომ ექსტრემუმის წერტილში ნამდვილად მიიღწევა მინიმუმი.

მაშასადამე, ავიღოთ პირველი წარმოებული A ცვლადის მიმართ და გავუტოლოთ ნულს. მივიღებთ, რომ მანძილის მინიმუმი მიიღწევა, თუ $A = 2U/\pi \approx 0,637U$. მაშინ,

$$\rho_{\min}^2 = U^2 T \left(1/2 - 4/\pi^2 \right) \approx 0,095 U^2 T \Rightarrow \rho_{\min} \approx 0,308 U \sqrt{T}.$$

ამ შემთხვევაში სინუსოიდალური იმპულსის ენერჯია

$$E_0 = U^2 \int_0^T \sin^2 \frac{\pi t}{T} dt = \frac{U^2 T}{2}, \text{ მისი ნორმა } \|u\| = 0,707 \cdot U \sqrt{T}.$$

მაშასადამე, ამორჩიული მეტრიკით მინიმალურად მისაღწევი მანძილი განხილულ სიხანალებს შორის შეადგენს სინუსოიდალური იმპულსის ნორმის 44%.

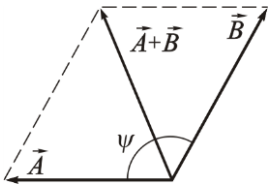
14. ორთოგონალური სიბნალების თეორია

მიუხედავად იმისა, რომ შემოვიტანეთ ხაზოვანი სივრცის სტრუქტურა და განესაზღვრეთ ნორმა და მეტრიკა, მაინც არ შეგვიძლია გამოვთვალოთ ისეთი მახასიათებელი, როგორცაა კუთხე ორ ვექტორს შორის. ამას შევძლებთ, თუ შემოვიტანთ მნიშვნელოვან ცნებას – ხაზოვანი სივრცის ელემენტების სკალარულ ნამრავლს.

14.1 სიბნალების სკალარული ნამრავლი

გავიხსენოთ, რომ თუ ჩვეულებრივ სამგანზომილებიან სივრცეში ცნობილია ორი \vec{A} და \vec{B} ვექტორი, მაშინ მათი **ჯამის კვადრატის მოდული** $|\vec{A} + \vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2(\vec{A} \cdot \vec{B})$, (1.18)

სადაც $(\vec{A} \cdot \vec{B}) = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos \psi$ - ამ ვექტორების სკალარული



ნამრავლია, რომელიც დამოკიდებულია მათ შორის ψ კუთხეზე.

ანალოგიური მოქმედებით, გამოვთვალოთ ორი u და v სიგნალის ენერგიების ჯამი

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} (u+v)^2 dt = E_u + E_v + 2 \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot v dt. \quad (1.19)$$

ნახ. 134 სიგნალებისგან განსხვავებით მათი ენერგიები არ არის **ადიტიური** (არ იკრიბება), ვინაიდან ენერგია

$$E \text{ შეიცავს დამატებით ურთიერთენერგიას } E_{uv} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot v dt.$$

(1.18) და (1.19) ფორმულების ურთიერთშედარებით, დავადგენთ u და v ნამდვილი სიგნალების სკალარულ ნამრავლს:

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t) dt, \quad (1.20)$$

ხოლო მათ შორის კუთხის კოსინუსი იქნება:

$$\cos \psi = \frac{(u, v)}{\|u\| \cdot \|v\|}. \quad (1.21)$$

სკალარულ ნამრავლს გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1. $(u, v) \geq 0$;
2. $(u, v) = (v, u)$;

3. $(\lambda u, v) = \lambda(u, v)$, სადაც λ - ნამდვილი რიცხვია;

4. $(u+v, w) = (u, w) + (v, w)$.

ხაზოვან სივრცეს ასეთი სკალარული ნამრავლით უწოდებენ **ბილინერტის ნამდვილ H სივრცეს** [დავიდ გილბერტი (1862-1943) გერმანელი მათემატიკოსი].

ჭეშმარიტია **კოში-ბუნიაკოვსკის ფუნდამენტალური უტოლობა**

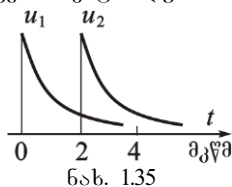
$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|. \quad (1.23)$$

თუ სიბნალები იღებენ კომპლექსურ მნიშვნელობებს, მაშინ სკალარული ნამრავლის შემოტანით ქვემოთ მოყვანილი ფორმულით, შესაძლებელია განვსაზღვროთ **კომპლექსური გილბერტის სივრცე**:

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v^*(t) dt \quad (1.24)$$

ისეთი, რომ $(u, v) = (v, u)^*$.

მაგალიტი 1.11. გვაქვს ორი დროში წანაცვლებული, ფორმით ექსპონენციალური იმპულსი (იხ. ნახ. 1.35):



$$u_1(t) = 5 \cdot \exp(-10^5 t) \sigma(t),$$

$$u_2(t) = 5 \cdot \exp[-10^5 (t - 2 \cdot 10^{-6})] \sigma(t - 2 \cdot 10^{-6}).$$

იპოვეთ მოცემული სიგნალების სკალარული ნამრავლი და კუთხე ψ მათ შორის.

ამოხსნა. ამ სიბნალების ენერგიები ერთნაირია:

$$\|u_1\|^2 = \|u_2\|^2 = \int_0^{\infty} (5e^{-10^5 t})^2 dt = 25 \int_0^{\infty} e^{-2 \cdot 10^5 t} dt = 1.25 \cdot 10^{-4}, \quad 3^2 \cdot \text{წმ}.$$

სკალარული ნამრავლი

$$(u_1, u_2) = 25 \int_0^{\infty} e^{-10^5 t} e^{-10^5 (t - 2 \cdot 10^{-6})} dt = 1.023 \cdot 10^{-4}, \quad 3^2 \cdot \text{წმ}.$$

$$\text{აქედან } \cos \psi = \frac{(u, v)}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{1,023 \cdot 10^{-4}}{1,25 \cdot 10^{-4}} = 0.819 \text{ და } \psi = 35^\circ.$$

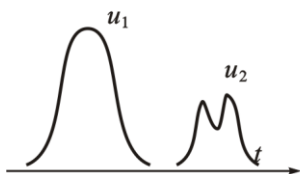
**14.2. ორთოგონალური სიგნალები და ფურიეს
ბანზობალოებული მჭკრივები**

ორთოგონალობის პრინციპი. ორ სიგნალს უწოდებენ **ორთოგონალურს**, თუ მათი სკალარული ნამრავლი და

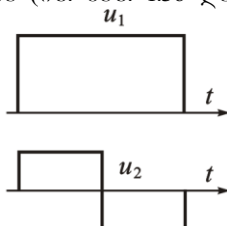
ურთიერთენერგია უდრის ნულს:
$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t)dt = 0.$$

(1.25)

ასეთი სახის სიგნალების მაგალითებია (იხ. ნახ. 1.36 და 1.37):



ნახ. 1.36



ნახ. 1.37

ვთქვათ, H არის **გილბერტის** სიგნალების სივრცე ენერჯის სასრული მნიშვნელობით. ეს სიგნალები განსაზღვრულია დროის სასრულ $[t_1, t_2]$ ან უსასრულო მონაკვეთზე. დაგუშვათ, რომ ამ მონაკვეთზე მოცემულია ფუნქციების $\{u_0, u_1, \dots, u_n\}$ უსასრულო სისტემა, რომლებიც ორთოგონალური არიან ერთმანეთის მიმართ და გააჩნიათ ერთეულოვანი სიდიდის ნორმები, ანუ:

$$(u_i, u_j) = \begin{cases} 1, & \text{თუ } i = j \\ 0, & \text{თუ } i \neq j. \end{cases} \quad (1.26)$$

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ სიგნალების სივრცეში მოცემულია **ორთონორმირებული ბაზისი**.

ნებისმიერი სიგნალი $s(t) \in H$ დავშალოთ რიგად:

$$s(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i u_i(t). \quad (1.27)$$

(1.27) სახით წარმოდგენას ეწოდება ამორჩეულ ბაზისში $s(t)$ სიგნალის **ფურიეს ბანზობალოებული მჭკრივი**.

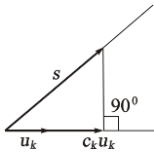
მოცემული მჭკრივის კოეფიციენტებს პოულობენ შემდეგნაირად. ვიღებთ ბაზისურ ფუნქციას u_k ნებისმიერი k ნომრით, ვამრავლებთ მასზე ტოლობის (1.27) ორივე მხარეს, ხოლო შემდეგ ვახდენთ შედეგების ინტეგრირებას დროში:

$$\int_{t_1}^{t_2} s(t) u_k(t) dt = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \int_{t_1}^{t_2} u_i u_k dt. \quad (1.28)$$

ვინაიდან (1.28) ტოლობის მარჯვენა მხარე ორთომორმირებული ბაზისია, მაშასადამე, რჩება მხოლოდ ჯამის წევრი ნომრით

$$i = k, \quad \text{ამიტომ} \quad c_k = \int_{t_1}^{t_2} s(t) u_k(t) dt = (s, u_k). \quad (1.29)$$

სიგნალების განზოგადოებული ფურიეს მწკრივის მეშვეობით წარმოდგენის შესაძლებლობა არის დიდი პრინციპული მნიშვნელობის ფაქტი. იმის ნაცვლად, რომ გამოვიკლიოთ ფუნქციული დამოკიდებულება წერტილების უსასრულო სიმრავლეში, ჩვენ გვეძლევა საშუალება ამ სიგნალების დახასიათებისა სასრული (ზოგადად რომ ვთქვათ, უსასრულო) ფურიეს განზოგადოებული მწკრივის c_k კოეფიციენტების სიმრავლით.



ნახ. 1.38

გეომეტრიულ ენაზე ფორმულა (1.29)-ის ინტერპრეტაცია ასეთია: ფურიეს განზოგადოებული მწკრივის c_k კოეფიციენტები არის \vec{s} ვექტორის პროექცია ბაზისურ მიმართულებაზე (იხ. ნახ.

1.38).

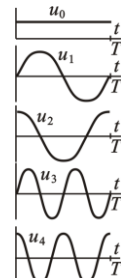
1.4.3. ორთომორმირებული ბაზისების მახალითვა

განვიხილოთ ურთიერთორთომორფული ფუნქციების სისტემების აგების ყველაზე მნიშვნელოვანი და გავრცელებული ორი ხერხი. ასეთი ფუნქციების აგება შესწავლილია მათემატიკაში (იხ., მაგალითად, [7,8]).

1.4.3.1. ჰარმონიული რხევის ორთომორმირებული სისტემა

შეგვიძლიათ დარწმუნდეთ, რომ $[0, T]$ მონაკვეთზე ტრიონომეტრიული სისტემა ჯერადი სისშირეებით, მუდმივი სიგნალით დამატებული (იხ. ნახ. 1.39), ქმნის ორთომორმირებულ ბაზისს.

$$\begin{aligned} u_0 &= 1/\sqrt{T}, \\ u_1 &= \sqrt{2/T} \sin 2\pi t / T, \\ u_2 &= \sqrt{2/T} \cos 2\pi t / T, \\ &\dots \dots \dots \\ u_{2m-1} &= \sqrt{2/T} \sin 2\pi m t / T, \\ u_{2m} &= \sqrt{2/T} \cos 2\pi m t / T, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$



ნახ. 1.39

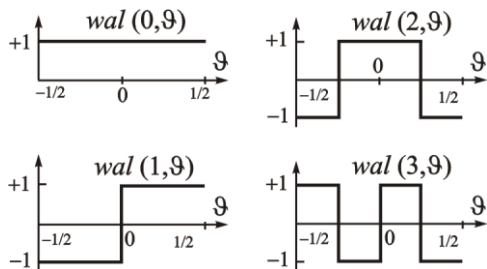
ამ სისტემით პერიოდული ფუნქციის დაშლა ფურიეს მწკრივად განხილული იქნება მე-2 თავში.

14.3.2. უოლშის ფუნქციების ორთონორმირებული სისტემა

ბოლო დროს დისკრეტული სიგნალების დამუშავების მეთოდების გავლენით დიდი ყურადღება ეთმობა **უოლშის ფუნქციების ორთონორმირებულ სისტემას**, რომლებიც თავისი არსებობის $[-T/2, T/2]$ ინტერვალში იღებენ მხოლოდ ± 1 მნიშვნელობას. ამიტომ სიგნალები, რომლებიც შეესაბამება **უოლშის ფუნქციებს**, მარტივად გენერირდება მიკროელექტრონული გადამრთველი სქემებით.

შემოვიტანოთ უზომო დრო $\vartheta = t/T$ და, როგორც მიღებულია, ავღნიშნოთ უოლშის k -ური ფუნქცია სიმბოლოთი $wal(k, \vartheta)$.

მოცემული ფუნქციების ანალიზური აღწერა საკმარისად რთულია. მაგრამ ამ სისტემის აგების იდეა მარტივად შესაძლებელია დაინახოთ ნახ. 140-ზე, რომელზეც გამოსახულია უოლშის ფუნქციის პირველი რამდენიმე წევრი.



ნახ. 140

ცხადია, რომ ნებისმიერი k -ური მნიშვნელობისათვის უოლშის ფუნქციის ნორმირების მნიშვნელობა უდრის 1-ს:

$$\|wal(k, \vartheta)\|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} wal^2(k, \vartheta) d\vartheta = 1$$

ამ ფუნქციების ორთოგონალობა გამომდინარეობს მათი აგების პრინციპიდან და შესაძლებელია მათი უშუალო შემოწმება.

მაგალითად:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \text{wal}(1, \vartheta) \text{wal}(2, \vartheta) d\vartheta = \int_{-1/2}^{-1/4} (-1)^2 d\vartheta + \int_{-1/4}^0 (-1) \cdot 1 d\vartheta +$$

$$+ \int_0^{1/4} 1^2 d\vartheta + \int_{1/4}^{1/2} 1 \cdot (-1) d\vartheta = 0$$

$[-T/2, T/2]$ დროის მონაკვეთზე მოცემული, ზღვრული ენერჯიის მქონე სიგნალის დაშლას ფურიეს განზოგადოებულ რიგში უოლშის ფუნქციების მიხედვით აქვს სახე:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \text{wal}(k, t/T).$$

მაგალითი. იპოვეთ პირველი ორი კოეფიციენტი მართკუთხა სამკუთხედის ფორმის იმპულსის დაშლისას უოლშის ფუნქციების სისტემით.

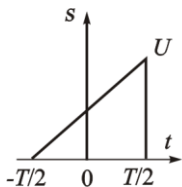
ამოხსნა. დასაშლელი სიგნალი $[-T/2, T/2]$ მონაკვეთზე აღიწერება ფუნქციით $s(t) = U(t/T + 1/2)$ (იხ. ნახ. 141).

გამოვთვალოთ ფურიეს განზოგადოებული მწკრივის კოეფიციენტები:

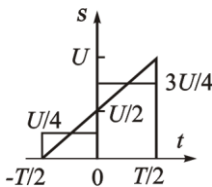
$$c_0 = \int_{-1/2}^{1/2} s(\vartheta) \text{wal}(0, \vartheta) d\vartheta = U \int_{-1/2}^{1/2} (\vartheta + 1/2) d\vartheta = U/2,$$

$$c_1 = \int_{-1/2}^{1/2} s(\vartheta) \text{wal}(1, \vartheta) d\vartheta = -U \int_{-1/2}^0 (\vartheta + 1/2) d\vartheta + U \int_0^{1/2} (\vartheta + 1/2) d\vartheta = U/4.$$

მაშასადამე, მართკუთხა სამკუთხედის ფორმის იმპულსის აპროქსიმაციისას უოლშის ფუნქციათა სისტემის პირველი ორი წევრის გამოყენებით მიიღება (იხ. ნახ. 142) საფესუროვანი ფორმით მიახლო-



ნახ. 141



ნახ. 142

ებით წარმოდგენა. უნდა აღინიშნოს, რომ ზემოთ მოყვანილი ენერგეტიკული ნორმით ასეთი აპროქსიმაცია უკვე არის დამაკმაყოფილი.

სინამდვილეში საწყისი სიგნალის ენერჯიაა

$$E_s = U^2 \int_{-1/2}^{1/2} (\vartheta + 1/2)^2 d\vartheta = U^3/3,$$

მაშინ როცა სხვაობის ენერგია

$$\|s(\vartheta) - c_0 wal(0, \vartheta) - c_1 wal(1, \vartheta)\|^2 = 4U^2 \int_0^{1/4} x^2 dx = U^2 / 48$$

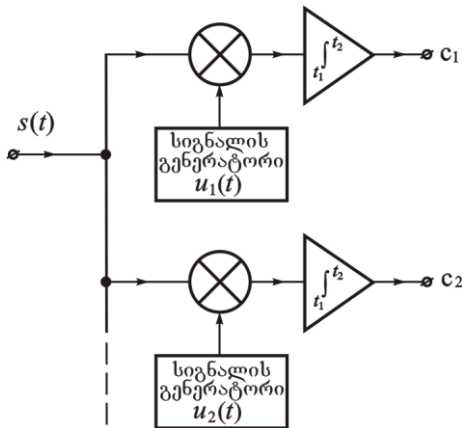
შეადგენს მხოლოდ 1/16, ანუ აპროქსიმირებული სიგნალის ენერგიის 6,25%.

1.4.4. სიბნალების ორთოგონალური დაშლის აპარატურული რეალიზაცია

განვიხილოთ ხელსაწყო სტრუქტურული სქემა, რომელიც ექსპერიმენტალური გზით ანალოგურ სიგნალს დაშლის ფუნქციას განზოგადოებულ მწკრივად მოცემული ორთონორმირებული ბაზისური ფუნქციების სისტემის მიმართ (იხ. ნახ.1.43).

აქ ძირითადი ელემენტებია იმ ბაზისური ფუნქციების გენერატორები, რომელთა მიმართ ხდება დაშლა. გასაანალიზებელი სიგნალი ერთდროულად მიეწოდება გამამრავლებელი რგოლების ერთობლიობას, ამ სიგნალსა და შესაბამის ბაზისურ ფუნქციებზე გადასამრავლებად. მათი გამოსასვლელიდან სიგნალები მიეწოდება შესაბამის ინტეგრატორებს. სიგნალის ასეთი დამუშავების შემდეგ თითოეული ინტეგრატორის გამოსასვლელზე მოთავსდება დროში უცვლელი დონე, რომლის სიდიდე (1.29) ფორმულის შესაბამისად, ზუსტად უდრის განზოგადოებული ფუნქციის მწკრივის ამ თუ იმ კოეფიციენტს.

ნახ. 1.43



მოყვანილი სისტემა მნიშვნელოვანია თეორიული და გამოყენებითი თვალსაზრისით. მისი ანალიზის შედეგად გრძელდება, რომ სიგნალში მოთავსებული სრული ინფორმაცია მართლაც შესაძლებელია წარმოვიდგინოთ უსასრულო, მაგრამ მაინც

სასრული რიცხვების ერთობლიობით.

ნახ. 1.43

1.5. I თაზის მიმოხილვა

1.5.1. შედეგები

1. სიგნალების თეორიული გამოკვლევისთვის აუცილებელია შევადგინოთ მათი მათემატიკური მოდელები.
2. სიგნალების კლასიფიკაცია ხორციელდება შესაბამისი მათემატიკური მოდელების არსებითი ნიშნების საფუძველზე. მიღებულია განვასხვავოთ ერთგანზომილრიანი და მრავალგანზომილრიანი, დეტერმინირებული და შემთხვევითი, ანალოგიური და დისკრეტული სიგნალები. სიგნალების ნაირსახეობას წარმოადგენენ ციფრული სიგნალები.
3. დინამიური წარმოდგენის პრინციპი საშუალებას გვაძლევს ავღწეროთ სიგნალები, მათი ქცევა როგორც "წარსულში", ასევე "მომავალში".
4. დინამიური წარმოდგენისათვის გამოიყენება ორი ელემენტარული სიგნალი: ჩართვის ფუნქცია (ხევისაიდის ფუნქცია) და დელტა-ფუნქცია (დირაკის ფუნქცია).
5. სიგნალების სიმრავლის რაიმე სტრუქტურის შემოტანის გზით შესაძლებელია გადავაქციოთ ხაზოვან ფუნქციონალურ სივრცეში.
6. ხაზოვანად დამოუკიდებელი ვექტორების სისტემა ქმნის კოორდინატულ ბაზისს, რომელზეც შესაძლებელია დაეშალოთ ნებისმიერი ვექტორი, რომელიც მიეკუთვნება ხაზოვან სივრცეს.
7. სიგნალების ხაზოვან სივრცეში ვექტორის სივრცის ანალოგი არის **ნორმა**.
8. ნორმის კვადრატს ეწოდება სიგნალის **ენერჯია**.
9. სიგნალების ხაზოვანი სივრცე იქცევა მეტრიკულ სივრცედ, თუ გავსახდურავთ **მეტრიკას** – მანიძლს ორ ვექტორს შორის.
10. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ კუთხე ხაზოვანი სივრცის ორ ელემენტს შორის, შემოაქვთ სკალარული ნამრავლის ცნება, რომელიც სიგნალების ურთიერთენერჯიების პროპორციულია. თუ სკალარული ნამრავლი უდრის ნულს, მაშინ სიგნალები ორთოგონალურია.
11. სიგნალის წარმოდგენას **ორთონორმირებული ბაზისის** დაშლის სახით, ეწოდება ფურიეს განზოგადოებული მწკრივი. ასეთი მწკრივის კოეფიციენტები წარმოადგენენ დასაშლელი სიგნალის და შესაბამისი ბაზისური ვექტორების სკალარულ ნამრავლს.

12. სიბნალის ენერგია უდრის ფურიეს განზოგადოებული რიგის ყველა წევრის ენერჯიის ჯამს.
13. სიბნალის დაშლა ორთონორმირებული ბაზისის მიხედვით უზრუნველყოფს აპროქსიმაციის ცდომილების ენერჯიის მინიმუმს.
14. სიბნალში შენახული სასარგებლო ინფორმაციის ამოღების პროცესი შესაძლებელია წარმოვიდგინოთ, როგორც ფურიეს განზოგადოებული მწკრივის კოეფიციენტების რიცხვითი მნიშვნელობების აპარატული განსაზღვრა.

1.5.2. საპონტროლო კითხვები

- 1 რას ეწოდება დეტერმინირებული სიბნალი?
- 2 რა სახე აქვს დეტერმინირებული სიბნალის მმ-ს?
- 3 როგორი სიბნალები გამოიყენება რადიოელექტრონიკაში?
- 4 რა არის იმპულსური სიბნალი? რა პარამეტრებით ხასიათდება იგი?
- 5 რას ეწოდება სიბნალის სპექტრალური შლილი?
- 6 რა არის სპექტრალური დიაგრამა?

1.5.3. ამოცანების ამოხსნის ზოგადი მეთოდიკა

ზოგადი მეთოდი არ არსებობს. ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში მაგალითის/ამოცანის ამოხსნას უნდა მიუსადაგოთ შესაბამისი მათემატიკური აპარატი და ლოგიკური მსჯელობით ამოხსნათ დასმული მაგალითი ან ამოცანა.

1.5.4. ტიპიური ამოცანების ამოხსნის მაგალითები

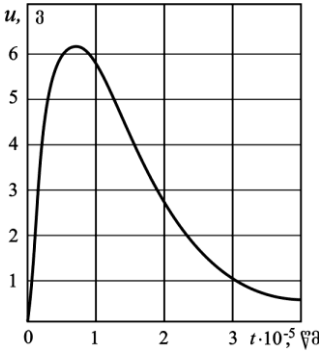
მაგალითი 1.1. იმპულსური $u(t)$ სიბნალი, რომლის ერთეულის განზომილებაა ვოლტი (ვ), აღიწერება ფორმულით:

$$u(t) = 25 \left[\exp(-10^5 t) - \exp(-2 \cdot 10^5 t) \right] \sigma(t).$$

1. ააგეთ მოცემული იმპულსის გრაფიკი;
2. განსაზღვრეთ სიბნალის მაქსიმალური u_{\max} მნიშვნელობა და მისი დადგომის t_{\max} დრო;
3. განსაზღვრეთ იმპულსის τ_0 ხანგრძლივობა, რომელიც განისაზღვრება როგორც მონაკვეთის სიგრძე ნულიდან იმ წერტილამდე, რომელშიც სიბნალის მყისიერი მნიშვნელობა, მაქსიმალურ მნიშვნელობასთან შედარებით, მცირდება 10 ჯერ.

ამოხსნა: დროში სიბნალის მყისიერი მნიშვნელობების ცვლილების გრაფიკი მოყვანილია ნახ. მ.1.1-ზე.

1. ცხადია, რომ $u'(t_{\max}) = 0$ პირობიდან გამომდინარე მივიღებთ



ნახ. მ.1.1

განტოლებას t_{\max} დროის განსაზღვრისათვის:

$$-\exp(-10^5 t_{\max}) + 2\exp(-2 \cdot 10^5 t_{\max}) = 0$$

$$\left[\begin{aligned} (y = -10^5 t_{\max}) \rightarrow -e^y + 2e^{2y} = 0 \rightarrow \\ \rightarrow e^y (-1 + 2e^y) = 0 \rightarrow \\ \rightarrow 2e^y = 1 \rightarrow e^y = 1/2 \rightarrow y = \ln(1/2) \rightarrow \\ \rightarrow -10^5 t_{\max} = \ln(1/2) \end{aligned} \right]$$

საიდანაც $10^5 t_{\max} = -\ln(1/2)$, ანუ

$$t_{\max} = 6,931 \cdot 10^{-6} \text{წმ} = 6,931 \text{ მკწმ},$$

ამასთან $u_{\max} = 6.25$ ვ.

2. ამოცანის პირობიდან გამომდინარე იმპულსის ხანგრძლივობა არის განტოლების $25[\exp(-10^5 \tau_0) - \exp(-2 \cdot 10^5 \tau_0)] = 6.25/10$ ფესვი.

შემოვიტანოთ უგანზომილებო სიდიდე $x = 10^5 \tau_0$. მივიღებთ $\exp(-x) - \exp(-2x) = 0.025$.

აქედან განტოლებაზე გადასვლისას, რომელიც ამოიხსნება x -ის მიმართ, მივიღებთ $x = -\ln(0,025 + e^{-2x})$.

(1.1)

ასეთი ტრანსცედენტული განტოლების ფესვები ხელსაყრელია ვიპოვოთ მიახლოებითი მიმდევრობის მეთოდით (მაგალითად, კალკულატორის გამოყენებით ან რაიმე პროგრამით გამოთვლის რიცხვითი მეთოდის საშუალებით).

სიგნალის გრაფიკის გამოყენებით, შეგვიძლია ავირჩიოთ საკმარისად ახლო მდებარე x_0 მიახლოება. ვთქვათ, რომ $x_0 = 3$, და შემდეგ გამოთვლებით ზუსტდება ამონახსნი.

თუ ჩავსვათ ამ მნიშვნელობას (1.1)-ში, მივიღებთ პირველ მიახლოებას

$$x_1 = -\ln(0,025 + e^{-6}) = 3.5943422.$$

მოყვანილ პროცესს ვაგრძელებთ იტერაციული პრინციპის გამოყენებით:

$$x_n = -\ln(0,025 + e^{-2x_{n-1}}), \quad n = 2, 3, \dots$$

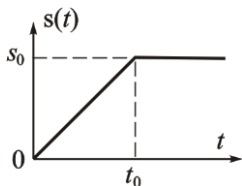
გამოთვლების პროცედურას ვაგრძელებთ მანამ, სანამ მიღებული ორი მიმდევრობითი მნიშვნელობა არ გახდება უმნიშვნელოდ განსხვავებული ერთმანეთისაგან. საბოლოოდ მივიღებთ $x = 3.6628862$ (ყველა რიცხვი ზუსტია!). ასეთი სიზუსტით პასუხის მიღება პრაქტიკულად არ არის აუცილებელი.

(უმეტეს შემთხვევაში, საკმარისია შევჩერდეთ მძიმის შემდეგ ორი ნიშნის მიღების შემდეგ).

შაბოლოოდ, მიახლოებით მივიღებთ $x \cong 3.66$. ამ შედეგის გათვალისწინებით $\tau_0 = 3.66 \times 10^{-5}$ წმ = 36.6 მკწმ.

მიმდევრო განაგარიშებით აიგება დაზუსტებული გრაფიკი.

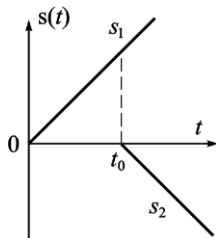
მაგალითი 1.5.2. $s(t)$ სიგნალს (ნახ. მ.1.2) აქვს შემდეგი სახის მათემატიკური მოდელი:



ნახ. მ.1.2

$$s(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0, \\ s_0(t/t_0) & , 0 \leq t \leq t_0, \\ s_0 & , t > t_0. \end{cases}$$

წარმოადგინეთ მოცემული დამოკიდებულება მონაკვეთ-ხაზოვანი ფუნქციების ჯამად.



ნახ. მ.1.3

ამოხსნა: $s(t)$ სიგნალი შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც ორი ხაზოვანად ზრდადი ფუნქციის ჯამი (ნახ. მ.1.3) სიდიდით ერთნაირი, მაგრამ ნიშნით განსხვავებული დახრის კუთხური (s_0/t_0) კოეფიციენტებით. აქედან

$$s(t) = (s_0/t_0)t\sigma(t) - (s_0/t_0)(t-t_0)\sigma(t-t_0).$$

მაგალითი 1.5.3. დარწმუნდით, რომ როცა $n \rightarrow \infty$, ფუნქციის $f_n(t) = (n/2)e^{-n|t|}$ მიმდევრობის ზღვარი იქნება დირაკის $\delta(t)$ ფუნქცია.

ამოხსნა: ფუნქცია $f_n(t)$ არის ლუწი; ფართობი შეზღუდულია მრუდის მარჯვენა ნახევრით,

$$\frac{n}{2} \int_0^{\infty} e^{-nt} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\xi} d\xi = \frac{1}{2}.$$

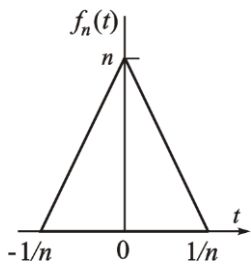
აქედან ჩანს, რომ ფართობი, შემოფარგლული მთლიანი მრუდით, n -ისგან დამოუკიდებლად, უდრის ერთს.

ნებისმიერი $t \neq 0$ დროს $f_n(t)$ ფუნქციის ზღვრული მნიშვნელობა უდრის ნულს. მართლაც, **ლოპიტალის** წესით

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n e^{-nt} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n'}{(e^{nt})'} = \lim_{n \rightarrow \infty} (te^{nt})^{-1} = 0.$$

მაშასადამე, $f_n(t)$ მიმდევრობის ზღვარი არის განზოგადოებული ფუნქცია $\delta(t)$

მაგალითი 1.5.4.



ნახ. მ.1.4
ერთს.

დამტკიცეთ, რომ $f_n(t)$ ფუნქციის მიმდევრობის ზღვარი (იხ. ნახ. მ.1.4), როცა $n \rightarrow \infty$ არის დირაკის $\delta(t)$ ფუნქცია.

დამტკიცება: ცხადია, რომ მონაკვეთის სიგრძე, რომელზეც თავმოყრილია $f_n(t)$ ფუნქცია, უდრის $2/n$. ამასთან, როცა $n \rightarrow \infty$, სიგრძე მიისწრაფის ნულისაკენ. ამასთან, n -ის მნიშვნელობისაგან დამოუკიდებლად სამკუთხედის ფარდობი,

შემოფარგლული $f_n(t)$ ფუნქციით, უდრის

მაგალითი 1.5.5. გამოთვალეთ ძაბვის (ვ) ექსპონენციალური ვიდეომპულსის ენერგია E_0 და ნორმა $\|u\|$, თუ

$$u(t) = 30 \exp(-10^5 t) \sigma(t)$$

ამოხსნა: სიგნალის ენერგიის განსაზღვრიდან

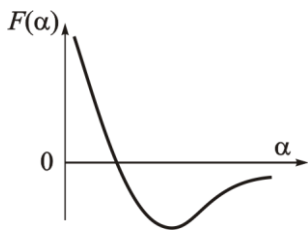
$$E_0 = \int_0^8 u^2 dt = 900 \int_0^8 e^{-2 \cdot 10^5 t} dt = 4.5 \cdot 10^{-3} \text{ ვ}^2 \cdot \text{წმ}.$$

მოცემული სიგნალის ნორმა $\|u\| = (E_0)^{1/2} = 6.708 \cdot 10^{-2} \text{ ვ} \cdot \text{წმ}^{1/2}$

მაგალითი 1.5.6. მოცემულია ორი სიგნალი: მართკუთხა ვიდეომპულსი $u(t) = U_0 [\sigma(t) - \sigma(t - \tau_0)]$ და ექსპონენციალური ვიდეომპულსი $v(t) = U_0 e^{-\alpha t} \sigma(t)$ (პარამეტრები U_0 , α და τ_0 - დადებითი ნამდვილი რიცხვებია). ჩათვალეთ, რომ τ_0 ხანგრძლიობა ფიქსირებულია. იპოვეთ α პარამეტრის

მნიშვნელობა, რომლის დროსაც მანძილი $\rho(u, v)$ იქნება მინიმალური.

ამოხსნა: სიგნალებს შორის მანძილის კვადრატი



$$\begin{aligned} \rho^2(u, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} (u-v)^2 dt = \\ &= U_0^2 \int_0^{\tau_0} (1-e^{-at})^2 dt + U_0^2 \int_{\tau_0}^{\infty} e^{-2at} dt = \\ &= U_0^2 \left[\frac{1}{2a} - \frac{2}{a}(1-e^{-a\tau_0}) + \tau_0 \right]. \end{aligned}$$

ნახ. მ.1.5
ფუნქციის მინიმუმი

ამოცანის პირობიდან უნდა ვიპოვოთ

$$F(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{2} - 2(1-e^{-\alpha\tau_0}) \right] = \frac{2e^{-\alpha\tau_0} - 1.5}{\alpha}.$$

მიახლოებითი გრაფიკი, რომელიც მოყვანილია ნახ. მ.1.5, მიუთითებს იმაზე, რომ $F(\alpha)$ მინიმუმი არსებობს და ერთადერთია. პირობიდან $F'(\alpha) = 0$ ვპოულობთ, რომ α პარამეტრი

ტრანსცედენტური განტოლების ფესვია $\alpha^{-\alpha\tau_0} = \frac{0.75}{1+\alpha\tau_0}$. ამ

განტოლების ამოხსნისას მიმდევრობით მიახლოებითი მეთოდით (იხ. ამოცანა 1.5.1), მივიღებთ $\alpha = 0,961/\tau_0$

მაგალითი 1.5.7. სიგნალი $f(t) = t^2$ არსებობს $0 \leq t \leq 1$ დროის შუალედზე. იპოვეთ ამ სიგნალთან ხაზოვანი $u(t) = At + B$ ფუნქციის საუკეთესო მიახლოება, მინიმალური მანძილის მიღების აზრით.

ამოხსნა. შევადგინოთ განტოლება

$$\rho^2(f, u) = \int_0^1 (t^2 - At - B)^2 dt = \frac{1}{5} - \frac{A}{2} + \frac{(A^2 - 2B)}{3} + AB + B^2$$

გავუტოლოთ ნულს წარმოებულები $d\rho^2/dA$ და $d\rho^2/dB$ და მივიღებთ ხაზოვანი განტოლებების სისტემას

$$2A + 3B = 3/2 \quad \text{და} \quad A + 2B = 2/3,$$

რომელსაც აქვს ერთადერთი ამონახსნი: $B = -1/6$, $A = 1$.

მაგალითი 1.5.8. ვთქვათ $\{u_n(t)\}$, $n=1,2,3,\dots$ – ორთოგონალური სიგნალების სისტემაა, რომელიც არსებობს საერთო $a \leq t \leq b$ მონაკვეთზე და არის გილბერტის სივრცის რაიმე ვექტორი. დაამტკიცეთ, რომ სიგნალების ეს სისტემა ხაზოვნად დამოუკიდებელია.

ამოხსნა: განვიხილოთ ტოლობა $a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_ku_k = 0$.

განტოლების ორივე ნაწილი გავამრავლოთ u_1 სიგნალზე. ვინაიდან ფუნქციათა სისტემა ორთოგონალურია განტოლების მარცხენა მხარეში ნულისაგან განსხვავებული იქნება მხოლოდ სკალარული ნამრავლი (u_1, u_1) . ტოლობა $a_1(u_1, u_1) = 0$ შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა $a_1 = 0$. ანალოგიური მსჯელობით u_2, u_3, \dots, u_k სიგნალების მიმართ ნებისმიერი k -ისთვის, ვრწმუნდებით, რომ სიგნალების სისტემის ორთოგონალობიდან გამომდინარეობს ხაზოვნობის დამოუკიდებულობის თვისება.

მაგალითი 1.5.9. სიგნალები $u(t)$ და $v(t)$ არის გილბერტის სივრცის რაიმე ნამდვილი ელემენტები. ამასთან განსახილავი სიგნალები ხაზოვნად დამოუკიდებელია, ანუ $u = \lambda \cdot v$ ტოლობას არ აქვს ადგილი არცერთი λ ნამდვილი პარამეტრის მნიშვნელობისას. დაამტკიცეთ კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობის ჭეშმარიტება:

$$|(u, v)| < \|u\| \cdot \|v\|.$$

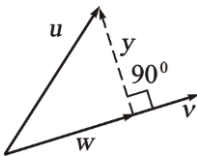
ამოხსნა: პირობის მიხედვით განსახილავი სიგნალები $u(t)$ და $v(t)$ ხაზოვნად დამოუკიდებელია, მაშინ $(u + \lambda v, u + \lambda v) > 0$, აქედან

$$\lambda^2 (v, v) + 2\lambda (u, v) + (u, u) > 0.$$

λ -ის მიმართ კვადრატულ სამწევრს არ აქვს ნამდვილი ფესვები და ამიტომ $(u, u) \cdot (v, v) - (u, v)^2 > 0$, ანუ

$|(u, v)| < \|u\| \cdot \|v\|$, რაც დასამტკიცებელი იყო.

მაგალითი 1.5.10. გილბერტის სივრცეში მოცემულია ნებისმიერი ვექტორი u და ვექტორი v ისეთი, რომ $\|v\| = 1$. ჩვეულებრივი ვექტორების ანალოგიურად, გეომეტრიიდან ცნობილია, რომ სიბრტყეზე სრულდება ტოლობა $w = (u, v) \cdot v$. ვექტორს w ეწოდება u ვექტორის პროექცია



ნახ. მ.1.6 v მიმართულებაზე (იხ. ნახ. მ.1.6). დაამტკიცეთ, რომ ვექტორი $y = u - w$ ორთოგონალურია ვექტორი v -ს მიმართ.

შითითება: იპოვეთ (u, v) სკალარული ნამრავლი

მაგალითი 1.5.11. ვთქვათ სიგნალების გილბერტის სივრცეში მოცემულია ვექტორების არაორთოგონალური ვექტორების სისტემა $\{g_0, g_1, \dots, g_n, \dots\}$. მის საფუძველზე ააგეთ ორთონორმირებული სისტემა $\{u_0, u_1, \dots, u_n, \dots\}$ ისეთნაირად, რომ თითოეული u_k ვექტორი იყოს $u_k = c_{k0}g_0 + c_{k1}g_1 + \dots + c_{kn}g_n + \dots$ სახის კომბინაცია მუდმივი კოეფიციენტებით.

ამოხსნა. გავანორმიროთ ელემენტი g და დავეუშვათ $u_0 = g_0 / \|g_0\|$. ვექტორი $h_1 = g_1 - (g_1, u_0)u_0$ ორთოგონალურია u_0 -ს მიმართ (იხ. ამოცანა 1.27). გავანორმიროთ h_1 , მივიღებთ ორთონორმირებული სისტემის ახალ ელემენტს: $u_1 = h_1 / \|h_1\|$. ანალოგიური მოქმედებით, მივიღებთ ელემენტს

$h_2 = g_2 - (g_2, u_0)u_0 - (g_2, u_1)u_1$, რომელიც ორთოგონალურია როგორც u_0 -ის, ასევე u_1 -ის მიმართ. მისი ნორმირებით მივიღებთ $u_2 = h_2 / \|h_2\|$. ამ პროცედურის გაგრძელებით k -ურ ბიჯზე

$$(k = 3, 4, \dots): h_k = g_k - (g_k, u_0)u_0 - (g_k, u_1)u_1 - \dots - (g_k, u_{k-1})u_{k-1}.$$

მათემატიკაში, ორთონორმირებული სისტემის ბაზისური ვექტორების აგების ასეთი ხერხი ცნობილია **გრამმა-შმიდტის** სახელით.

თავი 2. სიბნალების სპექტრული წარმოდგენა

განსხვავებული სისტემების ორთოგონალურ ფუნქციებს შორის, რომლებიც შესაძლებელია გამოყენებულ იქნეს რადიოტექნიკური სიგნალების ბაზისებად, განსაკუთრებული ადგილი უკავია ჰარმონიულ (სინუსოიდალურ და კოსინუსოიდალურ) ფუნქციებს. ჰარმონიული სიგნალების მნიშვნელობა განპირობებულია რიგი მიზეზებით. კერძოდ:

1. ჰარმონიული სიგნალები ინვარიანტულია გარდაქმნების მიმართ, რომლებსაც ასორციელებს სტაციონარული ხაზოვანი ელექტრული წრედები. თუ ასეთი წრედი აღიგზნება ჰარმონიული რხევის წყაროს მეშვეობით, მაშინ სიგნალი წრედის გამოსავალზე რჩება ჰარმონიული იგივე სიხშირით, მაგრამ შესავალი სიგნალისაგან განსხვავებულია მხოლოდ ამპლიტუდით და ფაზით.

2. ჰარმონიული სიგნალების გენერირების ტექნიკა შედარებით მარტივია.

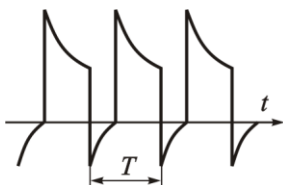
თუ რაიმე სიგნალი წარმოდგენილია განსხვავებული სიხშირის ჰარმონიული რხევების ჯამად, მაშინ ამბობენ, რომ განხორციელებულია ამ სიგნალის **სპექტრული დაშლა**. ჰარმონიული სიგნალის ცალკეული კომპონენტები წარმოადგენენ მის სპექტრს.

2.1. პერიოდული სიბნალები და ფურიუს მჯობიზი

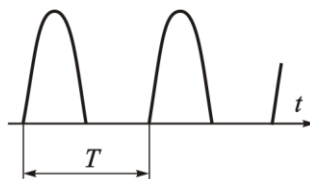
დროში განმეორებადი პროცესის მათემატიკური მოდელი არის პერიოდული სიგნალი $s(t)$ შემდეგი თვისებებით:

$$s(t) = s(t \pm nT), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

სადაც T - სიგნალის პერიოდია (იხ. ნახ. 2.1 და 2.2).



ნახ. 2.1



ნახ. 2.2

ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ ვიპოვოთ ასეთი სიგნალის სპექტრული შლილი.

2.1.2. ფურიეს მწკრივი

დროის $[-T/2, T/2]$ მონაკვეთში შემოვიტანოთ ორთონორმირებული ბაზისი, შედგენილი ჰარმონიული ფუნქციების ჯერადი სისშირეებით:

$$\begin{aligned} u_0 &= 1/\sqrt{T}, & u_1 &= \sqrt{2/T} \sin 2\pi t / T, \\ u_2 &= \sqrt{2/T} \cos 2\pi t / T, & u_3 &= \sqrt{2/T} \sin 4\pi t / T \\ u_4 &= \sqrt{2/T} \cos 4\pi t / T, & u_5 &= \sqrt{2/T} \sin 6\pi t / T \end{aligned} \quad (2.2)$$

ამ ბაზისიდან ნებისმიერი u_n აკმაყოფილებს პერიოდულობის (2.1) პირობას. ამიტომ ამ ბაზისში $s(t)$ სიგნალის ორთოგონალური დაშლის შემდეგ, ანუ თუ გამოვითვლით კოეფიციენტებს

$$c_m = (s, u_m), \quad (2.3)$$

მივიღებთ სრექტრულ დაშლას

$$s(t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m u_m(t), \quad (2.4)$$

რომელიც ჭეშმარიტია მთელი უსასრულო დროის დერძზე.

(2.4) სახის რიგს ეწოდება მოცემული სიგნალის **ფურიეს რიგი**. შემოვიტანოთ მიმდევრობის ძირითადი $\omega_1 = 2\pi/T$ სისშირე, რომელიც ქმნის პერიოდულ სიგნალს. დაშლის კოეფიციენტების გამოთვლისას (2.3) ფორმულის გამოყენებით, ფურიეს მწკრივის საშუალებით შეიძლება წარმოვიდგინოთ სხვადასხვა სისშირის მქონე ჰარმონიული, n -ის ჯერადი რხევების ჯამის

სახით:
$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)) \quad (2.5)$$

სადაც:
$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(n\omega_1 t) dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(n\omega_1 t) dt \end{aligned} \quad (2.6)$$

ზოგად შემთხვევაში პერიოდული სიგნალი შეიცავს მუდმივ მდგენელს და ჰარმონიული რხევების – ჰარმონიკების უსასრულო კრებულს, **რომელთა სისშირეები** $\omega_n = n\omega_1, n = 0, 1, \dots$.

მიმდევრობის ძირითადი სიხშირეები ω_1 სიხშირის ჯერადა. ლუწ სიგნალს გააჩნია მხოლოდ კოსინუსოიდალური, ხოლო კენტი სიგნალს - სინუსოიდალური მდგენელები.

თითოეული ჰარმონიკა შეიძლება აღიწეროს მისი ამპლიტუდით A_n და საწყისი ფაზით φ_n . მაშინ ფურიეს მწკრივის კოეფიციენტები შეიძლება გამოვითვალოთ ფორმულებით:

$$a_n = A_n \cos \varphi_n$$

$$b_n = A_n \sin \varphi_n$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{b_n}{a_n} \quad ,$$

ხოლო ფურიეს მწკრივის ექვივალენტური ფორმულა იქნება:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t - \varphi_n) \quad , \quad (2.7)$$

რომელიც ზოგჯერ გამოსაყენებლად უფრო მოხერხებელია.

2.13. პერიოდული სიბნალეზის სპექტრული დიაგრამა

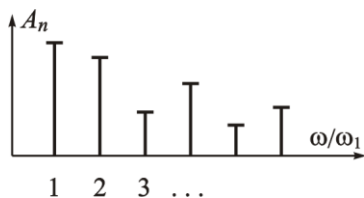
რადიოტექნიკაში ორთოგონალური ფუნქციების ბაზისად იღებენ ჰარმონიულ ფუნქციებს, რაც დაკავშირებულია მათი გენერაციის სიმარტივესთან, აგრეთვე იმასთან, რომ სიგნალები ინვარიანტულია გარდაქმნების მიმართ სტანდარტულ ელექტრულ წრედებში.

სიგნალის სპექტრული დაშლა – ესაა სიგნალის წარმოდგენა სხვადასხვა სიხშირიანი ჰარმონიული რხევების ჯამის სახით.

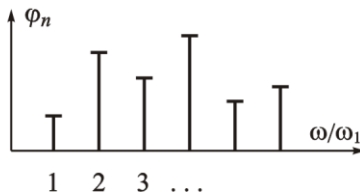
სიხშირული სპექტრი (ანუ სპექტრი) – ესაა სიგნალის ცალკეული ჰარმონიული კომპონენტების კრებული.

პერიოდული სიგნალის **სპექტრული დიაგრამა** – ესაა ფურიეს მწკრივის კოეფიციენტების გრაფიკური გამოსახულება კონკრეტული სიგნალისათვის.

არსებობს პერიოდული სიგნალის ამპლიტუდური და ფაზური სპექტრული დიაგრამები. დიაგრამების ჰორიზონტალურ ღერძზე მასშტაბში გადაიზომება ჰარმონიკების სიხშირეები, ხოლო ვერტიკალურ ღერძზე – მათი ამპლიტუდები (იხ. ნახ. 2.3) ან საწყისი ფაზები (იხ. ნახ. 2.4).



ნახ. 2.3



ნახ. 2.4

მაგალითი 2.1. მართკუთხა ფორმის ვიდეომპულსის $s(t)$ პარამეტრებია τ_0, T, A . ფუნქცია ლუწია $t=0$ წერტილის მიმართ. იპოვეთ ფურიეს მწკრივი.

ამოხსნა: რადიოტექნიკაში თანაფარდობას $q = \frac{T}{\tau_0}$ უწოდებენ **იმპულს-**

თა სიმეჩხრეს, სადაც T არის სიგნალებს შორის პერიოდი, ხოლო τ_0 – იმპულსის ხანგრძლივობა. (2.6) ფორმულების გამოყენებით გპოულობთ

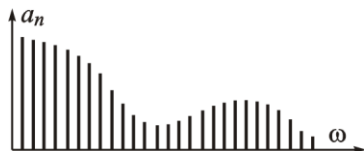
$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt \Rightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} A dt = \frac{A}{q \cdot \tau_0} \Big|_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} = \frac{A}{q},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(n\omega_1 t) dt = \frac{2A}{T} \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} \cos(n\omega_1 t) dt = \frac{2A}{Tn\omega_1} \cdot 2 \sin \frac{n\omega_1 \tau_0}{2} = \\ &= \frac{2A}{\pi n} \sin \frac{n\omega_1 \tau_0}{2} \end{aligned}$$

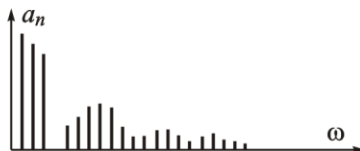
საბოლოოდ ფურიეს მწკრივის ჩაწერა მოსახერხებელია შემდეგი (2.7) სახით:

$$s(t) = \frac{A}{q} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/q)}{n\pi/q} \cos(n\omega_1 t) \right].$$

ნახ. 2.5-2.6 –ზე მოყვანილია განხილული მიმდევრობების ამპლიტუდური დიაგრამები ორი კიდურა შემთხვევისთვის: ნახ. 2.5 – დიდი მნიშვნელობის სიმეჩხრის დროს, ხოლო ნახ. 2.6 – მცირე სიმეჩხრის დროს.



ნახ. 2.5



ნახ. 2.6

მნიშვნელოვანია აღინიშნოს, რომ მოკლე იმპულსები, რომლებიც იშვიათად მისდევენ ერთმანეთს ($q \ll 1$), ხასიათდებიან მდიდრული სპექტრული შემადგენლობით.

მაგალითი 2.1. პერიოდულად მიმდევრულ ჰარმონიული სიგნალების იმპულსებს აქვთ სახე $U_m \cos \omega_1 t$. სიგნალი (იხ. ნახ. 2.7) შეზღუდულია U_0 დონეზე (იგულისხმება, რომ $|U_0| < U_m$). იპოვეთ ფურიეს მწკრივი.

ამოხსნა: შემოვიტანოთ სპეციალური პარამეტრი - წააკეთის კუთხე ϑ , რომელიც განისაზღვრება თანაფარდობით $U_m \cos \vartheta = U_0$, საიდანაც $\vartheta = \arccos(U_0/U_m)$. ამის შესაბამისად 2ϑ (იხ. ნახ. 2.7) უდრის ერთი იმპულსის ხანგრძლივობას, ანუ $\omega_1 \tau_0 = 2\vartheta$.

ანალიზურად იმპულსების ასეთ მიმდევრობას ექნება სახე:

$$s(t) = U_m \cos \omega_1 t - U_0, \quad -\vartheta \leq \omega_1 t \leq \vartheta.$$

მიმდევრობის მუდმივი მდგენელი

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{T} \int_{-\vartheta/\omega_1}^{\vartheta/\omega_1} (U_m \cos \omega_1 t - U_0) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} (U_m \cos \omega_1 t - U_0) d(\omega_1 t) = \\ &= \frac{U_m}{\pi} (\sin \vartheta - \vartheta \cos \vartheta). \end{aligned}$$

პირველი ჰარმონიკის ამპლიტუდური კოეფიციენტი

$$a_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} (U_m \cos \omega_1 t - U_0) \cos \omega_1 t d(\omega_1 t) = \frac{U_m}{\pi} (\vartheta - \sin \vartheta \cos \vartheta).$$

ანალოგიურად გამოითვლება a_n ჰარმონიული მდგენელები,

როცა $n = 2, 3, \dots$:

$$a_n = \frac{2U_m}{\pi} \cdot \frac{\sin n\vartheta \cos \vartheta - n \cos n\vartheta \sin \vartheta}{n(n^2 - 1)}.$$

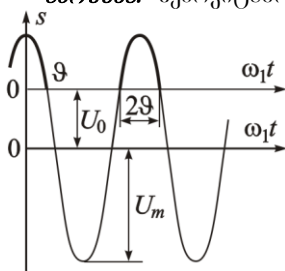
ჩვეულებრივ მიღებული შედეგები ნაიწერება ასე:

$$a_0/2 = U_m \gamma_0(\vartheta); \quad a_n = U_m \gamma_n(\vartheta),$$

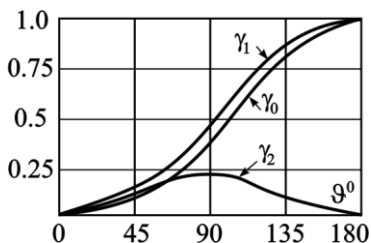
სადაც $\gamma_0(\vartheta), \gamma_1(\vartheta), \gamma_2(\vartheta), \dots$ -

ბერგის ფუნქციებად წოდებული

გამოსახულებებია: $\gamma_0 = \frac{1}{\pi} (\sin \vartheta - \vartheta \cos \vartheta), \quad \gamma_1 = \frac{1}{\pi} (\vartheta - \sin \vartheta \cos \vartheta),$



ნახ. 2.7



ნახ. 2.8

$$\gamma_n = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin n\vartheta \cos \vartheta - n \sin \vartheta \cos n\vartheta}{n(n^2 - 1)} \right), \quad \text{როცა } n = 2, 3, \dots$$

ბერგის ფუნქციების გრაფიკები მოყვანილია ნახ. 2.8 -ზე

2.4. ფურიეს მწკრივის კომპლექსური ფორმა

პერიოდული სიგნალის სპექტრული დაშლა შეიძლება მოხდეს საბაზისო ფუნქციების სისტემაში, რომლებიც შედგება კომპლექსურ მაჩვენებლებიანი ექსპონენტებისაგან წარმოსახვითი მაჩვენებლებით:

$$\{u_k\} = \left\{ \frac{\exp(jk\omega_1 t)}{\sqrt{T}} \right\}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.10)$$

ამ ბაზისის ფუნქციები პერიოდულია T პერიოდით და ორთონორმირებულია დროის მონაკვეთზე [-T/2, T/2], ვინაიდან

$$(u_m, u_n) = \int_{-T/2}^{T/2} u_m u_n^* dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(m-n)x} dx = \begin{cases} 1 & \text{როცა } m = n \\ 0 & \text{როცა } m \neq n \end{cases}$$

მაშინ, კომპლექსური სიგნალის ნორმის გათვალისწინებით, ნებისმიერი პერიოდული სიგნალის ფურიეს კომპლექსური მწკრივი მიიღებს სახეს

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_1 t} \quad \text{კოეფიციენტებით } c_n = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt.$$

ჩვეულებრივ გამოიყენებენ შემდეგი ფორმით ჩაწერას:

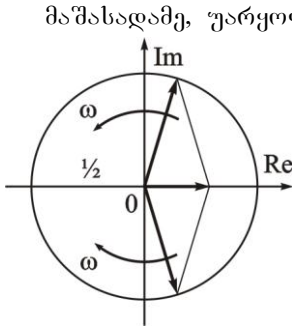
$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t}, \quad (2.11)$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt. \quad (2.12)$$

გამოსახულება (2.11) წარმოადგენს ფურიეს მწკრივს კომპლექსურ ფორმაში.

ფორმულის თანახმად სიგნალის სპექტრი შეიცავს კომპონენტებს სისშირის უარყოფით ნახევარდერძზე, ამასთან $C_{-n} = C_n^*$. (2.11) რიგში შესაკრებები უარყოფითი და დადებითი სისშირეებით გაერთიანდებიან წყვილებად, მაგალითად:

$$\begin{aligned} C_n e^{jn\omega_1 t} + C_{-n} e^{-jn\omega_1 t} &= |C_n| e^{j(n\omega_1 t - \varphi_n)} + |C_n| e^{-j(n\omega_1 t + \varphi_n)} = \\ &= 2|C_n| \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \end{aligned}$$



ნახ. 2.9

მაშასადამე, უარყოფითი სიხშირე ფიზიკური ცნება კი არაა, არამედ მათემატიკური, რომელიც გამომდინარეობს კომპლექსური რიცხვების წარმოდგენის ხერხიდან. დადებით სიხშირეს შეესაბამება ვექტორი, რომელიც ბრუნავს საათის ისრის თანხვედრის მიმართულებით (იხ. ნახ. 2.9), ხოლო უარყოფით სიხშირეს – ვექტორი, რომელიც მოძრაობს საწინააღმდეგო მიმართულებით.

2.1.5. ფურცის მწკრივის ტრიგონომეტრიული ფორმა

გამოთვლებისას გასათვალისწინებელია ექსპონენციალური ფუნქციების კავშირი ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებთან

$$e^{-jn\omega_1 t} = \cos(n\omega_1 t) - j \cdot \sin(n\omega_1 t)$$

$$\cos(n\omega_1 t) = \frac{e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t}}{2}$$

$$j \cdot \sin(n\omega_1 t) = \frac{e^{jn\omega_1 t} - e^{-jn\omega_1 t}}{2}$$

ექსპონენციალური წარმოდგენის შემთხვევაში სიგნალის სპექტრი შეიცავს ჰარმონიკებს სიხშირეთა ღერძის უარყოფით არეზე. ამ დროს უნდა გავითვალისწინოთ, რომ უარყოფითი სიხშირე მათემატიკური და არა ფიზიკური ცნებაა, განპირობებული კომპლექსური რიცხვების წარმოდგენით.

იმის გათვალისწინებით, რომ

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(k\omega_1 t - \phi_k) dt = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos(m\omega_1 t - \phi_m) \cos(n\omega_1 t - \phi_n) dt = 0,$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos(k\omega_1 t - \phi_k) dt = 0,$$

სადაც m და n – მთელი რიცხვებია, რომლებიც წარმოადგენენ k რიცხვის კერძო მნიშვნელობებს, შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ:

$$\frac{1}{T} \int_0^T [s(t)]^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2$$

თუ ფუნქცია $s(t)$ წარმოადგენს, მაგალითად, დენს ელექტრულ წრედში, მაშინ ეს გამოსახულება ჯოულ-დენცის კანონის თანახმად, საშუალო სიმძლავრის პროპორციულია, რომელიც შთაინთქმება ამ წრედში. აქედან გამომდინარე, საშუალო სიმძლავრე წრედში, რომელშიც გადის დენი, წარმოადგენს დროის რთულ პერიოდულ ფუნქციას და ტოლია ყველა ჰარმონიკის საშუალო სიმძლავრეების ჯამისა.

მიღებული გამოსახულების მარჯვენა ნაწილის ჯამი წარმოადგენს უსასრულო მწკრივს, მაგრამ რომელიმე ნომრიდან დაწყებული, ჰარმონიკების ამპლიტუდები იმდენად მცირეა, რომ შეიძლება მათი უგულებელყოფა და პრაქტიკულად რეალური პერიოდული პროცესი წარმოადგენს ფუნქციას შემოფარგლული სპექტრით. სისშირეთა ინტერვალს, რომელიც შეესაბამება შემოფარგლულ სპექტრს, ეწოდება **სპექტრის სიგანე**.

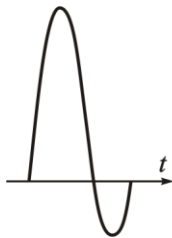
* *სიბნალების სპექტრული ანალიზის მოკლედ გადმოცემული თეორია საშუალებას გვაძლევს გავანალიზოთ სიბნალების გავლა რადიოტექნიკურ წრედებში, მოწყობილობებსა და სისტემებში.*

2.2. არაპერიოდული სიბნალის სპექტრული ანალიზი. ფურიეს ბარდაქმნა

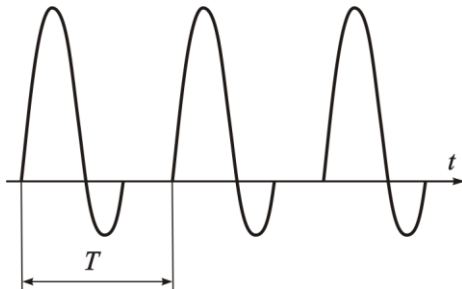
ფურიეს მეთოდი იძლევა დრმა და ნაყოფიერი გაერთიანების საშუალებას. მისი გამოყენებით შესაძლებელია მივიღოთ არაპერიოდული სიბნალების სპექტრული მახასიათებლები.

2.2.1. იმპულსის პერიოდული გაბრძნობა

ვთქვათ $s(t)$ განსაზღვრული ხანგძლივობის განცალკევებული იმპულსია (ნახ. 2.10). აზრობრივად დაეუმატოთ მას ასეთივე იმპულსები, რომლებიც რაიმე T ინტერვალით არიან დაშორებული ერთმანეთისაგან (ნახ. 2.11). მივიღებთ უკვე შესწავლილ



ნახ. 2.10



ნახ. 2.11

პერიოდულ მიმდევრობას $s_{\text{პერ}}(t)$, რომელიც შესაძლებელია წარმოვიდგინოთ ფურიეს კომპლექსური რიგის სახით:

$$s_{\text{პერ}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t}, \quad (2.13)$$

სადაც $C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$ ამპლიტუდური კოეფიციენტებია (2.14)

იმისათვის, რომ დაფუძრუნდეთ განცალკავებულ იმპულსს, განმეორების პერიოდი T მივასწრაფოთ უსასრულოობისაკენ:

ამასთან აშკარაა:

1. მეზობელი ჰარმონიკების სიხშირეები $n\omega_1$ და $(n+1)\omega_1$ აღმოჩნდებიან ისე ახლოს ერთმანეთთან, რომ ფორმულებში (2.13) და (2.14) დისკრეტული ცვლადი $n\omega_1$ შეიძლება ჩავენაცვლოთ უწყვეტი ცვლადით ω , სადაც ის მიმდინარე სიხშირეა.

2. ამპლიტუდური C_n კოეფიციენტები აღმოჩნდებიან უსასრულოდ პატარები, ვინაიდან (2.14) ფორმულაში T სიდიდე მნიშვნელშია.

ჩვენი ამოცანაა ვიპოვოთ (2.13) ზღვრული მნიშვნელობა როცა $T \rightarrow \infty$.

2.2.2. სიბნალის სპექტრული სიმპრეზის ცნება

ვისარგებლოთ იმით, რომ ფურიეს მწკრივის კოეფიციენტები ქმნიან კომპლექსურად შეუღლებელ წყვილებს:

$$C_n = A_n e^{j\phi_n}, \quad C_{-n} = A_n e^{-j\phi_n}.$$

ყოველ ასეთ წყვილს შეესაბამება ჰარმონიული რხევა

$$A_n e^{j(n\omega_1 t + \phi_n)} + A_n e^{-j(n\omega_1 t + \phi_n)} = 2A_n \cos(n\omega_1 t + \phi_n)$$

კომპლექსური ამპლიტუდით $2A_n e^{j\phi_n} = 2C_n$.

განვიხილოთ $\Delta\omega$ სიხშირის მცირე ინტერვალი, რომელიც ქმნის რაიმე არეს ამორჩეული ω_0 სიხშირის გარშემო. ამ არის ზღვრების ინტერვალში მოთავსდება $N = \Delta\omega/\omega_1 = \Delta\omega T/(2\pi)$ ცალკეული წყვილების სპექტრული მდგენელების რაოდენობა. მათი სიხშირეები მცირე სიდიდეებით განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან. ამიტომ სპექტრული შემდგენელები შეგვიძლია შევაჯამოთ ისე, რომ ყველა მათგანს ჰქონდეს ერთიდაიგივე სიხშირე და ხასიათდებოდნენ ერთნაირი კომპლექსური ამპლიტუდებით

$$2 \cdot C_n = 2 \cdot \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega_0 t} dt.$$

საბოლოოდ ვპოულობთ ექვივალენტური ჰარმონიული სიგნალის კომპლექსურ ამპლიტუდას, რომელიც ასახავს წილობრივ შენატანს ყველა იმ სპექტრული მდგენელისა, რომელსაც შეიცავს $\Delta\omega$ ინტერვალი:

$$\Delta A_{\omega_0} = \frac{2N}{T} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega_0 t} dt = \frac{\Delta\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega_0 t} dt. \quad (2.15)$$

$$\text{ფუნქციას} \quad S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.16)$$

ეწოდება $s(t)$ სიგნალის **სპექტრული სიმკვრივე**. ფორმულა (2.16) ახორციელებს მოცემული სიგნალის ფურიეს გარდაქმნას. სპექტრულ სიმკვრივეს ასევე უწოდებენ **სპექტრულ ფუნქციას** ან **ფურიეს-სახის სიგნალს**.

2.2.3. სპექტრული სიმკვრივის ცნებების ფიზიკური აზრი

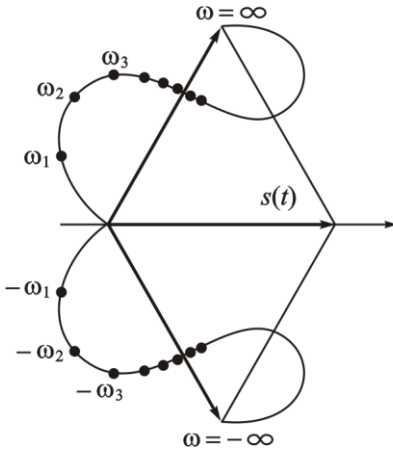
მიღებული შედეგების ინტერპრეტაცია მოსახერხებელია ჩავატაროთ კუთხური ω სიხშირიდან ციკლურ $f = \omega/(2\pi)$ სიხშირეზე გადასვლისას. ამასთან (2.15) მიიღებს სახეს:

$$\Delta A_{\omega_0} = \frac{\Delta\omega}{\pi} S(\omega_0) \Rightarrow \Delta A_{f_0} = \frac{2\pi\Delta f}{\pi} S(2\pi f_0) = 2S(2\pi f_0)\Delta f. \quad (2.17)$$

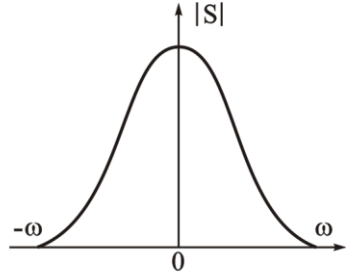
ეს გამოითქმება შემდეგნაირად: სპექტრული სიმკვრივე $S(2\pi f_0) = S(\omega_0)$ არის პროპორციულობის კოეფიციენტი სიხშირის მცირე ინტერვალის Δf სიგრძის და მის მოპასუხე f_0 ჰარმონიული სიგნალის კომპლექსურ ამპლიტუდას ΔA_{f_0} შორის. კოეფიციენტი **2** ნიშნავს, რომ ამპლიტუდის მნიშვნელობის შენატანში ერთნაირად იღებს როგორც დადებითი $+f_0$, ასევე უარყოფითი $-f_0$ სიხშირეები, რომლებიც ქმნიან წერტილების გარემოს $\pm f_0$.

პრინციპულად მნიშვნელოვანია, რომ სპექტრული სიმკვრივე სიხშირის კომპლექსური ფუნქციაა, რომელიც ერთდროულად შეიცავს ინფორმაციას როგორც ამპლიტუდაზე, ასევე ელემენტარული სინუსოიდების ფაზაზე. ვექტორულ დიაგრამაზე (ნახ. 2.12) ელემენტარული ვექტორების სიგრძეები უსასრულოდ მცირეა, ამიტომ ტეხილის ნაცვლად (T სასრულია) მიიღება გლუვი მრუდები ($T \rightarrow \infty$). თუ სიხშირის დერძზე ავიღებთ რაიმე

თანაბრად დაშორებული წერტილების მიმდევრობას
 $0 < \omega_1 < \omega_2 \dots,$



ნახ. 2.12



ნახ. 2.13

მაშინ სპექტრული სიმკვრივის მოდული $|S(\omega)|$ (ნახ. 2.13) მრუდის გასწვრივ ადგენს საზოგადო მასშტაბს: რაც მეტი იქნება სპექტრული სიმკვრივის მოდული, მით იშვიათად განლაგდებიან სისშირის წერტილები ვექტორულ დიაგრამაზე.

დიაგრამა (ნახ. 2.12) აგებულია რაღაც ფიქსირებული დროის მომენტისთვის. დროის გავლისას მრუდების კონფიგურაცია იცვლება საკმარისად რთულად, ამიტომ რაც მეტია სისშირე, მით უფრო დიდი სიჩქარით იმოძრაებენ მრუდის შესაბამისი მონაკვეთები. მაგრამ ფაქტიურად მნიშვნელოვანია არა მრუდის ფორმა, არამედ მისი ბოლო წერტილის პროექცია ჰორიზონტალურ ღერძზე.

2.2.4 შუბრის შემცველი ბარდაქმნა

ვიპოვოთ სიგნალი, თუ მოცემული გვაქვს სპექტრული სიმკვრივე. დავეუშვათ, რომ პერიოდული სიგნალი მიიღება პერიოდული მიმდევრობიდან, თუ მის პერიოდს მივასწრაფებთ უსასრულოდისაკენ. ფორმულების (2.13) და (2.14) გამოყენებით დაიწერება:

$$s(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} S(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}.$$

ამ ფორმულაში შემავალი კოეფიციენტი $1/T$, ნებისმიერი მთელი n -ის მეზობელი ჰარმონიკების სხვაობის პროპორციულია:

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} [n\omega_1 - (n-1)\omega_1].$$

მაშასადამე,
$$s(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t} [n\omega_1 - (n-1)\omega_1].$$

ვინაიდან ზღვარში მეზობელ ჰარმონიკებს შორის სისშირეული ინტერვალები შეუზღუდავად მცირდება, მიღებული ჯამი შეიძლება შეიცვალოს ინტეგრალით:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.18)$$

ამ მნიშვნელოვან ფორმულას ეწოდება $s(t)$ სიგნალის **ფურიეს შექცეული გარდაქმნა**.

საბოლოოდ ჩამოვაყალიბოთ ეს მნიშვნელოვანი შედეგი:

$s(t)$ სიგნალი და მისი $S(\omega)$ სპექტრული სიმკვრივე ურთიერთ-ცალსახად დაკავშირებულია ფურიეს პირდაპირი და შექცეული გარდაქმნებით, შესაბამისად:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt, \quad s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.19)$$

სპექტრული დაშლის მეთოდი მნიშვნელოვნად აწვითარებს სიგნალების თეორიას. მაგალითად, სიგნალის მათემატიკური მოდელი $s(t)$, მოცემული დროის არეში რთულია და არასაკმარისად თვალსაჩინო. ამავდროულად ამ სიგნალის აღწერა სისშირულ არეში $S(\omega)$ ფუნქციის გამოყენებით შესაძლოა აღმოჩნდეს ძალზე მარტივი.

გარდა ამისა, მნიშვნელოვანია ის, რომ სიგნალის სპექტრული წარმოდგენა ხსნის პირდაპირ გზას სიგნალების გავლის ანალიზისათვის ფართო კლასის რადიოტექნიკურ წრედებში, მოწყობილობებსა და სისტემებში.

2.2.5. სიბნალის სპექტრული სიმკვრივის არსებობის პირობა

მათემატიკაში დეტალურად გამოკვლეულია საკითხი იმის შესახებ, თუ რა თვისებები უნდა ჰქონდეს ფუნქციას $s(t)$ იმისათვის, რომ მისი ფურიეს გარდაქმნა ნამდვილად არსებობდეს.

[7] დამტკიცების გამოტოვებით მოგვყავს საბოლოო შედეგი: $s(t)$ სიბნალს შეიძლება შევუპირისპიროთ მისი სპექტრული სიმკვრივე $S(\omega)$ იმ შემთხვევაში, თუ ეს სიბნალი **აბსოლუტურად ინტეგრირებადი**, ე.ი. არსებობს მისი ინტეგრალი

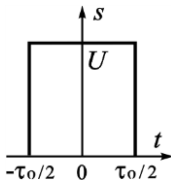
$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty.$$

მსგავსი პირობა მნიშვნელოვნად ამცირებს დასაშვებ სიგნალების კლასს. ასე რომ, მითითებული კლასიკური აზრით შეუძლებელია ვილაპარაკოთ კარმონიული სიგნალის $u(t) = U_m \cos \omega_c t$ სპექტრულ სიმკვრივეზე, რომელიც არსებობს დროის მთელ უსასრულო ღერძზე.

მაგრამ თანამედროვე მათემატიკაში განხილულია მეთოდები და ხერხები, რომლებიც საშუალებას იძლევიან გონივრულად გამოითვალოს არაინტეგრირებადი სიგნალების სპექტრული სიმკვრივები. მართალია, ამ დროს აღმოჩნდება, რომ ასეთი სპექტრული სიმკვრივები უკვე იქნებიან არა ჩვეულებრივი, კლასიკური ფუნქციები, არამედ განზოგადოებული ფუნქციები. საკითხი ინტეგრირებადი სიგნალების სპექტრული წარმოდგენის შესახებ განხილული იქნება ამ თავში მოგვიანებით.

კონკრეტულ მაგალითებზე შევისწავლოთ იმპულსური რხევების სპექტრული სიმკვრივების გამოთვლის ტექნიკა.

2.2.6. მართკუთხა ვიდეოიმაჟუსის სპექტრული სიმკვრივე



ნახ. 2.14

ვთქვათ მოცემულ $s(t)$ სიბნალს აქვს ამპლიტუდა U , ხანგრძლივობა τ_0 და განლაგებულია დროის ათვლის სათავის მიმართ სიმეტრიულად (ნახ. 2.14). ფორმულა (2.16)-ის

$$(S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt) \text{ საფუძველზე}$$

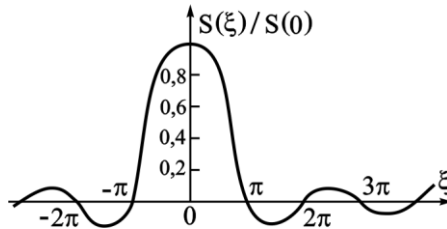
$$S(\omega) = U \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} e^{-j\omega t} dt = U \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt =$$

$$= 2U \int_0^{\tau_0/2} \cos \omega t dt = 2U \int_0^{\tau_0/2} \frac{\cos \omega t d(\omega t)}{\omega} = \frac{2U}{\omega} \sin \frac{\omega \tau_0}{2}.$$

განსახილველი სიგნალის სპექტრული სიმკვრივე წარმოადგენს სისშირის ნამდვილ ფუნქციას. მოსახერხებელია შემოვიტანოთ უგანზომილებო ცვლადი $\xi = \frac{\omega \tau_0}{2}$ და შედეგი საბოლოოდ წარმოვადგინოთ ასე:

$$S(\xi) = U \tau_0 \frac{\sin \xi}{\xi}. \quad (2.20)$$

აღნიშნოთ, რომ სპექტრული სიმკვრივის მნიშვნელობა ნულოვან სისშირეზე იმპულსის ფართობის ტოლია: $S(0) = U \tau_0$. გრაფიკი, აგებული (2.20) ფორმულით, გამოსახულია ნახ. 2.15.



ნახ. 2.15. მართკუთხა ვიდეოიმპულსის ნორმირებული სპექტრული სიმკვრივის როგორც $\xi = \omega \tau_0 / 2$ პარამეტრის ფუნქციის გრაფიკი.

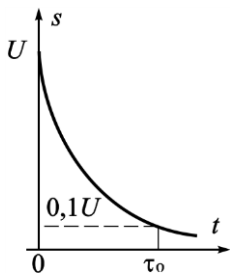
2.2.7. მასპონენციალური ვიდეოიმპულსის სპექტრული სიმკვრივე

განვიხილოთ სიგნალი, რომელიც აღიწერება ფუნქციით $s(t) = U \exp(-at)\sigma(t)$ a პარამეტრის დადებითი ნამდვილი მნიშვნელობისას.

ასეთ სიგნალს, მკაცრად თუ ვიტყვი, მხოლოდ პირობითად შეიძლება ვუწოდოთ იმპულსი მისი ქცევის გამო, როცა $t \rightarrow \infty$. ამასთან პირობა $a > 0$ უზრუნველყოფს სიგნალის მყისიერი მნიშვნელობების საკმაოდ სწრაფ (ექსპონენციალურ) შემცირებას დროის გაზრდისას. რადიოტექნიკაში მსგავსი იმპულსების ფუნქტურ სანგრძლივობას ჩვეულებრივ განსაზღვრავენ

სიგნალის დონის ათჯერადი შემცირების პირობიდან:

$\exp(-\alpha\tau_0) = 0.1$, საიდანაც $\tau_0 = 2,303/\alpha$ (იხ. ნახ. 2.16).



ნახ. 2.16

ექსპონენციალური ვიდეოიმპულსის სპექტრული სიმკვრივე

$$S(\omega) = U \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega)t} dt = -\frac{U}{\alpha+j\omega} e^{-(\alpha+j\omega)t} \Big|_{t=0}^{t=\infty}$$

ზღვრების ჩასმით გვაქვს

$$S(\omega) = \frac{U}{\alpha + j\omega} \tag{2.21}$$

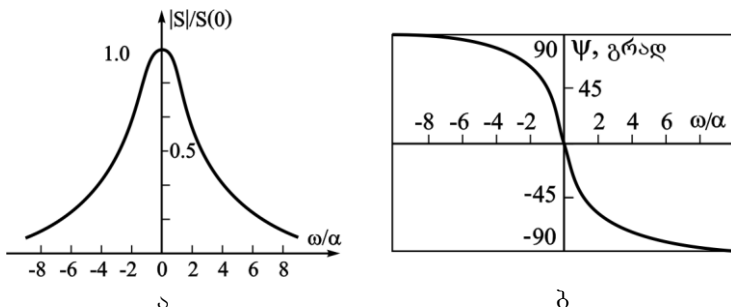
შეიძლება აღვნიშნოთ ორი პრინციპიალური თავისებურება, რომელიც განასხვავებს ექსპონენციალური რხევის სპექტრულ სიმკვრივეს მართკუთხა ფორმის იმპულსის სპექტრისაგან:

1. (2.21) ფორმულის შესაბამისად $S(\omega)$ სიდიდე არ იქცევა ნულად სიხშირის არანაირი სასრული მნიშვნელობისას.
2. ექსპონენციალური იმპულსის სპექტრული სიმკვრივე არის კომპლექსურ მნიშვნელობიანი ფუნქცია $S(\omega) = |S(\omega)| \exp[j\psi(\omega)]$, რომელსაც აქვს მოდული

(ამპლიტუდური სპექტრი) $|S(\omega)| = U/\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$ და

არგუმენტი (ფაზური სპექტრი) $\psi(\omega) = -\arctg(\omega/\alpha)$.

შესაბამისი გრაფიკები წარმოდგენილია ნახ. 2.17 ა, ბ.

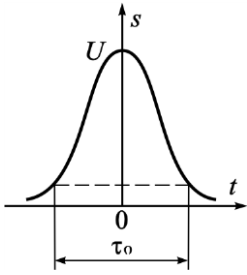


ნახ. 2.17. ექსპონენციალური ვიდეოიმპულსის სპექტრული სიმკვრივე: ა – ნორმირებული ამპლიტუდური სპექტრი; ბ – ფაზური სპექტრი

2.2.8. გაუსის მიმდევარების სამეტრული სიმკვრივე

მოცემული სიგნალი აღიწერება შემდეგი სახის ფუნქციით

$$s(t) = U \exp(-\beta t^2). \quad (\text{იხ. ნახ. 2.18})$$



გაუსის იმპულსის ეფექტური ხანგრძლივობა განვსაზღვროთ სიგნალის მყისიერი მნიშვნელობის ათჯერადი შემცირების პირობიდან. თუ მივმართავთ ნახ. 2.18, ვნახავთ, რომ ხანგრძლივობამ τ_0 უნდა დააკმაყოფილოს

$$\exp[-\beta(\tau_0/2)^2] = 0.1, \quad \text{რომლის გარდაქმნით}$$

ნახ. 2.18 ვღებულობთ
$$\tau_0 = \frac{2\sqrt{-\ln 0.1}}{\sqrt{\beta}} = \frac{3.035}{\sqrt{\beta}} \quad (2.22)$$

განსახილველი იმპულსის სპექტრული სიმკვრივე

$$S(\omega) = U \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta t^2} e^{-j\omega t} dt. \quad (2.23)$$

გარდაექმნათ ინტეგრალქვეშა გამოსახულება ისე, რომ შესაძლებელი იყოს ვისარგებლოთ ცხრილის ინტეგრალით

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

ამისათვის ექსპონენტის მაჩვენებლიდან (2.23)-ში გამოვყოთ სრული კვადრატი:

$$\beta t^2 + j\omega t = \beta t^2 + j\omega t - \omega^2 / (4\beta) + \omega^2 / (4\beta) = \left[\sqrt{\beta} t + j\omega / (2\sqrt{\beta}) \right]^2 + \omega^2 / (4\beta).$$

ამგვარად,
$$S(\omega) = U e^{-\omega^2 / (4\beta)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-(\sqrt{\beta} t + j\omega / (2\sqrt{\beta}))^2\right] dt.$$

შემოვიტანოთ ახალი ცვლადი $\xi = \sqrt{\beta} t + j\omega / (2\sqrt{\beta})$, ისეთი, რომ $dt = d\xi / \sqrt{\beta}$. ეს საშუალებას გვაძლევს წარმოვადგინოთ საძიებელი სპექტრული სიმკვრივე შემდეგი სახით

$$S(\omega) = \frac{U e^{-\omega^2 / (4\beta)}}{\sqrt{\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi,$$

საიდანაც საბოლოოდ გვაქვს

$$S(\omega) = U \sqrt{\pi / \beta} e^{-\omega^2 / (4\beta)}. \quad (2.24)$$

ამგვარად, გაუსის იმპულსის სპექტრული სიმკვრივე ნამდვილია და აღიწერება გაუსის სისშირის ფუნქციით.

2.2.9. დელტა-ფუნქციის სპექტრული სიმკვრივე

დავუშვათ, $s(t)$ სიგნალი წარმოადგენს მოკლე იმპულსს, რომელიც თავმოყრილია $t=0$ წერტილში და აქვს ფართობი A . ასეთ სიგნალს აქვს მათემატიკური მოდელი $s(t) = A\delta(t)$. ამ

სიგნალის სპექტრული სიმკვრივე
$$S(\omega) = A \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega t)\delta(t)dt.$$

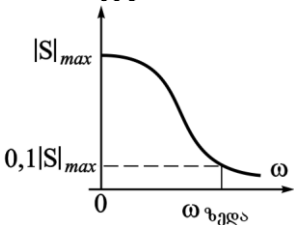
დელტა-ფუნქციის მაფილტრირებელი თვისების საფუძველზე (იხ. თავი 1) აქ შემავალი ინტეგრალი რიცხობრივად უდრის კლასიკური ფუნქციის მნიშვნელობას წერტილში, სადაც თავმოყრილია განზოგადოებული ფუნქცია. ამიტომ

$$S(\omega) = A = \text{const} \tag{2.25}$$

ამრიგად, დელტა-იმპულსს აქვს თანაბარზომიერი სპექტრი ყველა სიხშირეზე. საინტერესოა მოვახდინოთ ამ შედეგის ინტერპრეტირება. ვექტორულ დიაგრამაზე ნახ. 2.12 იმპულსის განენის მომენტში ყველა ელემენტარული ჰარმონიული შემდგენი იკრიბება კოჰერენტულად, რამდენადაც (2.25)-ის შესაბამისად სპექტრული სიმკვრივე ნამდვილია. ამ მდგენელების ამპლიტუდები სიხშირის ზრდისას არ მცირდება (შეადარეთ წინა მაგალითებს). ამგვარად, როცა $t=0$ შეიმჩნევა სიგნალის უსასრულოდ დიდი მნიშვნელობა. დროის ყველა სხვა მომენტში სიგნალი იქცევა ნულად, ვინაიდან ვექტორული ჯამი (იხ. ნახ. 2.12) “იხვევა” წერტილში.

2.2.10. პავშირი იმპულსის ხანგრძლივობასა და მისი სპექტრის სიბანას შორის

თუ გავანალიზებთ ზემოთშესწავლილ კერძო შემთხვევებს, მაშინ შეიძლება გავაკეთოთ ძალიან მნიშვნელოვანი დასკვნა: **რაც უფრო მცირეა იმპულსის ხანგრძლივობა, მით ფართოა მისი სპექტრი.**



ნახ. 2.19

სპექტრის სიგანედ აქ და შემდგომში შეიძლება მივიჩნიოთ სიხშირული ინტერვალი, რომლის ფარგლებში სპექტრული სიმკვრივის მოდული არა ნაკლებია რომელიმე წინასწარ მოცემულ დონეზე, მაგალითად იცვლება ზღვრებში $|S|_{\text{max}}$ - დან $0.1|S|_{\text{max}}$ -მდე

(იხ. ნახ. 2.19).

განვიხილოთ მართკუთხა ვიდეოიმპულსი, თან ვივარაუდოთ, რომ სპექტრის ზედა სასაზღვრო სიხშირე ω_c ესაა სიხშირე,

რომელიც შეესაბამება სპექტრული სიმკვრივის პირველ ნულს. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $(\omega = 2\pi f = 2\pi/T = 2\pi/\tau_0)$, ძნელი არაა იმის დანახვა, რომ $\omega_b \tau_0 / 2 = \pi$ ან $f_b \tau_0 = 1$.

თუ მივმართავთ **ექსპონენციალურ ვიდეომიშულსს**, შეიძლება პირობითად ვივარაუდოთ, რომ ზედა სასაზღვრო სიხშირეზე სპექტრული სიმკვრივის მოდული მცირდება 10-ჯერ მაქსიმალურ მნიშვნელობასთან მიმართებაში. აქედან გამომდინარეობს [იხ. (2.20) და ქვევით], რომ

$$1/\sqrt{1+(\omega_b/\alpha)^2} = 0.1 \text{ ან } \omega_b = \sqrt{99}\alpha,$$

სადაც α არის ექსპონენციალური ვიდეომიშულსის (e^{-at}) კოეფიციენტი, რომელიც დადებითია და ნამდვილი.

ეს კი ნიშნავს, რომ $f_b = \omega_b / (2\pi) = \alpha \sqrt{99} / (2 \cdot 3.14) = 1.584\alpha$.

ვინაიდან ექსპონენციალური იმპულსის ეფექტურ ხანგრძლივობას ჩვეულებრივ განსაზღვრავენ სიგნალის დონის ათჯერადი შემცირების პირობიდან: $\exp(-a\tau_0) = 0.1$, საიდანაც გამომდინარეობს $\tau_0 = 2,303/\alpha$. მაშინ ნამრავლი $f_b \tau_0 = 3.647$.

ბოლოს უნდა ითქვას, რომ დელტა-იმპულსის სპექტრი, რომელსაც აქვს უსასრულოდ მცირე ხანგრძლივობა, უსაზღვროდ გაწეილია.

ამგვარად, იმპულსის სპექტრის სიგანის ნამრავლი მის ხანგრძლივობაზე არის მუდმივი რიცხვი, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ იმპულსის ფორმაზე და რომელსაც, როგორც წესი, აქვს ერთეულის რიგი: $f_b \tau_0 = O(1)$.

(ამბობენ, რომ სპექტრის სიგანე და იმპულსის ხანგრძლივობა დაკავშირებული არიან განუსაზღვრელობის თანაფარდობით (ტერმინი მოტანილია კვანტური მექანიკიდან)).

ამ თანაფარდობას აქვს პირველხარისხოვანი მნიშვნელობა რადიოტექნიკისათვის. იგი განსაზღვრავს მოთხოვნებს რადიოტექნიკური მოწყობილობის გატარების ზოლისადმი. მაგალითად, რაც მოკლეა იმპულსის ხანგრძლივობა, მით უფრო განიერი უნდა იყოს შესაბამისი გამაძლიერებლის გატარების ზოლი. მოკლე იმპულსურ ხელშეშლებს აქვთ ფართო სპექტრი და ამიტომ შეიძლება გაუარესდეს რადიომიდელების პირობები სიხშირეთა მნიშვნელოვან ზოლში.

2.3. ფურიეს ბარდაქმნის ძირითადი თვისებები

შევისწავლეთ რა საკმაოდ მარტივი, მაგრამ ხშირად შემხვედრი იმპულსური სიგნალების სპექტრული სიმკვრივები, შეგვიძლია გადავიდეთ ფურიეს გარდაქმნის თვისებების სისტემატურ შესწავლაზე.

2.3.1. ფურიეს ბარდაქმნის წრფივობა

ეს უმთავრესი თვისება ფორმულირდება ასე: თუ გვაქვს სიგნალთა რაიმე ერთობლიობა $s_1(t), s_2(t), \dots$, ამასთან $s_1(t) \rightarrow S_1(\omega)$, $s_2(t) \rightarrow S_2(\omega), \dots$, მაშინ სიგნალების გასაშუალებული ჯამი ფურიეს მიხედვით გარდაიქმნება შემდეგნაირად:

$$\sum_i a_i s_i(t) \leftrightarrow \sum_i a_i S_i(\omega) \quad (2.26)$$

აქ a_i ნებისმიერი რიცხვითი კოეფიციენტებია.

(2.26) ფორმულის დასამტკიცებლად უნდა შევიტანოთ სიგნალების ჯამი ფურიეს გარდაქმნაში ($S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$ (2.16)).

2.3.2. სპექტრული სიმკვრივის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილების თვისებები

დავუშვათ $s(t)$ სიგნალია, რომელიც იღებს ნამდვილ მნიშვნელობებს. ეს სპექტრული სიმკვრივე ზოგად შემთხვევაში არის კომპლექსური:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin(\omega t) dt = A(\omega) - jB(\omega).$$

ჩავსვათ ეს გამოსახულება ფურიეს უკუგარდაქმნის ფორმულაში (შეგახსენებთ, რომ $s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ (2.18)):

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega) - jB(\omega)] (\cos \omega t + j \sin \omega t) d\omega.$$

იმისათვის, რომ სიგნალი, მიღებული ასეთი ორმაგი გარდაქმნის გზით, დარჩეს ნამდვილი, აუცილებელია მოვითხოვოთ, რომ

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \sin(\omega t) d\omega = 0, \quad \text{და} \quad \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \cos(\omega t) d\omega = 0.$$

ეს შესაძლებელია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ სიგნალის სპექტრული სიმკვრივის ნამდვილი ნაწილი $A(\omega)$ სისშირის

ლუწი, ხოლო წარმოსახვითი ნაწილი $B(\omega)$ – სისშირის კენტი ფუნქციაა:

$$A(\omega) = A(-\omega), \quad B(\omega) = -B(-\omega). \quad (2.27)$$

2.3.3. დროში წანაცვლებული სიბნალის სპექტრული სიმკვრივე

დავუშვათ, რომ $s(t)$ სიგნალისათვის ცნობილია შესაბამისობა $s(t) \leftrightarrow S(\omega)$. განვიხილოთ ასეთივე სიგნალი, რომელიც აღიძვრება t_0 წამის დაგვიანებით. მივიჩნიოთ t_0 წერტილი დროის ათვლის ახალ საწყისად და აღვნიშნოთ ეს წანაცვლებული სიგნალი, როგორც

$$s(t - t_0) \leftrightarrow S(\omega)e^{-j\omega t_0}. \quad (2.28)$$

დამტკიცება საკმაოდ მარტივია. მართლაც, $(t - t_0)$ ცვლადის შეცვლით, ანუ $t - t_0 = x$, მივიღებთ

$$s(t - t_0) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s(t - t_0)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(x)e^{-j\omega(t_0 + x)} e^{-j\omega x} dx = S(\omega)e^{-j\omega t_0}.$$

კომპლექსური რიცხვის $\exp(-j\omega t_0)$ მოდული ნებისმიერი t_0 - ის დროს, ერთის ტოლია, ამიტომ ელემენტარული ჰარმონიული მდგენელების ამპლიტუდები, რომლებისგანაც შედგება სიგნალი, არ არის დამოკიდებული მის მდებარეობაზე დროის ღერძზე. ინფორმაცია სიგნალის ამ მახასიათებლის შესახებ ჩადებულია მისი სპექტრული სიმკვრივის არგუმენტის სისშირულ დამოკიდებულებაში (ფაზურ სპექტრში).

2.3.4. სიბნალის სპექტრული სიმკვრივის დამოკიდებულება დროის გაზომვის მასშტაბის ამორჩევაზე

დავუშვათ, რომ საწყისი სიგნალი $s(t)$ ექვემდებარება დროის მასშტაბის ცვლილებას. ეს ნიშნავს, რომ t დროის როლს ასრულებს ახალი დამოუკიდებელი ცვლადი kt (k რაიმე ნამდვილი რიცხვია). თუ $k > 1$, მაშინ ხდება საწყისი სიგნალის “შეკუმშვა”; თუ $0 < k < 1$, მაშინ სიგნალი “იწვლება” დროში.

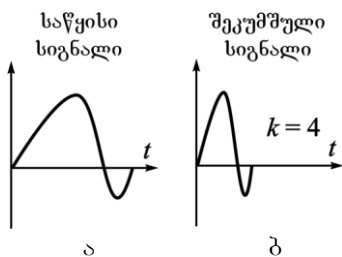
თურმე, თუ $s(t) \leftrightarrow S(\omega)$, მაშინ $s(kt) \leftrightarrow \frac{1}{k} S\left(\frac{\omega}{k}\right)$. (2.29)

მართლაც, ცვლადის შეცვლით $kt = x$, ანუ $t = \frac{x}{k}$

$$s(kt) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s(kt)e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} s(x)e^{-j\frac{\omega}{k}x} dx,$$

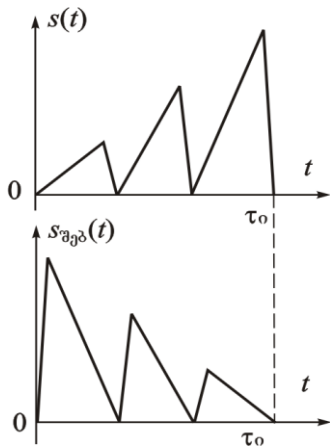
საიდანაც გამომდინარეობს ფორმულა (2.29).

ამრიგად იმისათვის, რომ, მაგალითად, შევკუმშოთ სიგნალი დროში მისი ფორმის შენარჩუნებით, აუცილებელია გავანაწილოთ იგივე სპექტრული მდგენელები სიხშირეთა უფრო ფართო ინტერვალში მათი ამპლიტუდების შესაბამისი პროპორციული შემცირებისას (იხ. ნახ. 2.20 ა და ბ).



ნახ. 2.20

აქ განხილულ საკითხს მჭიდროდ უახლოვდება შემდეგი ამოცანა. მოცემულია იმპულსი $s(t)$, რომელიც $[0, \tau_0]$ მონაკვეთზე განსხვავდება ნულისაგან და ხასიათდება სპექტრული სიმკვრივით $S(\omega)$.



ნახ. 2.21

საჭიროა ვიპოვოთ “დროში შებრუნებული” სიგნალის $s_{\text{შებ}}(t)$ სპექტრული სიმკვრივე $S_{\text{შებ}}(\omega)$, რომელიც წარმოადგენს საწყისი იმპულსური რხევის “სარკისებურ ასლს”. რამდენადაც ცხადია, რომ $s_{\text{შებ}}(t) = s(\tau_0 - t)$, ამდენად

$$S_{\text{შებ}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau_0 - t) e^{-j\omega t} dt.$$

ცვლადის შეცვლით $x = \tau_0 - t$ ვპოულობთ, რომ

$$S_{\text{შებ}}(\omega) = e^{-j\omega\tau_0} \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{-j\omega x} dx = e^{-j\omega\tau_0} S(-\omega) = e^{-j\omega\tau_0} S^*(\omega). \quad (2.30)$$

2.3.5. წარმოებულის და განუსაზღვრელი ინტეგრალის სიმკვრივე

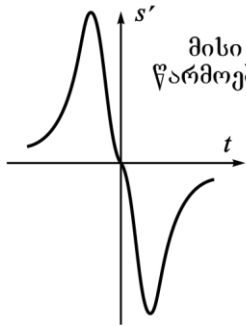
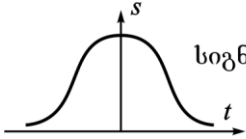
დავუშვათ მოცემულია სიგნალი $s(t)$ და მისი სპექტრული სიმკვრივე $S(\omega)$. შევისწავლოთ ახალი სიგნალი $f(t) = ds/dt$ და მიზნად დავისახოთ მისი სპექტრული სიმკვრივის $F(\omega)$ პოვნა.

განსახლების თანახმად,
$$f(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{s(t) - s(t - \tau)}{\tau}. \quad (2.31)$$

ფურცელს გარდასახვა **წრფივი ოპერაციაა**, რაც ნიშნავს, რომ ტოლობა (2.31) სამართლიანია სპექტრულ სიმკვრივებთან მიმართებაშიც. (2.28)-ის $[s(t-t_0) \leftrightarrow S(\omega)e^{-j\omega t_0}]$ გათვალისწინებით

$$F(\omega) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{S(\omega)e^{-j\omega t_0} - S(\omega)e^{-j\omega t}}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1 - \exp(-j\omega\tau)}{\tau} S(\omega). \quad (2.32)$$

ექსპონენციალური ფუნქციის **ტეილორის მწკრივად** წარმოდგენით: $\exp(-j\omega\tau) = 1 - j\omega\tau - (\omega\tau)^2 / 2 - \dots$, ამ მწკრივის



ნახ. 2.22

ამგვარად, სიგნალის დროში დიფერენცირება ექვივალენტურია სპექტრული სიმკვრივის მამრავლზე გადამრავლების უბრალო არითმეტიკული ოპერაციისა. ამიტომ მიღებულია ითქვას, რომ წარმოსახვითი რიცხვი $j\omega$ წარმოადგენს **დიფერენცირების ოპერატორს, რომელიც მოქმედებს სიხშირულ არეში**.

განხილული ფუნქცია $s(t) = \int f(t)dt$ წარმოადგენს პირველ-ყოფილს (განუსახვრელ ინტეგრალს) $f(t)$ ფუნქციის მიმართ. (2.33)-დან ფორმალურად გამომდინარეობს, რომ პირველყოფილის სპექტრი

$$S(\omega) = F(\omega) / (j\omega). \quad (2.35)$$

ამრიგად, მამრავლი $1/(j\omega)$ **წარმოადგენს ინტეგრირების ოპერატორს სიხშირულ არეში**.

ჩასმით (2.32)-ში და პირველი ორი წევრით შემოფარგვლით, ვპოულობთ

$$F(\omega) = j\omega S(\omega). \quad (2.33)$$

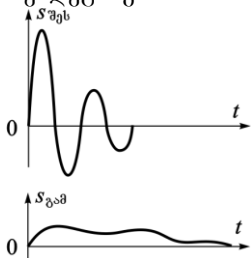
დიფერენცირებისას სიგნალის ცვლილების სიჩქარე დროში იზრდება. აქედან გამომდინარე, წარმოებულის სპექტრის მოდულუს აქვს დიდი მნიშვნელობები მაღალი სიხშირეების არეში საწყისი სიგნალის სპექტრის მოდულთან შედარებით.

ფორმულა (2.32) განზოგადდება n რიგის წარმოებულის სპექტრის შემთხვევაზე. ადვილია იმის დამტკიცება, რომ თუ $g(t) = d^n s / dt^n$,

$$G(\omega) = (j\omega)^n S(\omega). \quad (2.34)$$

2.3.6. სიბნალის სამატრული სიმკვრივე ინტეგრატორის გამოსასვლელზე

მრავალ რადიოტექნიკურ მოწყობილობაში გამოყენებას პოულობენ ეგრეთწოდებული **ინტეგრატორები** – ფიზიკური სისტემები, რომელთა გამოსასვლელი სიგნალი შესასვლელი ზემოქმედების ინტეგრალის პროპორციულია. განვიხილოთ კონკრეტულად ინტეგრატორი, რომელიც ახორციელებს შესასვლელი სიგნალის $s_{შეს}(t)$ გარდაქმნას გამოსასვლელ სიგნალად $s_{გამ}(t)$ შემდეგი კანონის მიხედვით (ნახ. 2.23):



ნახ. 2.23

$$s_{გამ}(t) = \frac{1}{T} \int_{-T}^t s_{შეს}(\xi) d\xi. \quad (2.36)$$

აქ $T > 0$ – ფიქსირებული პარამეტრია.

განსაზღვრული ინტეგრალი, რომელიც შედის (2.36)-ში, აშკარაა, $s_{შეს}(t)$ სიგნალი მისი პირველყოფილის ორი მნიშვნელობის სხვაობის ტოლია. ერთი გამოითვლება t

არგუმენტის დროს, ხოლო მეორე $t-T$ არგუმენტის დროს. (2.28) და (2.35) თანაფადობების გამოყენებით ვღებულობთ შესასვლელსა და გამოსასვლელზე სიგნალების სპექტრულ სიმკვრივეებს შორის კავშირის ფორმულას:

$$S_{გამ}(\omega) = \frac{S_{შეს}(\omega)}{j\omega T} (1 - e^{-j\omega T}). \quad (2.37)$$

ნებისმიერი სიხშირეების დროს, ფრჩხილებში მოთავსებული თანამამრავლი შემოფარგლულია, ამავე დროს მნიშვნელის მოდული წრფივად იზრდება სიხშირის ზრდასთან ერთად. ეს მოწმობს იმას, რომ განხილული ინტეგრატორი მოქმედებს დაბალი სიხშირეების ფილტრის მსგავსად, ანუ ატარებს დაბალ სიხშირეებს. ამავე დროს ის ასუსტებს შესასვლელი სიგნალის მაღალსიხშირულ სპექტრულ მდგენელებს.

2.3.7. სიბნალების ნამრავლის სამატრული სიმკვრივე

როგორც ცნობილია, სიგნალების შეკრებისას მათი სპექტრები იკრიბება. ამასთან სიგნალების ნამრავლის სპექტრი სპექტრების ნამრავლს კი არ უდრის, არამედ გამოისახება რაღაც სპეციალური ინტეგრალური თანაფარდობით თანამამრავლთა სპექტრებს შორის.

დავუშვათ $u(t)$ და $v(t)$ ორი სიგნალია, რომელთათვისაც ცნობილია $u(t) \leftrightarrow U(\omega)$, $v(t) \leftrightarrow V(\omega)$ შესაბამისობანი. შევქმნათ

ამ სიგნალების ნამრავლი $s(t) = u(t)v(t)$ და გამოვთვალოთ მისი სპექტრული სიმკვრივე. საერთო წესის მიხედვით

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (2.38)$$

ფურიეს უკუ გარდაქმნის გამოყენებით გამოვსახოთ სიგნალი $v(t)$ მისი სპექტრული სიმკვრივით და შედეგი ჩავსვათ

$$(2.38\text{-ში}) \quad S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} V(\xi)e^{j\xi t} d\xi \right] e^{-j\omega t} dt.$$

ინტეგრირების რიგის შეცვლით გვექნება

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\xi) \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-j(\omega-\xi)t} dt \right] d\xi,$$

საიდანაც
$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\xi)U(\omega-\xi)d\xi. \quad (2.39)$$

ინტეგრალს, რომელიც დგას მარჯვენა ნაწილში, უწოდებენ V და U ფუნქციების **ნახვევს**. შემდგომში ნახვევის ოპერაციას

სიმბოლურად აღვნიშნავთ ასე: $\int_{-\infty}^{\infty} V(\xi)U(\omega-\xi)d\xi = V(\omega) * U(\omega)$.

ამგვარად, ორი სიგნალის სპექტრული სიმკვრივე მუდმივი რიცხვითი თანამამრავლის სიზუსტით თანამამრავლთა სპექტრული სიმკვრივეების ნახვევის ტოლია:

$$u(t)v(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} V(\omega) * U(\omega). \quad (2.40)$$

ძნელი არაა დავრწმუნდეთ, რომ ნახვევის ოპერაცია **კომუტატიურია**, ე.ი. უშვებს გარდასაქმნელი ფუნქციების თანმიმდევრობის რიგის შეცვლას: $V(\omega) * U(\omega) = U(\omega) * V(\omega)$.

ზემოთ დამტკიცებული თეორემა ნახვევის შესახებ შეიძლება შებრუნებულ იქნას: თუ რაიმე სიგნალის სპექტრული სიმკვრივე წარმოიდგინება ნამრავლის $S(\omega) = S_1(\omega)S_2(\omega)$ სახით, ამასთან $S_1(\omega) \leftrightarrow s_1(t)$, და $S_2(\omega) \leftrightarrow s_2(t)$, მაშინ სიგნალი $s(t) \leftrightarrow S(\omega)$ წარმოადგენს $s_1(t)$ და $s_2(t)$ სიგნალების ნახვევს, მაგრამ არა უკვე სისშირულ, არამედ დროით არეში:

$$S(\omega) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t-\xi)s_2(\xi)d\xi. \quad (2.41)$$

2.4. არანთავსებელი სიგნალების სპექტრული სიმკვრივები

რადიოტექნიკური სიგნალების ბევრი მათემატიკური მოდელი არ აკმაყოფილებს აბსოლუტური ინტეგრირების პირობას. ამ შემთხვევებში ფურიეს გარდაქმნის მეთოდი ჩვეულებრივი სახით არ გამოიყენება. მაგრამ, როგორც აღვნიშნავდით, შესაძლებელია ვილაპარაკოთ სიგნალების სპექტრალურ სიმკვრივებზე, თუ დავუშვებთ, რომ ეს სიმკვრივები აღიწერება განზოგადოებული ფუნქციებით.

2.4.1. რელის განზოგადებული ფორმულა

დავამტკიცოთ მნიშვნელოვანი დამხმარე დებულება, რომელიც ეხება სიგნალების თვისებას. ვთქვათ ორი სიგნალი $u(t)$ და $v(t)$, ზოგადად კომპლექსურია და განსაზღვრულია თავისი ფურიეს უკუ გარდაქმნებით:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

ვიპოვოთ მათი სკალარული ნამრავლი. ამისთვის ერთი მათგანი, მაგალითად $v(t)$, გამოვხატოთ მისი სპექტრული სიმკვრივით:

$$\begin{aligned} (u, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) v^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} V^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V^*(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt. \end{aligned}$$

ამ გამოსახულებაში შიდა ინტეგრალი წარმოადგენს $u(t)$ სიგნალის სპექტრულ სიმკვრივეს. ამიტომ

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) v^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) V^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} (U, V). \quad (2.42)$$

ეს ფორმულა წარმოადგენს **რელის განზოგადებულ ფორმულას**. ამ ფორმულის ადვილად დამამახსოვრებელი განმარტება შემდეგია: ორი სიგნალის სკალარული ნამრავლი კოეფიციენტის სიზუსტით პროპორციულია მათი სპექტრული სიმკვრივების ნამრავლისა. (ეს ფორმულა ცნობილია ასევე, როგორც **პანსერვალის ტოლობა** ან **პლანშერელის თეორემა**)

2.4.2. სპექტრული სიმკვრივის განზოგადებული ცნება

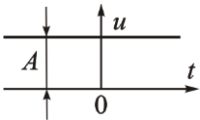
ვივარაუდოთ, რომ სიგნალი $v(t)$ წარმოადგენს აბსოლუტურად ინტეგრირებად ფუნქციას. მაშინ მისი ფურიეს გარდაქმნა $V(\omega)$ – სიხშირის ჩვეულებრივი კლასიკური ფუნქციაა. ამის გარდა, სიგნალი $u(t)$ არ აკმაყოფილებს აბსოლუტურად ინტეგრირების პირობას და ფურიეს გარდაქმნის კლასიკური თვალსაზრისით $U(\omega)$ არ არსებობს. მაგრამ შეგვიძლია გავაფართოვოთ სპექტრული სიმკვრივის ცნება, თუ დავუშვებთ, რომ $U(\omega)$ არის განზოგადოებული ფუნქცია იმ აზრით, რომელიც დადგენილი იყო სიგნალების დინამიურ წარმოდგენაში (იხ. ლექცია 1, პ.1.3.). ამისათვის, რელეის განზოგადოებული ფორმულის თანახმად საკმარისია დავუშვათ, რომ $U(\omega)$ – ფუნქციონალია, რომელიც, მოქმედებს რა ცნობილ $V(\omega)$ ფუნქციაზე, იძლევა შემდეგ შედეგს:

$$(U, V) = 2\pi(u, v). \tag{2.43}$$

არაინტეგრირებადი სიგნალების სპექტრების გამოთვლების ხერხები მიზანშეწონილია განვიხილოთ კონკრეტულ მაგალითებზე.

2.4.3. დროში მუდმივი სიხშირის სპექტრული სიმკვრივე

უმარტივესი არაინტეგრირებადი სიგნალია – არის მუდმივი სიდიდე $u(t) = A = const$ (იხ. ნახ. 2.24). დავუშვათ, რომ $v(t)$ – ნებისმიერი ნამდვილი აბსოლუტურად ინტეგრირებადი სიგნალია $V(\omega)$ სპექტრული სიმკვრივით. (2.43) ფორმულის გასხნისას

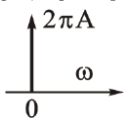


გვექნება $(U, V) = 2\pi(u, v) = 2\pi A \int_{-\infty}^{\infty} v(t) dt$.

ადვილად დასანახია, რომ

ნახ. 2.24 $\int_{-\infty}^{\infty} v(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j0t} dt = V(0)$.

აქედან დელტა-ფუნქციის მაფილტრირებელი თვისების საფუძველზე მივიღვართ იმ დასკვნამდე, რომ ტოლობა (2.43) შესაძლებელია მხოლოდ მოყვანილი პირობის შესრულებისას



$$U(\omega) = 2\pi \cdot A \cdot \delta(\omega). \tag{2.44}$$

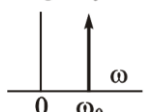
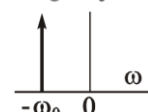
მიღებული შედეგის ფიზიკური აზრი ნათელია - დროში უცვლელ სიგნალს გააჩნია

ნახ. 2.25 სპექტრული მდგენელი (იხ. ნახ. 2.25) მხოლოდ ნულთან სიხშირეზე.

**2.4.4. კომპლექსური მისპონენციალური სიზნალის სპექტრული
სიმკვრივე**

უქვათ $s(t) = \exp(j\omega_0 t)$ - კომპლექსური ექსპონენციალური სიგნალია, რომელიც მოცემულია ნამდვილი ω_0 სიხშირით. (ამის გარდა დროის ნებისმიერი t -ისათვის ადგილი აქვს $|s|=1$ ტოლობას). ეს სიგნალი არ არის აბსოლუტურად ინტეგრირებადი, ვინაიდან როცა $t \rightarrow \pm\infty$, ფუნქცია $s(t)$ არ მიისწრაფის არც ერთი ზღვრისაკენ.

განზოგადოებული აზრით, ამ სიგნალის ფურიეს $S(\omega)$ გარდაქმნას უნდა აქმაყოფილებდეს თანაფარდობა

<p>როცა $\omega_0 > 0$</p>  <p align="center">ნახ. 2.26</p>	<p>როცა $\omega_0 < 0$</p>  <p align="center">ნახ. 2.27</p>	$(S, V) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j\omega_0 t} dt = 2\pi V(\omega_0).$ <p>აქედან საძიებელი სპექტრული $S(\omega)$ სიმკვრივე გამოისახება შემდეგნაირად</p> $S(\omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0). \quad (2.45)$
--	--	---

აღსანიშნავია, რომ:

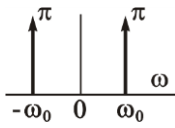
1. კომპლექსური ექსპონენციალური სიგნალის სპექტრული სიმკვრივე უდრის ნულს ყველგან, გარდა $\omega = \omega_0$ წერტილისა, სადაც მას აქვს დელტა-თავისებურება.
2. ამ სიგნალის სპექტრი არასიმეტრიულია $\omega = 0$ წერტილის მიმართ და თავს იყრის დადებით ან უარყოფით არეში.

2.4.5. კარმონიული რხევების სპექტრული სიმკვრივე

უქვათ $s(t) = \cos \omega_0 t$. მაშინ ეილერის ფორმულის გამოყენებით

$$s(t) = \frac{(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})}{2}.$$

ზემოთ ნაპოვნი კომპლექსური ექსპონენციალური სიგნალის სპექტრი და ფურიეს გარდაქმნის საზოგნობის თვისება საშუალებას გვაძლევს დაუყოვნებლივ ჩავწეროთ კოსინუსოიდალური სიგნალის სპექტრული სიმკვრივის გამოსახულება:

 <p align="center">ნახ. 2.28</p>	$\cos \omega_0 t \leftrightarrow \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]. \quad (2.46)$ <p>შეგიძლიათ თვითონ გასინჯოთ, რომ სინუსოიდალური სიგნალისათვის ჭკუშარიტია თანაფარდობა</p> $\sin \omega_0 t \leftrightarrow j\pi [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]. \quad (2.47)$
---	---

აღსანიშნავია, რომ (2.46) გამოსახულება წარმოადგენს სიხშირის ლუწ, ხოლო (2.47) - სიხშირის კენტ ფუნქციას.

2.4.6. ნებისმიერი პერიოდული სიგნალის სპექტრული სიმკვრივე

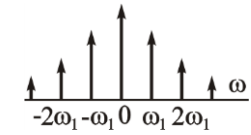
ადრე პერიოდული სიგნალების გამოკვლევას ვაწარმოებდით ფურიეს მწკრივების თეორიის გამოყენებით. ახლა კი შეგვიძლია გავაფართოვოთ წარმოდგენა მათ სპექტრულ თვისებებზე, თუკი პერიოდულ სიგნალებს აღვწერთ ფურიეს გარდაქმნის გამოყენებით.

ვთქვათ მოცემული გვაქვს $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t}$ - პერიოდული

სიგნალი, მოცემული კომპლექსურ ფორმაში თავისი ფურიეს მწკრივის სახით. ფორმულა (2.45) საფუძველზე, მხედველობაში მივიღებთ რა ფურიეს გარდაქმნის ხაზოვნობის თვისებას, დაუყონებლივ მივიღებთ ასეთი სიგნალის სპექტრული სიმკვრივის გამოსახულებას:

$$S(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(\omega - n\omega_1) \quad (2.48)$$

სპექტრული სიმკვრივის შესაბამისი გრაფიკი თავისი კონფიგურაციით იმეორებს პერიოდული სიგნალის ჩვეულებრივ სპექტრულ დიაგრამას. გრაფიკი შედგება დელტა-იმპულსებისაგან სისშირულ არეში, რომლებიც განლაგებულია წერტილებში $\pm n\omega_1$ კოორდინატებით, სადაც $n \in N$.



ნახ. 2.29

2.4.7. ჩართვის ფუნქციის სპექტრული სიმკვრივე

გამოვთვალოთ ჩართვის ფუნქციის $\sigma(t)$ სპექტრული სიმკვრივე, რომელსაც, სიმარტივისთვის განვსაზღვრავთ ყველა

წერტილში, გარდა $t = 0$:
$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

უწინარეს ყოვლისა შევნიშნოთ, რომ ჩართვის ფუნქცია მიიღება ექსპონენციური ვიდუიმიპულსისგან ზღვრული გადასვლის

გზით:
$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \exp(-\alpha t), & t > 0. \end{cases}$$

ამიტომ შევეცადოთ მივიღოთ ჩართვის ფუნქციის სპექტრული სიმკვრივე, ზღვრული $\alpha \rightarrow 0$ გადასვლის შესრულებისას, ექსპონენციალური რხევების სპექტრული სიმკვრივის ფორმულის

გამოყენებით:
$$\sigma(t) \leftrightarrow \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha + j\omega} .$$

ზღვარზე უშუალო გადასვლა, რომლის მიხედვით, $\sigma(t) \leftrightarrow 1/(j\omega)$ ჭეშმარიტია ყველა სისშირეებზე, გარდა $\omega = 0$. ამ შემთხვევაში აუცილებელია უფრო გულმოდგინე განხილვა.

უწინარეს ყოვლისა, ექსპონენციალური სიგნალის სპექტრულ სიმკვრივეში გამოვეყთ ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები:

$$\frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{1}{\alpha + j\omega} \cdot \frac{\alpha - j\omega}{\alpha - j\omega} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - \frac{j\omega}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

შეგვიძლია დავრწმუნდეთ იმაში, რომ

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \pi \delta(\omega).$$

მართლაც, ამ წილადის ზღვრული მნიშვნელობა ყველა $\omega \neq 0$ გადაიქცევა ნულად, ამავე დროს α სიდიდეზე დამოუკიდებლად,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha d\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha d\omega/\alpha^2}{(\alpha^2 + \omega^2)/\alpha^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(\omega/\alpha)}{1 + (\omega/\alpha)^2} = \pi$$

საიდანაც გამომდინარეობს ეს მტკიცებულება.

მაშასადამე, მიღებულია ცალსახა შესაბამისობა ჩართვის ფუნქციასა და მის სპექტრულ სიმკვრივეს შორის, ანუ:

$$\sigma(t) \leftrightarrow \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}. \tag{2.49}$$

დეღტა-თავისებურება როცა $\omega = 0$, მეტყველებს იმაზე, რომ ჩართვის ფუნქციას აქვს მუდმივი მდგენელი, რომელიც უდრის $1/2$.

2.4.8. რადიოიმპულსის სპეჭრული სიმკვრივე

როგორც ვიცით, რადიოიმპულსი $s_{\delta}(t)$ მოიცემა რაღაც $s_3(t)$ ვიდეოიმპულსის, რომელიც ასრულებს მომვლების როლს, და არანტეგრირებადი ჰარმონიული რხევის ნამრავლის სახით:

$$s_{\delta}(t) = s_3(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

რადიოიმპულსის სპექტრული სიმკვრივის დასადგენად ჩავთვალოთ, რომ ცნობილია ფუნქცია $S_3(\omega)$ – მისი მომვლების სპექტრი. კოსინუსოიდალური სიგნალის სპექტრი ნებისმიერი საწყისი ფაზით მიიღება (2.46) ფორმულის ელემენტარული განზოგადებით:

$$\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \leftrightarrow \pi [\delta(\omega - \omega_0) e^{j\varphi_0} + \delta(\omega + \omega_0) e^{-j\varphi_0}].$$

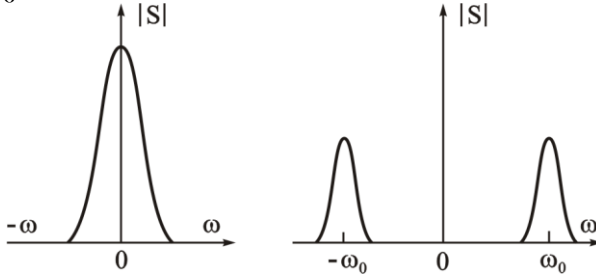
რადიოიმპულსის სპექტრი არის ნახევვი

$$S_{\omega}(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega - \xi) [\delta(\xi - \omega_0) e^{j\omega_0} + \delta(\xi + \omega_0) e^{-j\omega_0}] d\xi$$

დელტა-ფუნქციის მაფილტრირებული თვისების გათვალისწინებით, ვღებულობთ მნიშვნელოვან შედეგს:

$$S_{\omega}(\omega) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0} S_{\xi}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0} S_{\xi}(\omega + \omega_0). \quad (2.50)$$

ნახ. 2.30 მოყვანილია ვიდეოიმპულსის სპექტრის ტრანსფორმაცია მისი გადამრავლებისას მაღალსიხშირულ ჰარმონიულ სიგნალზე.



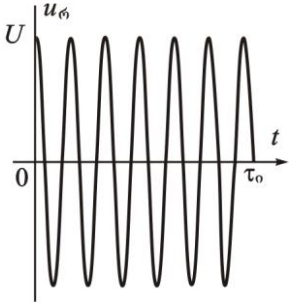
ა - ვიდეოიმპულსი
 ბ - რადიოიმპულსი
 ნახ. 2.30 სპექტრული სიმკვრივის მოდულის სიხშირული დამოკიდებულებები

ჩანს, რომ სპექტრული მიდგომით ვიდეოიმპულსიდან რადიოიმპულსზე გადასვლა ნიშნავს ვიდეოიმპულსის სპექტრის გადატანას მაღალი სიხშირის არეში - სპექტრული სიმკვრივის ერთი მაქსიმუმის ნაცვლად, როცა $\omega = 0$, შეიმჩნევა ორი მაქსიმუმი როცა $\omega = \pm\omega_0$; აბსოლუტური მნიშვნელობები მცირდება ორჯერ.

აღვნიშნოთ, რომ ნახ. 2.30 მოყვანილი გრაფიკები პასუხობენ სიტუაციას, როდესაც სიხშირე ω_0 მნიშვნელოვნად აღემატება ვიდეოიმპულსის სპექტრის **ფეკტურ სიგანეს** (ჩვეულებრივ ზუსტად ასეთი შემთხვევა რეალიზირდება პრაქტიკაში). ამასთან არ შეინიშნება სპექტრის შესამჩნევი გადაფარვა, რომლებიც პასუხობენ სიხშირის დადებით და უარყოფით მნიშვნელობებს. მაგრამ შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ ვიდეოიმპულსის სპექტრის სიგანე (მოკლე იმპულსის დროს) იმდენად დიდია, რომ ω_0 სიხშირის ამორჩეული მნიშვნელობა არ გამორიცხავს “გადაფარვის” ფეკტს. აქედან გამომდინარეობს, რომ ვიდეოიმპულსის და რადიოიმპულსის სპექტრების პროფილები არ არის მსგავსი.

მაგალითი 2.3. იპოვეთ მართკუთხა ფორმის რადიოიმპულსის (იხ. ნახ. 2.31) სპექტრული სიმკვრივე.

ამოხსნა: ამოხსნის გასამარტივებლად დავუშვათ, რომ სავსის ფაზა უდრის ნულს. მაშინ რადიომპულსის მათემატიკური მოდელი ჩაიწერება სახით



ნახ. 2.31

$$s_{\theta}(t) = U [\sigma(t) - \sigma(t - \tau_0)] \cos \omega_0 t.$$

ვიცით რა მართკუთხა ფორმის რადიომპულსის სპექტრული სიმკვრივე

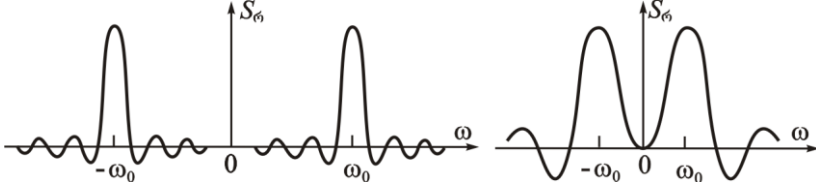
$$S(\omega) = \frac{2U}{\omega} \sin \frac{\omega \tau_0}{2}, \quad \text{თუ შემოვიტანო}$$

$$\xi = \omega \tau_0 / 2, \quad \text{მაშინ } S(\xi) = U \tau_0 \frac{\sin \xi}{\xi} \quad (\text{იხ. ფორმულა (2.20)})$$

შემდეგ კი ფორმულა (2.50)-ის გამოყენებით ვპოულობთ საძიებელ სპექტრს

$$S_{\theta}(\omega) = \frac{U \tau_0}{2} \left[\frac{\sin \frac{(\omega - \omega_0) \tau_0}{2}}{\frac{(\omega - \omega_0) \tau_0}{2}} + \frac{\sin \frac{(\omega + \omega_0) \tau_0}{2}}{\frac{(\omega + \omega_0) \tau_0}{2}} \right]. \quad (2.51)$$

ნახ. 2.32 გამოსახულია ფორმულა (2.51)-ით ჩატარებული სპექტრული სიმკვრივის გამოთვლები ორი დამახასიათებელი შემთხვევისთვის:



ა - როცა $\omega_0 \tau_i = 20\pi$

ბ - როცა $\omega_0 \tau_i = 2\pi$

ნახ. 2.32. მართკუთხა მომენტების მქონე რადიომპულსის სპექტრული სიმკვრივების გრაფიკები ორი შემთხვევისთვის

პირველ შემთხვევაში (ნახ. 2.32 ა) მოვლების იმპულსი შეიცავს მაღალსიხშირულ შევსების 10 პერიოდს ($\omega_0 \tau_i = 20\pi$); ω_0 სიხშირე ამ შემთხვევაში იმდენად დიდია, რომ თავის დაღწევა “გადაფარვისგან” შეუძლებელია. **მეორე შემთხვევაში** (ნახ. 2.32, ბ) რადიომპულსი შეიცავს შევსების მხოლოდ 1 (ერთ) პერიოდს ($\omega_0 \tau_i = 2\pi$). შემდგენების ზედღებას, რომლებიც შეესაბამება დადებითი და უარყოფითი სიხშირეების არეებს, მიყვებათ რადიომპულსის სპექტრული სიმკვრივის და მახასიათებელი ასიმეტრიული ფოთლისებური გრაფიკის სტრუქტურამდე.

2.5. ლაპლასის გარდაქმნა

ასე ეწოდება ინტეგრალური გარდაქმნის კიდევ ერთ სახეს, რომელიც ფურიეს გარდაქმნასთან ერთად ფართოდ გამოიყენება რადიოტექნიკაში საკმაოდ განსხვავებული ამოცანებისთვის, რაც დაკავშირებულია სიგნალების შესწავლასთან.

2.5.1. კომპლექსური სიხშირის ცნება

სპექტრული მეთოდები, როგორც ცნობილია, დაფუძნებულია იმაზე, რომ გამოსაკვლევი სიგნალი წარმოდგინება ელემენტარული შესაკრებების უსაზღვროდ დიდი რიცხვის სახით, რომელთაგან თითოეული დროში იცვლება პერიოდულად კანონით $\exp(j\omega t)$.

ამ პრინციპის ბუნებრივი განზოგადება მდგომარეობს იმაში, რომ ნაცვლად კომპლექსური ექსპონენციალური სიგნალებისა სუფთა წარმოსახვითი მანვენებლებით განიხილავენ $\exp(pt)$ სახის სიგნალებს, სადაც p კომპლექსური რიცხვია: $p = \sigma + j\omega$, რომელმაც მიიღო **კომპლექსური სიხშირის** სახელწოდება.

ორი ასეთი კომპლექსური ექსპონენციალური სიგნალისაგან შეიძლება შევადგინოთ ნამდვილი სიგნალი, მაგალითად, შემდეგი წესის მიხედვით:

$$s(t) = (e^{pt} + e^{p^*t}) / 2, \quad (2.52)$$

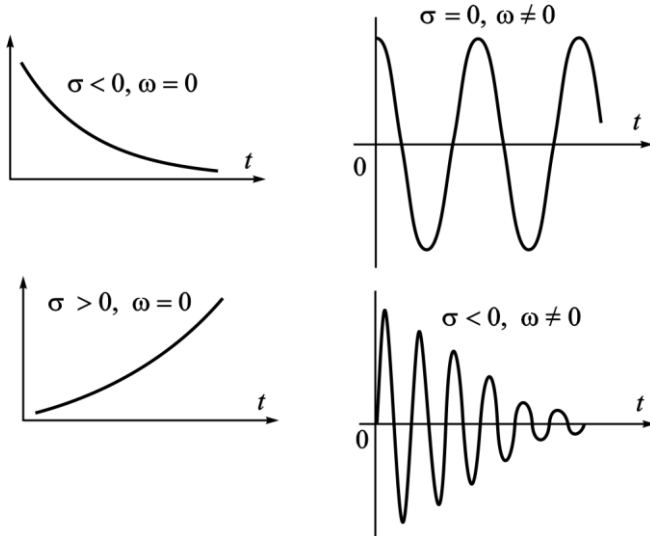
სადაც $p^* = \sigma - j\omega$ კომპლექსური სიხშირის შეუღლებული სიდიდეა.

მართლაც, ამ დროს

$$s(t) = e^{\sigma t} \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} = e^{\sigma t} \cos \omega t. \quad (2.53)$$

კომპლექსური სიხშირის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილების არჩევის მიხედვით შეიძლება მივიღოთ სხვადასხვა სახის ნამდვილი სიგნალები. ამგვარად, თუ $\sigma = 0$, მაგრამ $\omega \neq 0$, მაშინ მიიღება $\cos \omega t$ სახის ჩვეულებრივი პარმონიული რხევები. თუ $\omega = 0$ მაშინ σ -ის ნიშნის მიხედვით მიიღება დროში ზრდადი ან კლებადი ექსპონენციალური რხევები.

ასეთი სახის სიგნალები იღებენ უფრო რთულ ფორმას, როცა $\omega \neq 0$. აქ მამრავლი $\exp(\sigma t)$ აღწერს **მომგლებს**, რომელიც ექსპონენციალურად იცვლება დროში. ზოგიერთი ტიპური სიგნალი გამოსახულია ნახ. 2.33 -ზე.



ნახ. 2.32. ნამდვილი სიგნალები, რომლებიც პასუხობენ კომპლექსური სიხშირის სხვადასხვა მნიშვნელობებს.

კომპლექსური სიხშირის ცნება აღმოჩნდა მეტად სასარგებლო, უპირველეს ყოვლისა, იმიტომ, რომ შესაძლებლობას გვაძლევს, არ მივმართოთ განზოგადებულ ფუნქციებს, მივიღოთ სიგნალების სპექტრული წარმოდგენები, რომელთა მათემატიკური მოდელები არაინტეგრირებადია. არსებითია სხვა მოსაზრებაც: (2.53) სახის ექსპონენციალური სიგნალები წარმოადგენენ სხვადასხვა წრფივ სისტემებში რხევების გამოკვლევის ”ბუნებრივ” საშუალებას. ეს საკითხები შესწავლილი იქნება ”წრფივი სისტემები“-ს მე-3 თავში.

ყურადღება უნდა მიექცეს იმას, რომ ჭეშმარიტი ფიზიკური სიხშირე წარმოადგენს კომპლექსური სიხშირის წარმოსახვით ნაწილს. კომპლექსური სიხშირის ნამდვილი ნაწილისათვის სპეციალური ტერმინი არ არსებობს.

2.5.2. ძირითადი თანაზარდობანი

ვთქვათ $f(t)$ რაიმე სიგნალია, ნამდვილი ან კომპლექსური, განსაზღვრული $t \geq 0$ დროს და რომელიც უდრის ნულს დროის უარყოფითი მნიშვნელობებისას. ამ სიგნალის ლაპლასის გარდაქმნა არის კომპლექსური p ცვლადის ფუნქცია, რომელიც მოიცემა ინტეგრალით:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (2.54)$$

$f(t)$ სიგნალს ეწოდება **ორიგინალი**, ხოლო $F(p)$ ფუნქციას – მისი **გამოსახლება ლაპლასის მიხედვით** (მოკლედ, უბრალოდ **გამოსახლება**).

პირობა, რომელიც უზრუნველყოფს (2.54) ინტეგრალის არსებობას, მდგომარეობს შემდეგში: $f(t)$ სიგნალს უნდა ჰქონდეს ზრდის არაუმეტეს ექსპონენციალური ხარისხი, როცა $t > 0$, ე.ი. უნდა აკმაყოფილებდეს უტოლობას $|f(t)| \leq A \exp(at)$, სადაც A, a – დადებითი რიცხვებია.

ამ უტოლობის შესრულებისას $F(p)$ ფუნქცია არსებობს იმ აზრით, რომ (2.54) ინტეგრალი აბსოლუტურად კრებადია ყველა p კომპლექსური რიცხვისთვის, რომელთათვისაც $\operatorname{Re} p > a$. a რიცხვს ეწოდებენ **აბსოლუტური კრებადობის აბსცისას**.

ცვლადი p ძირითად ფორმულაში (2.54) შეიძლება იყოს გაიგივებული კომპლექსურ სისშირესთან $p = \sigma + j\omega$. მართლაც, სუფთა წარმოსახვითი კომპლექსური სისშირისას, როცა $\sigma = 0$,

ფორმულა (2.54) გადადის (2.16) $\left(S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt \right)$ ფორმულა-

ში, რომელიც განსაზღვრავს სიგნალის ფურიეს გარდაქმნას. ის ნულის ტოლია, როცა $t < 0$. ამრიგად, ლაპლასის გარდაქმნა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ფურიეს გარდაქმნის განზოგადება კომპლექსური სისშირეების შემთხვევაზე.

მსგავსად იმისა, როგორც ეს ხდება ფურიეს გარდაქმნის თეორიაში, თუ ვიცით გამოსახლება, შეიძლება ადვადგინოთ ორიგინალი. ამისათვის ფურიეს შექცეული გარდაქმნის ფორმულაში

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

მიზანშეწონილია შევასრულოთ ანალიტიკური გაგრძელება, წარმოსახვითი $j\omega$ ცვლადიდან $\sigma + j\omega$ კომპლექსურ არგუმენტზე გადასვლით. კომპლექსური სისშირის სიბრტყეზე ინტეგრირებას ახდენდნენ უსაზღვროდ გაჭიმული ვერტიკალური ღერძის გასწვრივ, რომელიც განლაგებულია აბსოლუტური კრებადობის აბსცისის მარჯვნივ. ვინაიდან, როცა $\sigma = \text{const}$

დიფერენციალი $d\omega = (1/j) dp$, ლაპლასის შექცეული გარდაქმნის ფორმულა დებულობს სახეს:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)e^{pt} dp. \quad (2.55)$$

კომპლექსური ცვლადის თეორიაში დამტკიცებულია, რომ ლაპლასის მიხედვით გამოსახულებას აქვს "კარგი" თვისებები სივლუვის თვალსაზრისით: ასეთი გამოსახულებები კომპლექსური სიბრტყის ყველა p წერტილში, ეგრეთწოდებული განსაკუთრებული წერტილების ცვლადი სიმრავლის გამოკლებით, წარმოადგენენ ანალიზურ ფუნქციებს. განსაკუთრებული წერტილები, როგორც წესი, – პოლუსებია, ერთჯერადი ან მრავალჯერადი. ამიტომ (2.55) სახის ინტეგრალების გამოსათვლელად შეიძლება გამოვიყენოთ ნაშთთა თეორიის მოქნილი მეთოდები.

პრაქტიკაში ფართოდ გამოიყენება ლაპლასის გარდაქმნის ცხრილები, რომლებშიც თავმოყრილია ცნობები ორიგინალებსა და გამოსახულებებს შორის შესაბამისობის შესახებ.

ცხრილების არსებობამ ლაპლასის გარდაქმნა გახადა პოპულარული როგორც თეორიულ კვლევებში, ისე რადიოტექნიკური მოწყობილობებისა და სისტემების საინჟინრო გაანგარიშებებში. [17]-ის დანართებში მოცემული გვაქვს ისეთი ცხრილი, რომელიც საშუალებას გვაძლევს გადავწყვიტოთ ამოცანების საკმაოდ ფართო წრე.

2.5.3. ლაპლასის ბარდაქმნების გამომთვლის მაგალითები

გამოსახულებების გამოთვლის საშუალებებში ბევრი საერთოა იმასთან, რაც უკვე შესწავლილია ფურიეს გარდაქმნებთან დაკავშირებით. განვიხილოთ შედარებით მახასიათებელი შემთხვევები.

მაგალითი 2.4. დაადგინეთ განზოგადოებული ექსპონენციალური იმპულსის გამოსახულება.

ამოხსნა: ვთქვათ $f(t) = \exp(p_0 t)\sigma(t)$, სადაც $p_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ – ფიქსირებული კომპლექსური რიცხვია. σ ფუნქციის არსებობა უზრუნველყოფს ტოლობას $f(t) = 0$, როცა $t < 0$. თუ გამოვიყენებთ

$$(2.54) \text{ ფორმულას } \left(F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \right), \text{ მივიღებთ}$$

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-(p-p_0)t} dt = -\frac{e^{-(p-p_0)t}}{p-p_0} \Big|_{t=0}^{t=\infty}.$$

თუ $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, მაშინ ზედა ზღვრის ჩასმისას მრიცხველი იქცევა ნულად. შედეგად მივიღებთ შესაბამისობას

$$e^{p_0 t} \sigma(t) \leftrightarrow \frac{1}{p-p_0}. \quad (2.56)$$

როგორც (2.56) ფორმულის კერძო შემთხვევა, შეიძლება ვიპოვოთ გამოსახულებები: ნამდვილი ექსპონენციალური ვიდეომიპულსისა

$$e^{-\alpha t} \sigma(t) \leftrightarrow \frac{1}{p+\alpha}; \quad (2.57)$$

და კომპლექსური ექსპონენციალური სიბნალისა

$$e^{j\omega_0 t} \sigma(t) \leftrightarrow \frac{1}{p-j\omega_0}. \quad (2.58)$$

ბოლოს, (2.57)-ში $\alpha = 0$ ჩასმით, მივიღებთ **ხევისაიდის** ფუნქციის გამოსახულებას:

$$\sigma(t) \leftrightarrow \frac{1}{p} \quad (2.59)$$

მაგალითი 2.5. დაადგინეთ დელტა-ფუნქციის გამოსახულება.

ამოხსნა: თუ განსახილველი იმპულსი აღიძვრება $t_0 > 0$ დროის მომენტში, მაშინ ინტეგრალი

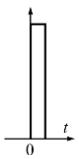
$$\int_0^{\infty} \delta(t-t_0) e^{-pt} dt = e^{-pt_0}.$$

ამგვარად, $\delta(t-t_0) \leftrightarrow e^{-pt_0}$ (2.60)

ეს გამოსახულება განსაზღვრულია კომპლექსური სიბრტყის ყველა p წერტილში და არსად არ გააჩნია თავისებურებანი, გარდა უსასრულოდ დაშორებული წერტილისა.

გარკვეულ სირთულეს შეიძლება წარმოადგენდეს დელტა-იმპულსის გამოსახულების გამოთვლა, რომელიც თავმოყრილია, როცა $t=0$, რამდენადაც გაუგებარია, როგორ უნდა გავითვალისწინოთ წილი განზოგადებული ფუნქციიდან, რომელიც თავმოყრილია ინტეგრირების არის ერთ-ერთ ბოლოში. საქმე იმაშია, რომ თავში 1 დელტა-ფუნქცია განსაზღვრული იყო როგორც იმ იმპულსების თანმიმდევრობის ზღვარი, რომლებიც სიმეტრიულია $t=0$ წერტილის მიმართ. თუ ფორმალურად მოვიქცევით, მაშინ ინტეგრირების არის ფარგლებში აღმოჩნდება ასეთი იმპულსის მხოლოდ ნახევარი, რაც მივიყვანს

ინტეგრალის ორჯერად შემცირებამდე. იმისათვის, რომ ეს არ მოხდეს, $\delta(t)$ ფუნქციის გამოსახულება განისაზღვრება, როგორც ზღვარი

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0-\varepsilon}^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = 1, \quad \text{რომელიც არ არის}$$


დამოკიდებული ε პარამეტრზე. ასეთი მიდგომისას $\delta(t)$ ფუნქცია მთლიანად ეკუთვნის ინტეგრირების არეს. ამიტომ დელტა-იმპულსი (ნახ. 2.34) ეკუთვნის $t > 0$ არეს, ანუ

ნახ. 2.34 $\delta(t) \leftrightarrow 1$. (2.61)

2.5.4. წარმოებულების გამოსახულება

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ სიგნალის პირველი წარმოებულის გამოსახულება, საჭიროა შევასრულოთ ნაწილობითი ინტეგრირება:

$$\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt = f(t)e^{-pt} \Big|_{t=0}^{t=\infty} + p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

ადვილად ვრწმუნდებით, რომ პირველი წარმოებულის გამოსახულება შეიცავს სიგნალის მნიშვნელობას საწყის წერტილში:

$$\frac{df}{dt} \leftrightarrow pF(p) - f(0). \quad (2.62)$$

ინდუქციის მიხედვით მტკიცდება ფორმულა n -რიგის წარმოებულის გამოსახულებისათვის:

$$\frac{d^n f}{dt^n} \leftrightarrow p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \quad (2.63)$$

საწყისი მდგომარეობის გათვალისწინების შესაძლებლობა $t=0$ დროს საშუალებას გვაძლევს გამოვიყენოთ ლაპლასის გარდაქმნის მეთოდი უცნობი საწყისი პირობების მქონე წრფივი დიფერენციალური განტოლებების ამოსახსნელად.

ლაპლასის გარდაქმნის ძირითადი თვისებები ფურციეს გარდაქმნის აღწერილი თვისებების მსგავსია [9].

თემა: 2.6. ვეივლეტ-ანალიზი

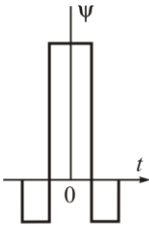
სპექტრული ანალიზის მეთოდები, რომლებიც ეფუძნება ტრიგონომეტრიული ბაზისური სისტემების გამოყენებას, სრულიად ადეკვატურია სიგნალების გამოკვლევის ამოცანებისა, როდესაც სიგნალები თავისი ხასიათით ახლოს არიან პერიოდულ რხევებთან. მაგალითად, რადიოიმპულსის ფურიე-წარმოდგენის მოძიებისას, შესაძლებელია წინდაწინ გამტკიცოთ, რომ მისი სპექტრული სიმკვრივის მოდულის სისწორულ დამოკიდებულებას ექნება მკვეთრად გამოსახული მაქსიმუმი მაღალსიხშიროვანი შეფხების **გარეუბანში**.

თუ სიგნალს არ აქვს მკვეთრად გამოხატული პერიოდული ხასიათი, მაშინ ფურიეს გარდაქმნის ალგორითმი რჩება ძალაში, მაგრამ ამ ალგორითმის ეფექტურობა მნიშვნელოვნად ვარდება. კერძოდ, შეუძლებელი ხდება, დროის არეში მონაცემების მოცულობის შენარჩუნება სიგნალის მათემატიკური მოდელიდან შესაბამის მოდელზე გადასვლის ხარჯზე სისწორულ არეში.

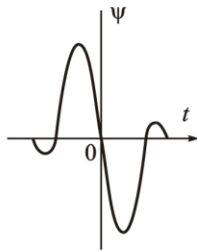
ამ სირთულეების გადასაღახად, ბოლო წლებში, შემოთავაზებული იქნა ახალი მიდგომა, რომლის საფუძველზეც აიგო მთელი მიმართულება, რომელსაც ეწოდება **ვეივლეტ-ანალიზი**.

2.6.1. ვეივლეტ-ანალიზის ცნება

ინგლისური სიტყვა **wavelet** შესაძლებელია გადაითარგმნოს როგორც “მცირე ტალღა” ან “მცირე რხევა”. ამ ტერმინის აზრი მიუთითებს იმ მოთხოვნებზე,



ნახ. 2.35



ნახ. 2.36

რომლებსაც აუცილებლად უნდა შეესაბამებოდეს რაიმე $\psi(t)$ ფუნქცია იმისათვის, რომ მიეკუთვნებოდეს ამ ფუნქციათა კლასს:

1. ასეთი ფუნქციის გრაფიკი უნდა მერყეობდეს t ღერძის რაიმე **ნული** წერტილის გარ-

შემო, ამასთან
$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0;$$

2. ფუნქციის ნორმა უნდა იყოს სასრული:
$$\|\psi\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(t) dt} < +\infty.$$

ვეივლეტის კონკრეტული ამორჩევა მთლიანად დამოკიდებულია დასმული ამოცანის ხასიათზე და გასაანალიზებელი სიგნალის სახეზე.

ქვემოთ ნაჩვენები იქნება, რომ ვეივლეტ-ანალიზი იძლევა მძლავრ და საკმაოდ მოქნილ საშუალებას **ორთონორმირებული ბაზისების** ასაგებად სიგნალების სივრცეში.

2.6.2. დისკრეტული ვეივლეტ-ანალიზი

ასე ეწოდება სიგნალების წარმოდგენას განზოგადოებული ფურიეს რიგის მწკრივად, ბაზისური ფუნქციების სისტემაში, რომელიც წარმოიქმნება რაიმე საწყისი ვეივლეტიდან $\psi(t)$ დროში წანაცვლებით და დროის მასშტაბის ცვლილების ოპერაციების ჩატარების ხარჯზე.

თუ შესასწავლი სიგნალი არსებობს დროის ღერძის $[0, T]$ მონაკვეთზე, მაშინ მოსახერხებელია, როგორც ეს კეთდებოდა ადრე, უგანზომილებო დროში $\theta = t/T$ გადასვლა; ასეთი შეცვლით სიგნალის არგუმენტი მოთავსდება $[0, 1]$ მონაკვეთის ზღვრებში.

თვალსაჩინოებისათვის განვიხილოთ უბრალო შემთხვევა, როცა ბაზისის ელემენტის შემქმნელად გამოიყენება **ხაარას** ვეივლეტი. ის ფუნქცია არსებობს $[0, 1]$ მონაკვეთზე და დებულს ამ ინტერვალში ორიდან ერთ მნიშვნელობას:

$$\psi(\theta) = \begin{cases} 1, & 0 < \theta \leq 1/2 \\ -1, & 1/2 < \theta \leq 1 \end{cases} \quad (2.64)$$

შევქმნათ ფუნქციათა სისტემა შემდეგი წესის მიხედვით:

$$\psi_{jk}(\theta) = A\psi(2^j\theta - k), \quad (2.65)$$

სადაც A - რაიმე მუდმივაა; j, k - დადებითი და უარყოფითი მთელი რიცხვებია, ნულის ჩათვლით.

შეიძლება დავრწმუნდეთ იმაში, რომ $\psi_{jk}(\theta)$ ფუნქციები არიან ურთიერთორთოგონალური, ანუ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{jk}(\theta) \psi_{mn}(\theta) d\theta = 0, \quad (2.66)$$

თუ ტოლობები $j = m$ და $k = n$ ერთდროულად არ სრულდება. მართლაც, თუ $j \neq m$ თუმცა $k = n$, მაშინ ერთ-ერთი ვეივლეტი მთლიანად განლაგდება დროის ღერძის იმ მონაკვეთზე, სადაც მეორე ვეივლეტი მუდმივი სიდიდეა. ამას კი უშუალოდ მივყვარ-

რო (2.66) ინტეგრალის განულებასთან. თუ $j = m$ და $k \neq n$, მაშინ (2.66) ინტეგრალქვეშა ერთ-ერთი თანამამრავლი მაინც უდრის ნულს.

(2.65) ფორმულაში A მუდმივი რიცხვი შესაძლებელია შევარჩიოთ ისე, რომ ვეივლეტის ბაზისური სისტემა გახდეს ორთონორმირებული. ამისათვის გამოვიყენოთ სიგნალის ენერჯიის განსაზღვრა და მოვითხოვოთ, რომ

$$\begin{aligned} A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(2^j \theta - k) d\theta &= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(2^j \theta - k) \frac{d(2^j \theta)}{2^j} = \\ &= A^2 2^{-j} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(\xi) d\xi = A^2 2^{-j} = 1. \end{aligned}$$

ეს ნიშნავს, რომ $A = 2^{j/2}$ (2.67)

ავაგებთ რა **ხარას ვეივლეტის** ორთონორმირებულ ბაზისურ სისტემას, შეგვიძლია განვახორციელოთ ნებისმიერი $s(t)$ სიგნალის წარმოდგენა **განზოგადებული ფურიეს მწკრივის** სახით:

$$s(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{j/2} c_{jk} \psi\left(2^j \frac{t}{T} - k\right). \quad (2.68)$$

(1.29) ფორმულის საფუძველზე (იხ. ლექცია 3, გვ. 33) c_{jk} კოეფიციენტი არის სკალარული ნამრავლი საწყისი სიგნალის და შესაბამისი ბაზისური ფუნქციისა:

$$c_{jk} = \left(s(t), 2^{j/2} \psi\left(2^j \frac{t}{T} - k\right) \right). \quad (2.69)$$

ფორმალურად (2.68) სახის ფურიეს განზოგადებული რიგი განსხვავდება ადრე შესწავლილებისაგან იმით, რომ აჯამება **ხორციელდება** არა ერთი, არამედ **ორი ინდექსით**. ეს გარემოება არ არის მნიშვნელოვანი, ვინაიდან როგორც ერთინდექსიანი, ასევე ორინდექსიანი სისტემები მიეკუთნებიან ერთი და იმავე უსასრულო მთელელების კლასს, ანუ სათვალავ სიმრავლეებს.

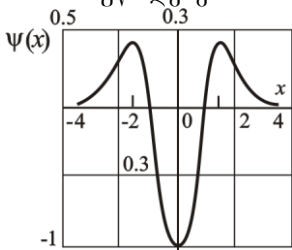
სიგნალის ვეივლეტ სპექტრი, რომელიც იღებს ნამდვილ მნიშვნელობებს, შესაძლებელია წარმოვიდგინოთ როგორც “ტყე” ვერტიკალური მონაკვეთებით, რომელიც განთავსებულია jk -სიბრტყის წერტილებში მთელრიცხოვანი კოორდინატებით. ამასთან j კოორდინატა მიუთითებს სიგნალის სიჩქარის ცვლილებაზე, ხოლო k - მის მდებარეობაზე დროის დერძის გასწვრივ.

2.6.3. ვეივლეტ-პარაქმნა

ზემოთ განხილული ხაარას ვეივლეტების წყვეტილი ფუნქციების მსგავსად, შესაძლებელია ვისარგებლოთ უწყვეტი ვეივლეტებით. მათ საფუძველზე შესაძლებელია ავაგოთ ფურიეს და ლაპლასის სრული ანალოგიები. ასეთი ფუნქციის მაგალითად შესაძლებელია გამოვიყენოთ კარგად შესწავლილი ვეივლეტი

$$\psi(x) = (x^2 - 1)\exp(-x^2/2), \quad (2.70)$$

რომელიც არის გაუსის იმპულსის $\exp(-x^2/2)$ მეორე წარმოებული. ამ ფუნქციის მახასიათებელი სახის გამო ლიტერატურაში მას უწოდებენ “სომბრეროს” (მექსიკური ქუდი).



ნახ. 2.37

ხაარას დისკრეტული ვეივლეტების მსგავსად, შესაძლებელია უწყვეტი ვეივლეტების ხანგძლივობის მასშტაბირება (ანუ შეკუმშვა და გაჭიმვა), ასევე გადაადგილება დროის ღერძის გასწვრივ. შედეგად მივიღებთ ვეივლეტებთან, რომლებიც დამოკიდებულია ორი რიცხოვრივ a და b პარამეტრზე:

$$\psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right). \quad (2.71)$$

მამრავლი $1/\sqrt{|a|}$ უზრუნველყოფს ამ სიგნალების ნორმის a მასშტაბური რიცხვის არჩევისაგან დამოუკიდებლობას.

განსაზღვრების თანახმად, $s(t)$ სიგნალის ვეივლეტ-გარდაქმნა არის ორი (a და b) ცვლადის ფუნქცია

$$W_s(a, b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt. \quad (2.72)$$

ვეივლეტ-ანალიზი თავისი აზრობრივი დატვირთვით სრულიად შეესაბამება ფურიეს გარდაქმნას. მაგრამ აქ ინტეგრალური გარდაქმნის ბირთვად $\exp(-j\omega t)$ ფუნქციის ნაცვლად გამოიყენება $\psi((t-b)/a)$ ვეივლეტი.

ვეივლეტი ლოკალიზებულია როგორც დროის, ასევე სიხშირულ არეებში. ეს განაპირობებს მის ფართო გამოყენებას ყველა ი სიგნალების იმპულსების აღწერისათვის, რომლებსაც არ გააჩნია მკაფიოდ გამოხატული პერიოდულობა.

$W_s(a, b)$ ვეივლეტ-გარდაქმნა არის ორი არგუმენტის ფუნქცია, პირველი მათგანი ანალოგიურია **ოსცილაციის** პერიოდისა (ანუ **სისშირის შებრუნებელი**), ხოლო მეორე – სიგნალის წანაცვლებაა დროში, დროის ღერძის გასწვრივ. ნათელია, რომ თუ შესასწავლი $s(t)$ სიგნალი წარმოადგენს რაიმე ერთეულოვან იმპულსს, რომელიც თავმოყრილია $t=t_0$ წერტილის მიდამოში და τ_0 მისი ხანგრძლივობაა, მაშინ მისი ვეივლეტ-გარდაქმნა მიიღებს უდიდეს მნიშვნელობას წერტილის მიდამოს $a = \tau_0$, $b = t$ კოორდინატებში.

(2.72) ტოლობა მოცემული მარცხენა მხარით შესაძლოა განვიხილოთ როგორც ინტეგრალური განტოლება $s(t)$ სიგნალის მიმართ. ამ განტოლების ამონახსნი მოცემულია უკუ ვეივლეტ-გარდაქმნის სახით [10]:

$$s(t) = \frac{1}{\| \psi_{ab} \|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2} W_s(a, b) \psi_{ab}(t) da db \quad (2.73)$$

ეს ფორმულა საბოლოოდ ადგენს მსგავსებას ვეივლეტ-ანალიზისა და ფურიეს გარდაქმნის მეთოდებს შორის.

ბოლო დროს ვეივლეტ-ანალიზის ტექნიკა გამოიყენება მრავალი აქტუალური ამოცანის გადაჭრისას. უპირველეს ყოვლისა სიგნალების შეკუმშვისას და გამოცნობისას. მისი ალგორითმები ფართოდ გამოიყენება Matlab-ში.

2.7. მე-II თაზის მოკლე მიმოხილვა

2.7.1. შედეგები

1. სიგნალის სპექტრული დაშლა წარმოადგენს მის დაშლას (**სასრულ ან უსასრულო**) ელემენტარული სხვადასხვა სისშირის მქონე ჰარმონიული სიგნალების ჯამად.
2. პერიოდული სიგნალები წარმოადგენენ ფურიეს რიგის მწკრივს, რომლებიც წარმოიქმნება, ზოგადად რომ ვთქვათ, უსასრულო ოდენობის ჰარმონიკების აჯამებით. ჰარმონიკების სისშირეები ძირითადი ჰარმონიკის სისშირის ჯერადია.
3. არაპერიოდული სიგნალების სპექტრული წარმოდგენა, კერძოდ, იმპულსური სიგნალებისა, ხორციელდება მათი ფურიეს ინტეგრალად დაშლის გზით.
4. სისშირულ არეში არაპერიოდული სიგნალი ხასიათდება თავისი სპექტრული სიმკვრივით. სიგნალი და მისი სპექტრული სიმკვრივე ურთიერთ დაკავშირებულია ფურიეს წყვილი გარდაქმნებით.

5. კლასიკური აზრით, სპექტრული სიმკვრივის არსებობისათვის აუცილებელია, რომ სიგნალი იყოს აბსოლუტურად ინტეგრირებადი.
6. არაინტეგრირებადი სიგნალის სპექტრული სიმკვრივე შეიცავს დელტა-ფუნქციის ტიპის თავისებურებას.
7. ფურიეს გარდაქმნაში კომპლექსურ სიხშირეზე გადასვლას მივყევართ ახალი სახის ინტეგრალურ გარდაქმნებთან – **ლაპლასის გარდაქმნასთან**. ლაპლასით გარდაქმნილი სიგნალები, როცა $t < 0$ უნდა გადაიქცენ ნულად.

2.7.2. საპონტროლო კითხვები

1. რატომ აქვს მარტივ ჰარმონიულ რხევას $\cos(\omega t + \theta_0)$ განსაკუთრებული მნიშვნელობა რადიოტექნიკაში?
2. მოიყვანეთ პერიოდული სიგნალის ცნების განსაზღვრა. დაასახელეთ რამდენიმე ფიზიკური პროცესი, რომლებსათვის პერიოდული სიგნალის მოდელი არის აღწერის საკმარისად ზუსტი საშუალება.
3. როგორ განვსაზღვროთ ჰარმონიული რხევის წაკვეთის კუთხე?
4. როგორ წარმოიშვება უარყოფითი სიხშირის ცნება?
5. რაში მდგომარეობს ჰარმონიული რხევების კოჰერენტული შეკრების ეფექტი?
6. რა თვისებები გააჩნია ნამდვილი სიგნალის სპექტრულ სიმკვრივეს?
7. რაგორ არის მიღებული იმპულსური სიგნალების ხანგძლივობის განსაზღვრა?
8. რაში მდგომარეობს მახასიათებელი სპექტრის დელტა-ფუნქციის განსაკუთრებულობა?
9. როგორ განვსაზღვროთ,ორი სიგნალის სკალარული ნამრავლი მათი ცნობილი სპექტრული სიმკვრივეების გამოყენებით?
10. რა კავშირია იმპულსის ხანგძლივობასა და მისი სპექტრის სიგანეს შორის?
11. როგორ აისახება სიხშირულ არეში სიგნალების დიფერენცირების და ინტეგრირების ოპერაციები?
12. როგორ არიან ერთმანეთთან დაკავშირებული ვიდეოიმპულსის და რადიოიმპულსის სპექტრული სიმკვრივეები?
13. რა ეფექტს გაუწევს სიხშირული არეების ”გადაფარვა” რადიო იმპულსის სპექტრს?
14. რაში მდგომარეობს კომპლექსური სიხშირის აზრი?

15. რა სიგნალებზეა შესაძლებელი ლაპლასის გარდაქმნის გამოყენება?

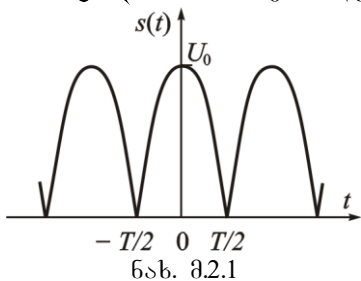
2.7.3. ბამოთვლის ზოგადი მეთოდიკა

ზოგადი მეთოდი არ არსებობს. ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში მაგალითის/ამოცანის ამოხსნას უნდა მივუსადაგოთ შესაბამისი მათემატიკური აპარატი და ლოგიკური მსჯელობით ამოვხსნათ დასმული მაგალითი ან ამოცანა.

2.7.4. ტიპიური ამოცანების ამოხსნის მაგალითები

2.7.4.1. პერიოდული სიგნალები და ფურიეს მწკრივები

მაგალითი მ.2.1. პერიოდული სიგნალი $s(t)$ T პერიოდით



$-T/2 \leq t \leq T/2$ მონაკვეთზე მოცემულია გამოსახულებით

$$s(t) = U_0 \cos(\pi t/T) \quad (\text{ნახ. მ.2.1}).$$

იპოვეთ ამ სიგნალის ფურიეს მწკრივის C_n კოეფიციენტების გამოსახულებები.

ამოხსნა. ვინაიდან $s(t) = U_0 \cos \frac{\omega_1 t}{2}$, ამიტომ

$$C_n = \frac{2U_0}{T} \int_0^{T/2} \cos \frac{\omega_1 t}{2} \cos(n\omega_1 t) dt.$$

ვისარგებლოთ იმით, რომ $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$.

მაშინ

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{U_0}{T} \int_0^{T/2} \cos \omega_1 \left(n + \frac{1}{2}\right) t dt + \frac{U_0}{T} \int_0^{T/2} \cos \omega_1 \left(n - \frac{1}{2}\right) t dt = \\ &= \frac{U_0}{T} \frac{\sin \omega_1 \left(n + \frac{1}{2}\right) t}{\omega_1 \left(n + \frac{1}{2}\right)} \Big|_0^{T/2} + \frac{U_0}{T} \frac{\sin \omega_1 \left(n - \frac{1}{2}\right) t}{\omega_1 \left(n - \frac{1}{2}\right)} \Big|_0^{T/2} = \frac{2U_0 (-1)^{n+1}}{\pi (4n^2 - 1)} \end{aligned}$$

მაგალითი მ.2.2. $u(t)$ პერიოდულ რხევას აქვს T პერიოდი.

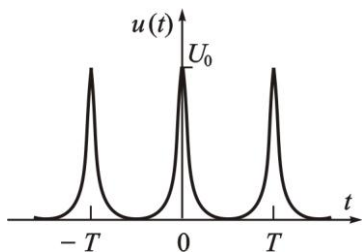
$-T/2 \leq t \leq T/2$ მონაკვეთზე მოცემული რხევა წარმოდგენილია

შემდეგი სახით $u(t) = U_0 \exp(-\beta|t|)$, ამასთან β პარამეტრი

იმდენად დიდია, რომ $\beta T/2 \gg 1$ და ამიტომ ცალკეული

იმპულსები, რომლებიც ქმნიან პერიოდულ სიგნალს, პრაქტიკულად არ "გადაიკვეთებიან" (იხ. ნახ. მ.2.2). იპოვეთ $a_0/2$ და

a_n კოეფიციენტები, რომლებიც შედიან მოცემული სიგნალის ფურიეს მწკრივში



$$u(t) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n t}{T}.$$

ამოხსნა. ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, გადავით ინტეგრირებ ნახ. მ.2.2 ბის

უსასრულო ზღვრებზე

პასუხი: $a_0/2 = 2U_0 / (\beta T), \quad a_n = \frac{2U_0}{\pi} \cdot \frac{\beta T / (2\pi)}{(\beta T / (2\pi))^2 + \pi^2}.$

მაგალითი მ.2.3. ზოგადად შემთხვევაში $s(t)$ პერიოდული სიგნალი კომპლექსურია, მისი პერიოდია T . მიიღეთ გამოსახულება, რომელიც აკავშირებს ამ სიგნალის სიმძლავრის $P_{\text{სა}}$ საშუალო მნიშვნელობას პერიოდში ფურიეს რიგის C_n კოეფიციენტებთან.

ამოხსნა: სიმძლავრის საშუალო მნიშვნელობა კომპლექსური სიგნალის პერიოდში გამოითვლება ფორმულით

$$P_{\text{სა}} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot s^*(t) dt. \quad \text{ვინაიდან} \quad s(t) = \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega t},$$

ამიტომ
$$P_{\text{სა}} = \frac{1}{T} \sum_{m \rightarrow -\infty}^{\infty} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} C_n C_m^* \int_{-T/2}^{T/2} e^{j(n-m)\omega t} dt.$$

უშუალო გამოთვლებით ვრწმუნდებით, რომ

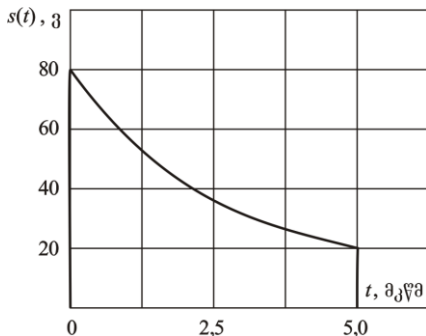
$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{jk\omega t} dt = 0 \quad \text{ყველა } k \geq 1.$$

ამგვარად

$$P_{\text{სა}} = \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} C_n C_n^* = C_0 C_0^* + 2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n C_n^*.$$

მაგალითი მ.2.3. $s(t)$ ძაბვის ვიდეოიმპულსის ოსცილოგრამა წარმოდგენილია ნახ. მ.2.3-ზე. $0 \leq t \leq \tau_0 = 5$ მკვმ დროის მონაკვეთზე $s(t)$ ფუნქციას აქვს სახე $s(t) = A \exp(-\alpha t)$, სადაც A და α - პარამეტრებია, რომლებიც განისაზღვრებიან ოსცილოგრა-

მის სახით. იპოვეთ მოცემული იმპულსის სპექტრული სიმკვრივე.



ნახ. მ2.3

ამოხსნა: მივიჩნიოთ $t=0$, მაშინ ნახაზიდან უშუალოდ ვპოულობთ $A=80$ გ. ვინაიდან $80\exp(-\alpha \cdot 5 \cdot 10^{-6})=20$, მაშინ $\alpha = 2.773 \cdot 10^6$ წმ⁻¹.

სპექტრული სიმკვრივე კი $S(\omega) = \frac{A}{\alpha + j\omega} [1 - e^{-(\alpha + j\omega)\tau_0}]$.

ამოცანა მ2.4. აჩვენეთ, რომ წინა ამოცანაში განხილული იმპულსის $S(\omega)$ სპექტრული სიმკვრივე არ გახდება ნულის ტოლი ω სისშირის არცერთი რიცხობრივი მნიშვნელობის დროს

ამოხსნა: სპექტრული სიმკვრივე განუდლება ω სისშირის იმ მნიშვნელობის დროს, როდესაც შესრულდება განტოლება

$$e^{-\alpha\tau_0} \cdot e^{-j\omega\tau_0} = 1,$$

$$\text{ან} \quad \begin{cases} e^{-\alpha\tau_0} \cdot \cos \omega\tau_0 = 1, \\ e^{-\alpha\tau_0} \cdot \sin \omega\tau_0 = 0. \end{cases}$$

ნათელია, რომ ეს სისტემა არათავსებადია.

ამოცანა მ2.5. პერიოდული სიგნალი $s_{\text{კრ}}(t)$ შექმნილია უსასრულო მიმდევრობის ერთნაირი $s_0(t)$ იმპულსებისაგან, რომლებიც მეორდებიან ერთნაირი T დროის ინტერვალის შემდეგ. იპოვეთ ფორმულა, რომელიც აკავშირებს ფურიეს მწკრივის C_n კოეფიციენტებს ($n=0, \pm 1, \dots$) პერიოდული სიგნალის ერთეული იმპულსის $s_0(t)$ სპექტრულ სიმკვრივესთან.

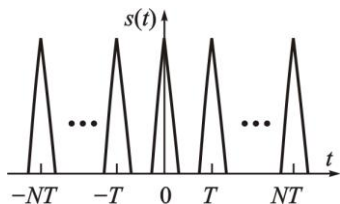
ამოხსნა: ფურიეს კომპლექსური რიგის C_n კოეფიციენტი გამოიხატება ინტეგრალით:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} s_0(t) e^{-jn\omega t} dt.$$

ბოლო ფორმულაში ინტეგრირების ზღვრები შეიძლება გავზარდოთ $-\infty$ დან $+\infty$ -დე, ვინაიდან $s_0(t)$ განსაზღვრულია

$$-T/2 \leq t \leq T/2 \text{ მონაკვეთზე. მაშასადამე, } C_n = \frac{1}{T} S_0(n\omega_1).$$

ამოცანა მ2.6. $s(t)$ იმპულსების მიმდევრობა შექმნილია დროში არაგადამკვეთი $2N+1$ ერთნაირი იმპულსებისაგან (N - მთელი დადებითი რიცხვია ან ნული).



ნახ. მ2.4

იმპულსების გამეორების მიმდევრობის ინტერვალი უდრის T (ნახ. მ2.4).

ცნობილია ერთეული იმპულსის სპექტრული $S_0(\omega)$ სიმკრივე.

გამოთვალეთ $S(\omega)$ მიმდევრობის სპექტრული სიმკრივე.

ამოხსნა: სიგნალის სპექტრის შესახებ თეორემის გამოყენებით და ცალკეული იმპულსების წყვილ-წყვილად დაჯგუფებით, რომლებიც თანაბრად არიან დაშორებული ათვლის სათავიდან, მივიღებთ

$$S(\omega) = S_0(\omega) \cdot (1 + e^{j\omega T} + e^{-j\omega T} + e^{j2\omega T} + e^{-j2\omega T} + \dots + e^{jN\omega T} + e^{-jN\omega T}) = S_0(\omega) \cdot (1 + 2 \cos \omega T + 2 \cos 2\omega T + \dots + 2 \cos N\omega T).$$

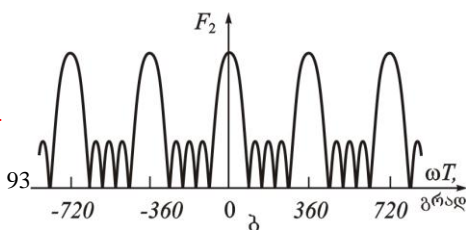
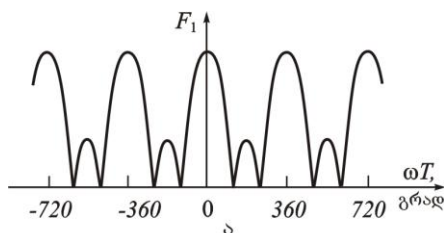
იმისათვის, რომ მიღებული გამოსახულების გავაანალიზოთ სპექტრული სიმკვრივის დამოკიდებულება იმპულსების რაოდენობასთან, შემოვიტანოთ ფუნქცია

$$F_N(\omega T) = |1 + 2 \cos \omega T + 2 \cos 2\omega T + \dots + 2 \cos N\omega T|.$$

ნახ. მ2.5 ა,ბ გამოსახუ-

ლების $F_1(\omega T)$ ფუნქციის გრაფიკები (მიმდევრობა, შედგენილი სამი იმპულსისაგან) და $F_2(\omega T)$ ფუნქციის გრაფიკები (მიმდევრობა შედგენილი ხუთი იმპულსისაგან). შეგვიძლია შევნიშნოთ შემდეგი კანონზომიერება: N - ის გაზრდასან ერთად $F_N(\omega T)$

ფუნქცია იღებსა ლოკალიზირებული სიგნალები "თქაფა-



ნებს", მოთავსებულებს $\omega T = 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) წერტილებში. ზღვარში,

ნახ. მ.2.5 როცა $N \rightarrow \infty$ ხდება

გადასვლა უწყვეტი სპექტრიდან დისკრეტულზე; ცალკეული სპექტრული მდგენელების სისშირეები შეესაბამება იმპულსური მიმდევრობის გამეორების პარამონიკების სისშირეებს.

მაგალითი მ.2.7. გამოთვალეთ $S(\omega) s(t) = A(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) \sigma(t)$.

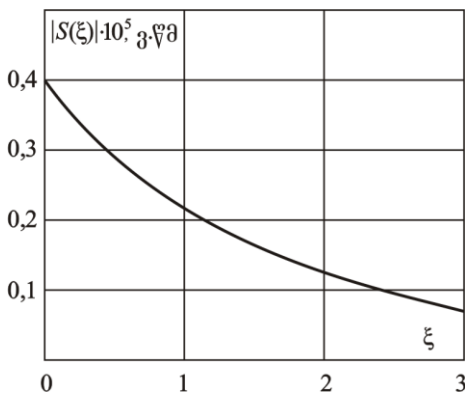
ააგეთ სპექტრული სიმკვრივის მოდულის სისშირეზე დამოკიდებულების გრაფიკი შემდეგი პარამეტრების მნიშვნელობებისათვის: $A = 6$ ვ, $\alpha = 10^6$ წმ⁻¹, $\beta = 3 \cdot 10^6$ წმ⁻¹.

ამოხსნა: ექსპონენციალური ვიდეოიმპულსის სპექტრული სიმკვრივის გამოსახულების გამოყენებით, მივიღებთ

$$S(\omega) = A \left(\frac{1}{\alpha + j\omega} - \frac{1}{\beta + j\omega} \right) = \frac{A(\beta - \alpha)}{(\alpha\beta - \omega^2) + j(\alpha + \beta)\omega}$$

მოცემული რიცხობრივი პარამეტრებისათვის

$$|S(\omega)| = \frac{1.2 \cdot 10^7}{\sqrt{(3 \cdot 10^{12} - \omega^2)^2 + 1.6 \cdot 10^{13} \omega^2}}$$



ნახ. მ.2.6

გრაფის ასაგებად მოხერხებულია სისშირის ნორმირება. შემოვიტანოთ ახალი ცვლადი $\xi = \omega/10^6$, მაშინ

$$|S(\xi)| = \frac{1.2 \cdot 10^7}{\sqrt{(3 - \xi^2)^2 + 16\xi^2}}$$

ამ დამოკიდებულების გრაფიკი მოყვანილია ნახ. მ.2.6.

მაგალითი მ.2.8. წინა ამოცანაში განხილული $s(t)$ სიგნალისათვის გამოვიყვანეთ ფორმულა, რომელიც იძლევა სპექტრის საზღვრული $\omega_{სს}$ სისშირის გამოანგარიშების საშუალებას. ამ სისშირეზე სპექტრული სიმკვრივის სისშირის მოდული მცირდება 10-ჯერ ნულოვან სისშირეზე სპექტრის სიმკვრივის მნიშვნელობასთან შედარებით. მიიღეთ $\omega_{სს}$ რიცხვითი მნიშვნელო-

ბა იმ α და β პარამეტრებთან მიმართებაში, რომლებიც მოცემულია მაგალითი მ.2.7-ის პირობაში.

ამოხსნა: ზღვრული სიხშირე აკმაყოფილებს ბიკვადრატულ განტოლებას

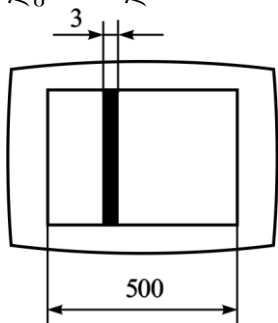
$$(\alpha\beta - \omega_{\text{ბ.ს.ბ.}}^2)^2 + (\alpha + \beta)^2 \cdot \omega_{\text{ბ.ს.ბ.}}^2 = 100\alpha^2\beta^2,$$

რომლის დადებითი ფესვი

$$\omega_{\text{ბ.ს.ბ.}} = \left(\sqrt{\frac{(\alpha^2 + \beta^2)^2}{4} + 99\alpha^2\beta^2} - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \right)^{1/2}.$$

α და β პარამეტრების რიცხობრივი მნიშვნელობის შეტანით გვექნება $\omega_{\text{ბ.ს.ბ.}} = 5.026 \cdot 10^6$ ვწმ⁻¹.

ამოცანა მ.2.9. ტელევიზორის მიმღები სტრიქონის სიგრძით $L = 500$ მმ მოითხოვება შეიქმნას ვერტიკალური შავი გამოსახულება ზოლის $l = 3$ მმ სიგანით (ნახ. მ.2.7). ელექტრონული სხივი ტელევიზორის რასტრის სტრიქონს გარბის $t = 64$ მკწმ დროში. მოცემული შემთხვევისთვის შეაფასეთ ვიდეოიმპულსის სპექტრის ზოლის სიგანე (τ_0), რომელიც მართავს კინესკოპის ეკრანის სიკაშკაშეს.



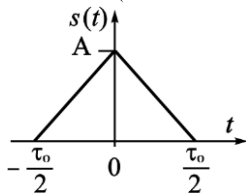
ნახ. მ.2.7

ამოხსნა: ვიდეოიმპულსის ხანგრძლივობა, რომელიც ეკრანზე ქმნის მუქ ზოლს,

$$\tau_0 = \frac{l \cdot t}{L} = 3 \cdot 64 / 500 = 0.384 \text{ მკწმ, აქედან}$$

$$f_b = 1/\tau_0 = 2.6 \text{ მჰც.}$$

მაგალითი მ.2.10. განსაზღვრეთ სიმეტრიული სამკუთხა იმპულსის (იხ. ნახ. მ.2.8) სპექტრული $S(\omega)$ სიმკვრივე.

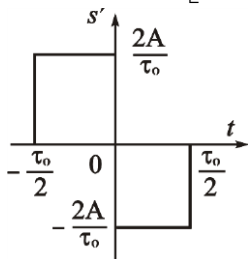


ნახ. მ.2.8

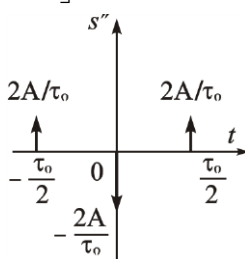
ამოხსნა: ქვემოთ გამოყენებული ხერხი მოხერხებულია იმპულსური რხევების სპექტრული სიმკვრივების პოვნისათვის, რომლებიც შეიძლება წარმოვიდგინოთ წრფეთა მონაკვეთებით. თუ საწყის სიგნალს გავადიფერენცირებთ, მაშინ მივიღებთ ორ სხვადასხვა პოლარობის მართკუთხა ფორმის იმპულსებს (იხ. ნახ. მ.2.9); მეორე წარმოებულს აქვს სამ δ -ფუნქციების სახე (იხ. ნახ. მ.2.10). მეორე

წარმოებულს აქვს სამი δ -ფუნქციის სახე (იხ. ნახ. 3.2.4). მეორე წარმოებულის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე:

$$s''(t) = \frac{2A}{\tau} \left[\delta\left(t + \frac{\tau_0}{2}\right) + \delta\left(t - \frac{\tau_0}{2}\right) \right] - \frac{4A}{\tau} \delta(t).$$



ნახ. მ.2.9



ნახ. მ.2.10

მეორე წარმოებულის სპექტრული სიმკვრივე

$$G(\omega) = \frac{2A}{\tau_0} \left[e^{\frac{j\omega\tau_0}{2}} + e^{-\frac{j\omega\tau_0}{2}} - 2 \right] = \frac{4A}{\tau_0\tau} \left(\cos \frac{\omega\tau_0}{2} - 1 \right).$$

სპექტრული სიგნალის და მისი წარმოებულის კავშირის გამოყენებით ვპოულობთ

$$S(\omega) = -\frac{G(\omega)}{\omega^2} = \frac{4A}{\omega^2\tau_0} \left(1 - \cos \frac{\omega\tau_0}{2} \right) = \frac{A\tau_0}{2} \cdot \frac{\sin^2}{\left(\frac{\omega\tau_0}{4}\right)^2}.$$

უნდა აღინიშნოს, რომ როცა $\omega \rightarrow \infty$ მაშინ $|S| \propto 1/\omega^2$, ანუ სპექტრული სიმკვრივის მოდული სიხშირის ზრდასთან ერთად მცირდება გაცილებით, ვიდრე მართკუთხა ვიდიოიმპულსის შემთხვევაში, რომლისათვის $|S| \propto 1/\omega$. ეს დაკავშირებულია იმასთან, რომ სამკუთხა იმპულსი აღიწერება უწყვეტი ფუნქციით, ხოლო მართკუთხა იმპულსი არის წყვეტილი.

მაგალითი მ.2.11. $u(t)$ სიგნალი წარმოადგენს მიმდევრობის სამი განსხვავებული პოლარობის ვიდიოიმპულსს T ხანგრძლივობით და თითოული U_0 ამპლიტუდით (ნახ. მ.2.11). გამოთვალეთ ამ სიგნალის სპექტრული სიმკვრივე $U(\omega)$. ააგეთ სპექტრული სიმკვრივის დამოკიდებულების გრაფიკი უგანზომილებო არგუმენტზე $\omega T/2$.

ამოხსნა. ვთქვათ $f(t) = du/dt$ და ადგილი აქვს $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ შესაბამისობას. საწყისი სიგნალის მათემატიკური მოდელის

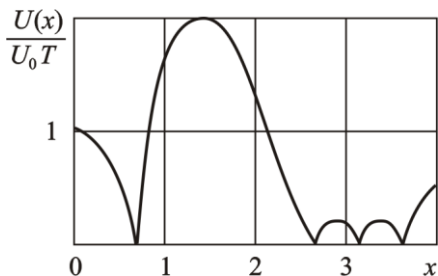
საფუძველზე ფუნქცია $f(t)$ გამოიხატება δ -ფუნქციების ჯამად შემდეგი სახით:

$$f(t) = -U_0\delta\left(t + \frac{3T}{2}\right) + 2U_0\delta\left(t + \frac{T}{2}\right) - 2U_0\delta\left(t - \frac{T}{2}\right) + U_0\delta\left(t - \frac{3T}{2}\right).$$

ამგვარად, მისი სპექტრული სიმკვრივე

$$\begin{aligned} F(\omega) &= j\omega U(\omega) = -U_0 e^{j\frac{3\omega T}{2}} + 2U_0 e^{j\frac{\omega T}{2}} - 2U_0 e^{-j\frac{\omega T}{2}} + U_0 e^{-j\frac{3\omega T}{2}} = \\ &= -j2U_0 \sin \frac{3\omega T}{2} + j4U_0 \sin \frac{\omega T}{2}. \end{aligned}$$

აქედან
$$U(\omega) = \frac{4U_0}{\omega} \sin \frac{\omega T}{2} - \frac{2U_0}{\omega} \sin \frac{3\omega T}{2}.$$



ფორმულით

ნახ. 3.2.5

უგანზომილებო არგუმენტის $x = \omega T/2$ შემოტანით მივიღებთ

$$U(x)/(U_0 T) = (2 \sin x - \sin 3x)/x$$

სპექტრალური სიმკვრივის ნორმირებული მოდულის გრაფიკი, გამოანგარიშებული მოცემული

მოყვანილია ნახ. 3.2.5-ზე.

მაგალითი 2.35. იპოვეთ $s(t)$ სიგნალი, რომლის სპექტრული სიმკვრივე მოცემულია გამოსახულებით

$$S(\omega) = \frac{S_0}{1 + \omega^2 \tau^2},$$

სადაც S_0, τ - რაიმე მუდმივი სიდიდეებია.

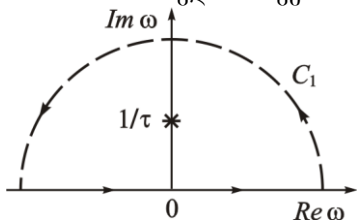
ამოხსნა: ფურიეს უკუგარდაქმნის საფუძველზე

$$s(t) = \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t} d\omega}{1 + \omega^2 \tau^2}.$$

აქ ინტეგრალქვეშა ფუნქციას აქვს ორი ნამდვილი პოლუსი, რომლებიც განისაზღვრებიან განტოლებიდან $1 + \omega^2 \tau^2 = 0$. ეს პოლუსები თავმოყრილია წერტილებში კოორდინატებით $\omega_{1,2} = \pm j/\tau$.

როცა $t > 0$, $s(t)$ სიგნალის გამოსათვლელად უნდა ჩავატაროთ ინტეგრირება C_1 კონტურის გასწვრივ (იხ. ნახ. 3.2.6), რომელიც შეიცავს უსასრულო სივრცის ნამდვილ ღერძს და

უსასრულოდ დიდი რადიუსის მქონე რკალს, განლაგებულს $\text{Im } \omega > 0$ -ის ზედა ნახევარსიბრტყეში. რადიუსის ზრდასთან ერთად ინტეგრალი მითითებული რკალის გასწვრივ მიისწრაფის ნულისკენ და ამიტომ



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t} d\omega}{1 + \omega^2 \tau^2} = 2\pi j \cdot \text{rez} \left(\frac{e^{j\omega t}}{1 + \omega^2 \tau^2} \right) \Big|_{\omega=j/\tau}$$

გრაღქვეშა ფუნქციის ნაშთი

პოლუსის წერტილში ინტე-

$$\text{res} = e^{-t/\tau} / 2j\tau .$$

ნახ. 3.2.6

მაშასადამე,
$$\int_{C_1} \frac{e^{j\omega t} d\omega}{1 + \omega^2 \tau^2} = \frac{\pi e^{-t/\tau}}{\tau}$$

ანალოგური შედეგი, განსხვავებული ნიშნით ექსპონენტის მახვენებელში, მიიღება $t < 0$ მნიშვნელობებისათვის; ამასთან ინტეგრირება უნდა ვაწარმოოთ კონტურით, რომელიც დიდი რადიუსის ქვედა ნახევარსიბრტყეშია. საბოლოოდ მივიღებთ შემდეგ შედეგს

$$s(t) = S_0 e^{-|t|/\tau} / (2\tau).$$

მაგალითი 2.45. უშუალო გამოთვლებით დაამტკიცეთ, რომ ორი სიგნალის $u(t)$ და $v(t)$ ნახევებს

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)v(t-\tau)d\tau$$

ცნობილი სპექტრული სიმკრივეებით $U(\omega)$ და $V(\omega)$, შესაბამისად, აქვთ სპექტრული სიმკვრივე $F(\omega) = U(\omega)V(\omega)$.

დამტკიცება: სპექტრული სიმკვრივის ცნების შესაბამისად

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)v(t-\tau)d\tau. \quad (*)$$

მოცემულ გამოსახულებაში $v(t-\tau)$ ფუნქცია შეგვიძლია გამოსახოთ შესაბამისი სპექტრული სიმკვრივით

$$v(t-\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\eta)e^{j\eta(t-\tau)}d\eta. \quad (**)$$

თუ (**)-ს ჩავსვავთ (*)-ში, ხოლო შემდეგ, შევუცვლით ინტეგრირების ოპერაციის მიმდევრობის რიგს τ და η ცვლადების მიმართ, მივიღებთ

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau u(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} V(\eta) e^{j\eta(t-\tau)} d\eta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} V(\eta) e^{j\eta t} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) e^{-j\eta \tau} d\tau. \end{aligned}$$

მიღებულ გამოსახულებაში შიდა ინტეგრალი წარმოადგენს $U(\eta)$ ფუნქციას. მაშინ

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta V(\eta) e^{j\eta \omega} U(\eta) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\eta(\eta-\omega)} dt \right].$$

ვინაიდან
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\eta(\eta-\omega)} dt = \delta(\eta - \omega),$$

მაშინ
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta V(\eta) U(\eta) \delta(\eta - \omega) = V(\omega) U(\omega).$$

რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

მაგალითი 2.45. გამოითვალეთ $f(t)$ ექსპონენციალური ვიდეო-იმპულსების $s_1(t) = A_1 \exp(-\alpha_1 t) \sigma(t)$ და $s_2(t) = A_2 \exp(-\alpha_2 t) \sigma(t)$ ფუნქციების ნახვევი ორი ხერხით: ა) ნახვევის ინტეგრალის პოვნის პირდაპირი ხერხით; ბ) ფურიეს გარდაქმნის ნახვევის თეორემის გამოყენებით.

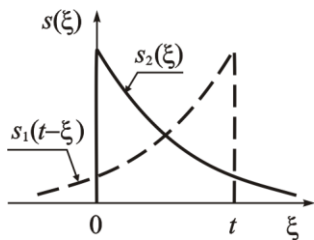
ამოხსნა: ა) ნახვევის განსაზღვრის თანახმად

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t-\xi) s_2(\xi) d(\xi) = A_1 A_2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha_1(t-\xi)} \sigma(t-\xi) e^{-\alpha_2 \xi} \sigma(\xi) d(\xi).$$

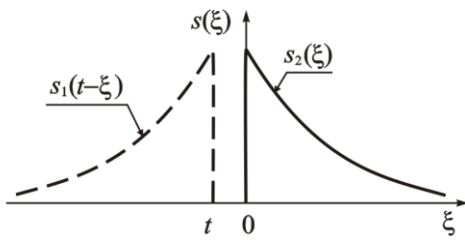
ვთქვათ, რომ $t > 0$. ნახ. 3.2.7-ზე მოყვანილია ინტეგრალქვეშ გამოსახულებების $s_1(t-\xi)$ და $s_2(\xi)$ სიგნალების გრაფიკები. ვინაიდან ამ სიგნალების ნამრავლი განსხვავებულია ნულისაგან მხოლოდ $0 < \xi < t$ ინტერვალში, ამიტომ

$$f(t) = A_1 A_2 e^{-\alpha_1 t} \int_0^t e^{-\xi(\alpha_2 - \alpha_1)} d(\xi) = \frac{A_1 A_2}{\alpha_2 - \alpha_1} (e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}).$$

თუ $t < 0$, მაშინ $s_1(t-\xi)$ და $s_2(\xi)$ სიგნალების გრაფიკები (იხ. ნახ. 3.2.8) აღმოჩნდებიან დროში მიმორიგებულნი. ამ სიგნალების ნამრავლი ნებისმიერი ξ -ისათვის უდრის ნულს და ამიტომ $f(t) = 0$.



ნახ. 3.2.7



ნახ. 3.2.8

ბ) $s_1(t)$ და $s_2(t)$ სიბნალების გარდაქმნას ფურიეს მიხედვით აქვს შემდეგი შესაბამისობა:

$$s_1(t) \leftrightarrow \frac{A_1}{\alpha_1 + j\omega}; \quad s_2(t) \leftrightarrow \frac{A_2}{\alpha_2 + j\omega},$$

საიდანაც
$$f(t) \leftrightarrow \frac{A_1 A_2}{(\alpha_1 + j\omega)(\alpha_2 + j\omega)},$$

ანუ
$$f(t) = \frac{A_1 A_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\omega t} d\omega}{(\alpha_1 + j\omega)(\alpha_2 + j\omega)}.$$

ინტეგრალქვეშა გამოსახულების წილად-რაციონალური ფუნქციის დაშლისას

$$\frac{1}{(\alpha_1 + j\omega)(\alpha_2 + j\omega)} = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \left(\frac{1}{\alpha_1 + j\omega} - \frac{1}{\alpha_2 + j\omega} \right).$$

სპექტრული სიმკვრივის ვიდიოიმპულსის ცნობილი ექსპონენციალური ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$f(t) = \frac{A_1 A_2}{\alpha_2 - \alpha_1} (e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}),$$

რაც, ბუნებრივია, ემთხვევა პირდაპირი მეთოდით მიღებულ შედეგს.

2.7.4.2. ლაპლასის ბარდაზენა

მაგალითი 2.48. იპოვეთ $u(t)$ ფუნქციის ორიგინალი, რომელსაც პასუხობს გამოსახულება $U(p) = 1/p^2$

ამოხსნა: $p=0$ წერტილში $U(p)$ ფუნქციას აქვს მეორე რიგის პოლუსი. $t > 0$ ინტეგრირების კონტური შედგება უსასრულო ვერტიკალური წრფისაგან რაიმე აბსცისით $a > 0$ (ნახ. 3.2.9) და $R \rightarrow \infty$ რადიუსისა და C_1 რკალისაგან, განლაგებული მარცხენა ნახევარსიბრტყეში. ვინაიდან როცა

$R \rightarrow \infty$ სიდიდე $1/p^2 \rightarrow 0$ თანაბრად p არგუმენტის მიმართ,

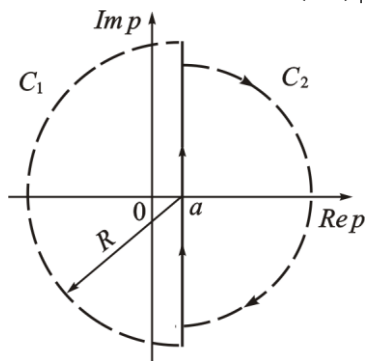
მაშინ ჯორდანოს ლემის თანახმად
$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1} \frac{e^{pt}}{p^2} dp = 0.$$

პოლუსის წერტილი აღმოჩნდება ინტეგრირების კონტურის შიგნით. პოლუსის წერტილში ინტეგრალქვეშა ფუნქციის ნაშთი

$$\operatorname{rez} \left(\frac{e^{pt}}{p^2} \right) \Big|_{p=0} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d}{dp} (e^{pt}) = t.$$

აქედან, როცა $t > 0$

$$u(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} \frac{e^{pt}}{p^2} dp = t.$$



ნახ. 3.2.9

$u(t)$ ფუნქციის გამოსათვლელად როცა $t < 0$ ინტეგრირების კონტური უნდა შეიკრას C_2 რკალით, რომელიც მდებარეობს მარჯვენა ნახევარსიბრტყეში, სადაც ინტეგრალქვეშა ფუნქციას არ აქვს განსაკუთრებული წერტილები. ამიტომ როცა $t < 0$ გვაქვს $u(t) = 0$

მაგალითი 2.49. იპოვეთ $f(t)$ ფუნქცია, რომელიც არის

$$F(p) = \frac{1}{(p+a)(p+b)(p+c)}$$

გამოსახულების ორიგინალი, სადაც a, b, c – მუდმივი რიცხვებია.

ამოხსნა: მოცემული გამოსახულება წარმოვიდგინოთ წილადების ჯამის სახით

$$\frac{1}{(p+a)(p+b)(p+c)} = \frac{A}{p+a} + \frac{B}{p+b} + \frac{C}{p+c}.$$

კოეფიციენტები $A, B,$ და C შეგვიძლია ვიპოვოთ ჩვეულებრივი ხერხით, რომელიც გამოიყენება მარტივ წილადებად დაშლის დროს. მაგრამ ეს ძალიან გრძელი გზაა. გაცილებით მოკლე გზა მდგომარეობს შემდეგში. ბოლო გამოსახულებიდან ჩანს, მაგალითად, რომ A სიდიდე არის **ფუნქციის ნაშთი** (rez), რომელიც დგას მარცხენა მხარეში, და გამოთვლილია როცა

$$p = -a: \quad A = \operatorname{rez} \Big|_{p=-a} = \frac{1}{(b-a)(c-a)}.$$

ანალოგიურად ვპოულობთ B და C კოეფიციენტებს:

$$B = \operatorname{rez}\Big|_{p=-b} = \frac{1}{(a-b)(c-b)}; \quad C = \operatorname{rez}\Big|_{p=-c} = \frac{1}{(a-c)(b-c)}.$$

აქედან
$$f(t) = \frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{e^{-bt}}{(a-b)(c-b)} + \frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}.$$

მაგალითი 2.50. დაამტკიცეთ შესაბამისობის ფორმულა ლაპლასის მიხედვით გამოსახულებასა და ორიგინალს შორის

$$\frac{1}{(p+a)(p+b)} \div \frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt}).$$

ამოხსნა: თუ გამოსახულებას დავშლით მარტივ წილადებად, მივიღებთ

$$\frac{1}{(p+a)(p+b)} = \frac{A}{p+a} + \frac{B}{p+b}.$$

უცნობი სიდიდეები A და B აკმაყოფილებენ განტოლებას

$$pA + bA + pB + aB = 1.$$

მიღებული განტოლების მარცხენა და მარჯვენა მხარეების p -ს ერთი და იგივე ხარისხის კოეფიციენტების მნიშვნელობები გაუტოლოთ ერთმანეთს, მაშინ მივიღებთ ალგებრულ

განტოლებათა სისტემას
$$\begin{cases} A+B=0, \\ bA+aB=1 \end{cases} \quad \text{ამ სისტემის}$$

ამონახსნები აშკარაა:

$$A = \frac{1}{b-a}; \quad B = -\frac{1}{b-a}.$$

ამგვარად, მივიღებთ
$$\frac{1}{(p+a)(p+b)} = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{p+a} - \frac{1}{p+b} \right),$$

საიდანაც გამომდინარეობს ამოცანის პირობაში მოყვანილი ფორმულა.

**თავი III. სიგნალების ენერგეტიკული სკალარები.
კორელაციური ანალიზის პრინციპები**

სიგნალების წარმოდგენა სპექტრული სიმკვრივების გამოყენებით მნიშვნელოვნად ამარტივებს სიგნალების ენერგიების გამოთვლას, ასევე შესაძლებელი ხდება შეიქმნას რიგი ახალი სასარგებლო წარმოდგენებისა, რომლებიც გამოიყენება რადიოტექნიკის სხვადასხვა არეებში.

3.1. სიგნალების ურთიერთსკალარული სიმკვრივე

პირველ თავში შემოტანილი იყო სისტემის ორ ნამდვილ $u(t)$ და $v(t)$ სიგნალს შორის ფუნდამენტური მახასიათებელი – მათი სკალარული ნამრავლი

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t)dt, \quad (3.1)$$

რომელიც ამ სიგნალების ურთიერთენერგიების პროპორციულია. თუ ეს სიგნალები იგივეურად ტოლია, მაშინ სკალარული ნამრავლი ხდება ენერგიის ტოლი

$$E_n = (u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t)dt. \quad (3.2)$$

$u(t)$ და $v(t)$ სიგნალების სკალარული ნამრავლი შესაძლებელია გამოვხატოთ მათი სპექტრული $U(\omega)$ და $V(\omega)$ სიმკვრივებით **რელეა**-ს განზოგადებული (2.42) ფორმულის გამოყენებით:

$$(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega)V^*(\omega)d\omega$$

თანაბარზომიერად ჭეშმარიტია ტოლობა:

$$(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U^*(\omega)V(\omega)d\omega,$$

ვინაიდან ნამდვილი სიგნალების სკალარული ნამრავლი არის ნამდვილი რიცხვი.

დავარქვათ **ურთიერთენერგეტიკული სპექტრი ნამდვილი $u(t)$ და $v(t)$ სიგნალების ფუნქციას**

$$W_{uv}(\omega) = U(\omega)V^*(\omega), \quad (3.3)$$

ისე, რომ

$$(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{uv}(\omega) d\omega, \quad (3.4)$$

ამასთან

$$W_{uu}(\omega) = W_{uu}^*(\omega), \quad (3.5)$$

ზოგად შემთხვევაში, თუ $u(t)$ და $v(t)$ სიბნალების სპექტრულ სიმკვრივეებს წარმოვიდგენთ ნამდვილი და წარმოსახვითი ჯაბის სახით:

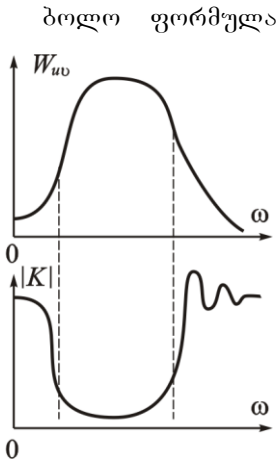
$$U(\omega) = A_u(\omega) + jB_u(\omega), \quad V(\omega) = A_v(\omega) + jB_v(\omega)$$

დავრწმუნდებით, რომ W_{uv} ფუნქციის ურთიერთენერგეტიკული სპექტრი იღებს კომპლექსურ მნიშვნელობებს:

$$W_{uv}(\omega) = A_u A_v + B_u B_v + j(B_u A_v - A_u B_v) = \text{Re}W_{uv}(\omega) + j\text{Im}W_{uv}(\omega) \quad (3.6)$$

ძნელი არ არის შევნიშნოთ, რომ $\text{Re}W_{uv}$ -ლუწი, ხოლო $\text{Im}W_{uv}$ -კენტი სისშირის ფუნქციებია. ვინაიდან (3.4) ინტეგრალში მხოლოდ ნამდვილ ნაწილს შეაქვს წვლილი, ამიტომ

$$(u, v) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Re}W_{uv}(\omega) d\omega, \quad (3.7)$$



ნახ. 3.1.

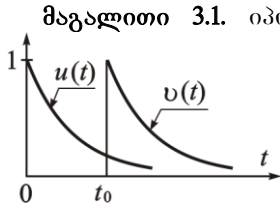
ბოლო ფორმულა იძლევა სიბნალების ურთიერთდამოკიდებულების “შეუმჩნეველი სტრუქტურის” ანალიზის ჩატარების შესაძლებლობას.

მით უფრო **რძემა**-ს განზოგადებული ფორმულა, წარმოდგენილი (3.7) სახით, მიუთითებს იმ პრინციპულ გზაზე, რომელიც მოგვცემს შესაძლებლობას შევამციროთ ორ სიბნალს შორის კავშირის ხარისხი, თუ ზღვარში მივადწევთ მათ ორთოგონალობას. ამისათვის ერთ-ერთი სიბნალი უნდა დავამუშაოთ განსაკუთრებულ ფიზიკურ სისტემაში, რომელსაც ეწოდება **სისშირული ფილტრი**.

ამ ფილტრს მიესადაგება მოთხოვნა: გამოსავალზე არ გაატაროს სპექტრული შემდგენები, რომლებიც იმყოფებიან სისშირული ინტერვალების ზღვრებში, სადაც დიდია ურთიერთენერგეტიკული სპექტრის ნამდვილი ნაწილი. ასეთი **ორთომანალიზებელი ფილტრის** გადაცემის კოეფიციენტის სისშირულ დამოკიდებულებას ექნება მკაფიოდ

გამოსახული მინიმუმი (ორთომანალიზებელი ფილტრის გადაცემის კოეფიციენტის სისწორული დამოკიდებულება მოყვანილია ნახ.3.1-ზე).

ურთიერთენერგეტიკული სპექტრის ცნებაზე დაფუძნებულ, სკალარული ნამრავლის გამოთვლის აღწერილ მიდგომას აქვს პირდაპირი დამოკიდებულება შედეგებთან, რომლებიც მიღებული იყო პირველ თავში ორთონორმირებული ბაზისის ელემენტებად დაშლილი სიგნალების სკალარული ნამრავლის გამოთვლისას. განსხვავება მდგომარეობს იმაში, რომ აქ გამოიყენება არა დისკრეტული, არამედ ფურიე-წარმოდგენა.



ნახ. 3.2

მაგალითი 3.1. იპოვეთ ერთნაირი ფორმის ორი ექსპონენ-

ციალური ვიდეოიმპულსის (იხ. ნახ. 3.2) ურთიერთენერგეტიკული სპექტრი, რომლებიც გადაადგილდებიან ერთმანეთის მიმდევრობით დროის t_0 ინტერვალით.

ამოხსნა: დავუშვათ, რომ ორივე სიგნალს აქვს ერთეული ამპლიტუდა (იხ. ნახ. 3.2). ჩავწეროთ მათი სპექტრული სიმკვრივები:

$$u(t) = e^{-at} \sigma(t) \leftrightarrow U(\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega},$$

$$v(t) = e^{-a(t-t_0)} \sigma(t-t_0) \leftrightarrow V(\omega) = \frac{e^{-j\omega t_0}}{\alpha + j\omega}.$$

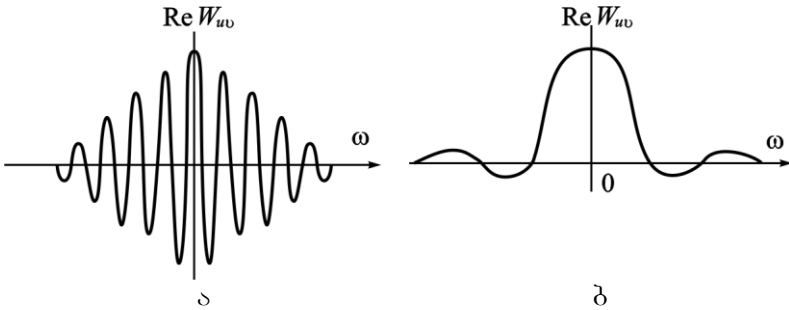
აქედან ვპოულობთ ურთიერთენერგეტიკულ სპექტრს, ვინაიდან $W_{uv}(\omega) = U(\omega)V^*(\omega)$, მაშინ

$$W_{uv}(\omega) = e^{j\omega t_0} / (\alpha^2 + \omega^2), \tag{3.8}$$

მისი ნამდვილი ნაწილია $\text{Re}W_{uv}(\omega) = \cos \omega t_0 / (\alpha^2 + \omega^2)$.

თუ დავაფიქსირებთ α პარამეტრს, რომელიც განსაზღვრავს სიგნალების ფორმას, მაშინ ურთიერთენერგეტიკული სპექტრის სისწორული თვისებები დამოკიდებული იქნება მათ შორის დროის წანაცვლებაზე. ნახ. 3.3 მოყვანილია $\text{Re}W_{uv}$ ფუნქციის ორი მახასიათებელი გრაფიკი.

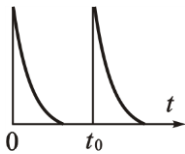
ორი ექსპონენციალური ვიდეოიმპულსების ურთიერთენერგეტიკული სპექტრი: ა- როცა $\alpha t_0 \gg 1$; ბ- როცა $\alpha t_0 \ll 1$



ნახ. 3.3.

განსაკუთრებულ ინტერესს წარმოადგენს შემთხვევა, როცა ნამრავლი at_0 მცირეა, ანუ იმპულსები დროში მნიშვნელოვნად გადაიფარებიან. ფორმულა (3.8) და გრაფიკი ნახ. 3.3ბ ადასტურებენ იმას, რომ ურთიერთენერგეტიკულ სპექტრს ამასთან აქვს გამოხატული დაბალსიხშირული ხასიათი. აქედან გამომდინარეობს დასკვნა: იმისათვის, რომ შევამციროთ ამ სიგნალების სკალარული ნამრავლი და გავხადოთ ისინი უკეთესად განსხვავებადი, უნდა ვისარგებლოთ მაღალი სიხშირეების ფილტრით (**მსწ**), რომელიც ახშობს ყველა იმ რხევის სიხშირეს, რომელიც რაღაც საზღვრულ სიხშირეზე ნაკლებია.

სწრაფად ცვლადი იმპულსის ფრონტი წარმოიქმნება სპექტრის მაღალსიხშიროვანი შემადგენლების აჯამვის ხარჯზე, რომლებიც დაბრკოლების გარეშე გადიან **მსწ** გამოსასვლელზე. ამავდროულად დაბალსიხშირული მდგენელების ფილტრაციის ხარჯზე გამოსასვლელზე იმპულსის ხანგრძლივობა მნიშვნელოვნად შემცირდება. აქედან გამომდინარეობს, რომ იმპულსების გადაფარვის



ეფექტი

ნახ. 3.4 შესაძლებელია დაყვანილი იქნეს მისაღებ მცირე სიდიდემდე ისე, რომ **მსწ** გამოსასვლელზე იმპულსები მიახლოებით ორთოგონალური აღმოჩნდებიან.

იმპულსების ორთოგონალიზაცია მოყვანილია ნახ.3.4-ზე.



3.1.1. სიბნალევის ენერგეტიკული სპექტრი

სიბნალის სპექტრული წარმოდგენა შესაძლებელია მარტივად მივიღოთ რელეის განზოგადოებული ფორმულიდან, თუ მასში $u(t)$ და $v(t)$ სიბნალებს ჩავთვლით ერთნაირებად. ფორმულა (3.3), რომელიც გამოხატავს ენერჯის სპექტრულ სიმკვრივეს, მიიღებს სახეს

$$W_0(\omega) = U(\omega)U^*(\omega) = |U(\omega)|^2, \quad (3.9)$$

$W_0(\omega)$ სიდიდეს ეწოდება $u(t)$ სიბნალის ენერჯის სპექტრული სიმკვრივე, ანუ, მოკლედ მისი ენერგეტიკული სპექტრი. ამასთან ფორმულა (3.2) ჩაიწერება ასე:

$$E_0 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_0(\omega)d\omega, \quad (3.10)$$

ფიზიკის განსხვავებულ ნაწილებში (3.10) თანაფარდობა ცნობილია, როგორც რელეის ფორმულა (ვიწრო აზრით), რომელიც აღგენს შემდეგს: ნებისმიერი სიბნალის ენერჯია არის აჯამების შედეგი ყველა იმ შენატანებისა, რომლებიც სისშირული ღერძის სხვადასხვა ინტერვალებისაგან მიიღება.

თითოეული მცირე სისშირის ინტერვალი $\Delta\omega$ უზრუნველყოფს შენატანს სიბნალის საერთო ენერჯიაში, სიდიდით

$$\Delta E_0 = \frac{1}{\pi} W_0(\omega)d(\omega),$$

სადაც ω' - ინტერვალის შიდა წერტილია.

მიდგომა, დაფუძნებული სიბნალის წარმოდგენაზე სპექტრული ენერჯის სახით, განსხვავდება ფარდობითი სიმარტივით. მართლაც, ენერჯიები, სისშირული ღერძის განსხვავებული არეებიდან, იკრიბებიან ისევე, როგორც ნამდვილი რიცხვები.

ამავდროულად, თვით სიბნალებთან მიმართებაში, ფურიეს გარდაქმნის მეთოდი ეფუძნება იმას, რომ კომპლექსური ამპლიტუდები, რომლებიც აღწერენ მცირე სისშირული უბნების შენატანებს, იკრიბებიან როგორც კომპლექსური რიცხვები, რომლებიც ხასიათდებიან მოდულებით და ფაზებით.

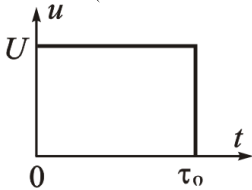
სიბნალის შესწავლისას მისი ენერგეტიკული სპექტრის გამოყენებით, ჩვენ გარდაუვლად ვკარგავთ ინფორმაციას, რომელსაც შეიცავს სიბნალის ფაზური სპექტრი, ვინაიდან ფორმულა (3.9)-ის შესაბამისად, ენერგეტიკული სპექტრი არის

სპექტრული სიმკვრივის მოდულის კვადრატს და არ არის დამოკიდებული მის ფაზაზე.

ამის მიუხედავად ენერგეტიკული სპექტრის ცნება ძალზე სასარგებლოა სხვადასხვა საინჟინრო შეფასებებისათვის, რომელიც აღგენს ამა თუ იმ სიგნალის რეალური სპექტრის სიგანეს.

ენერგეტიკული მიდგომისას, ფორმით ერთნაირი, მაგრამ აღვიღმდებარეობით განსხვავებული ყველა სიგნალი დროის დერეზე, გამოდიან როგორც სრულიად განუსხვავებული.

მაგალითი 3.2. იპოვეთ მართკუთხა ვიდეომპულსის (იხ. ნახ. 3.5) ენერგეტიკული სპექტრი.

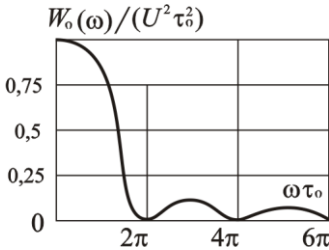


ამოხსნა: აქ შედეგი მიიღება სპექტრალური სიმკვრივის (2.20) სახით კვადრატში აყვანის გზით:

$$W_0(\omega) = U^2 \tau_0 \frac{\sin^2(\omega \tau_0 / 2)}{(\omega \tau_0 / 2)^2}, \quad (3.11)$$

ნახ. 3.5

(3.11) გამოსახულების შესაბამისი გრაფიკი მოყვანილია ნახ. 3.6-ზე, რომელზეც ნაჩვენებია მართკუთხა ფორმის ვიდეომპულსის ნორმირებული ენერგეტიკული სპექტრი, როგორც ფუნქცია უგანზომილებო სისშირული ცვლადის $\omega \tau_0$ მიმართ.



ნახაზი თვალსაჩინოდ აჩვენებს, რომ მოცემული სიგნალის ენერგეტიკულ სპექტრს აქვს უდიდესი მნიშვნელობა სისშირის დაბალი მნიშვნელობების

არეში.

ნახ. 3.6

სისშირის ზრდასთან ერთად შესაბამის სპექტრულ შენატანებს აქვს არა მონოტონური, რხევითი ხასიათი, მაგრამ საერთო ტენდენცია ასეთია – ენერგეტიკული სპექტრი მცირდება უკუკვადრატის კანონის მიხედვით:

$$W_0(\omega) = 0(1/\omega^2), \text{ როცა } \omega \rightarrow \infty$$

(მხოლოდ არა პირველი ხარისხის სისშირის უკუპროპორციულად, როგორც ჩვეულებრივი სიგნალის სპექტრული სიმკვრივის განხილვისას).

(3.11) გამოსახულება საშუალებას იძლევა შევამოწმოთ რელეის ფორმულა პირდაპირი გამოთვლით. უპირველეს ყოვლისა დროის ინტერვალში, თითქმის უშრომოდ, ვპოულობთ მოცემული ვიდეომპულსის ენერგიას (იხ. თავე 1):

$$E_0 = U^2 \tau_0, \quad (3.12)$$

სისშირულ არეში სიგნალის ენერჯიის განსაზღვრისათვის, აუცილებელია ინტეგრალის გამოთვლა

$$E_0(\omega) = \frac{U^2 \tau_0^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin^2(\omega \tau_0 / 2)}{(\omega \tau_0 / 2)^2} d\omega, \quad (3.13)$$

თუ შემოვიტანთ ახალ ცვლადს $x = \omega \tau_0 / 2$, მაშინ მარტივი გარდაქმნის შემდეგ გადავიფაროთ (3.12) ფორმულაზე.

3.1.2. ენერჯიის განაწილება მართკუთხა ვიდეოიმიპულსის სპექტრში

მრავალი გამოსაყენებელი ამოცანისათვის მნიშვნელოვანია ვიცოდეთ, თუ რა ენერჯიის წილს შეიცავს სიგნალის დიაგრამის ფურცლის ერთ, ორ, სამ და ასე შემდეგ ზღვარის ფარგლებში გამოსახულს ნახ. 3.6-ზე. აღვნიშნოთ $E_{(k)}$ მართკუთხა ვიდეოიმიპულსის ენერჯიის წილი, რომელიც მოთავსებულია მიმდევრულად განლაგებულ ფურცლებში. რელეის ფორმულით

$$E_{(k)} = \frac{2}{\pi} U^2 \tau_0 \int_0^{k\pi} \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} d\xi, \quad (3.14)$$

მოყვანილი ინტეგრალი ამოიხსნება ანალიზურად და ასევე ადვილად გამოითვლება რიცხობრივად. ქვემოთ მოყვანილია ცხრილი, რომელშიც შეტანილია გამოთვლების შედეგები, ენერჯიის ფარდობითი წილის დამოკიდებულება ანგარიშის დროს გათვალისწინებული ფურცლების რაოდენობის k რიცხვზე.

ცხრილი 3.1

k	1	2	3
$E_{(k)} / E_0$	0.902	0,950	0,967

მაშასადამე, თუ მართკუთხა ვიდეოიმიპულსს მივწოდებთ დაბალი სახშირის იდეალურ ფილტრს, რომელიც თანაბრად და შესუსტების გარეშე ატარებს ყველა სისშირეს ($0 \div 2\pi / \tau_0$) წმ¹ (პირველი ფურცლის საზღვარი), მაშინ გამოსახველზე მიიღება სიგნალი, რომლის ენერჯია შეადგენს შესავალი სიგნალის ენერჯიის 90,2%.

როგორც აღვნიშნავდით, ასეთი მიდგომა სპექტრის რეალური სიგნის შეფასებისათვის არ გამოააშკარავებს მოვლენის

თაზო III. სიბნალუმის ენერგეტიკული სექტორი.
კორელაციური ანალიზის პრინციპები

რეალურ სურათს. ასევე, უცნობი რჩება სიბნალის ფორმის დამახინჯების ხარისხი ფილტრის მოქმედების გამო. მაგრამ თუ (მაგალითად, სტატისტიკურ რადიოტექნიკაში) წინა პლანზე გამოდის ენერგიის სიდიდე, ხოლო რხევის ფორმის დამახინჯება გადადის მეორეხე, მაშინ სპექტრის სიგანის ენერგეტიკული შეფასება განსაკუთრებით მნიშვნელოვანი ხდება.

მაგალითად, ცხრილი 3.1-დან ჩანს, რომ გადასვლა $k=1$ -დან $k=2$ მნიშვნელობაზე, ანუ ხელსაწყო სოლის ორმაგი გაფართოება, რომელშიც გადის ვიდეომიკულსი, სიბნალის ენერგიას ზრდის 4,8%-ით. ამასთან ერთად, გასაგებია, რომ შემოფოთებებს (თუ ასეთები გააჩნია სიბნალს) ამის გამო შეუძლიათ გაზარდონ თავისი ენერგია, მაგალითად, ორჯერ, თუ მათი ენერგეტიკული სპექტრი თანაბარია გამოსაკვლევი სისპირის დიაპაზონში.

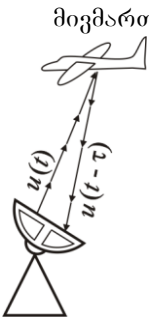
მიზანშეწონილი არ არის ფილტრის გატარების ზოლის გაუმართლებელი გაფართოება.

3.2. სიბნალუმის კორელაციური ანალიზი

რადიოტექნიკის განვითარების ადრეულ ეტაპზე საკმაოდ მწვავედ იდგა საუკეთესო სიბნალუმის არჩევის საკითხი ამა თუ იმ კონკრეტული გამოყენებისათვის. ეს განპირობებული იყო, ერთის მხრივ, გადასაცემი შეტყობინებების (სატელეგრაფო გზავნილები, რადიომაუწყებლობა) შედარებით მარტივი სტრუქტურით; მეორეს მხრივ იმით, რომ რთული ფორმის სიბნალუმის პრაქტიკული რეალიზაცია მათი კოდირების, მოდულაციის და უკუ გარდაქმნისათვის საჭირო მოწყობილობებთან კომპლექსში აღმოჩნდა ძნელად განსახორციელებელი.

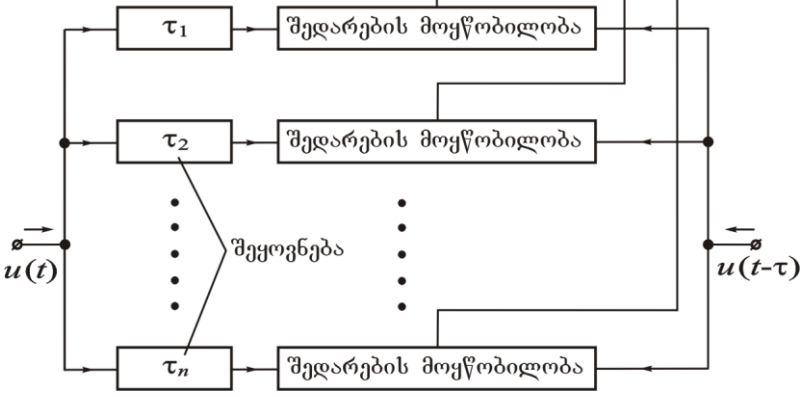
ამჟამად სიტუაცია ძირეულად შეცვლილია. თანამედროვე რადიოელექტრონულ კომპლექსებში სიბნალუმის არჩევა ნაკარნახევია არა მათი გენერირების, გარდაქმნის და მიღების ტექნიკური მოხერხებულობით, არამედ იმ ამოცანების ოპტიმალური გადაწყვეტის შესაძლებლობით, რომლებიც გათვალისწინებულია სისტემის პროექტირებისას. იმისათვის, რომ გავიგოთ, როგორ ჩნდება სპეციალურად არჩეული თვისებების მქონე სიბნალუმის მოთხოვნილება, განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი.

3.2.1. დროში დაძვარი სიბნალების შედარება



მიემართოთ იმპულსური რადიოლოკატორის მუშაობის გამარტივებულ იდეას, რომლის დანიშნულებაა მიზანმდე დაშორების გაზომვა. აქ ინფორმაცია გაზომვის ობიექტის შესახებ ჩაღებულ სიდიდეში τ - დროით დაყოვნებაში მაზონდირებელ და მიღებულ სიგნალებს შორის. (ნახ. 3.7) ფორმები მაზონდირებელი $u(t)$ და მიღებული $u(t-\tau)$ სიგნალებისა ერთნაირია ნებისმიერი დაყოვნებებისას.

რადიოლოკაციური სიგნალების დამუშავების ნახ. 3.7 მოწყობილობის სტრუქტურული სქემა, რომელიც განკუთვნილია დაშორების გასაზომად, შეიძლება გამოიყურებოდეს ისე, როგორც ეს ნაჩვენებია ნახ. 3.8. სისტემა შედგება ელემენტების კრებულიდან, რომლებიც ახორციელებენ "ეტალონური" გადასაცემი სიგნალის დროის ზოგიერთი ფიქსირებული მონაკვეთებით $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ დაყოვნებას. დაყოვნებული სიგნალები მიღებულ სიგნალთან ერთად გასაზომად



ნახ. 3.8. სიგნალების დაყოვნების დროს გამზომი მოწყობილობა მიეწოდება შედარების მოწყობილობებს, რომლებიც მოქმედებენ შემდეგი პრინციპით: სიგნალი გამოსასვლელზე ჩნდება მხოლოდ იმ პირობისას, რომ ორივე შესასვლელი რხევები წარმოადგენენ ერთმანეთის "ასლებს". გვეცოდინება რა არხის

ნომერი, რომელშიც ხდება მითითებული მოვლენა, შეიძლება გავზომოთ დაყოფნება და, მაშასადამე, მიზნამდე დაშორება.

მსგავსი მოწყობილობა იმუშავებს მით უფრო ზუსტად, რაც უფრო დიდი ხარისხით განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან სიგნალი და დროში წანაცვლებული მისი "ასლი".

ამგვარად, ჩვენ მივიღეთ ხარისხობრივი წარმოდგენა იმაზე, როგორი სიგნალები შეიძლება ჩაითვალოს "კარგად" მოცემული გამოყენებისათვის.

(თუ განსხვავება დიდი არ არის, მაშინ შეიძლება მოველოდეთ, მაგალითად, არაცალსახა ათვლას, როცა სიგნალები გაჩნდებიან ერთდროულად შედარების რამდენიმე მეზობელი მოწყობილობის გამოსასვლელზე)

გადავიდეთ დაყენებული პრობლემის ზუსტ მათემატიკურ ფორმულირებაზე და ვაჩვენოთ, რომ საკითხების ამ წრეს უშუალო კავშირი აქვს სიგნალების ენერგეტიკული სპექტრების თეორიასთან.

3.2.2. სიბნალის ავტოკორელაციური ფუნქცია

$u(t)$ სიგნალისაგან დროში დაძრული (წანაცვლებული) მისი ასლის $u(t-\tau)$ გარჩევის ხარისხის რაოდენობრივი განსაზღვრისათვის მიღებულია შემოვიტანოთ $u(t)$ სიგნალის **ავტოკორელაციური ფუნქცია** (აპფ), რომელიც უდრის სიგნალისა და მისი ასლის სკალარულ ნამრავლს:

$$B_u(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)u(t-\tau)dt \quad (3.15)$$

შემდგომში დაეუშვებთ, რომ გამოსაკვლევ სიგნალს აქვს დროში ლოკალიზებული იმპულსური ხასიათი, ასე რომ (3.15) სახის ინტეგრალი **აშკარად** არსებობს.

ცხადად ჩანს, რომ როცა ავტოკორელაციური ფუნქცია ტოლი ხდება სიგნალის ენერჯიისა, მაშინ:

$$B_o(0) = E_o \quad (3.16)$$

აპფ-ის **უმარტივესი თვისებების** რიცხვს შეიძლება მივაკუთნოთ მისი ლუწობა:

$$B_o(\tau) = B_o(-\tau) \quad (3.17)$$

მართლაც, თუ ინტეგრალში (3.15) შევცვლით ცვლადებს, $x = t - \tau$, მაშინ

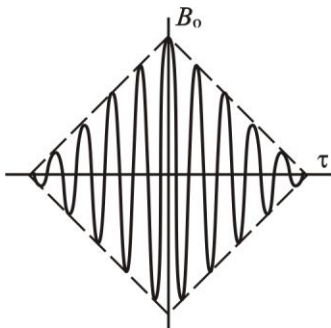
$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)u(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(x+\tau)u(x)dx.$$

და ბოლოს, ავტოკორელაციური ფუნქციის მნიშვნელოვანი თვისება მდგომარეობს შემდეგში: დროითი ძვრის ნებისმიერი მნიშვნელობისას აბჭ-ის მოდული არ აღემატება სიგნალის ენერჯიას:

$$|B_0(\tau)| \leq B_0(0) = E_0 \quad (3.18)$$

ეს ფაქტი უშუალოდ გამომდინარეობს კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობიდან (იხ. თავი I):

$$|(u, u_\tau)| \leq \|u\| \cdot \|u_\tau\| = E_0 \quad (3.19)$$

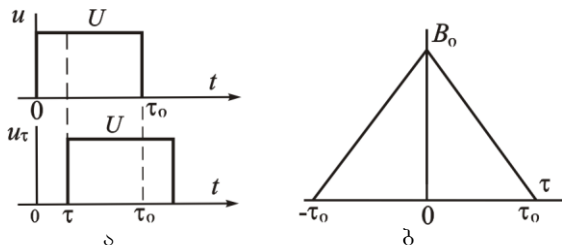


ნახ. 3.9

ამრიგად, აბჭ წარმოადგენს სიმეტრიულ მრუდს ცენტრალური მაქსიმუმით, რომელიც ყოველთვის დადებითია. ამასთან, $u(t)$ სიგნალის სახის მიხედვით ავტოკორელაციური ფუნქცია შეიძლება იყოს როგორც მონოტონურად კლებადი, ასევე მას შეიძლება ჰქონდეს რხევითი ხასიათი ნახ. 3.9.

მაგალითი 3.3. ვიპოვოთ მართკუთხა ვიდეოიმპულსის აბჭ.

ნახ. 3.10 ა გამოსახულია მართკუთხა ვიდეოიმპულსი U აპკლიტუდით და τ_0 ხანგრძლივობით. აქვე წარმოდგენილია მისი "ასლი", რომელიც დაძრულია დროში τ -ით დაგვიანების მიმართულებით. ინტეგრალი (3.15) მოცემულ შემთხვევაში გამოითვლება ელემენტარულად გრაფიკული აგების საფუძველზე. მართლაც, $u(t)u(t-\tau)$ ნამრავლი განსხვავდება ნულისაგან მხოლოდ დროის ინტერვალის იმ ზღვრებში, როცა ადგილი აქვს სიგნალების ზედადებას. ნახ. 3.10 ა-დან ჩანს, რომ ეს დროითი ინტერვალი ტოლია $\tau_0 - |\tau|$, თუ ძვრა არ აღემატება იმპულსის ხანგრძლივობას.



ნახ. 3.10. მართკუთხა ვიდეოიმპულსის აბჭ-ის პოვნა

ამგვარად, განსახილველი სიგნალისთვის

$$B_0(\tau) = \begin{cases} U^2 \tau_0 \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_0}\right), & |\tau| \leq \tau_0, \\ 0, & |\tau| > \tau_0 \end{cases} \quad (3.20)$$

ასეთი ფუნქციის გრაფიკი სამკუთხედიანია, რომელიც გამოსახულია ნახ. 3.10 ბ-ზე. სამკუთხედის ფუძის სიგანე ორჯერ მეტია იმპულსის ხანგრძლივობაზე.

მაგალითი 3.4. ვიპოვოთ მართკუთხა რადიომპულსის აპშ.

განვიხილოთ შემდეგი სახის რადიოსიგნალი

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < -\tau_0/2, \\ U \cos \omega_0 t, & -\tau_0/2 \leq t \leq \tau_0/2, \\ 0, & t > \tau_0/2. \end{cases}$$

წინასწარ ვიცით რა, რომ აპშ ლუწია, გამოვთვალოთ ინტეგრალს (3.15), იმის ვარაუდით, რომ $0 \leq \tau \leq \tau_0$. ამ დროს

$$\begin{aligned} B_u(\tau) &= U^2 \int_{-\tau_0/2+\tau}^{\tau_0/2} \cos \omega_0 t \cos \omega_0 (t-\tau) dt = \\ &= \frac{U^2}{2} \cos \omega_0 \tau \cdot (\tau_0 - \tau) + \frac{U^2}{2} \int_{-\tau_0/2+\tau}^{\tau_0/2} \cos 2\omega_0 \left(t - \frac{\tau}{2}\right) dt, \end{aligned}$$

საიდანაც ადვილად მივიღებთ

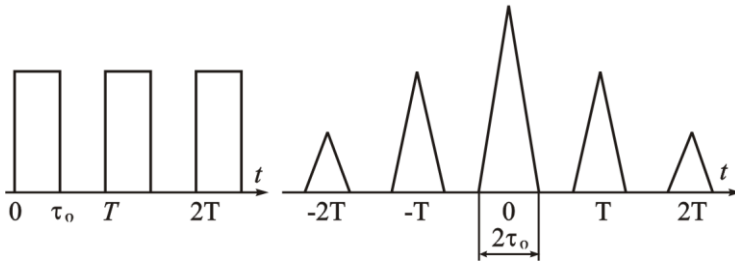
$$B_u(\tau) = \frac{U^2}{2} (\tau_u - |\tau|) \left[\cos \omega_0 \tau + \frac{\sin 2\omega_0 (\tau_u - |\tau|)}{2\omega_0 (\tau_u - |\tau|)} \right]. \quad (3.21)$$

ბუნებრივია, რომ როცა $\tau = 0$ სიდიდე $B_u(0)$ ტოლი ხდება ამ იმპულსის ენერჯიის (იხ. მაგალითი 1.9). ფორმულა (3.21) აღწერს მართკუთხა რადიომპულსის აპშ-ს τ -ს ყველა ძერისას, რომლებიც მოთავსებულია $-\tau_0 \leq \tau \leq \tau_0$ ფარგლებში. თუ ძერის აბსოლუტური მნიშვნელობა აღარბებს იმპულსის ხანგრძლივობას, მაშინ ავტოკორელაციური ფუნქცია იგივერად გახდება ნულის ტოლი.

მაგალითი 3.5. ვიპოვოთ მიმდევრობითი მართკუთხა ვიდეომპულსების თანმიმდევრობის აპშ.

ამოხსნა: რადიოლოკაციაში ფართოდ გამოიყენება სიგნალები, რომლებიც წარმოადგენენ ფორმის მიხედვით ერთნაირი ისეთი იმპულსებისაგან შემდგარ შეკვრას, რომლებიც ერთმანეთს მოსდევნ დროის ერთნაირი ინტერვალის შემდეგ. ასეთი შეკვრის აღმოჩენისას, ასევე მისი პარამეტრების, მაგალითად, დროში განთავსების,

გასაზომად ქმნიან მოწვობილობებს, რომლებიც აპარატურული გზით ახორციელებენ **აბზ**-ის გამოთვლის ალგორითმებს.



ნახ. 3.11. **აბზ** შეკვრა სამი ვიდეოიმპულსისაგან:
 ა – იმპულსების შეკვრა; ბ – **აბზ**-ის გრაფიკი

ნახ. 3.11 ა -ზე გამოსახულია **შეკვრა**, რომელიც შედგება მართკუთხა ფორმის სამი ერთნაირი ვიდეოიმპულსისაგან. აქვე გამოსახულია მისი ავტოკორელაციური ფუნქცია, გამოთვლილი (3.15) ფორმულის მიხედვით (ნახ. 3.11 ბ).

კარგად ჩანს, რომ **აბზ**-ის მაქსიმუმი მიიღწევა, როცა $\tau = 0$. თუმცა თუ დაყოვნება აღმოჩნდება თანმიმდევრობის პერიოდის ჯერადი (ჩვენს შემთხვევაში $\tau = \pm T, \pm 2T$), შეიმჩნევა გვერდითი ფურცლები, რომლებიც სიმაღლის მიხედვით შესადარია მთავარ **ფურცლისა**.

ამიტომ შეიძლება ვილაპარაკოთ მოცემული სიგნალის კორელაციური სტრუქტურის ცნობილ არასრულყოფილებაზე.

3.2.3. უსაზღვროდ ბაჭიმული სიბნალის ავტოკორელაციური ფუნქცია

თუ მოითხოვება დროში უსაზღვროდ გაჭიმული პერიოდული თანმიმდევრობის განხილვა, მაშინ სიგნალების კორელაციური თვისებების შესწავლისადმი მიდგომა რამდენადმე უნდა შეიცვალოს.

ჩავთვით, რომ ასეთი თანმიმდევრობა მიიღება რაღაც დროში ლოკალიზებული, ე.ი. იმპულსური სიგნალისგან, როცა ამ უკანასკნელის ხანგრძლივობა τ_0 მიისწრაფის უსასრულობისაკენ. იმისათვის, რომ ავიცილოთ მისაღები გამოსახულებების **განშლადობა**, განვსაზღვროთ ახალი **აბზ** როგორც სიგნალის და მისი ასლის სკალარული ნამრავლის

საშუალო მნიშვნელობა:

$$\tilde{B}_u(\tau) = \lim_{\tau_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau_0} \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0} u(t)u(t-\tau)dt$$

(3.22)

ასეთი მიდგომისას ავტოკორელაციური ფუნქცია $\tilde{B}_u(\tau)$ ხდება ამ ორი სიგნალის **საშუალო ურთიერთსიმძლავრის** ტოლი.

მაგალითად, თუ გვსურს ვიპოვოთ **აპვ** დროში შეუზღუდავი კოსინუსოიდისათვის $u(t) = U \cos \omega t$, $-\infty < t < \infty$, შეიძლება ვისარგებლოთ ფორმულით (3.21), რომელიც მიღებულია τ_0 ხანგრძლივობის რადიოიმპულსისათვის, ხოლო შემდეგ გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $\tau_0 \rightarrow \infty$, (3.22) გათვალისწინებით.

$$\text{შედგავდ მივიღებთ } \tilde{B}_u(\tau) = \frac{U^2}{2} \cos \omega \tau. \quad (3.23)$$

ეს **აპვ** თავად წარმოადგენს **პერიოდულ ფუნქციას**. მისი მნიშვნელობა, როცა $\tau = 0$, უდრის $U^2/2$.

(სიდიდე $U^2/2$ არის **საშუალო სიმძლავრე**, რომელსაც მოცემული სიგნალი გამოყოფს 1 ომ აქტიურ დატვირთვაზე).

ანუ **აპვ**-ს აქვს სიმძლავრის ფიზიკური განზომილება.

3.2.4. სიბნალის ენერგეტიკულ სპექტრსა და მის ავტოკორელაციურ ფუნქციას შორის კავშირი

მოცემული თავის მასალის შესწავლისას შეიძლება ვიფიქროთ, რომ კორელაციური ანალიზის მეთოდები გამოდიან როგორც რაღაც განსაკუთრებული ხერხები, რომელთაც კავშირი არა აქვთ სპექტრალური გაშლის პრინციპებთან. თუმცა ეს ასე არ არის. ადვილია იმის ჩვენება, რომ არსებობს მჭიდრო კავშირი **აპვ**-სა და სიგნალის ენერგეტიკულ სპექტრს შორის.

მართლაც, (3.15) ფორმულის შესაბამისად **აპვ** არის სკალარული ნამრავლი $B_u(\tau) = (u, u_\tau)$. აქ სიმბოლოთი u_τ აღნიშნულია $u(t-\tau)$ სიგნალის დროში დაძრული ასლი.

თუ მივმართავთ რელების განზოგადებულ ფორმულას (2.42), შეიძლება დავწეროთ ტოლობა

$$(u, u_\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) U_\tau^*(\omega) U d\omega.$$

დროში დაძრული სიგნალის სპექტრალური სიმკვრივე $U_\tau(\omega) = U(\omega) \exp(-j\omega\tau)$, საიდანაც $U_\tau^*(\omega) = U^*(\omega) \exp(j\omega\tau)$.

ამგვარად, მივიღებთ შემდეგამდე:

$$B_u(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |U(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega \quad (3.24)$$

სპექტრალური სიმკვრივის მოდულის კვადრატი, როგორც ცნობილია, წარმოადგენს სიგნალის ენერგეტიკულ სპექტრს. ამგვარად, ენერგეტიკული სპექტრი და ავტოკორელაციური ფუნქცია ურთიერთდაკავშირებულია ფურიეს გარდაქმნით:

$$B_u(\tau) \leftrightarrow |U(\omega)|^2 = W_u(\omega). \quad (3.25)$$

ცხადია, რომ არსებობს უკუ თანაფარდობაც:

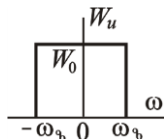
$$|U(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} B_u(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (3.26)$$

ეს შედეგები პრინციპიალურად მნიშვნელოვანია ორი მიზეზის გამო. პირველი, შესაძლებელი ხდება სიგნალების კორელაციური თვისებების შეფასება, გამომდინარე სპექტრის მიხედვით მათი ენერჯის განაწილებიდან. რაც მეტია სიგნალის სისშირეთა ზოლი, მით უფრო ძირითადია ავტოკორელაციური ფუნქციის ფურცელი და მით უფრო სრულყოფილია სიგნალი მისი საწყისი მომენტის ზუსტი გაზომვის შესაძლებლობის თვალსაზრისით.

მეორე, ფორმულები (3.24) და (3.26) უჩვენებენ ენერგეტიკული სპექტრის ექსპერიმენტული განსაზღვრის გზას. უფრო მოსახერხებელია თავდაპირველად მივიღოთ ავტოკორელაციური ფუნქცია, ხოლო შემდეგ ფურიეს გარდაქმნის გამოყენებით ვიპოვოთ სიგნალის ენერგეტიკული სპექტრი. ასეთმა ხერხმა გაავრცელა ჰპოვა სიგნალების თვისებების კვლევისას სწრაფქმედი ემპირიის დახმარებით დროის რეალურ მასშტაბში.

მაგალითი 3.6. ვიპოვოთ აბზ სიგნალისა თანაბარზომიანი და სისშირის მიხედვით შემოფარგლული ენერგეტიკული სპექტრი.

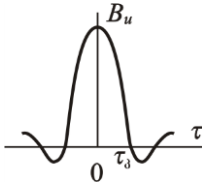
ამოხსნა: ვთქვათ სიგნალს აქვს შემდეგი სახის ენერგეტიკული სპექტრი



$$W_u(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_b, \\ W_0, & \omega_b < \omega < \omega_b, \\ 0, & \omega > \omega_b. \end{cases}$$

ნახ. 3.12 სადაც ω_b სპექტრის ზედა სასაზღვრო სისშირეა. (3.24) ფორმულით ვპოულობთ მის ავტოკორელაციურ ფუნქციას

$$B_u(\tau) = \frac{W_0}{2\pi} \int_{-\omega_b}^{\omega_b} e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{W_0}{\pi} \int_0^{\omega_b} \cos \omega\tau d\omega = \frac{W_0 \omega_b}{\pi} \frac{\sin \omega_b \tau}{\omega_b \tau} \quad (3.27)$$



ნახ. 3.13 ობს, რომ კორელაციის ინტერვალი τ_j

ამგვარად, მოცემულ სიგნალს აქვს უურცლის სახის აკვ.

ხშირად შემოაქვთ მოხერხებული რიცხვითი პარამეტრი τ_j – კორელაციის ინტერვალი.

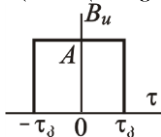
ადვილად ჩანს, რომ განსახილველ შემთხვევაში τ_j სილიდე დაკავშირებულია ω_b პარამეტრთან თანაფარდობით $\omega_b \tau_j = \pi$. აქედან გამომდინარე

$$\tau_j = \pi / \omega_b = 1 / (2f_b) \quad (3.28)$$

თურმე მით უფრო ნაკლებია (იხ. ნახ. 3.13), რაც მაღალია სიგნალის სპექტრის სასაზღვრო სიხშირე ω_b .

3.2.5. უზღუდვები, რომელიც ფაღის სიბნალის ავტოკორელაციური ფუნქციის სახეზე

ნაპოვნი კავშირი ავტოკორელაციურ ფუნქციასა და ენერგეტიკულ სპექტრს შორის საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ საინტერესო და ერთი შეხედვით არაცხადი კრიტერიუმი სიგნალის არსებობისა მოცემული კორელაციური თვისებებით. საქმე იმაშია, რომ ნებისმიერი სიგნალის ენერგეტიკული სპექტრი, განსაზღვრების მიხედვით შეიძლება იყოს დადებითი [იხ. ფორმულა (3.25)]. მოცემული პირობა შეიძლება არ შესრულდეს აკვ-ის ნებისმიერი არჩევის დროს. მაგალითად, თუ ავიღებთ



ნახ. 3.14 და გამოვთვლით ფურიეს შესაბამის გარდა-

$$B_u(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < -\tau_j, \\ A, & -\tau_j < \tau < \tau_j, \\ 0, & \tau > \tau_j. \end{cases}$$

ქმნას, მაშინ $|U(\omega)|^2 = 2A \int_0^{\tau_j} \cos \omega\tau d\tau = 2A\tau_j \frac{\sin \omega\tau_j}{\omega\tau_j}$.

ეს ნიშანცვლადი ფუნქცია არ შეიძლება წარმოადგენდეს რაიმე სიგნალის ენერგეტიკულ სპექტრს.

3.3 დისკრეტული სიბნალის ავტოკორელაციური ფუნქცია

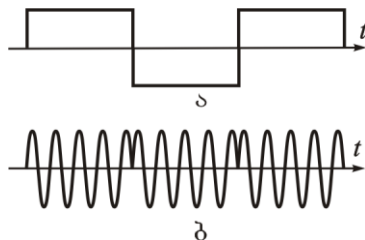
აჭმ მართკუთხა ფორმის ვიდეოიმპულსების შეკერის შესწავლისას უთუოდ მიაქცევდით ყურადღებას იმას, რომ შესაბამის გრაფიკს აქვს სპეციფიკური ფურცლოვანი სახე. პრაქტიკული თვალსაზრისით, ასეთი აჭმ სახის სიბნალის გამოშვანებისათვის ან მისი პარამეტრების შესწავლისათვის სრულიად უმნიშვნელოა ის, რომ ზოგიერთ მათგანს აქვს სამკუთხედების ფორმა. მნიშვნელოვანია მხოლოდ მათი ფარდობითი სიდიდეების შედარება ცენტრალურ მაქსიმუმთან, როცა ($\tau = 0$).

ჩვენი ამოცანაა – შევცვალოთ აჭმ-ის განსაზღვრა ისე, რომ მისგან მივიღოთ სასარგებლო ინფორმაცია მეორეხარისხოვანი მნიშვნელობის ინფორმაციის გამორიცხვით. ამისათვის გამოსაყენებელია დისკრეტული სიბნალის მათემატიკური მოდელის იდეა (იხ. თავი 1).

3.3.1. რთული დისკრეტული სტრუქტურის მქონე სიბნალების აღწერა

მართკუთხა ვიდეოიმპულსებისაგან შედგენილი შეკვრა უმარტივესი წარმომადგენელია რთული სიბნალების კლასისა, აგებული შემდეგი პრინციპით. სიბნალის არსებობის დროის მთელი ინტერვალი დაყოფილია მთელი რიცხვის $M > 1$ ტოლ შუალედებად, რომლებსაც უწოდებენ პოზიციებს. თითოეულ პოზიციაში სიბნალი შესაძლებელია იმყოფებოდეს ორიდან ერთ-ერთ მდგომარეობაში, რომლებსაც პასუხობენ რიცხვები $+1$ და -1 . (± 1 რიცხვების ამორჩევა პრინციპულ ხასიათს არ ატარებს და ნაკარნახევაა ანალიზის მოხერხებულობით).

ნახ. 3.15 ხსნის მრავალპოზიციური რთული სიბნალის ფორმირების ზოგიერთ ხერხს. განსაზღვრულობისათვის აქ $M = 3$.



ნახ. 3.15

ცხადია, რომ დისკრეტული სიბნალის ფიზიკური სახე შეიძლება განსხვავებული იყოს. შემთხვევა ა შეესაბამება ვიდეოიმპულსის U_0 სიმაღლის მნიშვნელობას, რომელიც გადაიცემა

შესაბამისი პოზიციით; -1 სიმბოლო პასუხობს $-U_0$ უარყოფით მნიშვნელობას. ამბობენ, რომ ამით რეალიზებულია რთული სიგნალის ამპლიტუდური კოდირება. b - შემთხვევაში წარმოებს ფაზური კოდირება. $+1$ სიმბოლოს გადასაცემად შესაბამის პოზიციაში გენერირდება ჰარმონიული სიგნალის მონაკვეთი ნულოვანი საწყისი ფაზით. იმისათვის, რომ აისახოს -1 სიმბოლო, გამოიყენება იგივე სიგრძის და სიხშირის სინუსოიდის მონაკვეთი, ხოლო ფაზა დებულობს დამატებით ძვრას 180° -ით.

ამ სიგნალების გრაფიკების განხილვების მიუხედავად შესაძლებელია მათი მათემატიკური მოდელების სრული იგივეობის დადგენა. მართლაც, ნებისმიერი ასეთი სიგნალის მოდელი – ეს რიცხვთა მიმდევრობაა $\{u_1, u_2, \dots, u_{M-1}, u_M\}$, რომელშიც თითოეული სიმბოლო დებულობს ორიდან ± 1 ერთ მნიშვნელობას. შევთანხმდეთ, რომ ცარიელი პოზიციები შევაკვსოთ ნულებით. ამასთან, მაგალითად, დისკრეტული სიგნალის ჩაწერის ფორმას $\{1, 1, -1, 1\}$ ექნება სახე $\dots 00011-1100\dots$

დისკრეტული სიგნალების დამუშავების უმნიშვნელო ოპერაცია მდგომარეობს იმაში, რომ ამ სიგნალის ფორმის შეუცვლელად ის საწყისი მდგომარეობიდან გადავანაცვლოთ რამდენიმე პოზიციით. მაგალისათვის, ქვემოთ წარმოდგენილია რაიმე სიგნალი (პირველი სტრიქონი) და მისი ასლები (მომდევნო სტრიქონები), დაძრულები 1, 2, და 3 პოზიციით დაყოვნების (დაგვიანების) მხარეს:

$\dots 00011110000\dots$
 $\dots 00001111000\dots$
 $\dots 00000111100\dots$
 $\dots 00000011110\dots$

3.3.2. დისკრეტული ავტოკორელაციური ფუნქცია

შევეცადოთ ისე განვაზოგადოთ ფორმულა (3.15)

$$\left(B_u(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)u(t-\tau)dt \right), \text{ რომ შესაძლებელი გახდეს აპფ დისკრე-}$$

ტული ანალოგის გამოთვლა მრავალპოზიციური სიგნალებისათვის. ნათელია, რომ აქ ინტეგრირების ოპერაცია შესაცვლელია აჯამებით, ხოლო ცვლადი τ -ს ნაცვლად გამოსაყენებელია მთელი რიცხვი n (დადებითი ან უარყოფითი), რომელიც მიუთითებს იმაზე, თუ სიგნალის ასლი რამდენი პოზიციით არის დაძრული საწყისი სიგნალის მიმართ. ვინაიდან "ცარიელ"

პოზიციებში სიგნალის მათემატიკური მოდელი შეიცავს ნულებს,

$$\text{დისკრეტული აკვ ჩაიწერება სახით } \hat{B}_u(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j u_{j-n}. \quad (3.29)$$

(მოყვანილი ფუნქცია წარმოადგენს დისკრეტული სიგნალის და მისი ასლის სკალარულ ნამრავლს).

ბუნებრივია, რომ მთელი რიცხვიანი n არგუმენტიანი ფუნქციის გააჩნია ჩვეულებრივი ავტოკორელაციის ფუნქციის ბევრი ცნობილი თვისება:

1. მარტივად ჩანს, რომ დისკრეტული აკვ არის ლუწი:

$$\hat{B}_u(n) = \hat{B}_u(-n). \quad (3.30)$$

2. ნულოვანი ძვრისას სიგნალის აკვ-ს განსაზღვრავს დისკრეტული სიგნალის ენერგია

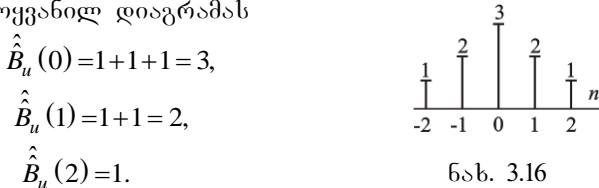
$$\hat{B}_u(0) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j^2 = E_u. \quad (3.31)$$

3.3.3. ზოგიერთი მაგალითი

ილუსტრაციისათვის გამოვთვალოთ დისკრეტული აკვ სამპოზიციური სიგნალისათვის, რომლებსაც თითოეულ პოზიციაზე ერთნაირი მნიშვნელობები გააჩნიათ: $u = \{1, 1, 1\}$. ჩავწეროთ ეს სიგნალი ასლებთან ერთად დაძვრული 1, 2 და 3 პოზიციით:

... 0 0 0 1 1 1 0 0 0 ... ნათლად ჩანს, უკვე $n=3$ -დან სიგნალი და
 ... 0 0 0 0 1 1 1 0 0 ... მისი ასლი შეწყვეტენ ერთმანეთზე
 ... 0 0 0 0 0 1 1 1 0 ... ზედღებებს ისე, რომ ნამრავლები,
 ... 0 0 0 0 0 0 1 1 1 ... რომლებიც შედიან ფორმულა (3.29)-ში,
 გახდებიან ნულის ტოლი, როდესაც $n \geq 3$.

ჯამის გამოთვლისას, არითმეტიკულად და დიაგრამის სახით შესაბამისად ვღებულობთ ნახ. 3.16 მოყვანილ დიაგრამას



ნახ. 3.16

ავტოკორელაციური ფუნქციის გვერდითი ფოთლები ნომრის ზრდასთან ერთად ხაზოვნად მცირდებიან იმის მსგავსად, როგორც სამი ანალოგური ვიდეოიმპულსის ავტოკორელაციური ფუნქციის დროს.

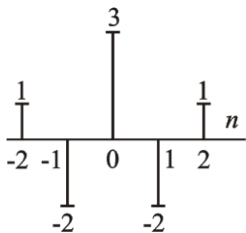
განვიხილოთ დისკრეტული სიგნალი, რომელიც წინა მაგალითისაგან განსხვავდება იმით მეორე პოზიციაში: $u = \{1, -1, 1\}$.

ამ შემთხვევისთვის ანალოგური მოქმედებით, გამოვთვალოთ დისკრეტული ავტოკორელაციური ფუნქციის მნიშვნელობა (ანუ ვიღებთ სიგნალისა და მისი ასლის სკალარულ ნამრავლს და ვაჯამებთ, როგორც მოითხოვს ფორმულა (3.29)):

$$\hat{B}_u(0) = 1+1+1 = 3, \text{ (ამ შემთხვევაში სიგნალები მრავლდებიან თავის თავზე)}$$

$$\hat{B}_u(1) = -1-1 = -2, \text{ (სიგნალი და ერთი პოზიციით დაძრული სიგნალის ასლი, სვეტში მდებარე შესაბამისი მნიშვნელობებით, მრავლდება ერთმანეთზე და იჯამება, ანუ } 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 = -1 \text{)}$$

$$\hat{B}_u(2) = 1. \text{ (სიგნალი და ორი პოზიციით დაძრული სიგნალის ასლი, სვეტში მდებარე შესაბამისი მნიშვნელობებით, მრავლდება ერთმანეთზე და იჯამება, ანუ } 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1 \text{)}$$



ნახ. 3.17

შესაბამისად ველებულობთ ნახ. 3.17 მოყვანილ დიაგრამას.

შეიძლება აღმოვაჩინოთ, რომ პირველი გვერდული ფურცელი იცვლის ნიშანს, ხოლო აბსოლუტური მნიშვნელობა რჩება უცვლელი.

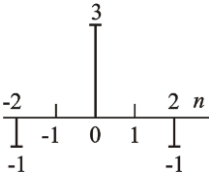
და ბოლოს, განვიხილოთ სამპოზიციური დისკრეტული სიგნალი მათემატიკური მოდელით $u = \{1, 1, -1\}$. მისი ავტოკორელაციური ფუნქცია და დიაგრამა მოყვანილია ნახ. 3.18-ზე.

$$\hat{B}_u(0) = 1+1+1 = 3, \text{ ვინაიდან } (1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = 3$$

$$\hat{B}_u(1) = 1-1 = 0, \text{ ვინაიდან } (1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1) + 0 \cdot (-1) = 0$$

$$\hat{B}_u(2) = -1. \text{ ვინაიდან } (1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1) + 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) = -1$$

კორელაციური თვისებების თვალსაზრისით აქ შესწავლილი სამი მაგალითიდან მესამე არის ყველაზე სრულყოფილი, ვინაიდან ამ შემთხვევაში რეალიზირდება ავტოკორელაციური ფუნქციის გვერდითი ფურცლების უმცირესი ღონე.



ნახ. 3.18

3.3.4. ბარკერის სიბნალეზი

დისკრეტული სიბნალეზი საუკეთესო სტრუქტურის მქონე ავტოკორელაციური ფუნქციით 50-60-იან წლებში ინტენსიურად შეისწავლებოდა. მოძიებული იყო სიბნალეზი სრულყოფილი კორელაციური თვისებებით. მათ შორის ფართოდ ცნობილი გახდა **ბარკერის სიბნალეზი** (კოდეზი). ამ სიბნალეზს გააჩნიათ უნიკალური თვისება: **M პოზიციეზის რაოდენობის მიუხედავად ავტოკორელაციური ფუნქციის მნიშვნელობა, გამოთვლილი (3.29) ფორმულის გამოყენებით, ყველა $n \neq 0$ არ აღემატება ერთს.**

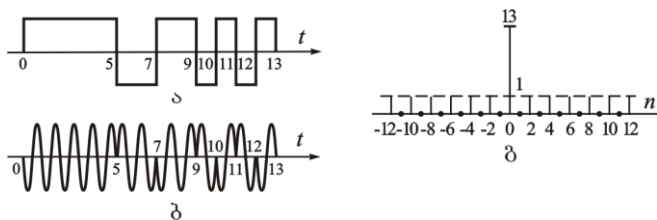
იმავდროულად ამ სიბნალეზის ენერგია, ანუ $\hat{B}_u(0)$ სიდიდე, რიცხოზობრივად უდრის M .

ბარკერის სიბნალეზი რეალიზებულია მხოლოდ პოზიციეზის $M = 2, 3, 4, 5, 7, 11$ და 13 რაოდენობისათვის. ბარკერის სიბნალეზი $M = 3$ გავარჩიეთ წინა პუნქტში. ცხრილში 3.2-ში მოყვანილია ბარკერის სიბნალეზის მოდელები ცხრილში 3.2

M	სიბნალის მოდელები	აბჟ
3	1,1,-1	3,0,-1
4	1,1,1,-1	4,1,0,-1
	1,1,-1,1	4,-1,0,1
5	1,1,1,-1,1	5,0,1,0,1
7	1,1,1,-1,-1,1,-1	7,0,-1,0,-1,0,-1
11	1,1,1,-1,-1,-1,1,-1,-1,1,-1	11,0,-1,0,-1,0,-1,0,-1,0,-1
13	1,1,1,1,1,-1,-1,1,1,-1,1,-1,1	13,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1

* დღემდე უცნობია, შესაძლებელია თუ არა აიგოს ბარკერის სიბნალი ლუწი $M > 4$ პოზიციეზით. ჩატარებულმა გამოკვლევებმა აჩვენეს, რომ არ არსებობს ბარკერის სიბნალეზი 13-ზე მეტი კენტი M პოზიციეზით.

ნახ. 3.19 -ზე ნაჩვენებია ყველაზე ხშირად გამოყენებული 13-პოზიციური ბარკერის სიბნალის კოდირების ორი ხერხი: ა – ამპლიტუდური კოდირება; ბ – ფაზური კოდირება, და გ - აბჟ გრაფიკული წარმოდგენა.



ნახ. 3.19 ბარკერის სიგნალები, როცა $M = 13$

უფრო ვრცლად დისკრეტული სიგნალების თვისებები განიხილება [1] მე-15 ან [??] მე-8 თავებში.

3.4. ორი სიბნალის შრტიმტოკორმლაციური ფუნქცია

რადიოტექნიკურ თეორიულ და პარაქტიკულ ამოცანებში მოსახერხებელია ორი სიბნალის ერთობრიობის განსაკუთრებული მახასიათებლის – ურთიერთკორელაციური ფუნქციის (შპფ) შემოტანა, რომელიც აღწერს როგორც განსხვავებას სიგნალების ფორმებს შორის, ასევე მათ ურთიერთ განლაგებას დროის ღერძზე.

3.4.1. შრტიმტოკორმლაციური ფუნქციის განსაზღვრის პრინციპი

განზოგადოებულ (3.15) ფორმულას ეუწოდოთ ურთიერთკორელაციური ფუნქცია ორი ნამდვილი $u(t)$ და $v(t)$ სიგნალების

$$\text{სკალარულ ნამრავლს } B_{uv}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t-\tau)dt. \quad (3.32)$$

სიგნალების მსგავსი ინტეგრალური მახასიათებლის მიზანშეწონილება ჩანს შემდეგი მაგალითიდან. ვთქვათ, მაგალითად, სიგნალები $u(t)$ და $v(t)$ საწყის მდგომარეობაში ორთოგონალურია, ისე რომ

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t-\tau)dt = 0.$$

ამ სიგნალების სხვადასხვა ხელსაწყობებში გატარებისას შესაძლებელია, რომ $v(t)$ სიგნალი წანაცვლებელი $u(t)$ იყოს სიბნალის მიმართ რაიმე τ დროით. ნათელია, რომ შპფ წარმოადგენს ორთოგონალური მდგომარეობის ”მდგრადობის” ზომას სიგნალების დროში დაძვრისას.

3.4.2. ურთიერთკორელაციური ფუნქციის ზოგიერთი თვისება

1. თუ (3.32) ფორმულაში შევცვლით ინტეგრირების ცვლადს $x = t - \tau$, ისე რომ $dt = dx$, მაშინ შესაძლებელია ფორმულის

$$B_{uv}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x+\tau)v(x)dx. \quad (3.33)$$

ამიტომ, ცხადია, ასეთი შემთხვევისათვის $B_{uv}(\tau) = B_{vu}(-\tau)$. (3.34)

(3.32) და (3.33) ფორმულებით გამოთვლილი შედეგები ერთხვევა ერთმანეთს, ვინაიდან სიგნალების ერთი და იგივე განლაგება მიღწევა როგორც $v(t)$ ძვრით დაყოვნების მიმართულებით, ისე $u(t)$ დაძვრით წინსწრების მიმართულებით.

2. ცალკეული სიგნალის ავტოკორელაციური ფუნქციებისაგან განსხვავებით, **შპშ**, რომელიც აღწერს ორ არაერთნარი სიგნალის სისტემის თვისებას, არ არის τ არგუმენტის მიმართ **ლუწი ფუნქცია**

$$B_{uv}(\tau) \neq B_{uv}(-\tau).$$

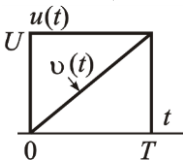
3. თუ განსახილავ სიგნალებს აქვთ სასრული ენერგეები, მაშინ მათი ურთიერთკორელაციური ფუნქციები არის **შეზღუდული**. ეს მტკიცებულება გამომდინარეობს კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობიდან: $|B_{uv}(\tau)| = |(uv_\tau)| \leq \|u\| \cdot \|v_\tau\|$, საიდანაც

$$|B_{uv}(\tau)| \leq \|u\| \cdot \|v_\tau\|,$$

ვინაიდან სიგნალის დროში დაძვრა არ მოქმედებს მისი ნორმის მნიშვნელობაზე.

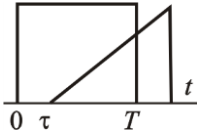
4. ყურადღებაამისაქცევია ის, რომ როცა $\tau = 0$ სრულიად არ არის აუცილებელი **შპშ** მნიშვნელობამ მიაღწიოს მაქსიმუმს.

მაგალითი 3.7. გამოთვალეთ $B_{uv}(\tau)$ ფუნქცია იმ შემთხვევისათვის,



როცა $u(t)$ - მართკუთხედის, ხოლო $v(t)$ - სამკუთხედის ფორმის ვიდეოიმპულსებია (იხ. ნახ. 3.20). მათი ამპლიტუდები U და პერიოდები T ერთნარი სიდიდეებია; საწყის მდგომარეობაში (დაყოვნების არ არსებობის შემთხვევაში) სიგნალები არსებობენ დროის $[0, T]$ საერთო მონაკვეთზე.

ამოხსნა: 1) თუ $0 \leq t \leq T$, მაშინ განსახილავი სიგნალები აღიწერება ასე $u(t) = U$, $v(t) = Ut/T$.



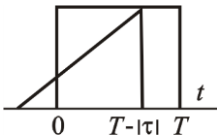
ნახ. 3.21

2) თუ $\tau > 0$, ანუ $v(t)$ სიგნალი $u(t)$ მიმართ დროით შეყოვნდება (იხ. ნახ. 3.21), მაშინ, უგანზომილებო პარამეტრის $\eta = \tau/T$ ანუ ($\tau = \eta \cdot T$) შემოტანით და მომდევნო ელემენტარული გარდაქმნების ჩატარებით მივიღებთ

$$B_{uv}(\eta) = \int_{\tau}^T u(t)v(t-\tau)dt = \frac{U^2}{T} \int_{\eta T}^T (t-\eta T)d(t-\eta T) = \frac{U^2}{T} \cdot \frac{(t-\eta T)^2}{2} \Big|_{\eta T}^T = \frac{U^2}{T} \frac{(T-\eta T)^2}{2} = \frac{U^2 T}{2} (1-\eta)^2. \quad (3.36)$$

3) თუ $\tau < 0$, ანუ სამკუთხა იმპულსი წინ უსწრებს მართკუთხა იმპულსს (იხ. ნახ. 3.22), მაშინ

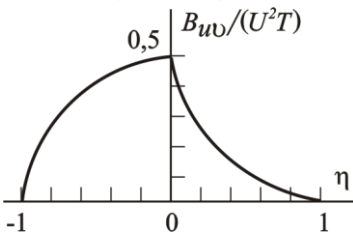
$$B_{uv}(\tau) = \int_0^{T-|\tau|} u(t)v(t-|\tau|)dt = \int_0^{T-|\tau|} U \cdot \frac{U(t-|\tau|)}{T} dt = \frac{U^2}{T} \int_0^{T-|\tau|} (t-|\tau|)dt,$$



ნახ. 3.22

საიდანაც $B_{uv}(\eta) = \frac{U^2 T}{2} (1-\eta^2).$ (3.37)

(3.36) და (3.37) ფორმულებით გამოთვლილ ფუნქციებს აქვთ სახე (იხ. ნახ. 3.23).



ნახ. 3.23

გრაფიკის ასიმეტრია გამოწვეულია იმით, რომ მოცემული იმპულსების "გადაფარვის" ფართობი იცვლება სხვადასხვანაირად და დამოკიდებულია სიგნალების ერთმანეთის მიმართ ძერის მიმართულებაზე



3.4.3. კავშირი შპზ და ურთიერთსამატრალურ სიმკვრივეს შორის

გამოვხატოთ ორი სიგნალის შპზ მათი სპექტრალური მახასიათებლების საშუალებით. მსჯელობის მეთოდითა სრულად იმეორებს იმას, რასაც ვიყენებდით ცალკეული სიგნალის წარმოდგენისას სპექტრალური ავტოკორელაციური ფუნქციის სახით. რელეას განზოგადოებული ფორმულის საფუძველზე

$$B_{uv}(\tau) = (u, v_\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) V_\tau^*(\omega) d\omega$$

და ვინაიდან დროში დაძვრული სიგნალის სპექტრი

$$V_\tau(\omega) = V(\omega) \exp(-j\omega\tau), \text{ მაშინ}$$

$$B_{uv}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) V^*(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (3.38)$$

გვაქვს რა მხედველობაში, რომ სიდიდე $W_{uv}(\omega) = U(\omega) V^*(\omega)$ არის $u(t)$ და $v(t)$ სიგნალების ურთიერთენერგეტიკული სპექტრი, განსაზღვრული სისწირეების უსასრულო ინტერვალში $-\infty < \omega < \infty$, მივდივართ დასკვნამდე: **ორი სიგნალის ურთიერთკორელაციური ფუნქცია და ურთიერთენერგეტიკული სპექტრი დაკავშირებულია ფურიეს გარდაქმნის წყვილით.**

3.4.4. ურთიერთკორელაციური ფუნქციის განზოგადოება დისკრეტული სიბნალების შემთხვევისათვის

ვთქვათ $u(t)$ და $v(t)$ სიგნალები მოცემულია დისკრეტული ფორმით, როგორც აღრიცხვების ერთობლიობა:

$$u = \{\dots, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \dots\}, \text{ და } v = \{\dots, v_{-1}, v_0, v_1, v_2, \dots\},$$

რომლებიც დროში ვრცელდებიან ერთნაირი T ინტერვალებით. ცალკეული ფუნქციის ავტოკორელაციური ფუნქციის ანალოგიურად განვსაზღვროთ ორი დისკრეტული სიგნალის ურთიერთკორელაციური ფუნქცია ფორმულით

$$\hat{B}_{uv}(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j v_{j-n}, \quad (3.39)$$

სადაც n - მთელი რიცხვია (დადებითი, უარყოფითი და ნული). ჩავატაროთ ამ ფუნქციის გამოთვლის დემონსტრაცია ოთხპოზი-

ციური **ბარკერის სიგნალების** მაგალითზე: $u = \{1, 1, 1, -1\}$ და $v = \{1, 1, -1, 1\}$. თუ $n > 0$, მაშინ სიგნალი v ჩამორჩება u სიგნალს. იმის მსგავსად, როგორც ვაკეთებდით წინა პარაგრაფში, შევადგინოთ ცხრილი, რომელიც შეიცავს u სიგნალს და v სიგნალის დაძრული ასლების მიმდევრობას:

```

... 0 0 0 0 1 1 1 -1 0 0 0 0 0 0 ...
... 0 0 0 0 1 1 -1 1 0 0 0 0 0 0 ...
... 0 0 0 0 0 1 1 -1 1 0 0 0 0 0 ...
... 0 0 0 0 0 0 1 1 -1 1 0 0 0 0 ...
... 0 0 0 0 0 0 0 1 1 -1 1 0 0 0 ...

```

ფორმულა (3.39)-ით ჩატარებული გამოთვლების შედეგია

$$\hat{B}_{uv}(0) = 0, \hat{B}_{uv}(1) = 3, \hat{B}_{uv}(2) = 0, \hat{B}_{uv}(3) = -1.$$

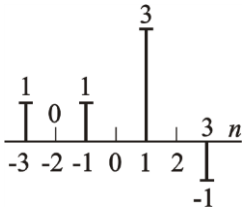
ანალოგიურად ავაგოთ ცხრილი, რომელიც ასახავს სიგნალის დაძვრას წინსწრების მიმართულებით:

```

... 0 0 0 0 1 1 1 -1 0 0 0 ...
... 0 0 0 0 1 1 -1 1 0 0 0 ...
... 0 0 0 1 1 -1 1 0 0 0 0 ... ,
... 0 0 1 1 -1 1 0 0 0 0 0 ...
... 0 1 1 -1 1 0 0 0 0 0 0 ...

```

და ვპოულობთ $\hat{B}_{uv}(0) = 0, \hat{B}_{uv}(-1) = 1, \hat{B}_{uv}(-2) = 0, \hat{B}_{uv}(-3) = 1.$



ნახ. 3.24

მიღებული ბარკერის ორი სიგნალის ურთიერთკორელაციური ფუნქციის დიაგრამა მოყვანილია ნახ. 3.24-ზე. მას აქვს არასიმეტრიული სახე; ფუნქციის მაქსიმუმი მიიღწევა $v(t)$ სიგნალის დაძვრისას ერთი (დადებითი) პოზიციით, ანუ 1-ზე.

3.5. მე-III. ძირითადი დებულებები, თანაზარდობები და თანხმებულობანი

3.5.1. უმჯობესი

- სისშირის მიხედვით ორი სიგნალის ურთიერთ ენერჯის განაწილება აღიწერება მათ ურთიერთ ენერგეტიკულ სპექტრით
- შესაბამისი სპექტრული მდგენელების ფილტრაციის გზით შეიძლება მივაღწიოთ სიგნალების მიახლოებით ორთოგონალიზაციას.
- სიგნალის ენერჯის განაწილება სისშირეების მიხედვით ადგენს მის ენერგეტიკულ სპექტრს, რომელიც უდრის სპექტრული სიმკრივის მოდულის კვადრატს.
- სიგნალის და მისი, დროში დაძვრული, ასლის მსგავსობის ხარისხი აღიწერება სიგნალის ავტოკორელაციური ფუნქციით.
- სიგნალის ენერგეტიკული სპექტრი და ავტოკორელაციური ფუნქცია ურთიერთმომხდელია ფურიეს გარდაქმნის წყვილით.
- ავტოკორელაციური ფუნქციის ცნება განზოგადდება მრავალპოზიციური დისკრეტული სიგნალების შემთხვევაზე
- სიგნალს გააჩნია კარგი კორელაციური თვისებები, თუ აპწ-ის გვერდითი ფურცლების დონეები ცენტრალური ფურცლის დონეზე მნიშვნელოვნად დაბალია,
- ორი სიგნალის ენერგეტიკული სპექტრის ფურიეს გარდაქმნის მათი ურთიერთკორელაციური ფუნქცია.

3.5.2. საკონტროლო კითხვები

1. რა ფიზიკურ აზრი აქვს ორი სიგნალის ურთიერთ ენერგეტიკულ სპექტრს?
2. რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს ფუნქცია, რომელიც აღწერს ურთიერთენერგეტიკულ სპექტრს იმისთვის, რომ ეს სიგნალები იყონ ორტოგონალურები?
3. შესაძლებელია თუ არა ისეთი სიტუაციის რეალიზება როდესაც ორი სიგნალის სპექტრული სიმკრივეები იყოს გადაფრული და ამის მიუხედავად ეს სიგნალები იყოს ორტოგონალური?
4. თამაშობს თუ არა რაიმე როლს სპექტრული სიმკრივის ფაზა სიგნალის ენერგეტიკული სპექტრის განსაზღვრისას?

5. მართკუთხა რადიომპულსის საერთო ენერჯიის რა ნაწილს შეიცავს სპექტრალური დიაგრამის პირველი (ძირითადი) ფიურცლის ფარგლებში?
6. რა ტექნიკური წინაპირობებია სიგნალის აპკ ცნების შემოტანა ?
7. რაგორი უნდა იყოს სიგნალის ენერგეტიკული სპექტრი, რომ აპკ ქონდეს ვიწროზოლოვანი ძირითადი ფოთოლი?
8. რა შეზღუდვები შესაძლებელია დავადოთ სიგნალის აპკ სახეს?
9. რაში მდგომარეობს მრავალპოხიციური რთული სიგნალის აგების პრინციპი?
10. როგორ შემოიტანება მრავალპოხიციური სიგნალის დისკრეტული აპკ?
11. დაასახელებთ ბარკერის სიგნალების ძირითადი თვისება რაში მდგომარეობს ამ სიგნალების უპირატესობა სხვა მრავალპოხიციური სიგნალებთან შედარებით?
 შეიძლება თუ არა ბარკერის სიგნალების რეალიზება ნებისმიერი დიდი რაოდენობის რიცხვების პოხიციებით?

3.5.3. ამოცანების ამოხსნის ზოგადი მეთოდიკა

ზოგადი მეთოდი არ არსებობს. ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში მაგალითის/ამოცანის ამოხსნას უნდა მიუსადაგოდ შესაბამისი მათემატიკური აპარატი და ლოგიკური მსჯელობით ამოხსნათ დასმული მაგალითი ან ამოცანა.

3.5.4. ტიპიური ამოცანების ამოხსნის მაგალითები

3.5.4.1. რელეას განზოგადოებული ფორმულა. ენერგეტიკული სპექტრები

ამოცანა 3.1. რელეას განზოგადოებული ფორმულის გამოყენებით იპოვეთ ორი ექსპონენციალური ვიდეომპულსების $u(t) = A_1 \exp(-\alpha_1 t) \sigma(t)$ და $v(t) = A_2 \exp(-\alpha_2 t) \sigma(t)$ სკალარული ნამრავლი (u, v) .

ამოხსნა: ვიცით რა მოცემული სიგნალების სპექტრული სიმკრივეები სკალარული ნამრავლი გამოითვლება

$$(u, v) = \frac{A_1 A_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(\alpha_1 - j\omega)(\alpha_2 + j\omega)}$$

იტერალქვეშა ფუნქცია დავყოთ უბრალო წილადებზე:

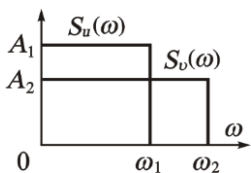
$$\frac{1}{(\alpha_1 - j\omega)(\alpha_2 + j\omega)} = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} \left(\frac{1}{\alpha_1 - j\omega} + \frac{1}{\alpha_2 + j\omega} \right).$$

თითოეული უბრალო წილადის ინტეგრალს გამოვთვლით ერთი და იგივე ხერხით. ასე,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\alpha_2 + j\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\alpha_2 - j\omega)d\omega}{\alpha_2^2 + \omega^2} = \alpha_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\alpha_2^2 + \omega^2} = \pi.$$

საბოლოოდ მივიღებთ $(u, v) = \frac{A_1 A_2}{\alpha_1 + \alpha_2}.$

ამოცანა 3.2 ფიზიკური სიხშირეების არეში $\omega > 0$, $u(t)$ და $v(t)$ სიგნალების სპექტრული სიმკრივეები $S_u(\omega)$ და $S_v(\omega)$ წარმოდგენილია ნახ. 1.3.1. გამოთვალეთ მოცემული სიგნალების სკალარული ნამრაველი (u, v) .

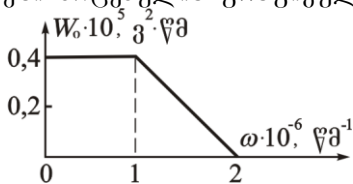


ნახ. 1.3.1.

ამოხსნა: ვიცით რა მოცემული სიგნალების სპექტრული სიმკრივეების სკალარული ნამრაველი გამოითვლება

$$(u, v) = \frac{A_1 A_2}{2\pi} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} d\omega = \frac{A_1 A_2 2\omega_1}{2\pi} = \frac{A_1 A_2 \omega_1}{\pi}.$$

ამოცანა 3.7. განსაზღვრეთ $u(t)$ სიგნალის ენერჯია რომლის ენერგეტიკული სპექტრის გრაფიკი სიხშირეების დადებით არეში მოცემულია ფრაფიკულად (იხ. ნახ. 1.3.2)



ამოხსნა: გამოვიყენოთ რეგლას განზოგადებული ფორმულა (ვიწრო აზრით) რომლის მიხედვით: ნებისმიერი სიგნალის ენერჯია არის რიცხვითი ღერძის სხვა და სხვა სიხშირული ინტერვალების თითოეული უბნის ჯამური შენატანი. ანუ თითოეული მცირე უბნის სიხშირული $\Delta\omega$ ინტერვალის ენერჯიების ჯამი უდრის სიგნალის ჯამურ ენერჯიას, რომელიც გამოითვლება გა-

მოსახულებით $\Delta E_0 = \frac{1}{\pi} W_0(\omega') \Delta \omega$, სადაც ω' მოცემული ინტერვალის რაიმე წერტილია. ამ შემთხვევაში $\Delta E_0 = 0.191$, ვ²·წმ.

ამოცანა 3.8. მართკუთხა $u(t)$ ვიდეოიმპულსის ამპლიტუდაა U_0 და ხანგრძლიობა τ_0 . გამოიყვანეთ ენერჯის E_{ω_b} გამოთვლის ფორმულა, რომელიც მოთავსებულია დადებითი სიხშირეების ზღვრებში ნულიდან რაიმე ზედა ω_b ზღვრულ სიხშირემდე.

ამოხსნა: მართკუთხა ვიდეოიმპულსის სპექტრული სიმკრივის ნამდვილი ნაწილის კვადრატში აყვანის შემდეგ, ვღებულობთ ენერგეტიკულ სპექტრს (იხ. ლექცია 13, გვ.100)

$$W_u(\omega) = U^2 \tau_0^2 \frac{\sin^2(\omega \tau_0 / 2)}{(\omega \tau_0 / 2)^2}.$$

სიხშირულ არეში სიბნალის ენერჯის განსაზღვრისათვის, აუცილებელია ინტეგრალის გამოთვლა. რეგულარული თეორემის თანახმად

$$E_{\omega_b} = \frac{U_0^2 \tau_0^2}{\pi} \int_0^{\omega_b} \frac{\sin^2(\omega \tau_0 / 2)}{(\omega \tau_0 / 2)^2} d\omega.$$

ჩავატაროთ ცვლადის შეცვლა $\xi = \omega \tau_0 / 2$, მივიღებთ

$$E_{\omega_b} = \frac{2U_0^2 \tau_0^2}{\pi} \int_0^{\omega_b \tau_0 / 2} \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} d\xi.$$

ნაწილ-ნაწილ ინტეგრირებით, მივიღებთ

$$\begin{aligned} E_{\omega_b} &= \frac{2U_0^2 \tau_0^2}{\pi} \left[\frac{\sin^2 \xi}{\xi} \Big|_0^{\omega_b \tau_0 / 2} + \int_0^{\omega_b \tau_0 / 2} \frac{\sin 2\xi}{\xi} d\xi \right] = \\ &= \frac{2U_0^2 \tau_0^2}{\pi} \left[\text{Si}(\omega_b \tau_0) - \int_0^{\omega_b \tau_0 / 2} \frac{\sin^2(\omega_b \tau_0 / 2)}{(\omega_b \tau_0 / 2)^2} \right], \end{aligned}$$

სადაც $\text{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi$ - არის არაელემენტარული ფუნქცია, რომელ-

საც უწოდებენ ინტეგრალური სინუსი [4]

ამოცანა 3.9. იმპულსური რხევა მოცემულია ფორმულით $s(t) = 15 \exp(-10^7 t) \sigma(t)$. განსაზღვრეთ ზღვრული f_b (ჰც) სიხშირე ისეთ ნაირად, რომ სიხშირის $(0, f_b)$ ინტერვალში თავმოყრილი იყოს იმპულსის ენერჯის 90%.

ამოხსნა: მოცემული სიგნალის ენერგეტიკული სპექტრი გამოიანგარიშება ფორმულაით: $W_s(t) = \frac{U^2}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{15^2}{10^{14} + \omega^2}$.

საზღვრული სიხშირე ω_b აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\int_0^{\omega_b} \frac{d\omega}{10^{14} + \omega^2} = 0,9 \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{10^{14} + \omega^2} \quad \text{ან} \quad \arctg(\omega_b/10^7) = 0,45.$$

განტოლების ამოხსნით ვპოულობთ $\omega_b = 10^7 \cdot \operatorname{tg} 0,45\pi$, ანუ $f_b = 10.049$ მჰც.

3.5.4.2. ავტოკორელაციური ფუნქცია

ამოცანა 3.12. მიიღეთ ორხმრივი ექსპონენციალური ვიდეომპულსის $s(t) = A \exp(-\beta|t|)$, ავტოკორელაციური ფუნქციის $B_s(\tau)$ ანალიტიკური გამოსახულება თუ A - მუდმივი სიდიდეა, $\beta > 0$ - ნამდვილი რიცხვია.

ამოხსნა: ვინაიდან სიგნალის სპექტრული სიმკრივე არის

$$S(\omega) = 2B \int_0^{\infty} e^{-\beta t} \cos \omega t dt = \frac{2B\beta}{\beta^2 + \omega^2},$$

აქედან ენერგეტიკული სპექტრი იქნება $W_s(\omega) = \frac{4B^2\beta^2}{(\beta^2 + \omega^2)^2}$.

ავტოკორელაციური ფუნქცია $K_s(\tau)$ წარმოიღვინება ფურიეს შემდეგი ინტეგრალით:

$$K_s(\tau) = \frac{2B^2\beta^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega\tau}}{(\beta^2 + \omega^2)^2} d\omega.$$

აქ ინტეგრალქვეშა ფუნქციას აქვს ორი მორე რიგის პოლუსი წერტილებში კოორდინატებით $\omega = \pm j\beta$. $K_s(\tau)$ გამოსათვლელად როცა $\tau > 0$ ვპოულობთ ნაშთს

$$\operatorname{res} \left[\frac{e^{j\omega\tau}}{(\beta^2 + \omega^2)^2} \right] \Bigg|_{\omega=j\beta} = \frac{d}{d\omega} \left[\frac{e^{j\omega\tau} (\omega - j\beta)^2}{(\beta^2 + \omega^2)^2} \right] \Bigg|_{\omega=j\beta} = -je^{-\beta\tau} (1 + \beta\tau) / (4\beta^2)$$

$$\text{ამრიგად, როცა } \tau > 0 \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega\tau} d\omega}{(\beta^2 + \omega^2)^2} = 2\pi j \cdot \operatorname{res} = \frac{\pi}{2} e^{-\beta\tau} \frac{1 + \beta\tau}{\beta^2},$$

საიდან, ავტოკორელაციური ფუნქციის ლუწობის მხედველობაში მიღების გათვალისწინებით, გვექნება

$$K_s(\tau) = \frac{B^2}{\beta} e^{-\beta|\tau|} (1 + \beta|\tau|).$$

ამოცანა 3.13. გამოთვალეთ $s(t) = A \exp(-\alpha t) \sin \omega_0 t \cdot \sigma(t)$ სიგნალის, რომელსაც გააჩნია ექსპონენციალური მიღევადი მოვლები და ჰარმონიული მაღალსიხშიროვანი შევსება, ავტოკორელაციური $B_s(\tau)$ ფუნქცია

ამოხსნა:
$$K_s(\tau) = A^2 \int_0^\infty e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t \cdot e^{-\alpha(t+\tau)} \sin \omega_0 (t + \tau) dt =$$

$$= A^2 e^{-\alpha\tau} \int_0^\infty e^{-2\alpha t} \sin \omega_0 t \cdot \sin \omega_0 (t + \tau) dt .$$

ცნობილია, რომ $\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)]$

$$K_s(\tau) = \frac{A^2 e^{-\alpha\tau}}{2} \cos \omega_0 \tau \int_0^\infty e^{-2\alpha t} dt - \frac{A^2 e^{-\alpha\tau}}{2} \int_0^\infty e^{-2\alpha t} \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau) dt.$$

ტაბულირებული ინტეგრალის გამოყენებით

$$\int_0^\infty e^{-px} \cos(qx + \lambda) dx = \frac{1}{p^2 + q^2} (p \cos \lambda - q \sin \lambda),$$

ვღებულობთ

$$K_s(\tau) = \frac{A^2 e^{-\alpha|\tau|}}{2} \left[\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega_0^2} \right) \cos \omega_0 \tau - \frac{\omega_0}{\alpha^2 + \omega_0^2} \sin \omega_0 |\tau| \right].$$

მაგალითი 3.16. იპოვეთ რადიომპულსის ავტოკორელაციური ფუნქციის ანალიტიკური გამოსახულება თუ ის გამოიხატება

$$\text{შემდეგი თანაფარდობით } s(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0, \\ A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), & 0 < t < \tau_0, \\ 0 & , t > \tau_0 \end{cases}$$

ხოლო მოვლები მართკუთხედის ფორმისაა.

ამოხსნა: დაუშვათ, რომ $\lambda > 0$. მაშინ $0 \leq \tau \leq \tau_0$ გვექნება

$$K_s(\tau) = \int_0^{\tau_0 - \tau} s(t) s(t + \tau) dt =$$

$$= A^2 \int_0^{\tau_0 - \tau} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \cos[\omega_0 (t + \tau) + \varphi_0] dt .$$

ინაიდან $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)]$, მაშინ

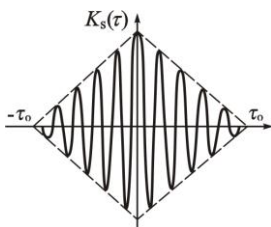
$$K_s(\tau) = \frac{A^2}{2} \int_0^{\tau_0-\tau} \cos \omega_0 \tau dt + \frac{A^2}{2} \int_0^{\tau_0-\tau} \cos(2\omega_0 \tau + \omega_0 \tau + 2\phi_0) dt =$$

$$= \frac{A^2}{2} (\tau_0 - \tau) \cos \omega_0 \tau + \frac{A^2}{4\omega_0} \sin [\omega_0 (2\tau_0 - \tau) + 2\phi_0].$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $K_s(\tau)$ ლუწი ფუნქციაა მივიღებთ

$$K_s(\tau) = \frac{A^2 \tau_0}{2} \times \left\{ \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_0} \right) \cos \omega_0 \tau + \frac{1}{2\omega_0 \tau_0} \sin [\omega_0 (2\tau_0 - |\tau|) + 2\phi_0] \right\}.$$

პრაქტიკულ შემთხვევებში, როგორც ვეხი, $\omega_0 \tau_0 \ll 1$, ანუ რადიომპულსის ხანგრძლიობა მნიშვნელოვნად აღემატება მაღალსიხშირულ შევსების ერთ პერიოდის ხანგრძლიობას. მაშინ მიახლოებით ნახ. 3.5.4.1 ნაჩვენებია ამონახსნის გრაფიკები



$$K_s(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < -\tau_0, \\ \frac{A^2 \tau_0}{2} \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_0} \right) \cos \omega_0 \tau, & -\tau_0 \leq \tau \leq \tau_0, \\ 0, & \tau > \tau_0. \end{cases}$$

ნახ. 3.5.4.1

მაგალითი 3.18. გამოთვალეთ ავტოკორელაციური $\hat{B}_s(n)$ ფუნქცია შემდეგი ხუთპოზიციური დისკრეტული სიგნალებისათვის ა) $s_1 = (1, 1, 1, -1, 1)$ და ბ) $s_2 = (1, 1, -1, -1, 1)$

პასუხი: ა) $\hat{B}_{s_1}(n) = (\dots, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 5, 0, 1, 0, 1, 0, 0, \dots)$

ბ) $\hat{B}_{s_2}(n) = (\dots, 0, 0, 1, 0, -3, 0, 5, 0, -3, 0, 1, 0, 0, \dots)$

3.5.4.3. ურთიერთკორელაციის უზნაძვია

მაგალითი 3.22. გამოთვალეთ ურთიერთკორელაციური $\hat{B}_s(n)$ ფუნქცია შემდეგი სამპოზიციური დისკრეტული სიგნალებისათვის $u = (1, 1, -1)$ და $v = (-1, 1, 1)$

პასუხი: $\hat{B}_{uv}(n) = (\dots, 0, 0, 1, 2, -1, -2, 1, 0, 0, \dots)$

თაზო IV. მოდულირებადი სიბნალაბი

როგორც წესი, სიბნალები, რომლებიც მოგვეწოდება შეტყობინების წყაროებიდან (მიკროფონი, გადამცემი სატელევიზიო კამერა, ტელემეტრული სისტემის გადამწოდი), შეუძლებელია გადაცემული იქნეს უშუალოდ რადიორხით. საქმე მხოლოდ იმაში არ არის, რომ სიბნალების ამკლიტუდა მცირეა. გაცილებით მნიშვნელოვანია მათი ფარდობითი დაბალსიხშირიანობა. იმისათვის, რომ განვახორციელოთ სიბნალის ეფექტური გადაცემა რაიმე გარემოში, აუცილებელია ამ სიბნალების სპექტრი გადავიტანოთ დაბალი სიხშირის არიდან საკმარისად მაღალ სიხშირულ არეში. ამ პროცედურამ რადიოტექნიკაში მიიღო მოდულაციის სახელი.

4.1. სიბნალაბი ამალიტუღური მოდულაციოი

სანამ შევისწავლიდეთ მოდულირებული სიბნალების ამ უმარტივეს სახეს, განვიხილოთ მოკლედ ზოგიერთი საკითხი, რომლებიც ეხება ნებისმიერი სახის მოდულაციის პრინციპებს.

4.1.1. ბაღამტანი რხევის ცნება

იდეა მეთოდისა, რომელიც საშუალებას იძლევა გადავიტანოთ სიბნალის სპექტრი მაღალი სიხშირეების არეში, მდგომარეობს შემდეგში. უწინარეს ყოვლისა, გადამცემში ფორმირდება დამხმარე მაღალსიხშირული სიბნალი, რომელსაც ეწოდება **გადამტანი რხევა**. მისი მათემატიკური მოდელი $u_{\text{ბაღ}}(t) = f(t; a_1, a_2, \dots, a_m)$ ისეთია, რომ გვაქვს პარამეტრების რაღაც a_1, a_2, \dots, a_m ერთობლიობა. ვთქვათ $s(t)$ დაბალსიხშირული შეტყობინებაა, რომელიც ექვემდებარება რადიორხით გადაცემას. თუ, უკიდურეს შემთხვევაში, მითითებული პარამეტრებიდან ერთ-ერთი იცვლება დროში გადასაცემი შეტყობინების პროპორციულად, მაშინ გადამტანი რხევა იძენს ახალ თვისებას – ის თავის თავში შეიცავს ინფორმაციას, რომელიც თავდაპირველად მოთავსებული იყო $s(t)$ სიბნალში.

სწორედ გადამტანი რხევის პარამეტრების მართვის ფიზიკური პროცესი წარმოადგენს მოდულაციას.

რადიოტექნიკაში ფართო გავრცელება ჰპოვეს მოდულაციის სისტემებმა, რომლებიც გადამტან რხევად იყენებენ მარტივ პარმონიულ რხევას

$$u_{\text{ბაღ}}(t) = U \cos(\omega t + \phi_0), \quad (4.1)$$

რომელსაც გააჩნია სამი თავისუფალი პარამეტრი U , ω და ϕ .

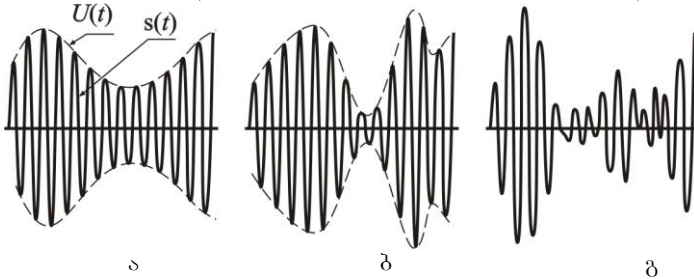
ამა თუ იმ პარამეტრის დროში ცვლილებით შეიძლება მივიღოთ მოდულაციის სხვადასხვა სახეები.

4.12. ამპლიტუდური მოდულაციის პრინციპი

თუ ცვლადი აღმოჩნდება $U(t)$ სიგნალის ამპლიტუდა, ამასთან დანარჩენი ორი ω და φ პარამეტრი - უცვლელი, მაშინ გვექნება გადამტანი რხევის **ამპლიტუდური მოდულაცია**. ამპლიტუდურ-მოდულირებული, ანუ ამ-სიგნალის ჩაწერის ფორმა ასეთია:

$$u_{\text{ამ}}(t) = U(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{4.2}$$

ამ-სიგნალის ოსცილოგრამას აქვს დამახასიათებელი სახე (იხ. ნახ. 4.1). ყურადღებას იქცევს გრაფიკის სიმეტრია დროის ღერძის მიმართ. (4.2) ფორმულის შესაბამისად ამ-სიგნალი არის $U(t)$ მომვლებისა და $\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ ჰარმონიული შევსების



ნახ. 4.1. ამ-სიგნალები მოდულაციის სხვადასხვა სიღრმეებისას: ა - არაღრმა მოდულაცია; ბ - ღრმა მოდულაცია; გ - გადამოდულაცია

ნამრავლი. პრაქტიკულად საინტერესო შემთხვევების უმეტესობაში მომვლები იცვლება დროში უფრო ნელა, ვიდრე მაღალსიხშირული შევსება.

ამპლიტუდური მოდულაციის დროს $U(t)$ მომვლებსა და მამოდულირებელ $s(t)$ სასარგებლო სიგნალს შორის კავშირი მიღებულია განისაზღვროს შემდეგნაირად:

$$U(t) = U_m [1 + Ms(t)]. \tag{4.3}$$

აქ U_m მუდმივი კოეფიციენტია, რომელიც უდრის გადამტანი რხევის ამპლიტუდას მოდულაციის არარსებობის დროს, M **ამპლიტუდური მოდულაციის კოეფიციენტი**.

სიდიდე M ახასიათებს ამპლიტუდური მოდულაციის სიღრმეს. ამ ტერმინის აზრი განიმარტება ამ-სიგნალების ოსცილოგრამებით, რომლებიც გამოსახულია ნახ. 4.1, ა-გ.

მოდულაციის მცირე სიღრმის დროს მომვლების ფარდობითი ცვლილება დიდი არ არის, ე.ი. $|Ms(t)| \ll 1$ დროის ყოველ მომენტში დამოუკიდებელად $s(t)$ სიგნალის ფორმისაგან.

თუ დროის მომენტებში, როცა $s(t)$ სიგნალი აღწევს ექსტრემალურ მნიშვნელობებს, ადგილი აქვს მიახლოებით ტოლობებს $Ms_{\max}(t) \approx 1$ ან $Ms_{\min}(t) \approx -1$, მაშინ ლაპარაკობენ ღრმა ამპლიტუდურ მოდულაციაზე. ხანდახან დამატებით შემოაქვთ ზემოთ მოდულაციის ფარდობითი კოეფიციენტი

$$M_b = (U_{\max} - U_m) / U_m$$

და ქვემოთ მოდულაციის ფარდობითი კოეფიციენტი

$$M_j = (U_m - U_{\min}) / U_m.$$

ამ-სიგნალები მოდულაციის მცირე სიღრმით რადიოარხებში არ არის მიზანშეწონილი გადამცემის სიმძლავრის არასრული გამოყენების გამო. ამავე დროს 100%-იანი მოდულაცია ზემოთ ($M_b > 1$) ორჯერ ამაღლებს რხევების ამპლიტუდას მოდულირებული შეტყობინების პიკური მნიშვნელობებისას. ამ ამპლიტუდის შემდგომ ზრდას, როგორც წესი, მიყვება ვართ არასასურველ დამახინჯებებამდე გადამცემის გამოსასვლელი კასკადების გადატვირთვის გამო.

ნაკლებ საშიში არ არის ღრმა ამპლიტუდური მოდულაცია ქვემოთ. ნახ. 4.1.გ გამოსახულია ეგრეთწოდებული **გადამოდულაცია** ($M_j > 1$). აქ მომვლების ფორმა წყვეტს მოდულირებული სიგნალის ფორმის გამეორებას.

4.1.3. ერთტონალური ამპლიტუდური მოდულაცია

უმარტივესი ამ-სიგნალი შეიძლება მივიღოთ იმ შემთხვევაში, როცა მამოდულირებელ დაბალსიხშირულ სიგნალს წარმოადგენს Ω სიხშირიანი ჰარმონიული რხევა. ასეთ სიგნალს

$$u_{\text{აგ}}(t) = U_m [1 + M \cos(\Omega t + \Phi_0)] \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (4.4)$$

ეწოდება **ერთტონალური ამ-სიგნალი**.

გამოვარკვეით, შეიძლება თუ არა ასეთი სიგნალი წარმოვიდგინოთ სხვადასხვა სიხშირიანი მარტივი ჰარმონიული რხევების ჯამად. კოსინუსების ნამრავლის ცნობილი ტრიგონომეტრიული ფორმულის $(\cos x \cos y = 1/2 [\cos(x+y) + \cos(x-y)])$

გამოყენებით, (4.4) გამოსახულებიდან მივიღებთ

$$u_{\Sigma}(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{U_m M}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \Phi_0] + \frac{U_m M}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0 - \Phi_0]. \quad (4.5)$$

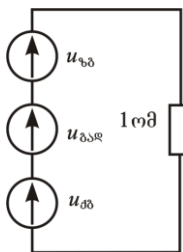
ფორმულა (4.5) აღგენს ერთტონალური ამ-სიგნალის სპექტრალურ შემადგენლობას. მიღებულია შემდეგი ტერმინოლოგია: ω_0 - **გადამტანი სიხშირე**, $\omega_0 + \Omega$ - **ზედა გვერდითი სიხშირე**, $\omega_0 - \Omega$ - **ქვედა გვერდითი სიხშირე**.

(4.5) ფორმულის მიხედვით სპექტრული დიაგრამის აგებისას საჭიროა, უწინარეს ყოვლისა, ყურადღება მივაქციოთ ზედა და ქვედა გვერდითი რხევების ამპლიტუდების ტოლობას, ასევე ამ სპექტრალური შემდგენლების განლაგების სიმეტრიას გადამტანი რხევების მიმართ.

ერთტონალური მოდულაცია **სიმეტრიულია**, თუ $M_{\uparrow} = M_{\downarrow} = M$.

4.14. ამ-სიბნალის ენერგეტიკული მახასიათებლები

განვიხილოთ **გადამტანი** და **გვერდითი** რხევების სიმძლავრეების თანაფარდობის საკითხი. ერთტონალური ამ-სიგნალის წყარო ექვივალენტურია ჰარმონიული რხევების სამი მიმდევრობით ჩართული წყაროსი:



ნახ. 4.2

$$u_{აა}(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_0),$$

$$u_{აბ}(t) = \frac{U_m M}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \Phi_0],$$

$$u_{აგ}(t) = \frac{U_m M}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0 - \Phi_0].$$

გარკვეულობისათვის დაეუშვათ, რომ ესენია მძმ-ის წყაროები, რომლებიც შეერთებულია მიმდევრობით და დატვირთულია ერთეულ რეზისტორზე. მაშინ ამ-სიგნალის მყისიერი სიმძლავრე შეიძლება რიცხობრივად ტოლი იყოს ჯამური ძაბვის კვადრატის:

$$P_{\Sigma}(t) = u_{\Sigma}^2 = u_{აა}^2 + u_{აბ}^2 + u_{აგ}^2 + 2u_{აა}u_{აბ} + 2u_{აა}u_{აგ} + 2u_{აბ}u_{აგ} \quad (4.6)$$

((4.6) გამოხატულება შეიცავს როგორც საკუთარი სიმძლავრეების წყაროების, ასევე ურთიერთსიმძლავრეებს, პროპორციულებს წვეილწვეილად დაჯგუფებული მყისიერი ძაბვების ნამრავლს).

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ სიგნალის საშუალო სიმძლავრე, $p(t)$ სიდიდე აუცილებელია გაგასაშუალოთ დროის საკმაოდ

დიდ T მონაკვეთზე: $\langle p_{\text{აგ}} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt.$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ გასაშუალოებისას ყველა ურთიერთსიმძლავრე მოვცემს ნულოვან შედეგს, ამიტომ ამ-სიგნალის საშუალო სიმძლავრე აღმოჩნდება გადამტანი და გვერდითი რხევების საშუალო სიმძლავრეების ჯამის ტოლი:

$$\langle p_{\text{აგ}} \rangle = \langle p_{\text{ბაღ}} \rangle + [\langle p_{\text{ბბ}} \rangle + \langle p_{\text{აბ}} \rangle] = \frac{U_m^2}{2} + \frac{U_m^2 M^2}{4} \Rightarrow \quad (4.7)$$

$$\Rightarrow [\langle p_{\text{ბბ}} \rangle + \langle p_{\text{აბ}} \rangle] / \langle p_{\text{ბაღ}} \rangle = \frac{U_m^2 M^2}{4} / \frac{U_m^2}{2} = \frac{M^2}{2} \quad (4.8)$$

ასე რომ, 100%-იანი მოდულაციის ($M=1$) დროსაც კი ორივე გვერდითი რხევის სიმძლავრის წილი შეადგენს არამოდულირებული გადამტანი რხევის სიმძლავრის მხოლოდ 50%. რამდენადაც ინფორმაცია შეტყობინების შესახებ ჩადებულია გვერდით რხევებში, შეიძლება აღინიშნოს სიმძლავრის გამოყენების არაეფექტურობა ამ-სიგნალის გადაცემისას.

4.15 ამალიტუაური მოდულაცია ორული მამოდულირებული სიბნალის დროს

პრაქტიკაში ერთტონალური ამ-სიგნალები იშვიათად გამოიყენება. უფრო მეტად რეალურია შემთხვევა, როცა მამოდულირებელ დაბალსიხშირულ სიგნალს აქვს რთული სპექტრალური შემადგენლობა. ასეთი სიგნალის მათემატიკური მოდელი შეიძლება იყოს, მაგალითად, ტრიგონომეტრიული ჯამი

$$s(t) = \sum_{i=1}^N a_i \cos(\Omega_i t + \Phi_i). \quad (4.9)$$

აქ Ω_i სიხშირეები ქმნიან მოწესრიგებულ ზრდად მიმდევრობას $\Omega_1 < \Omega_2 < \dots < \Omega_N$, იმ დროს, როცა, α_i ამალიტუდები და Φ_i **საწყისი ფაზები** - ნებისმიერია.

(4.9) ფორმულის ჩასმით (4.3)-ში, მივიღებთ

$$u_{\text{აგ}}(t) = U_m [1 + \sum_{i=1}^N M \alpha_i \cos(\Omega_i t + \Phi_i)] \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (4.10)$$

შემოვიტანოთ **მოდულაციის პარციალური (ნაწილობრივი) კოეფიციენტების** ერთობლიობა $M_i = M \alpha_i$ (4.11) და ჩავწეროთ რთულადმოდულირებული (მრავალტონალური)

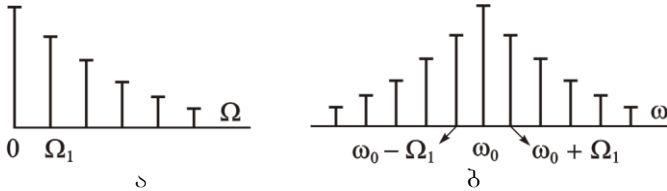
ამ-სიგნალის ანალიზური გამოსახულება ფორმით, რომელიც განაზოგადებს (4.4) გამოსახულებას:

$$u_{\text{ამ}}(t) = U_m \left[1 + \sum_{i=1}^N M_i \cos(\Omega_i t + \Phi_i) \right] \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (4.12)$$

სპექტრალური გაშლა ხდება ისევე, როგორც ერთტონალური ამ-სიგნალისა:

$$\begin{aligned} u_{\text{ამ}}(t) = & U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \sum_{i=1}^N \frac{U_m M_i}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega_i)t + \varphi_0 + \Phi_i] + \\ & + \sum_{i=1}^N \frac{U_m M_i}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega_i)t + \varphi_0 - \Phi_i] \end{aligned} \quad (4.13)$$

ნახ. 4.3,ა გამოსახულია მამოდულირებელი სიგნალის სპექტრალური დიაგრამა, რომელიც აგებულია (4.9) ფორმულის შესაბამისად. ნახ. 4.3,ბ ასახავს მრავალტონალური ამ-სიგნალის სპექტრალურ დიაგრამას, რომელიც პასუხობს ამ მამოდულირებელ რხევას.



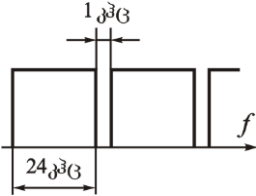
ნახ. 4.3. სპექტრალური დიაგრამები: ა – მამოდულირებელი სიგნალის; ბ – ამ-სიგნალისა მრავალტონალური მოდულაციისას.

ამრიგად, რთულადმოდულირებული ამ-სიგნალის სპექტრში გადამტანი რხევის გვერდით არის ზედა და ქვედა გვერდითი რხევების ჯგუფები. ზედა გვერდითი რხევების სპექტრი წარმოადგენს მამოდულირებელი სიგნალის სპექტრის ასლს, რომელიც დაძრულია მაღალი სიხშირეების არეში ω₀ სიდიდით. ქვედა გვერდითი სიხშირეების სპექტრი ასევე იმეორებს s(t) სიგნალის სპექტრალურ დიაგრამას, მაგრამ განლაგდება სარკისებურად გადამტანი სიხშირის ω₀ მიმართ.

ნათქვამიდან გამომდინარეობს მნიშვნელოვანი შედეგი: **ამ-სიგნალის სპექტრის სიგანე ტოლია მამოდულირებელი დაბალსიხშირული სიგნალის უდიდესი სიხშირის გაორმაგებული მნიშვნელობისა.**

მაგალითი 4.1. განსაზღვრეთ მასშტაბირებული რადიოარხების რიცხვი, რომელიც შეიძლება მოთავსდეს 0.5-დან 1.5 მკპც სიხშირეთა დიაპაზონში (საშუალოტალღოვანი სამასშტაბლო დიაპაზონის დაახლოებით საზღვრებში).

რადიომასშტაბირებული სიბნალების დამაკმაყოფილებელი კვლავწარმოებისათვის აუცილებელია 100 კპც-დან 12 კპც-მდე ბგერითი სიხშირეების კვლავწარმოება. ამგვარად, სიხშირეთა ზოლი, რომელიც მიიყვანება ერთ ამ-არხზე, ტოლია 24 კპც. იმისათვის, რომ თავიდან ავიცილოთ ჯვარედინი ხელშეშლები არხებს შორის, საჭიროა გავითვალისწინოთ დამცავი ინტერვალი 1 კპც სივანით. ამიტომ არხების დასაშვები რიცხვია $N = (1.5-0.5) \cdot 10^6 / (25 \cdot 10^3) = 40$.



სიხშირეთა ზოლები.

ნახ. 4.4

ნახ. 4.4-ზე მოყვანილია

4.2 სიბნალები კუთხური მოდულაციით

შვეისწავლეთ მოდულირებული რადიოსიგნალები, რომლებიც მიიღება იმის ხარჯზე, რომ გადამტანი ჰარმონიულ რხევაში $u_{\text{დატ}}(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ გადასაცემი შეტყობინება $s(t)$ ცვლის ან სიხშირეს ω , ან საწყის ფაზას φ ; ამპლიტუდა U_m რჩება უცვლელი. რამდენადაც ჰარმონიული რხევის არგუმენტი $\psi(t) = \omega t + \varphi$, რომელსაც ეწოდება **სრული ფაზა**, განსაზღვრავს ფაზური კუთხის მიმდინარე მნიშვნელობას, ასეთმა სიბნალებმა მიიღეს **კუთხური მოდულაციით სიბნალების** სახელწოდება.

4.2.1. კუთხური მოდულაციის სახეები

ა) ფაზური მოდულაცია

დავუშვათ დასაწყისში, რომ სრული ფაზა $\psi(t)$ დაკავშირებულია $s(t)$ სიბნალთან დამოკიდებულებით:

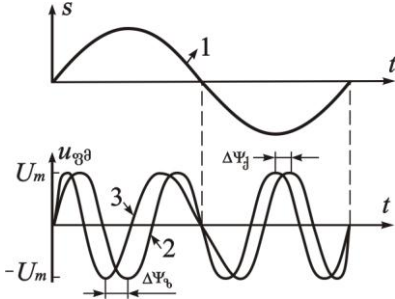
$$\psi(t) = \omega_0 t + ks(t), \tag{4.19}$$

სადაც ω_0 - სიხშირის მნიშვნელობაა სასარგებლო სიგნალის არარსებობისას; k - პროპორციულობის რაიმე კოეფიციენტი. მოდულაციას, რომელიც პასუხობს (4.19) თანაფარდობას, **ფაზური მოდულაცია (ფმ)** ეწოდება:

$$u_{\text{ფმ}}(t) = U_m \cos[\omega_0 t + ks(t)]. \tag{4.20}$$

თუ სიგნალი $s(t) = 0$, მაშინ **ფმ-რხევა** წარმოადგენს მარტივ ჰარმონიულ რხევას. $s(t)$ სიგნალის მნიშვნელობების გაზრდით სრული ფაზა $\psi(t)$ იზრდება დროში უფრო სწრაფად,

ვიდრე წრფივი კანონით. მამოდულირებელი სიგნალის მნიშვნელობების შემცირებისას ხდება დროში სიჩქარის ზრდის $\psi(t)$ ვარდნა. ნახ. 4.5 ნახვენებია **შმ**-სიგნალის გრაფიკის აგება. 1 – მამოდულირებელი დაბალსიხშირული სიგნალი; 2 – არამოდულირებული ჰარმონიული რხევა; 3 – სიგნალი ფაზური მოდულაციით.



ნახ. 4.5

დროის მომენტებში, როცა $s(t)$ სიგნალი აღწევს ექსტრემალურ მნიშვნელობებს, აბსოლუტური ფაზური ძვრა **შმ**-სიგნალსა და არამოდულირებულ ჰარმონიულ რხევას შორის აღმოჩნდება მცირე. ამ ფაზური ძვრის ზღვრულ მნიშვნელობას უწოდებენ **ფაზის დევიაციას** $\Delta\psi$.

ზოგად შემთხვევაში, როცა $s(t)$ სიგნალი იცვლის ნიშანს,

მიღებულია გაირჩეს **ფაზის დევიაცია ზევით** $\Delta\psi_{\phi} = k \cdot s_{\max}$ (როცა $s(t) > 0$) და **ფაზის დევიაცია ქვევით** $\Delta\psi_{\psi} = k \cdot s_{\min}$ (როცა $s(t) < 0$).

ექტორულ დიაგრამაზე მუდმივი სიდიდის გამომსახველი ვექტორი შეასრულებს ბრუნვას არამუდმივი კუთხური სიჩქარით. სიგნალის **მეისიერი სიხშირე** $\omega(t)$ კუთხური მოდულაციით განისაზღვრება, როგორც სრული ფაზის პირველი წარმოებული დროის მიხედვით:

$$\omega(t) = \frac{d\psi}{dt}, \quad (4.21) \quad \Rightarrow \quad \text{ასე, რომ} \quad \psi(t) = \int_{-\infty}^t \omega(t) dt + const. \quad (4.22)$$

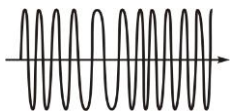
ბ) სიხშირული მოღუჯატიო

სიგნალის **სიხშირული მოდულაციისას** (სმ) $s(t)$ და $\omega(t)$ სიდიდეებს შორის არსებობს შემდეგი სახის კავშირი

$$\omega(t) = \omega_0 + ks(t). \quad (4.23)$$

ამიტომ
$$u_{\text{სმ}}(t) = U_m \cos\left[\omega_0 t + k \int_{-\infty}^t s(t) dt\right]. \quad (4.24)$$

ზოგადი სახის ფორმულა (4.23) მიხედვით, **სმ**-სიბნალის ბუნებრივ პარამეტრებს წარმოადგენენ: **სიხშირის დევიაცია ზევით** $\Delta\omega_b = k s_{\max}$ და **სიხშირის დევიაცია ქვევით** $\Delta\omega_j = k s_{\min}$.



კუთხური მოდულაციით ტიპიური სიბნალის ოსცილოგრამა მოყვანილია ნახ. 4.6-ზე. თუ $s(t)$ -საკმარისად გლუვი ფუნქციაა, მაშინ **ფმ**- და **სმ**- სიბნალების გარე ოსცილოგრამები არ განსხვავდებიან. თუმცა არსებობს პრინციპული განსხვავება: ფაზური ძვრა ფმ-სიბნალსა და არამოდულირებულ რხევას შორის $s(t)$ -ს პროპორციულია, მაშინ როცა სმ-სიბნალისათვის ეს ძვრა პროპორციულია გადასაცემი შეტყობინებიდან ინტეგრალის.

4.2.2. ერთტონალური სიბნალები კუთხური მოდულაციით

ფმ- და სმ-სიბნალების ანალიზი მათემატიკური თვალსაზრისით უფრო რთულია, ვიდრე ამ-რხევების გამოკვლევა. ამიტომ ძირითადი ყურადღება დაეთმობა უმარტივეს ერთტონალურ სიბნალებს.

ერთტონალური **სმ**-სიბნალის შემთხვევაში მყისიერი

სიხშირე $\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega \cos(\Omega t + \Phi_0)$, სადაც $\Delta\omega$ - სიბნალის **სიხშირის დევიაციაა**. (4.22) ფორმულის საფუძველზე ასეთი სი-

ბნალის სრული ფაზა $\psi(t) = \omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin(\Omega t + \Phi_0) + \phi_0$,

სადაც ϕ_0 - რაიმე მუდმივი ფაზური კუთხეა.

აქედან ჩანს, რომ სიდიდე $m = \Delta\omega / \Omega = 2\pi \Delta f / \Omega$, (4.25)

რომელსაც ეწოდება **ერთტონალური კუთხური მოდულაციის ინდექსი**, წარმოადგენს ასეთი სიბნალის **ფაზის დევიაციას**, გამოსახულს რადიანებში.

სიმოკლისათვის დავეშვათ, რომ დროში უცვლელი ფაზური კუთხეები $\phi_0 = \Phi_0 = 0$, და **სმ**-სიბნალის მყისიერი მნიშვნელობა გამოსახულია შემდეგი სახით $u_{sm}(t) = U_m \cos(\omega_0 t + m \sin \Omega t)$ (4.26)

ერთტონალური **ფმ**-სიბნალის ჩაწერის ანალიზური ფორმა იქნება ანალოგიური. ამასთან, მხედველობაში უნდა გვქონდეს შემდეგი: **სმ**- და **ფმ**-სიბნალები მოდულაციის სიხშირისა და მამოდულირებელი სიბნალის ამპლიტუდის ცვლილებისას სხვადასხვანაირად იქცევიან.

4.2.3. შმ- და სმ- სიბნალეებს შორის განსხვავება

შმ- და **სმ-** სიბნალეებს შორის არსებობს პრინციპული განსხვავებები, რაც გამოწვეულია სიბნალეების სხვადასხვანაირად მოქცევით მოდულაციის სიხშირის და მისი ამპლიტუდის ცვლილებების დროს:

1. ფაზური ძვრა **შმ-**სიბნალსა და არამოდულირებულ რხევას შორის - $s(t)$ -ს პროპორციულია მაშინ, როცა **სმ-**სიბნალისათვის ეს ძვრა გადასაცემი შეტყობინების ინტეგრალის პროპორციულია;
2. **სმ-**სას სიხშირის დევიაცია $\Delta\omega$ დაბალსიხშირული სიბნალის ამპლიტუდის პროპორციულია. ამავე დროს სიდიდე $\Delta\omega$ არ არის დამოკიდებული მამოდულირებელი სიბნალის სიხშირეზე.

შმ ფაზური მოდულაციის შემთხვევაში მოდულიაციის ინდექსი m , მისი სიხშირისაგან დამოუკიდებლად, აღმოჩნდება დაბალსიხშირული სიბნალის ამპლიტუდის პროპორციული. ამის შედეგად, სიხშირის დევიაცია ფაზური მოდულაციისას (4.25) ფორმულის შესაბამისად, სიხშირის ზრდასთან ერთად წრფივად იზრდება.

მაგალითი 4.2. რადიოსადგური, რომელიც მუშაობს მოკლექალდოვან დიაპაზონში $f_0 = 80$ მჰც გამამტანი სიხშირით, გამოასხივებს **შმ-**სიბნალს, მოდულირებულს სიხშირით $F = 15$ კჰც. მოდულიაციის ინდექსი $m=12$. ვიპოვოთ ზღვრები, რომელშიც იცვლება სიბნალის მყისიერი სიხშირე და სიბნალის მათემატიკური მოდელი.

ამოხსნა:

1. ამოცანის პირობიდან გამომდინარე სიხშირის დევიაცია შეადგენს $\Delta f = mF = 12 \cdot 15 = 180$ კჰც.

ამგვარად, მოდულიაციისას სიბნალის მყისიერი სიხშირე იცვლება ზღვრებში $f_{\min} = f_0 - \Delta f = 80 - 0.18 = 79.82$ მჰც-დან

$$f_{\max} = f_0 + \Delta f = 80 + 0.18 = 80.18 \text{ მჰც-მდე.}$$

2. ვინაიდან სიბნალის მათემატიკურ მოდელს, დროში უცვლელი ფაზური კუთხეებით $\varphi_0 = \Phi_0 = 0$ აქვს სახე $u(t) = U_m \cos(\omega_0 t + m \sin \Omega t)$, მაშინ

$$\begin{aligned} u(t) &= U_m \cos[2\pi \cdot f_0 t + 12 \sin(2\pi \cdot (\Delta f / m) \cdot t)] = \\ &= U_m \cos[2\pi \cdot 8 \cdot 10^7 t + 12 \sin(2\pi \cdot 1.5 \cdot 10^4 t)] \end{aligned}$$

U_m უცნობის სიდიდე არ ახდენს გავლენას მყისიერი სიხშირის მნიშვნელობაზე.

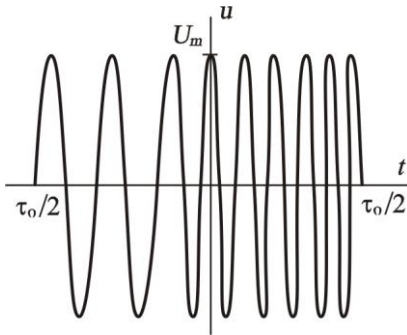
ლექცია 20-21

4.3 სიბნალები შიდაიმიპულსური სიხშირული მოდულაციით

ბოლო დროს ასეთი სახის სიგნალებმა კპოვა ფართო გამოყენება რადიოლოკაციაში. ისინი ჩვეულებრივი რადიოსიგნალებისაგან განსხვავდებიან იმით, რომ მაღალსიხშირულ შევსებას გააჩნია ცვლადი სიხშირე. ყველაზე ხშირად გამოიყენება შიდაიმიპულსური სიხშირული მოდულაცია დროში ხაზოვანი კანონით ცვალებადი მყისიერი სიხშირით.

4.3.1. ხაზოვანი სიხშირული მოდულაციის პრინციპი (ხსმ)

განვიხილოთ რადიოიმიპულსი მართკუთხა ფორმის მომვლებით. ვუშვებთ, რომ სიხშირე ხაზოვნად იზრდება იმიპულსის სათავიდან მის ბოლომდე. ვთქვათ, რომ იმიპულსის ხანგრძლივობა არის τ_0 , ამასთან $t=0$ წერტილი შეესაბამება იმიპულსის შუა ნაწილს (იხ. ნახ. 4.7), ხოლო მყისიერი სიხშირე



სიხშირის დევიაცია იქნება
ნახ. 4.7

იცვლება კანონით

$$\omega(t) = \omega_0 + \mu t, \quad (4.38)$$

სადაც ω_0 - გადამტანი სიხშირეა; μ - პარამეტრი წმ^{-2} განზომილებით, რომელიც წარმოადგენს **სიხშირის ცვლილების სიჩქარეს დროში**.

ადვილად დასანახია, რომ დროში, რომელიც უდრის იმიპულსის ხანგრძლივობას,

$$\Delta\omega = \mu\tau_0. \quad (4.39)$$

სიგნალის სრული ფაზა

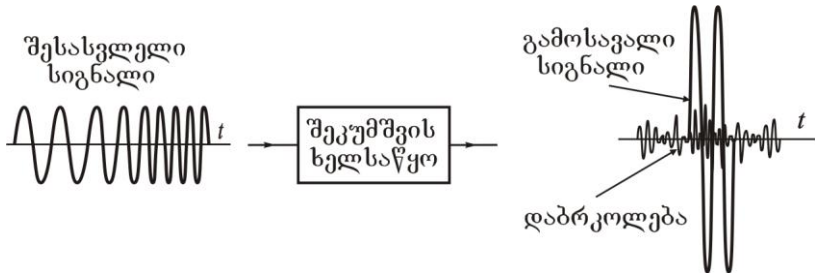
$$\psi(t) = \omega_0 t + \mu t^2 / 2. \quad (4.40)$$

(სიგნალის სრულ ფაზას შესაძლებელია დავეუბნოთ მუდმივი ფაზური ϕ_0 ძერა. მაგრამ მისი არსებობა უმნიშვნელოა).

ამგვარად, რადიოიმიპულსს ხაზოვანი სიხშირული მოდულაციით, ანუ **ხსმ**-იმიპულსს, ვუწოდებთ სიგნალს, რომელიც წარმოადგენს შემდეგ მათემატიკურ მოდელს:

$$u_{\text{ხსმ}} = \begin{cases} 0, & t < -\tau_0/2, \\ U_m \cos(\omega_0 t + \mu t^2 / 2), & -\tau_0/2 \leq t \leq \tau_0/2, \\ 0, & t > \tau_0/2. \end{cases} \quad (4.41)$$

ხსმ-სიგნალის განსაკუთრებული თვისება, რომელიც განპირობებს მის პრაქტიკულ ღირებულებას, მდგომარეობს შემდეგში. დავეუშვათ, რომ რაიმე ფიზიკური ხელსაწყო, ახორციელებს სიგნალის შეკავებას, რომელიც მიეწოდება მის შესავალზე. თუ შეკუმშვის დრო დამოკიდებულია სიგნალის სიხშირეზე, ამასთან სიხშირის ზრდასთან ეს დრო მცირდება, მაშინ განსაზღვრულ პირობებში შესაძლებელია ამ სიგნალის "მნიშვნელოვანი" შეკუმშვა დროში (იხ. ნახ. 4.8). (თუ შეკუმშვის ხელსაწყოში დანაკარგები მცირეა, მაშინ გამოსავალი სიგნალის ამპლიტუდა მნიშვნელოვნად აღემატება დაბრკოლებების დონეს. ეს კი იძლევა სუსტი არეკლილი რადიოსიგნალების საიმედო აღმოჩენის საშუალებას).



ნახ. 4.8

ეს ეფექტი განპირობებულია იმით, რომ შეკავების მოწყობილობის გამოსავალზე გამოჩნდებიან როგორც დაბალი, რომელიც მიეკუთვნება სიგნალის დასაწყისს, ასევე მაღალი, რომელიც მიეკუთვნება სიგნალის ბოლოს, სიგნალის შემადგენელი სიხშირეები.

შეკუმშვის ხელსაწყოს დაწვრილებითი ანალიზი ჩატარდება "წრფივი სისტემის" კურსში, რომელშიც განიხილება სიგნალების ოპტიმალური გამოყოფა შემფოთებების ფონზე.

4.3.2. მართკუთხა ხსმ-იმიპულსის სამეჭბო

(4.41) მოდელის საფუძველზე ჩაწეროთ **სპექტრალური სიმკვრივის** გამოსახულება ცალკეული **ხსმ-იმიპულსისათვის**:

$$\begin{aligned}
 U(\omega) &= U_m \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} \cos(\omega_0 t + \mu t^2 / 2) e^{-j\omega t} dt = \\
 &= \frac{U_m}{2} \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} \exp \left\{ j \left[(\omega_0 - \omega) t + \frac{\mu t^2}{2} \right] \right\} dt +
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{U_m}{2} \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} \exp \left\{ -j \left[(\omega_0 + \omega)t + \frac{\mu t^2}{2} \right] \right\} dt. \quad (4.42)$$

ამ თანაფარდობის ანალიზი გვინვენებს, რომ პირველი ინტეგრალი აღწერს სპექტრს გამოკვეთილი მაქსიმუმით დადებითი სიხშირეების ინტერვალში, ახლოს ω_0 -თან.

მორე ინტეგრალი შეესაბამება სპექტრული სიმკვრივის ნაწილს, თავმოყრილს ძირითადად $\omega < 0$ ინტერვალში.

პრაქტიკაში მნიშვნელოვანია შემთხვევა, როდესაც სპექტრების გადაფარვის ეფექტი, რომლებიც კონცენტრირდებიან უარყოფითი და დადებითი სიხშირეების არეებში, უმნიშვნელოდ მცირეა. ეს დაკავშირებულია სიხშირის სრულ დევიაციასთან. ის გადამტანი იმპულსის დროის ხანგრძლივობასთან შედარებით ძალიან მცირეა: $\Delta\omega = \mu\tau_0 \ll \omega_0$.

ვინაიდან უარყოფითი სიხშირეების არეში ნამდვილი სიბნალებისათვის სპექტრი შესაძლებელია მივიღოთ ფურიეს გარდაქმნის თვისებების საფუძველზე (იხ. თავი 2): $U(-\omega) = U^*(\omega)$, ამიტომ ფორმულა (4.42)-დან გამომდინარეობს ის, რომ უნდა გამოვთვალოთ მხოლოდ პირველი ინტეგრალი, რომელიც იძლევა სპექტრულ სიმკვრივეს, როცა $\omega > 0$.

ზემოთაღნიშნულის გათვალისწინებით, თუ ფორმულა (4.42)-ის ექსპონენციალური ფუნქციის არგუმენტს შევავსებთ სრულ კვადრატამდე, მივიღებთ

$$U(\omega) = \frac{U_m}{2} \exp \left[-j \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\mu} \right] \times \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} \exp \left[j \frac{\mu}{2} \left(t - \frac{\omega - \omega_0}{\mu} \right)^2 \right] dt. \quad (4.43)$$

მოსახერხებელია გადავიდეთ t ცვლადიდან ახალ x არგუმენტზე ცვლადის შეცვლის შესრულებით:

$$\sqrt{\mu} \left(t - \frac{\omega - \omega_0}{\mu} \right) = \sqrt{\pi} \cdot x.$$

გამოთვლების ჩატარებით, მივიღებთ

$$U(\omega) = \frac{U_m}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} \exp \left[-j \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\mu} \right] \times \int_{-X_2}^{X_1} \exp \left(j \frac{\pi x^2}{2} \right) dx, \quad (4.44)$$

სადაც ინტეგრირების ზღვრები განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$X_1 = \frac{\mu\tau_0}{2} + (\omega - \omega_0) \sqrt{\pi\mu}; \quad X_2 = \frac{\mu\tau_0}{2} - (\omega - \omega_0) \sqrt{\pi\mu}. \quad (4.45)$$

ინტეგრალი (4.44) გამოსახულებაში დაიყვანება კარგად შესწავლილ სპეციალურ ფუნქციებზე – **ფრენელის ინტეგრალებზე [11]** :

$$C(x) = \int_0^x \cos \frac{\pi \xi^2}{2} \cdot d\xi; \quad S(x) = \int_0^x \sin \frac{\pi \xi^2}{2} \cdot d\xi.$$

(*ფრენელის ინტეგრალები გამოიყენება ფიზიკაში ტალღების დიფრაქციის ამოცანების ამოხსნისას*)

საბოლოოდ ვღებულობთ **ხსმ-სიგნალის** სპექტრული სიმკვრივის ფორმულას:

$$U(\omega) = \frac{U_m}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} \exp \left[-j \frac{(\omega_0 - \omega)^2}{2\mu} \right] \times \{ C(X_1) + C(X_2) + j[S(X_1) + S(X_2)] \} \quad (4.46)$$

წარმოვიდგინოთ ეს სპექტრალური სიმკვრივე მანვენებელ ფორმაში: $U(\omega) = |U(\omega)| \exp[j\Phi(\omega)]$, შესაძლებელია შევნიშნოთ, რომ მოდული (**ამპლიტუდური სპექტრი**)

$$|U(\omega)| = \frac{U_m}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} \sqrt{[C(X_1) + C(X_2)]^2 + [S(X_1) + S(X_2)]^2}. \quad (4.47)$$

მაშინ, როცა **ფაზური სპექტრი** შედგება კვადრატული შესაკრებისაგან

$$\Phi_1(\omega) = -(\omega - \omega_0)^2 / (2\mu) \quad (4.48)$$

და ეგრეთწოდებული **ნაშთური ფაზური წვერისაგან**

$$\Phi_2(\omega) = \arctg \frac{S(X_1) + S(X_2)}{C(X_1) + C(X_2)}. \quad (4.49)$$

4.3.3. ხსმ-სიგნალი დიდი ბაზით

მიღებული გამოსახულებების რიცხვითი ანალიზი ადასტურებს იმას, რომ მართკუთხა **ხსმ-იმპულსის** სპექტრული სიმკვრივის მოდულის და ფაზის სიხშირული დამოკიდებულება მთლიანად დამოკიდებულია უგანზომილო რიცხვზე

$$B = \Delta f \tau_0 = \mu \tau_0^2 / (2\pi), \quad (4.50)$$

რომელიც უდრის სიხშირის დევიაციის Δf და იმპულსის ხანგრძლივობის τ_0 ნამრავლს. მას ეწოდება **ხსმ-სიგნალის ბაზა**.

(*თეორიულ რადიოტექნიკაში ბაზის ცნება გამოიყენება სხვადასხვა სიგნალებთან მიმართებაში. როცა $B \ll 1$ სიგნალს უწოდებენ რთულს, ხოლო როცა $B \approx 1$ - უბრალოს.*)

(4.47) ფორმულის ანალიზის საფუძველზე, შეგვიძლია დავწმუნდეთ, რომ სპექტრის ცენტრალურ სიხშირეზე (ω_0)

$$|U(\omega_0)| = U_m \sqrt{\frac{\pi}{2\mu}} \quad (4.51)$$

ასეთი სიგნალის ენერგეტიკული სპექტრი გამოითვლება ფორმულით $W_0 = \pi U_m^2 / (2\mu)$, (4.53)

რომელიც სიხშირეების $[\omega_0 - \Delta\omega/2, \omega_0 + \Delta\omega/2]$ ზოლში ასევე მუდმივი სიდიდეა და ნულის ტოლი ხდება ამ ზოლის მიღმა.

მაგალითი 4.4. მართკუთხა **ხსმ-იმპულსის ამპლიტუდაა** $U_m = 20$ ვ, გადამტანი სიხშირეა $f_0 = 10$ გჰც და ხანგძლივობაა $\tau_0 = 2$ მკწმ. განსაზღვრეთ ასეთი სიგნალის ძირითადი პარამეტრები.

ამოხსნა: უპირველეს ყოვლისა, გოთულობთ სიგნალის ბაზას $B = \Delta f \tau_0 = \mu \tau_0^2 / (2\pi) = 10 \cdot 10^7 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 200$. სიხშირის ნაზრდის სიხ-ქარე $\mu = 2\pi \Delta f / \tau_0 = 6.28 \cdot 10^8 / (2 \cdot 10^{-6}) = 3.14 \cdot 10^{14}$ წმ². ენერგეტიკული სპექტრი გამოითვლება $W_0 = \pi U_m^2 / (2\mu)$ ფორმულის გამოყენებით და ტოლი იქნება $W_0 = 2 \cdot 10^{-12}$ ვ².წმ². ვინაიდან სიგნალის ბაზა დიდია, მისი სპექტრი პრაქტიკულად განთავსდება სიხშირის ზოლის $f_0 - \Delta f / 2 = 9.95$ გჰც-დან $f_0 + \Delta f / 2 = 10.05$ გჰც-ის საზღვრებში.

4.3.4. ხსმ-სიგნალის ავტოკორელაციური ფუნქცია

ხსმ-სიგნალის ავტოკორელაციური ფუნქციის (**აპფ**) პოვნა ძალზე მნიშვნელოვანია სიგნალის აღმოჩენისათვის.

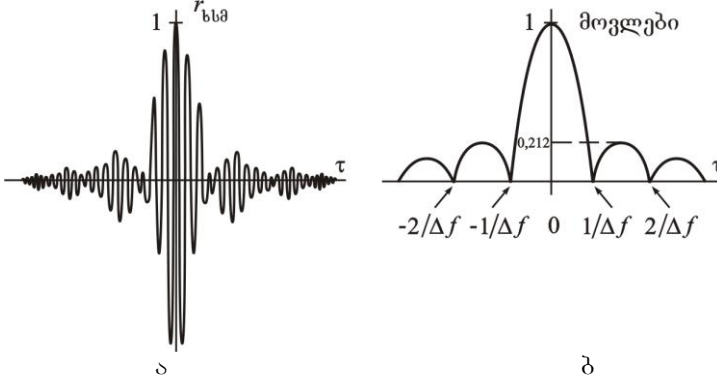
ამ მახასიათებელის დადგენისათვის მიზანშეწონილია გამოვიყენოთ მე-III თავის შედეგები, რომელშიც ნაჩვენებია, რომ კავშირი **აპფ** და სიგნალის ენერგეტიკულ სპექტრს შორის დგინდება ფურიეს ინტეგრალური გარდაქმნის წყვილით.

ვთქვათ, რომ **ხსმ-სიგნალის** ბაზა (**იმპულსის სიგრძე**) საკმა-რისად დიდია, ისე, რომ ამ სიგნალის ენერგეტიკული სპექტრი თანაბარია და თავმოყრილია სიხშირის $\Delta\omega$ ზოლში გადამტანი სიხშირის ირგვლივ. მაშინ **ხსმ-სიგნალის** ავტოკორელაციური ფუნქცია (იხ. ფორმულა (4.53), ანუ $W_m(\omega) = \pi U_m^2 / (2\mu)$):

$$B_{\text{ხსმ}}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_0(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{U_m^2}{2\mu} \int_{\omega_0 - \mu\tau}^{\omega_0 + \mu\tau} \cos \omega\tau d\omega =$$

$$= \frac{U_m^2 \tau_0}{2\mu} \frac{\sin(\mu\tau_0\tau/2)}{\mu\tau_0\tau/2} \cos \omega_0\tau. \quad (4.54)$$

ნორმირებული ავტოკორელაციური $r_{\text{ხსმ}}(\tau) = B_{\text{ხსმ}}(\tau)/B_{\text{ხსმ}}(0)$ ფუნქცია გამოსახულია ნახ. 4.9-ზე. აქვე მოყვანილია ამ ფუნქციის მომვლები, რომელსაც აქვს ფურცლოვანი სტრუქტურა.



ნახ. 4.9. ხსმ-სიგნალის ავტოკორელაციური ფუნქცია
 ა - ნორმირებული აპშ; ბ - ნორმირებული აპშ მომვლები

(4.54) ფორმულა ადგენს ხსმ-სიგნალის შემდეგ თვისებას: მთავარი ფურცლის მომვლების სიგანე იმპულსური სიგნალის სიხშირის დევიაციის უკუპროპორციულია. მართლაც, მომვლები პირველად ნულად იქცევა სიგნალის წანაცვლებისას მისი ასლის მიმართ დროის $\tau = 2\pi/(\mu\tau_0) = 1/\Delta f$ ინტერვალში.

რადიოლოკაციაში გამოყენებული ხსმ-სიგნალები ხასიათდებიან მნიშვნელოვანი სიხშირის დევიაციით, ამიტომ მთავარი ფურცელი არის ვიწრო. მაგალითად, მაგალითი 4.4-ში შესწავლილი სიგნალის ძერა, რომელიც აპშ აქცევს ნულად, შეადგენს 0,01 მკწმ, ანუ იმპულსის ხანგრძლიობის 0.5%.

კორელაციური თვისებების თვალსაზრისით ხსმ -სიგნალს გააჩნია ცნობილი ნაკლოვანობა: საკმარად მაღალია პირველი ორი სიმეტრიული გვერდითი ფოთლების სიმაღლეები, რომლებიც შეადგენენ ცენტრალური ფოთლის სიმაღლის 0.212-ს (იხ. ნახ. 4.11). არახელსაყრელ პირობებში ამას შეუძლია შემოიტანოს იმპულსის დროითი მდებარეობის განსაზღვრის ცდომილება.

4.4. მე-IV თავის მოკლე მიმოხილვა.

4.4.1. შედეგები

- მოდულაციის პროცესი დაკავშირებულია სიგნალის სპექტრის გადატანაზე დაბალი სიხშირეების არიდან მაღალ სიხშირეების არეში.
- ამპლიტუდური მოდულაციისას (**ამ**) სიგნალის მომგლები დაკავშირებულია დაბალსიხშიროვანი მოდულირებული რხევების მყისიერ მნიშვნელობებთან.
- **ამ**-სიგნალის სპექტრი შეიქმნება გადამტანი რხევით და ორი გვერდითი სიმეტრიული რხევების ჯგუფებით.
- **ამ**-სიგნალის გადაცემის აუცილებელი სიხშირის ზოლი უდრის უმაღლესი სიხშირის გაორკეცებულ მნიშვნელობას მოდულირებული რხევების სპექტრში.
- კუთხური მოდულაციისას გადამცემა შეტყობინება განსაზღვრავს დროში ცვლად გადამტანი რხევის ფაზურ კუთხეს. განასხვავებენ სიხშირულ (**სმ**) და ფაზურ (**წმ**) მოდულაციებს
- სიხშირული (**სმ**) და ფაზური (**წმ**) მოდულაციების ძირითადი პარამეტრია – კუთხური მოდულაციის ინდექსი, რომელიც უდრის ფაზის დევიაციას.
- თეორიულად კუთხური მოდულაციის სიგნალის სპექტრის სიგანე განუსაზღვრელად დიდია.
- ინდექსის მცირე მნიშვნელობისას **სმ** და **წმ** სპექტრის სიგანე პრაქტიკულად უდრის მოდულიაციის გაორკეცებულ ზედა სიხშირეს.
- ინდექსის მაღალი მნიშვნელობისას სიხშირის ზოლი, რომელიც უკავია სიგნალს, შეადგენს სიხშირის დევიაციის გაორკეცებულ მნიშვნელობას.
- სიგნალებს ხაზოვანი სიხშირული მოდულაციით (**ხსმ**) გააჩნიათ პრაქტიკულად თანაბარი სპექტრი შეზღუდული სიხშირის ზოლის ზღვრებში, თუ სიგნალის ბაზა საკმარისად მაღალია.
- **ხსმ**-სიგნალის ავტოკორელაციურ ფუნქციას აქვს ფურცლოვანი სტრუქტურა; სიხშირის დევიაციის გაზრდისას მთავარი ფირცლის სიგანე მცირდება.

4.4.2. საკონტროლო კითხვები

1. რა პარამეტრებითაა მიღებული ამპლიტუდური მოდულაციის სიღრმის დახასიათება?
2. რა არის შეტყობინების დამახინჯების მიზეზი, რომელსაც ადგილი აქვს გადამოდულირებისას?
3. რაზეა დამოკიდებული სიმძლავრის განაწილება ერთტონალური **AM**-სიგნალის სპექტრში?
4. ჩვეულებრივ ერთმანეთთან რა თანაფარდობაში იმყოფებიან გადამტანი და მამოდულირებელი რხევები?
5. რა პრინციპით იგება ერთტონალური **AM**-სიგნალის ვექტორული დიაგრამა?
6. პრინციპულად რით განსხვავდებიან სიგნალების ოსცილოგრამები ბალანსური ამპლიტუდური მოდულაციით ჩვეულებრივი **AM**-სიგნალებისაგან?
7. რაში მდგომარეობს სისშირულად და ფაზურად მოდულირებული სიგნალების მსგავსება და განსხვავება?
8. როგორ არის დაკავშირებული ერთმანეთთან მოდულაციის სისშირე, სისშირის ინდექსი და დევიაცია?
9. მოდულაციის მცირე ინდექსებისას რა სახის სპექტრისგან შედგება **SM** და **FM** – სიგნალები?
10. მცირე ინდექსებისას რა განსხვავებაა **SM** და **FM** – სიგნალების სპექტრებს შორის?
11. რატომ არის პრაქტიკულად შეზღუდული სისშირის ზოლი, რომელიც უკავია სიგნალს კუთხური მოდულაციით?
12. როგორ უნდა ამოვარჩიოთ კუთხური მოდულაციის ინდექსი, რომ სიგნალის სპექტრში არ იყოს გადამტანი რხევა?
13. რით განსხვავდება **SM** და **FM** – სიგნალების სპექტრები, როდესაც მამოდულირებელი რხევა არაპარმონიულია?
14. რა ფიზიკურ პრინციპს ეფუძნება ხაზოვანი სისშირულად მოდულირებული (**NSM**) სიგნალის შეკუმშვა?
15. რა სახით შემოიტანება **NSM**-სიგნალის ცნება?
16. როგორ გამოიყურება **NSM**-სიგნალის ავტოკორელაციური () ფუნქციის გრაფიკი მართკუთხა ფორმის მომვლებით?
17. რატომ არ არის **NSM**-სიგნალი სრულყოფილი მისი აკუსტრუქტურულიდან გამომდინარე?

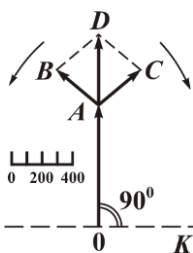
4.4.3. ამოცანის/მაბალითის ამოხსნის ზოგადი მეთოდიკა

ზოგადი მეთოდი არ არსებობს. ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში მაგალითის/ამოცანის ამოხსნას უნდა მივუხადავოთ შესაბამისი მათემატიკური აპარატი და ლოგიკური მსჯელობით ამოხსნათ დასმული მაგალითი ან ამოცანა.

4.4.4. ტიპიური ამოცანების ამოხსნის მაბალითები

4.4.4.1. სიბნალები ამალიტუალური მოღუააციით

მაგალითი მ.4.1. ერთტონალური ამ- სიგნალი აღიწერება გამოსახულებით $u(t) = 500(1 + 0.8\cos(10^{-4}t + 45^\circ))\cos(10^7t + 90^\circ)$.



მასშტაბში ააგეთ მოცემული სიგნალის ვექტორული დიაგრამა, რომელიც პასუხობს დროის $t = 0$ მომენტს.

ამოხსნა: სიგნალის ვექტორული დიაგრამა მოყვანილია ნახ. მ.4.1-ზე. აქ OK - კუთხეების ათვლის დერძია, OA - გადამტანი რხევის ვექტორი, AB - ზედა გვერდითი რხევის ვექტორი, AC - ქვედა გვერდითი რხევის ვექტორი, OD - რეზულტირებული ამ-

პლიტუალის

ნახ. მ.4.1 ვექტორი. ნახაზე მოყვანილია მასშტაბი

მაგალითი მ.4.2. ამპლიტუდურ-მოდულირებული სიგნალი (ვ) აღიწერება გამოსახულებით

$$u(t) = 12(1 + 0.6\cos\Omega t + 0.2\cos 2\Omega t)\cos\omega t .$$

იპოვეთ $U(t)$ სიგნალის მომვლების უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები.

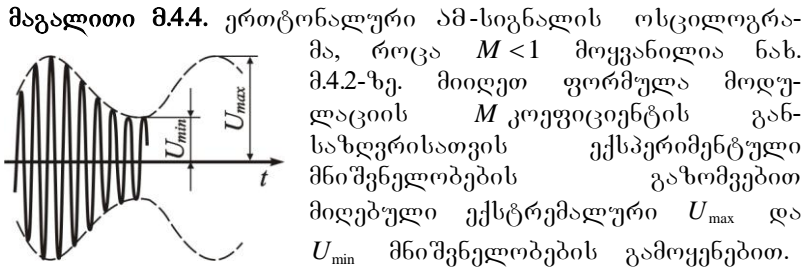
ამოხსნა: შემოვიტანოთ აღნიშვნა $x = \Omega \cdot t$. ცხადია, მომვლები მიაღწევს ექსტრემალურ მნიშვნელობას, როცა

$$(1 + 0.6\cos x + 0.2\cos 2x)' = 0, \text{ ანუ } 0.6\sin x + 0.4\sin 2x = 0 .$$

ჩხადია, ფესვი $x = 0$ შეესაბამება მომვლების მაქსიმუმის მიღწევას $U_{\max} = 21.6$ ვ. სხვა ფესვის პოვნისათვის, გავყოთ განტოლების ორივე მხარე $\sin x \neq 0$, საიდანაც $\cos x = -0.75$. ანუ $x = 2.419$ და $U_{\min} = 6.9$ ვ.

მაგალითი მ4.3. აჩვენეთ, რომ ერთტონალური ამ-სიგნალის $u(t) = U_0(1 + M \cos \Omega t) \cos \omega_0 t$ მოდულირების კოეფიციენტები “ზევით” M_{\uparrow} და “ქვევით” M_{\downarrow} ერთმანეთს $M_{\uparrow} = M_{\downarrow} = M$.

მითითება: მხედველობაში მიიღეთ, რომ $M_{\uparrow} = (U_{\max} - U_0)/U_0$
 $M_{\downarrow} = (U_0 - U_{\min})/U_0$.

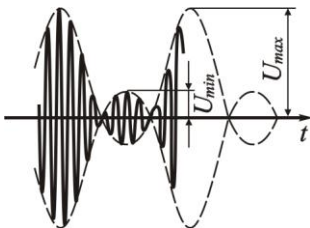


ამოხსნა: მოდულირების კოეფიციენტი მოიძებნება სიგნალის ექსტრემალური მნიშვნელობების გამოყენებით:

$$\begin{cases} U_{\max} = U_0(1 + M) \\ U_{\min} = U_0(1 - M) \end{cases} \Rightarrow \text{თუ გავყოფთ ერთმანეთზე, მივიღებთ,}$$

$$\text{რომ } M = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{U_{\max} + U_{\min}}.$$

მაგალითი მ4.5. ნახ. მ4.3. მოყვანილია ერთტონალური ამ-სიგნალის $u(t)$ ოსცილოგრამა $M > 1$, როცა ადგილი აქვს გადამეტმოდულირებას. იპოვეთ მოდულირების კოეფიციენტი M ცნობილი U_{\max} და U_{\min} ამპლიტუდური მნიშვნელობების გამოყენებით.



ნახ. მ4.3

ამოხსნა: მოყვანილი ოსცილოგრამიდან გამომდინარეობს თანაფარდობები $U_0(1 + M) = U_{\max}$ და $U_0(1 - M) = -U_{\min}$.

მიღებულ გამოსახულებებს თუ გავყოფთ ერთმანეთზე და შემდეგ გამოვიანგარიშებთ M -ის მნიშვნელობას, მივიღებთ

$$M = \frac{U_{\max} + U_{\min}}{U_{\max} - U_{\min}}.$$

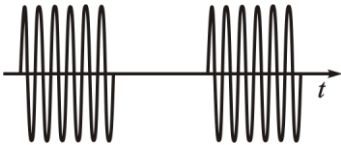
მაგალითი მ4.6. ერთტონალური ამ-სიგნალის ოსცილოგრა-
მა (ნახ. მ4.2) ხასიათდება იმით, რომ $U_{\max} = 130$ ვ, $U_{\min} = 20$ ვ.
იპოვეთ მოდულაციის M კოეფიციენტი და გადამტანი რხევის
ამპლიტუდა U_0 .

ამოხსნა: ამ შემთხვევისთვის მოდულაციის კოეფიციენტი
მოიძებნება სიგნალის ექსტრემალური მნიშვნელობების გამოყე-
ნებით (იხ. მაგალითი მ4.4):

$$\begin{cases} U_{\max} = U_0 (1 + M) \\ U_{\min} = U_0 (1 - M) \end{cases} \Rightarrow \text{თუ გავეყოფთ ერთმანეთზე, მივიღებთ,}$$

$$\text{რომ } M = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{U_{\max} + U_{\min}} = 0.73, \text{ ხოლო } U_0 = \frac{U_{\max} + U_{\min}}{2} = 75 \text{ ვ.}$$

მაგალითი მ4.7. შეაფასეთ სიხშირის სიგანის ზოლი (სზ),
რომელიც ეთერში უკავია ტელეგრაფის რადიოარხს. რადი-
ოარხი მუშაობს ამ პრინციპით 300 ნიშ/წთ სიჩქარით. გამოთ-
ვლების



გადასაცემი რადიომ

ნახ. მ4.4

ნახ.მ4.4)

სიმარტივისათვის
დაუშვით, რომ გადასაცემი სიგ-
ნალი არის მორზეს კოდის წერ-
ტილების პერიოდული მიმდევრობა.
დაყოვნების ხანგრძლივობა უდრის

პულსის ხანგრძლივობას (იხ.

ამოხსნა: მითითება (დაუშვით, რომ რადიომპულსის სპექ-
ტრის სიგანე შეზღუდულია მისი სპექტრული დიაგრამის ძირი-
თადი ფურცლის სიგანით).

პასუხი (სზ) = 20 კც.

მაგალითი მ4.9. უმძ-ის წყარო $U_0 (1 + M \cos \Omega t) \cos \omega_0 t$ ამპლი-
ტუდური მოდულაციით (ამ) დატვირთულია რეზისტორულ R
წინაღობაზე. მიიღეთ მყისიერი სიმძლავრეების გამოსახულებები
დატვირთვაში $p_{\Omega}(t)$ და $p_{2\Omega}(t)$, რომლებიც იცვლებიან დროში
სიხშირეებით Ω და 2Ω , შესაბამისად.

ამოხსნა: მყისიერი სიმძლავრის გამოთვლისას, გვაქვს

$$p(t) = \frac{U_0^2}{R} (1 + M \cos \Omega t)^2 \cos^2 \omega_0 t = \frac{U_0^2}{R} \left(1 + 2M \cos \Omega t + M^2 \frac{1 + \cos 2\Omega t}{2} \right) \times \\ \times \left(\frac{1 + \cos 2\omega_0 t}{2} \right).$$

$$\text{აქედან } p_{\Omega}(t) = \frac{U_0^2 M}{R} \cos \Omega t; \quad p_{2\Omega}(t) = \frac{U_0^2 M}{4R} \cos 2\Omega t.$$

4.4.4.2. სიბნალები კუთხური მოდულაციით

მაგალითი მ4.12. რხევა კუთხური მოდულაციით აღიწერება გამოსახულებით $u(t) = 15 \cos(10^8 t + 3 \sin 10^6 t + 1.4 \sin 10^5 t + \pi/4)$. იპოვეთ მოცემული სიგნალის მყისიერი სიხშირე დროის $t=1$ მკწმ მომენტში.

ამოხსნა: რხევის გამოსახულებიდან სიგნალის სრული ფაზაა: $\psi(t) = 10^8 t + 3 \sin 10^6 t + 1.4 \sin 10^5 t + \pi/4$.

მყისიერი სიხშირე არის წარმოებული სრული ფაზიდან: $\omega(t) = 10^8 + 3 \cdot 10^6 \cos 10^6 t + 1.4 \cdot 10^5 \cos 10^5 t$.

თუ ჩავსვავთ $t=10^{-6}$ წმ მნიშვნელობას, მივიღებთ $\omega(t) = 1.0176 \cdot 10^8$ წმ⁻¹.

მაგალითი მ4.18.* ერთტონალურ სიხშირულად მოდულირებულ (სმ)- სიგნალს აქვს სიხშირის დევიაცია $\Delta\omega = 6 \cdot 10^4$ წმ⁻¹. იპოვეთ სიხშირის მოდულაციის შესაძლებელი მნიშვნელობებიდან უდიდესი Ω_{\max} მნიშვნელობა, რომლის დროსაც სიგნალი არ შეიცავს გადამტანი სიხშირის სპექტრულ მდგენელს.

ამოხსნა: გადამტანი სიხშირის სპექტრული მდგენელი არ იარსებებს ყველა იმ მოდულაციის m ინდექსის მქონე მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც არის ფესვები ტრანსცედენტური განტოლებისა $J_0(m) = 0$. ასეთი ფესვების სიმრავლე უსასრულოა; უმცირესი ფესვია $m = 2.405$. ვინაიდან $m = \Delta\omega/\Omega$, ამიტომ $\Omega = \Delta\omega/m$, მაშინ Ω_{\max} მნიშვნელობას შეესაბამება $\Omega_{\max} = 6 \cdot 10^4 / 2.405 = 24948$ წმ⁻¹.

**მათემატიკის სპეციალურ კურსში დამტკიცებულია, რომ ექსპონენტა $\exp(jm \sin x)$ სპეციალური სახის წარმოსახვითი მახვენებლით, პერიოდული მონაკვეთზე $-\pi \leq x \leq \pi$, იშლება ფურიეს კომპლექსურ*

მწკრივად: $e^{jm \sin x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m) e^{jkx}$, სადაც m -ნებისმიერი ნამდვილი

რიცხვია; $J_k(m)$ - k არგუმენტის ბესელის ფუნქცია m არგუმენტი.

მაგალითი მ4.20. კუთხური მოდულაციის სიგნალის სპექტრულ წარმოდგენას აქვს სახე $u(t) = 8 \cos(10^6 t + 0.06 \sin 10^4 t)$.

ამ სიბნალისთვის იპოვეთ სპექტრული მდგენელების U_{m2} და U_{m3} ამპლიტუდების მიახლოებითი მნიშვნელობები $\omega_0 \pm 2\Omega$ და $\omega_0 \pm 3\Omega$ სიხშირეებზე, შესაბამისად.

მითითება: დაშალეთ ფუნქციები $\cos(m\sin\Omega t)$ და $\sin(m\sin\Omega t)$, როდესაც $m \ll 1$ ტეილორის მწკრივად. შეიზღუდეთ თითოეული რიგის ორ-ორი წევრის გამოყენებით.

ამოხსნა: ჰარმონიული ფუნქციის მცირე არგუმენტის დაშლის ორ-ორი წევრის დატოვებით, გვექნება

$$u(t) = U_0 \cos(m\sin\Omega t)\cos\omega_0 t - U_0 \sin(m\sin\Omega t)\sin\omega_0 t \approx \\ \approx U_0 \cos\omega_0 t \left(1 - (m^2 \sin^2 \Omega t)/2\right) - U_0 \sin\omega_0 t \left(m\sin\Omega t - (m^3 \sin^3 \Omega t)/6\right).$$

თუ ცნობილი წესებით გავსხნით ტიგონომეტრიული ფესვების ხარისხებს, ვიპოვიეთ, რომ

$$U_{m2} = U_0 m^2 / 8 = 3.6 \cdot 10^{-3}, \quad U_{m3} = U_0 m^3 / 48 = 3.6 \cdot 10^{-5},$$

4.4.4.3. სიბნალუბი ხაზოვან-სიხშირული მოღუპადათ

მაგალითი 4.25. გამოთვალეთ მართკუთხა ფორმის, τ_0 ხანგრძლივობის, U_0 მოცემული ამპლიტუდით და სიხშირის ცნობილი წაზრდის სიხარით μ $u(t)$ ხსმ- იმპულსის სახის სიბნალის ენერჯიის E_0 მიახლოებითი მნიშვნელობა. ამოცანა ამოხსენით ორი ხერხით : ა) უშუალო ინტეგრირებით დროის არეში; ბ) სიბნალის ენერგეტიკული სპექტრის ცნების გამოყენებით.

ამოხსნა: ა) დავეუშვათ, რომ დროის ათვლის დასაწყისი ემთხვევა იმპულსის შუა წერტილს, მაშინ გვექნება

$$E_0 = U_0^2 \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} \cos^2 \left(\omega_0 t + \frac{\mu t^2}{2} \right) dt = U_0^2 \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} \frac{1 + \cos 2 \left(\omega_0 t + \frac{\mu t^2}{2} \right)}{2} dt.$$

მრიცხველის ინტეგრალქვეშ გამოსახულების მეორე შესაკრები წარმოადგენს ნიშანცვლად ფუნქციას; სიბნალის ბაზის ზრდასთან ერთად მისი შენატანი მისწრაფის ნულისაკენ. ამიტომ $E_0 \approx U_0^2 \tau_0 / 2$.

ბ) სიბნალის ენერგეტიკული სპექტრი პრაქტიკულად მუდმივია სიხშირის გატარების ზოლში $\Delta\omega = \mu\tau_0$ და უდრის

$W_0 = \pi U_0^2 / (2\mu)$. მაშინ ენერჯია $E_0 = W_0 \cdot \Delta\omega / \pi = U_0^2 \tau_0 / 2$, რაც მიიღება სხვა ხერხის გამოყენებით.

მაგალითი მ.4.28. იპოვეთ სსმ - იმპულსის სახის სიბნალის

$s(t) = U_0 e^{-\beta t^2} \cos\left(\omega_0 t + \frac{\mu t^2}{2}\right)$ სპექტრული სიმკვრივე $S(\omega)$ მოცე-
მულ უსასრულო ინტერვალზე $-\infty < t < +\infty$ და გააჩნია გაუსის
ფორმის მომვლევი (იხ. ნახ მ.4.5).

ამოხსნა: წარმოვიდგინოთ $s(t)$ სიბნალის სპექტრული
სიმკვრივე შემდეგი სახით: $S(\omega) = I_1 - jI_2$ სადაც

$$I_1 = U_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta t^2} \cos\left(\omega_0 t + \frac{\mu t^2}{2}\right) \cos \omega t dt =$$

$$= \frac{U_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta t^2} \left\{ \cos\left[(\omega_0 + \omega)t + \frac{\mu t^2}{2}\right] + \cos\left[(\omega_0 - \omega)t + \frac{\mu t^2}{2}\right] \right\} dt,$$

$$I_2 = U_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta t^2} \cos\left(\omega_0 t + \frac{\mu t^2}{2}\right) \sin \omega t dt =$$

$$= \frac{U_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta t^2} \left\{ \sin\left[(\omega_0 + \omega)t + \frac{\mu t^2}{2}\right] + \sin\left[(\omega_0 - \omega)t + \frac{\mu t^2}{2}\right] \right\} dt.$$

ამოხსნისათვის ვისარგებლოთ ტაბულირებული ინტეგრალით

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \frac{\sin}{\cos}(px^2 + 2qx) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4a^2 + p^2}} \exp\left[-\frac{aq^2}{a^2 + p^2}\right] \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \left[\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{p}{a} - \frac{pq^2}{a^2 + p^2} \right],$$

მივიღებთ
$$S(\omega) = \frac{U_0}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4\beta^2 + p^2/4}} e^{-\beta(\omega_0 + \omega)^2/4(\beta^2 + \mu^2/4)} \times \exp(-jA_1) +$$

$$+ \frac{U_0}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4\beta^2 + p^2/4}} e^{-\beta(\omega_0 - \omega)^2/4(\beta^2 + \mu^2/4)} \times \exp(jA_2),$$

სადაც

$$A_1 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\mu}{2\beta} - \frac{\mu}{2\beta} - \frac{\mu(\omega_0 + \omega)^2}{8(\beta^2 + \mu^2/4)}, \quad A_2 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\mu}{2\beta} - \frac{\mu(\omega_0 - \omega)^2}{8(\beta^2 + \mu^2/4)}.$$

ბოლო ფორმულის პირველი შესაკრები აღწერს სპექტრულ
კომპონენტებს, რომელთაც აქვთ მაქსიმუმი უარყოფითი
სიხშირების არეში როცა $\omega \sim -\omega_0$; მეორე შესაკრები შეესაბა-
მება სპექტრის იმ ნაწილს, რომელსაც აქვს მაქსიმუმი, როცა
 $\omega \sim \omega_0$. პრაქტიკაში გამოსაყენებელი ყველა შემთხვევისთვის,
მითითებული სპექტრის ნაწილები არ «გადაიკვეთებიან».

თავი V. სიბნალევი შეზღუდული სპექტრით

როგორც ცნობილია (იხ. თავი II), სიგნალის აღსადგენად მისი სპექტრის გამოყენებით აუცილებელია გავითვალისწინოთ სიხშირეები, რომლებიც ძვეს ნულიდან უსასრულობამდე. მაგრამ ასეთი პროცედურა პრინციპულად ვერ განხორციელდება. ამასთან სპექტრული მდგენელების შენატანი, როცა $\omega \rightarrow \infty$, შეგვიძლია უგულებელვყოთ სიგნალის ენერჯის შეზღუდულობის გამო. და ბოლოს, სიგნალის გადაცემის და დამუშავების ნებისმიერ რეალურ მოწყობილობას აქვს გატარების სასრული ზოლის სიგანე.

ამიტომ ყოველად რეალისტურია სიგნალის მათემატიკური მოდელი, რომელსაც გააჩნია ასეთი თვისება: რხევების სპექტრული სიმკვრივე ნულისგან განსხვავებულია მხოლოდ სასრული სიგრძის სიხშირეების რაიმე ზოლის საზღვრებში. რადიოტექნიკაში მსგავს სიგნალს ეწოდება **სიგნალი შეზღუდული სპექტრით**.

5.1. შეზღუდული სპექტრის სიბნალევის ზობიერთი მათემატიკური მოდელი

ვთქვათ R - სიხშირის ღერძის სასრული მონაკვეთია. სიგნალის $s(t)$ სპექტრული სიმკვრივე (შეზღუდული სპექტრით) აკმაყოფილებს პირობებს: $S(\omega) \neq 0$ როცა $\omega \in R$, ხოლო $S(\omega) = 0$ ყველა სხვა სიხშირეების მნიშვნელობებისათვის.

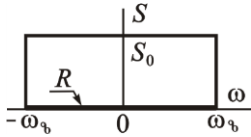
დროის არეში, შეზღუდული სპექტრის მქონე სიგნალის მათემატიკური მოდელი, შეიძლება მივიღოთ ფურიეს შექცეული გარდაქმნის ფორმულიდან

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_R S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5.1)$$

იმისდა მიხედვით, თუ რა R მონაკვეთს და $S(\omega)$ ფუნქციას ამოირჩევთ, წარმოიქმნება განსხვავებული სიგნალების სახეები შეზღუდული სპექტრით.

5.1.1 დაბალსიხშირული იდეალური სიბნალი

განვიხილოთ რხევა მუდმივი ნამდვილი სპექტრული სიმკვრივით მონაკვეთის საზღვრებში სიხშირის ღერძზე ნულიდან ზედა საზღვრულ ω_c სიხშირემდე; ამ მონაკვეთის გარეთ სიგნალის სპექტრული სიმკვრივე გადაიქცევა ნულად;



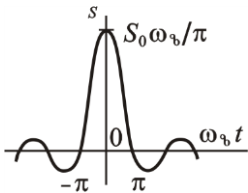
$$S(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_b, \\ S_0, & -\omega_b \leq \omega \leq \omega_b, \\ 0, & \omega > \omega_b. \end{cases} \quad (5.2)$$

ნახ. 5.1

ასეთი სიგნალის მყისიერი მნიშვნელობა

$$s(t) = \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\omega_b}^{\omega_b} e^{j\omega t} d\omega = \frac{S_0\omega_b}{\pi} \cdot \frac{\sin \omega_b t}{\omega_b t}. \quad (5.3)$$

ასეთ რხევას ეწოდება **დაბალსიხშირული იდეალური სიგნალი (დის)**. ამით ხაზს ვუსვამთ იმას, რომ სხვა ანალოგური სიგნალებისგან განსხვავებით ამ სიგნალის სახე უმარტივესია.



ნახ. 5.2

გრაფიკს, აგებულს ფორმულა (5.2) მიხედვით, აქვს ოსცილირებული მრუდის სახე. ის ლუწია და ამიტომ სიმეტრიულია ორდინატთა ღერძის მიმართ (იხ. ნახ. 5.2). სიხშირის სპექტრის ზედა ზღვრის გაზრდისას იზრდება როგორც ცენტრალური მაქსიმუმი, ასევე ოსცილიაციის სიხშირე.

დის მეტად ზოგადი სახე მიიღება, თუ ფორმულა (5.2)-ში შემოვიტანთ სპექტრული სიმკვრივის ფაზას, რომელიც ხაზოვნად არის დაკავშირებული სიხშირესთან:

$$S(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_b, \\ S_0 e^{-j\omega t_0}, & -\omega_b \leq \omega \leq \omega_b, \\ 0, & \omega > \omega_b. \end{cases} \quad (5.4)$$

სპექტრული სიმკვრივე (5.4) შეესაბამება დაბალსიხშირულ სიგნალს

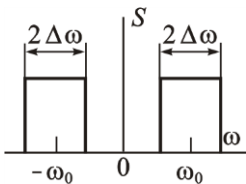
$$s(t) = \frac{S_0\omega_b}{\pi} \cdot \frac{\sin \omega_b (t-t_0)}{\omega_b (t-t_0)}.$$

წანაცვლებულს დროში (5.3) სიგნალის მიმართ t_0 წამით.

(ივარაუდება, რომ დაბალ სიხშირული ფილტრის მახასიათებელი მოცემული ზედა საზღვრული სიხშირით საკმარისად ზუსტად აპროქსიმირდება მართკუთხა ფორმით).

დის არის დაბალი სიხშირის ფილტრის **(დსფ)** იდეალიზირებული გამომავალი რეაქცია, აღზნებული რხევის სიხშირით თანაბარი სპექტრული სიმკვრივით, ანუ დელტა-ფუნქციით.

5.12. იდეალური ზოლური სიბნალი



სპექტრული სიმკვრივე არის
ნახ. 5.3

გამოვიკვლიოთ სიგნალის მათემატიკური მოდელი, რომლის სპექტრი შეზღუდულია სიხშირეების ზოლებით თითოეული $2\Delta\omega$ სიგანით და ცენტრებით სიხშირეებზე $\pm\omega_0$ (იხ. ნახ. 5.3). თუ ამ ზოლების ფარგლებში სიგნალის

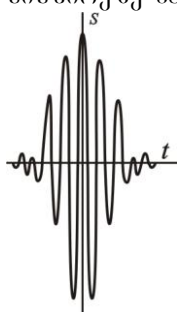
$$S(\omega) = \begin{cases} S_0, & -\omega_0 - \Delta\omega \leq \omega \leq -\omega_0 + \Delta\omega, \\ S_0, & \omega_0 - \Delta\omega \leq \omega \leq \omega_0 + \Delta\omega, \\ 0, & \text{ამ ზოლების გარეთ,} \end{cases} \quad (5.5)$$

მაშინ წინა პარაგრაფის ანალოგიურად ამ სიგნალს ეწოდება **იდეალური ზოლური სიგნალი (იზს)**.

იზს მყისიერ მნიშვნელობას ვიპოვიოთ ფურიეს შექცეული გარდაქმნის გამოყენებით

$$s(t) = \frac{S_0}{\pi} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \cos \omega t \, d\omega = \frac{2S_0\Delta\omega}{\pi} \cdot \frac{\sin \Delta\omega t}{\Delta\omega t} \cos \omega_0 t. \quad (5.6)$$

იზს გრაფიკის აგებისას (ნახ. 5.4), გამოვლინდება, რომ ω_0 სიხშირეზე მაღალსიხშიროვან ოსცილაციებთან ერთად შეინიშნება ამპლიტუდის მყისიერი მნიშვნელობების დროში ცვლილება. ფუნქცია $\sin(\Delta\omega t)/(\Delta\omega t)$ მასშტაბური $2S_0\Delta\omega/\pi$ კოეფიციენტის სიზუსტით თამაშობს **იზს** ნელი მომენტების როლს.



ნახ. 5.4

თეორიულად **იზს** მიღების შესაძლებელი ხერხი ნათელია: იდეალური ზოლოვანი ფილტრის შესასვლელზე, რომელიც ატარებს რხევებს სიხშირეებით მხოლოდ ზოლის ზღვრებში

$$[\omega_0 - \Delta\omega \leq \omega \leq \omega_0 + \Delta\omega],$$

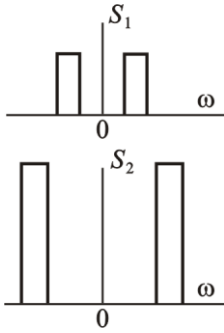
უნდა მიწოდებულ იქნეს

ვართოდიაპაზონიანი ზემოქმედება დელტა-იმპულსის სახით.

5.13. ორთოგონალური სიბნალი შუაღულული სპექტრით

შეზღუდულობის თვისება იძლევა საინტერესო და მნიშვნელოვანი ორთოგონალური სიგნალების მოძიების საშუალებას. უმარტივესი მაგალითი – ორი ორთოგონალური ზოლოვანი

სიგნალი, რომელთა არსებობის სპექტრის არეები არ გადაიკვეთება. ამ სიგნალების სკალარული ნამრავლის ნულის ტოლობა გამომდინარეობს უშუალოდ რეკლას განზოგადოებული ფორმულიდან.



ნამრავლი,
ნახ. 5.5

შეზღუდული სპექტრის სიგნალების ორთოგონალიზაციის ნაკლებად ცხადი ხერხი მდგომარეობს მათ დროში წანაცვლებაში (იხ. ნახ. 5.5). განვიხილოთ ორი იდეალური დაბალსიხშიროვანი სიგნალი (იღს) $u(t)$ და $v(t)$. ორივე სიგნალს აქვთ ერთნაირი პარამეტრები S_0 და ω_b [იხ. ფორმულა (5.2)], მაგრამ სიგნალი $v(t)$ ჩამორჩება $u(t)$ სიგნალს t_0 დროით, ისე რომ მისი სპექტრული სიმკვრივე $V(\omega) = U(\omega)\exp(-j\omega t_0)$.

ამ სიგნალების სკალარული

გამოთვლილი მათი სპექტრული სიმკვრივეებით,

$$(u, v) = \frac{S_0^2}{2\pi} \int_{-\omega_b}^{\omega_b} e^{j\omega t_0} d\omega = \frac{S_0^2 \omega_b}{\pi} \frac{\sin \omega_b t_0}{\omega_b t_0}. \quad (5.7)$$

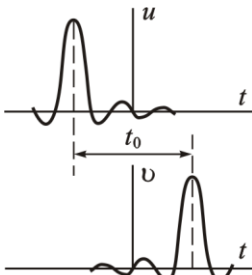
სკალარული ნამრავლი გადაიქცევა ნულად და ორი ფორმით ერთნაირი იღს (იდეალური დაბალსიხშიროვანი სიგნალი) (იხ. ნახ. 5.6) აღმოჩნდება ორთოგონალურები, თუ მათ შორის t_0

დროში ძვრა აკმაყოფილებს პირობას

$$\omega_b t_0 = k\pi \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

მინიმალურად შესაძლებელი დროის t_0 ძვრა, რომელსაც მიეყვართ სიგნალების ორთოგონალიზაციისკენ, მიიღება $k = \pm 1$:

$$t_0 = \pm \frac{\pi}{\omega_b} = \pm \frac{1}{2f_b}. \quad (5.8)$$

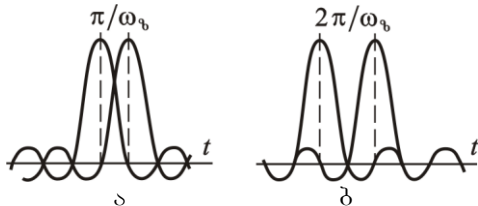


ნახ. 5.6

პრინციპულად მნიშვნელოვანია, რომ მოყვანილი ქმედებით შევძელით არა უბრალოდ ორი სიგნალის ორთოგონალურობის მიღწევას. ამით მითითებულია უსასრულო ორთოგონალური ბაზისის აგების გზა, რომელიც შესაძლებელია გამოყენებულ იქნას კოორდინატულ სის-

ტემად ნებისმიერი შეზღუდული სიხშირის ω_b მქონე სიგნალის დაშლისას.

განხილული სიგნალების გრაფიკები ორი t_0 მნიშვნელობისათვის გამოსახულია ნახ. 5.7: ა – როცა $t_0 = \pi/\omega_b$; ბ – როცა $t_0 = 2\pi/\omega_b$.



ნახ. 5.7

დროის იმ მომენტში, როდესაც ერთ-ერთი სიგნალი აღწევს მაქსიმუმს, სხვა სიგნალები, ამ სიგნალების ოჯახიდან, გადაინულს.

5.2. კოტელნიკოვის თეორემა

1933 წელს კოტელნიკოვმა დაამტკიცა თეორემა, რომელიც წარმოადგენს ერთ-ერთ ფუნდამენტურ დებულებას თეორიულ რადიოტექნიკაში. ეს თეორემა აღგენს (რა სიზუსტითაც გვინდა) შეზღუდული სპექტრის მქონე სიგნალის მყისიერი მნიშვნელობების აღდგენის შესაძლებლობას გამოდინარე ასათუფელი მნიშვნელობებიდან (ამოკრეფებიდან), რომლებიც აღებულია დროის ტოლ შუალედებში.

5.2.1. ორთონორმირებული ბაზისის აბეზა

როგორც ნახვევები იყო, შეზღუდული სპექტრის მქონე ნებისმიერი ორი სიგნალი, რომელიც ეკუთვნის ოჯახს

$$u_k(t) = A \frac{\sin \omega_b(t - k\pi / \omega_b)}{\omega_b(t - k\pi / \omega_b)}, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (5.9)$$

წარმოადგენს ორთონორმალურს.

A ამპლიტუდური მამრავლის შესაბამისი არჩევის გზით შეიძლება მივაღწიოთ იმას, რომ ამ სიგნალებიდან თითოეულის ნორმა გახდეს ერთეულოვანი. შედეგად აგებული იქნება ორთონორმირებული ბაზისი, რომელიც საშუალებას გვაძლევს დავშალოთ შეზღუდული სპექტრის მქონე ნებისმიერი სიგნალი ფურიეს განზოგადოებულ მწკრივად.

საკმარისია განვიხილოთ მხოლოდ ფუნქცია

$$u_0(t) = A \frac{\sin \omega_b t}{\omega_b t}, \quad (5.10)$$

ვინაიდან ნებისმიერი u_k სიგნალის ნორმა ერთნაირია მიუხედავად დროში ძვრისა. რამდენადაც

$$\|u_0\|^2 = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \omega_b t}{\omega_b^2 t^2} dt = \frac{A^2}{\omega_b} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \omega_b t}{(\omega_b t)^2} d(\omega_b t) = \frac{\pi A^2}{\omega_b}, \quad (5.11)$$

ფუნქციები u_k ორთონორმირებული იქნება, თუ $\|u_k\| = 1$, ანუ

$$A = \sqrt{\omega_b / \pi}. \quad (5.12)$$

ფუნქციების უსასრულო ერთობლიობა

$$Sc_k(t; \omega_b) = \sqrt{\frac{\omega_b}{\pi}} \frac{\sin \omega_b (t - k\pi / \omega_b)}{\omega_b (t - k\pi / \omega_b)} \quad (5.13)$$

ქმნის **კოტელნიკოვის ბაზისს** დაბალსიხშირული სიგნალების წრფივ სივრცეში სპექტრით, რომელიც ზემოდან შემოსაზღვრულია ω_b მნიშვნელობით. ცალკეულ ფუნქციას $Sc_k(t; \omega_b)$ ეწოდება **k -ური ასათვლელი ფუნქცია**.

5.2.2. კოტელნიკოვის მწკრივი და თეორემა

თუ $s(t)$ ნებისმიერი სიგნალია, რომლის სპექტრული სიმკვრივე განსხვავდება ნულისაგან მხოლოდ $-\omega_b \leq \omega \leq \omega_b$ სიხშირეების ზონაში, მაშინ ის შეიძლება დაიშალოს ფურიეს განზოგადოებულ მწკრივად კოტელნიკოვის ბაზისის მიხედვით:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k Sc_k(t; \omega_b) \quad (5.14)$$

მწკრივის კოეფიციენტებად გამოდიან, როგორც ცნობილია, დასაშლელი სიგნალისა და k -ური ასათვლელი ფუნქციის სკალარული ნამრავლები: $c_k = (s(t), Sc_k(t; \omega_b))$. (5.15)

ასეთი კოეფიციენტების გამოთვლის მოსახერხებელი მეთოდი მდგომარეობს რელეის განზოგადოებული ფორმულის გამოყენებაში. ადვილია იმის შემოწმება, რომ k -ურ ასათვლელ ფუნქციას $-\omega_b \leq \omega \leq \omega_b$ მონაკვეთის ზღვრებში აქვს სპექტრალური სიმკვრივე, რომელიც ტოლია $\sqrt{\frac{\pi}{\omega_b}} \exp(-j\omega k\pi / \omega_b)$. ეს

ჩანს (5.3) და (5.13) ფორმულების შედარებიდან. მაშინ, როცა $S(\omega)$ შესასწავლი $s(t)$ სიგნალის სპექტრია,

$$c_k = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_b}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_b}^{\omega_b} S(\omega) \exp[jk\omega\pi / \omega_b] d\omega \right\}. \quad (5.16)$$

სიდიდე ფიგურულ ფრჩხილებში სხვა არაფერია, თუ არა $s_k = s(t_k)$, ე.ი. $s(t)$ სიგნალის მყისიერი მნიშვნელობა k -ურ ასათვლელ წერტილში $t_k = k\pi/\omega_b = k/(2f_b)$.

ამგვარად,
$$c_k = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_b}} s_k. \quad (5.17)$$

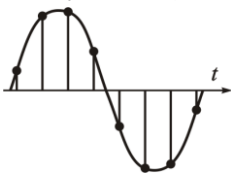
საიდანაც გამომდინარეობს კოტელნიკოვის მწკრივის გამოსახულება:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k \frac{\sin \omega_b(t - k\pi / \omega_b)}{\omega_b(t - k\pi / \omega_b)}. \quad (5.18)$$

ბოლო ტოლობის საფუძველზე მიღებულია **კოტელნიკოვის თეორემა** ჩამოყალიბდეს ასე: **ნებისმიერი სიგნალი, რომლის სპექტრი არ შეიცავს სიხშირეებს f_b -ის ჰც ზევით, მთლიანად შეიძლება აღდგენილ იქნეს, თუ ცნობილია ამ სიგნალის ასათვლელი მნიშვნელობები, აღებული $1/(2f_b)$ წმ დროის ტოლ შუალედებში.**

მაგალითი 5.1. მოცემულია სიგნალი $s(t) = \cos(\omega_0 t + \phi_0)$, (იხ. ნახ.

5.8). t_0 ანათვლებს შორის რაღაც ფიქსირებული ინტერვალის არჩევით შესაძლებლობა გვეძლევა ანათვლების მიხედვით ცალსახად აღვადგინოთ სიგნალი, რომლის სპექტრი არ შეიცავს სიხშირეების მდგენელებს, რომლებიც აღემატება სასაზღვრო სიხშირეს $\omega_b = \pi / t_0$.



ნახ. 5.8 **პარმონიული სიგნალისათვის შეიძლება კოტელნიკოვის თეორემის გამოყენება. მოცემული სიგნალის ანათვლების (ამორჩევების) მნიშვნელობები**
$$s_k = \cos(k\pi\omega_0 / \omega_b + \phi_0).$$

ზღვრულ შემთხვევაში, როცა სიხშირე ω_0 მიისწრაფის ω_b -სკენ მარცხნიდან, ანუ
$$\omega_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\omega_b - \varepsilon).$$

პარმონიული სიგნალის ყოველ პერიოდზე შეიძლება მოდიოდეს ზუსტად ორი ამოკრეფა.

თუ ირღვევა კოტელნიკოვის თეორემა, და დროში ანათვლები აიღება არასაკმარისად ხშირად, მაშინ საწყისი სიგნალის აღდგენა პრინციპიალურად შეუძლებელია. ანათვლების წერტილებზე შეიძლება

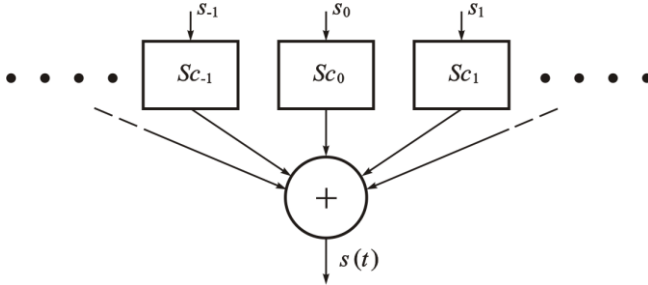
გავატაროთ მრუდების ურიცხვი რაოდენობა, რომელთა სპექტრული სიმკვრივები $-\omega_b \leq \omega \leq \omega_b$ ზოლის გარეთ განსხვავდება ნულისაგან.

ნახ. 5.8 –ზე მოყვანილი სიგნალის ერთმნიშვნელობიანი აღდგენა შესაძლებელია.

5.2.3. კოტელნიკოვის მწკრივით წარმოდგენილი სიბნალის სინთეზის აპარატურული რეალიზაცია

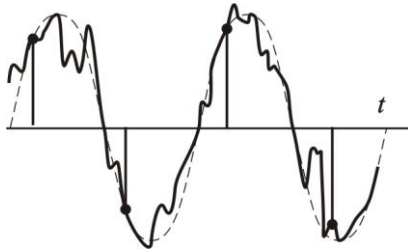
კოტელნიკოვის თეორემის მნიშვნელოვანი თავისებურება მდგომარეობს მის კონსტრუქციულ ხასიათში: ის არა მარტო მიუთითებს სიგნალის შესაბამის მწკრივში დაშლის შესაძლებლობას, არამედ განსაზღვრავს უწყვეტი სიგნალის აღდგენის მეთოდს, რომლებიც მოცემულია თავისი ანათელების მნიშვნელობებით (ნახ.5.9).

ვთქვათ გვაქვს გენერატორთა ერთობლიობა, რომლებიც გამოსასვლელ მომჭერებზე ქმნიან ასათვლელ ფუნქციებს $S_k(t; \omega_k)$.



ნახ. 5.9. სიგნალის სინთეზის აპარატურული რეალიზაცია კოტელნიკოვის მწკრივის მიხედვით

გენერატორები მართვადია – მათი სიგნალების ამპლიტუდა პროპორციულია s_k ათვლილი მნიშვნელობების. თუ შევეერთებთ რხევებს გამოსასვლელზე მათი მიწოდებით ამჯამაზზე, მაშინ შემჯამებელის გამოსასვლელიდან, (5.18) ფორმულის შესაბამისად, შესაძლებელი იქნება $s(t)$ სინთეზირებადი სიგნალის მყისიერი მნიშვნელობების მოხსნა



ნახ. 5.10

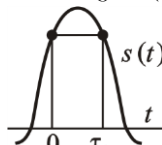
ერთმნიშვნელობიანი აღდგენა შეუძლებელია

მაგალითი 5.2. მარტკუთხა ვიდეოიმიჯის ერთეულოვანი ამპლიტუდით და τ_0 ხანგრძლივობით არ მიეკუთვნება შეზღუდული სპექტრის

მქონე სიგნალების რიცხვს. მით უფრო მისი სპექტრული სიმკვრივე საკმაოდ სწრაფად ($1/\omega$ კანონით) მცირდება სიხშირის ზრდასთან ერთად. დაადგინეთ მისი მათემატიკური მოდელი

ამოხსნა: ასეთი სიგნალის აღწერა ორი ანათვალით, იმპულსის დასაწყისსა და ბოლოში, აღნიშნავს საწყისი რხევის შეცვლას სპექტრით, რომელიც შეზღუდულია ზემოდან $\omega_b = \pi/\tau_o$ სიხშირით.

ამ სიგნალის მათემატიკური მოდელი (5.19) ასეთია (ნან. 5.11):

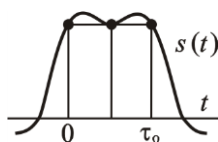


$$s(t) = \frac{\sin(\pi t / \tau_o)}{\pi t / \tau_o} + \frac{\sin[\pi(t - \tau_o) / \tau_o]}{\pi(t - \tau_o) / \tau_o}, \quad (5.19)$$

თუ აღვწერთ იმპულსს სამი (იხ. ნახ. 5.12) თანაბარჩამორჩენილი ანათვალით, მაშინ მივაღწეოთ მათემატიკურ მოდელს, რომელიც

ნახ. 5.11 შეიცავს სიხშირეებს $\omega_b = \pi t / \tau_o$ -მდე:

$$s(t) = \frac{\sin(2\pi t / \tau_o)}{2\pi t / \tau_o} + \frac{\sin[2\pi(t - \tau_o/2) / \tau_o]}{2\pi(t - \tau_o/2) / \tau_o} + \frac{\sin[2\pi(t - \tau_o) / \tau_o]}{2\pi(t - \tau_o) / \tau_o}. \quad (5.20)$$



ბუნებრივია, რომ გასათვალისწინებელი წევრების რიცხვის ზრდით, ანუ ამოკრეფებს შორის დროითი ინტერვალის შემცირებით, აპროქსიმაციის სიზუსტე გაიზრდება.

ნახ. 5.12

5.2.4. ცლომილების უფასება, რომელიც აღიკვეთს ნებისმიერი სიბნალის კოტელნიკოვის მჭკრივით აპროქსიმაციისას

თუ $s(t)$ ნებისმიერი სიგნალია, მაშინ ის შეიძლება წარმოვიდგინოთ ჯამით $s(t) = s_{\text{სიბნ}}(t; \omega_b) + s_{\text{შეც}}(t)$, რომელშიც შედის სიგნალი $s_{\text{სიბნ}}(t; \omega_b)$ სპექტრით, შეზღუდულია ω_b მნიშვნელობით, ასევე აპროქსიმაციის შეცდომის სიგნალი $s_{\text{შეც}}(t)$ სპექტრით, რომელიც ზოგად შემთხვევაში იკავებს სიხშირეთა უსასრულო ზოლს $\omega > \omega_b$.

მითითებული სიგნალების სპექტრები არ გადაიფარება, ამიტომ სიგნალები $s_{\text{სიბნ}}$ და $s_{\text{შეც}}$ ორთოგონალურია, ხოლო მათი ენერგიები, ე.ი. ნორმების კვადრატები იკრიბება:

$$\|s\|^2 = \|s_{\text{სიბნ}}\|^2 + \|s_{\text{შეც}}\|^2.$$

შეცდომის აპროქსიმაციის ზომად შეიძლება მივიჩნიოთ მანძილი, რომელიც შეცდომის სიგნალის ნორმის ტოლია. თუ $W_s(\omega)$ $s(t)$ სიგნალის ენერგეტიკული სპექტრია, მაშინ რელეას თეორემის მიხედვით

$$\|s_{შეც}\| = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{\omega_b}^{\infty} W_s(\omega) d\omega} \quad (5.21)$$



მაგალითი 5.3. მოცემულია ექსპონენციალური ვიდეოიმპულსი $s(t) = \exp(-\alpha t)\sigma(t)$, რომელიც ხასიათდება ენერგეტიკული სპექტრით $W_s(\omega) = 1/(\alpha^2 + \omega^2)$ და ნორმით:

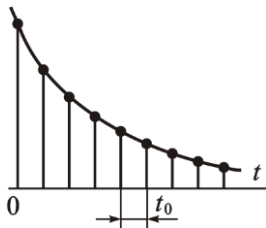
$$\|s\| = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (\alpha^2 + \omega^2)^{-1} d\omega} = 0.7071/\sqrt{\alpha}.$$

შეაფასეთ სიგნალის აპროქსიმაციის ცდომილების ნორმა.

ამოხსნა: ამ იმპულსის ევექტური ხანგრძლივობა (იხ. თავი II)

უდრის $\tau_o = 2.3026/\alpha$.

განსახილველი სიგნალის სპექტრი არაა შემოფარგლული. ამიტომ საჭიროა წინასწარ მოვახდინოთ სიგნალის დაბალსიხშირული ფილტრაცია, მისი გატარებით დაბალი სიხშირეების ფილტრში (ღსშ). ფილტრის გატარების ზოლის ზედა სიხშირის ω_b მნიშვნელობა საჭიროა ავირჩიოთ იმისდა მიხედვით, თუ რამდენად ხშირად აიღება სიგნალის ანათვლები ღსშ-ის გამოსასვლელზე. ვივარაუდოთ, რომ τ_o დროის მანძილზე იზომება 10 ანათვალი ინტერვალით $t_0 = \tau_o/9 = 0.2558/\alpha$ წმ (იხ. ნახ. 5.19). კოტენიკოვის თეორემის თანახმად ეს ნიშნავს, რომ $\omega_b = \pi/t_0 = 3.14/(0.2558/\alpha) = 12.279\alpha$.



სიგნალი ღსშ-ის გამოსასვლელიდან ზუსტად აღდგება თავისი ანათვლების მნიშვნელობების მიხედვით. ამასთან საწყისი ვიდეოიმპულსის მიმართ გარდაუვალია შეცდომა.

მოცემულ შემთხვევაში სიგნალის შეც-

ნახ. 5.19 დროის ნორმა

$$\|s_{შეც}\| = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_b}^{\infty} \left(\frac{d\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \right)^{1/2} = \left[\frac{1}{\alpha\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\omega_b}{\alpha} \right) \right]^{1/2} = \frac{0.1608}{\sqrt{\alpha}}.$$

აპროქსიმაციის ფარდობითი შეცდომა

$$\|s_{\text{შეც}}\|/\|s\| = 0.1608 / 0.7071 = 0.2274.$$

ჩანს, რომ მაგალითში ამორჩეული სიხშირე ω_c არასაკმარისად მაღალია საწყისი სიგნალის კვლავწარმოების დამაკმაყოფილებელი სიხუსტის მისაღწევად.

5.2.5. სიბნალვის სივრცის ზომა, რომელიც უზღუდულია სპექტრისა და ხანგრძლივობის მიხედვით

იმპულსური სიგნალების სპექტრალური სიმკვრივების გამოთვლის მაგალითები, მოყვანილი თავში 2, აჩვენებს, რომ სასრული ხანგრძლივობის ნებისმიერ სიგნალს აქვს სპექტრი, შეუზღუდავად განფენილი სიხშირეთა ღერძის გასწვრივ.

თუმცა ხშირად მოსახერხებელია განვიხილოთ სიგნალთა იდეალიზირებული მოდელები, შემოსაზღვრული როგორც ხანგრძლივობით, ისე სპექტრის განფენილობის მიხედვით. მსგავს მოდელებს შეუძლიათ ზუსტად აღწერონ სიგნალები, რომელთა გამოყენება ხდება კავშირის რეალურ არხებში.

ვთქვათ T ასეთი სიგნალის ხანგრძლივობაა, ხოლო f_b - მისი სპექტრის სასაზღვრო სიხშირე, გამოსახული ჰერცებში. მაშინ სიგნალის ბაზა $B = Tf_b$ (იხ. თავი. 4, ფორმულა (4.50)).

სიგნალის სრული აღწერილობისათვის უნდა ჰქონდეს $N = T/t_0 = 2Tf_b$ დამოუკიდებელი ათვლა.

ამბობენ, რომ რიცხვი $N = 2Tf_b = 2B$ (5.22)

წარმოადგენს **სიგნალების სივრცის ზომას**, რომლებიც შემოსაზღვრულია ხანგრძლივობისა და სიხშირის მიხედვით.

რიცხვი N , როგორც წესი, საკმაოდ დიდია. მაგალითად, 1 წუთში სიგნალის აღწერისათვის, რადიომაუწყებლობის არხში სასაზღვრო სიხშირით 12კჰც, საჭირო იქნება $2 \cdot 60 \cdot 1.2 \cdot 10^4 = 1.44 \cdot 10^6$ დამოუკიდებელი რიცხვი.

(ინფორმაციის თეორიაში სიგნალების სივრცის ზომა ასრულებს შეტვობინებების მოცულობის შეფასების როლს).

თავის დროზე კლოდ შენონმა შემოგუთავაზა სასრული ხანგრძლივობით და ზოლით სიგნალის ინტერპრეტირება როგორც წერტილისა მრავალგანზომილებიან ევკლიდის სივრცეში გაზომვების რიცხვით $2Tf_b$. ასათვლელი მნიშვნელობა

s_k ამ დროს თამამობს ასახავი წერტილის პროექციის როლს k -ურ კოორდინატა ღერძზე. რამდენადაც ევკლიდის სივრცის მეტრიკა და საკოორდინატო ღერძები ურთიერთორთოგონა-ლურია, სიგნალის ვექტორის სიგრძე

$$r_s = \left(\sum_{k=1}^{2Tf_b} s_k^2 \right)^{1/2} \quad (5.23)$$

სიდიდე r_s შეიძლება გამოისახოს E_s სიბნალის ენერჯით შემდეგნაირად. ვინაიდან

$$E_s = \sum_{k=1}^{2Tf_b} s_k^2 = \frac{1}{2f_b} \sum_{k=1}^{2Tf_b} s_k^2,$$

მაშინ
$$r_s = \sqrt{2E_s f_b} = \sqrt{2Tf_b P_{b,s}} \quad (5.24)$$

სადაც $P_{b,s}$ სიბნალის საშუალო სიმძლავრეა. აქედან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი სიბნალები ფიქსირებული პარამეტრებით T, f_b და საშუალო სიმძლავრეებით, რომლებიც არ აჭარბებს P_0 დონეს, გამოისახება წერტილებით, რომლებიც ძვეს $\rho(P_0) = \sqrt{2Tf_b P_0}$ რადიუსის მქონე მრავალგანზომილებიანი სფეროს შიგნით.

5.3. ზიწროზოლოვანი სიბნალები

ასეთი სახის რადიოტექნიკური სიბნალები წარმოიშვება სიხშირულ -ამორჩევითი წრედების და ხელსაწყოების გამოსასვლელებზე. განსაზღვრის თანახმად, სიბნალს ეწოდება **ვიწროზოლოვანი**, თუ მისი სპექტრული სიმკვრივე ნულისგან განსხვავებულია მხოლოდ სიბნალის სიხშირული ინტერვალების ℓ სიგანის ზღვრებში, რომელიც შექმნილია $\pm \omega_0$ წერტილების მიდამოებით, ამასთან უნდა სრულდებოდეს პირობა $\ell/\omega_0 \ll 1$.

როგორც წესი, შესაძლებელია ჩავთვალოთ, რომ ω_0 სიხშირე, რომელსაც ეწოდება **საყრდენი სიხშირული სიბნალი**, ემთხვევა სპექტრის ცენტრალურ სიხშირეს. მაგრამ ზოგად შემთხვევაში მისი ამორჩევა საკმაოდ ნებისმიერია.

5.3.1. ზიწროზოლოვანი სიბნალის მათემატიკური მოდელები

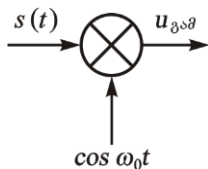
როგორც ცნობილია (იხ თავი II), თუ $f_1(t)$ - დაბალსიხშირული სიბნალია, რომლის სპექტრი თავმოყრილია ნულოვანი სიხშირის მიდამოში, მაშინ საკმაოდ დიდი ω_0 მნიშვნელობისას, $s_1(t) = f_1(t) \cos \omega_0 t$ რხევას ექნება ვიწროზოლოვანი სიბნალის ყველა აუცილებელი პირობა, ვინაიდან მისი სპექტრი აღმოჩნდება კონცენტრირებული $\pm \omega_0$ წერტილის მიდამოში.

ვიწროხოლოვანი იქნება სიგნალიც $s_2(t) = f_2(t) \sin \omega_0 t$, რომელიც განსხვავდება თანამამრავლის ფაზით. **ვიწროხოლოვანი სიგნალის ზოგადი მათემატიკური მოდელი** შესაძლებელია მივიღოთ, თუ შევადგენთ ხაზოვან კომბინაციას სახით

$$s(t) = A_s(t) \cos \omega_0 t - B_s(t) \sin \omega_0 t. \quad (5.25)$$

ფუნქციის ორივე შესავალი დროის ფუნქციები $A_s(t)$ და $B_s(t)$ არიან დაბალსიხშიროვანები იმ აზრით, რომ მათი ფარდობითი ცვლილება საკმარისად მცირეა მაღალსიხშიროვანი რხევის პერიოდში $T = 2\pi/\omega_0$. მიღებულია, რომ მოცემული ω_0 საყდენი სიხშირის მნიშვნელობისას, $A_s(t)$ -ს ეწოდოს ფუნქცია **სინფაზური ამპლიტუდით**, ხოლო $B_s(t)$ - ვიწროხოლოვანი $s(t)$ სიგნალის ფუნქცია **კვადრატურული ამპლიტუდით**.

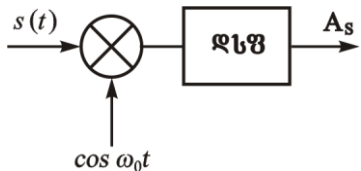
სინფაზური და კვადრატურული ამპლიტუდები შესაძლებელია გამოვყოთ აპარატული ხერხით. მართლაც, ვთქვათ გვაქვს გადამამრავლებელი მოწყობილობა (იხ. ნახ. 5.14). მის ერთ შესასვლელს მიეწოდება ვიწროხოლოვანი $s(t)$ სიგნალი, ხოლო მეორე შესასვლელს – დამხმარე რხევა, რომელიც დროში იცვლება $\cos \omega_0 t$ კანონით. გადამამრავლებლის გამოსასვლელზე მიიღება სიგნალი



$$u_{\text{გაგ}}(t) = A_s(t) \cos^2 \omega_0 t - \frac{1}{2} B_s(t) \sin 2\omega_0 t =$$

$$\text{ნახ. 5.14} \quad = \frac{1}{2} A_s(t) + \frac{1}{2} A_s(t) \cos 2\omega_0 t - \frac{1}{2} B_s(t) \sin 2\omega_0 t. \quad (5.26)$$

გადამამრავლებლიდან გამომავეალი სიგნალი გავატაროთ დაბალი სიხშირის ფილტრში (**ფსფ**) ნახ. 5.15, რომელიც აღშობს



ნახ. 5.15

$2\omega_0$ რიგის სიხშირეებს. ნათელია, რომ ფილტრის გამოსასვლელზე იქნება დაბალსიხშირული სინფაზური ამპლიტუდის პროპორციული $A_s(t)$ რხევა.

თუ ერთ-ერთ გადამამრავლებლის შესასვლელზე მივაწოდებთ დამხმარე $\sin \omega_0 t$ რხევას, მაშინ ასეთი სისტემა $s(t)$ ვიწროხოლოვანი სიგნალიდან გამოყოფს მის კვადრატურულ $B_s(t)$ ამპლიტუდას.

5.32. ვიწროხოლოვანი სიბნალების კომპლექსური წარმოდგენა

საზოვანი ელექტრული წრედების თეორიაში ფართოდ გამოიყენება კომპლექსური ამპლიტუდების მეთოდი, რომლის მიხედვით ჰარმონიული რხევა გამოისახება როგორც კომპლექსური ფუნქციის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები:

$$U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \operatorname{Re}(U_m e^{j\varphi_0} e^{j\omega_0 t}),$$

$$U_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \operatorname{Im}(U_m e^{j\varphi_0} e^{j\omega_0 t}).$$

დროზე დამოკიდებულ სიდიდეს $\dot{U} = U_m e^{j\omega_0 t}$ ეწოდება *პარმონიული რხევის კომპლექსური ამპლიტუდა*.

ფიზიკური თვალთვახედვიდან ვიწროზოლოვანი სიგნალები წარმოადგენენ *კვაზიპარმონიულ რხევებს*. (კვაზი ნიშნავს “თითქმის” ან “მსგავსი”) შევეცადოთ ისე განვაზოგადოთ კომპლექსური ამპლიტუდების მეთოდი, რომ ამ მეთოდის ფარგლებში აღწეროს (5.25) სახის სიგნალები.

შემოვიტანოთ დაბალსიხშირული კომპლექსური ფუნქცია

$$\tilde{U}_s(t) = A_s(t) + jB_s(t), \quad (5.27)$$

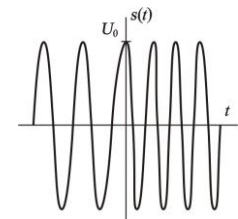
რომელსაც ეწოდება ვიწროზოლოვანი სიგნალის *კომპლექსური მომვლელი*. ადვილია უშუალოდ გავსინჯოთ, რომ

$$s(t) = A_s(t) \cos \omega_0 t - B_s(t) \sin \omega_0 t = \operatorname{Re}[\tilde{U}_s(t) e^{j\omega_0 t}]. \quad (5.28)$$

ამგვარად, ვიწროზოლოვანი სიგნალის კომპლექსური მომვლელი ასრულებს იგივე როლს, რასაც კომპლექსური ამპლიტუდა უბრალო ჰარმონიულ რხევებში. მაგრამ, ზოგად შემთხვევაში, კომპლექსური მომვლელი (იხ. ნახ. 5.16) დამოკიდებულია დროზე – ვექტორი $\tilde{U}_s(t)$ კომპლექსურ სიბრტყეზე ასრულებს

რაიმე მოძრაობას, და იცვლება

ნახ. 5.16 როგორც მოღულით, ასევე მიმართულებით.



ნახ. 5.17
სური მომვლელი.

მაგალითი 5.4. ვიწროზოლოვანი $s(t)$

სიგნალი წამოადგენს პარმონიულ რხევას, როცა $t < 0$ და როცა $t > 0$; $t = 0$ დროის მომენტში სიგნალის სიხშირე იზრდება ნახტომით:

$$s(t) = \begin{cases} U_0 \cos \omega_0 t, & t < 0, \\ U_0 \cos \omega_1 t, & t > 0. \end{cases}$$

იპოვეთ $s(t)$ სიგნალის (იხ. ნახ. 5.17) კომპლექსური მომვლელი.

ამოხსნა: თუ საყდენ სისშირედ ავიღებთ ω_0 , მივიღებთ კომპლექსურ

$$\tilde{U}_s(t) \text{ მომვლების შემდეგ გამოსახულება: } \tilde{U}_s(t) = \begin{cases} U_0, & t < 0, \\ U_0 e^{j(\omega_1 - \omega_0)t}, & t > 0. \end{cases}$$

$$\tilde{U}_s(t) = \begin{cases} U_0 \exp\left[j \frac{(\omega_0 - \omega_1)}{2} \cdot t\right], & t < 0, \\ U_0 \exp\left[j \frac{(\omega_1 - \omega_0)}{2} \cdot t\right], & t > 0. \end{cases}$$

ხაზი უნდა გავუსვით იმ გარემოებას, რომ საყდენი სისშირის ამორჩევა იკარნახება ჩასატარებელი გამოთვლების სიმარტივით. ასე, მაგალითად, თუ განსახილავი სიგნალის საყდენ სისშირედ ავიღებთ $(\omega_0 + \omega_1)/2$, მაშინ კომპლექსურ

$\tilde{U}_s(t)$ მომვლებს ექნება რთული სახე:

5.3.3. ფიზიკური მომგვამი, სრული ფაზა და მყისიერი სისშირე

ფორმულა (5.27), რომელიც განსაზღვრავს კომპლექსურ მოვლებს, შესაძლებელია წარმოვიდგინოთ მახვევებიანი ფორმაში:

$$\tilde{U}_s(t) = U_s(t) \exp[j\varphi_s(t)]. \tag{5.29}$$

აქ $U_s(t)$ - დროის ნამდვილი არაუარყოფითი ფუნქციაა, რომელსაც ეწოდება **ფიზიკური მომვლები** (სიმოკლისათვის ხშირად ხმარობენ უბრალოდ **მომვლებს**); $\varphi_s(t)$ - დროში ნელა ცვალებადი წვრილზოლოვანი სიგნალის საწყისი ფაზა.

სიდიდეები $U_s(t)$ და $\varphi_s(t)$ დაკავშირებული არიან სინფაზურ და კვადრატურულ ამპლიტუდებთან თანაფარდობებით

$$A_s(t) = U_s(t) \cos \varphi_s t, \quad B_s(t) = U_s(t) \sin \varphi_s t, \tag{5.30}$$

საიდანაც გამომდინარეობს ვიწროზოლოვანი სიგნალის მათემატიკური მოდელის ჩაწერის კიდევ ერთი სასარგებლო ფორმა:

$$s(t) = U_s(t) \cos[\omega_0 t + \varphi_s(t)]. \tag{5.31}$$

რადიოსიგნალების კუთხური მოდულაციის შესწავლის მსგავსად, შემოვიტანოთ ვიწროზოლოვანი **რხევის სრული ფაზის** ცნება $\psi_s(t) = \omega_0 t + \varphi_s(t)$ და განვსაზღვროთ სიგნალის **მყისიერი სისშირე**, რომელიც უდრის სრული ფაზის

$$\text{წარმოებულს დროში: } \omega_s(t) = \frac{d\psi_s(t)}{dt} = \omega_0 + \frac{d\varphi_s(t)}{dt}. \tag{5.32}$$

(5.31) ფორმულის შესაბამისად ზოგადი სახის ვიწროზოლოვანი სიგნალი წარმოადგენს რთულ რხევას, რომელიც მიიღება გადატანი ჰარმონიული რხევის როგორც ამპლიტუდის, ასევე ფაზური კუთხის ერთდროული მოდულაციით.

5.3.4. ვიწროხაზოვანი სიბნალის ფიზიკური მომგვლის თვისებები

(5.30) ფორმულის გამოყენებით, ფიზიკური მომგვლები $U_s(t)$ გამოვსახოთ სინფაზური და კვადრატურული ამპლიტუდებით:

$$U_s(t) = \sqrt{A_s^2(t) + B_s^2(t)}. \quad (5.33)$$

როგორც ზემოთ ავლენინეთ, ვიწროხაზოვანი სიბნალის მომგვლები არ განისაზღვრება ცალსახად. თუ (5.28) ფორმულაში, ω_0 სიხშირის ნაცვლად ავიღებთ რაიმე $\omega'_0 = \omega_0 + \Delta\omega$ სიხშირეს,

მაშინ $s(t)$ უნდა წარმოვადგინოთ სახით

$$s(t) = \text{Re}[\tilde{U}_s(t)e^{-j\Delta\omega t}e^{j\omega'_0 t}]$$

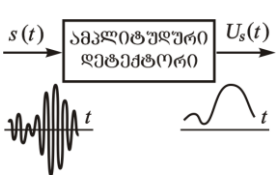
და კომპლექსური მომგვლების ახალი მნიშვნელობა იქნება

$$\tilde{U}'_s(t) = \tilde{U}_s(t)e^{-j\Delta\omega t}. \quad (5.34)$$

მაგრამ ამასთან ფიზიკური მომგვლები, რომელიც არის კომპლექსური მომგვლების მოდული, რჩება უცვლელი, ვინაიდან $\exp(-j\Delta\omega t)$ გამოსახულებას აქვს ერთეულოვანი მოდული.

ფიზიკური მომგვლების **სხვა თვისება** მდგომარეობს იმაში, რომ დროის თითოეულ მომენტში $s(t) \leq U_s(t)$ ამ მტკიცებულების ჭეშმარიტება უშუალოდ გამომდინარეობს (5.31) ფორმულიდან. აქ ტოლობის ნიშანი შეესაბამება დროის იმ მომენტებს, როცა $\cos[\omega_0 t + \varphi_s(t)] = 1$. მაგრამ ამასთან წარმოებული სიგნალები და მისი მომგვლები ემთხვევიან:

$$s'(t) = U'_s(t) \cos[\omega_0 t + \varphi_s(t)] - [\omega_0 t + \varphi'_s(t)] U_s(t) \sin[\omega_0 t + \varphi_s(t)]$$



მომგვლების ცნების მნიშვნელობა განპირობებულია იმით, რომ რადიოტექნიკაში ფართოდ გამოიყენება სპეციალური მოწყობილობები – **ამპლიტუდური დეტექტორები (დემოდულატორები)**, (ნახ. 5.18)

რომლებსაც აქვთ უნარი ზუსტად

ნახ. 5.18

აღიქვან ვიწროხაზოვანი სიგნალის

მომგვლები.

5.3.5. ვიწროხაზოვანი სიბნალის მყისიერი სიხშირის თვისებები

თუ სიგნალის კომპლექსური მომგვლები წარმოიდგინება ვექტორად, რომელიც უცვლელი კუთხური Ω სიჩქარით ბრუნავს

კომპლექსურ სიბრტყეზე, ანუ $\tilde{U}_s(t) = U_s(t) \exp[\pm j\Omega(t)]$, მაშინ (5.32) გამოსახულების შესაბამისად ვიწროზოლოვანი სიგნალის მყისიერი სიხშირე დროში მუდმივი სიდიდეა: $\omega_s = \omega_0 \pm \Omega$.

შეგვიძლია ვამტკიცოთ, რომ მსგავსი სიგნალი წარმოადგენს კვაზიმარმონიულ რხევას, რომელიც მოდულირებულია მხოლოდ ამპლიტუდით, მაგრამ არა ფაზური კუთხით, კერძოდ, თუ ერთ-ერთი ამპლიტუდეებიდან A_s ან B_s იგივეურად გარდაიქმნებიან ნუ-ლად, მაშინ დროის ნებისმიერ მომენტში მყისიერი სიხშირე $\omega_s = \omega_0$.

ზოგად შემთხვევაში მყისიერი სიხშირე დროში იცვლება

$$\text{კანონით} \quad \omega_s(t) = \omega_0 + \frac{d}{dt} \arctg \frac{B_s}{A_s} = \omega_0 + \frac{B'_s A_s - A'_s B_s}{A_s^2 + B_s^2}. \quad (5.35)$$

5.3.6. პავშირი სიბნალის სპექტრებს და მის კომპლექსურ მომვლეს შორის

ვთქვათ $G_s(\omega)$ - ვიწროზოლოვანი $s(t)$ სიგნალის (იხ. ნახ. 5.19) სპექტრული სიმკვრივის კომპლექსური მომვლება, რომელსაც, თავის მხრივ, გააჩნია სპექტრული $S(\omega)$ სიმკვრივე. ძნელი არ არის დავინახოთ, რომ

ნახ. 5.19

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re}[\tilde{U}_s(t) e^{j\omega_0 t}] e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_s(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_s^*(t) e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt =$$

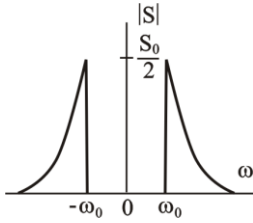
$$= \frac{1}{2} G_s(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} G_s^*(-\omega - \omega_0). \quad (5.36)$$

მაშასადამე, ვიწროზოლოვანი სიგნალის სპექტრული სიმკვრივე შესაძლებელია ნაპოვნი იყოს კომპლექსური მომვლების გადატანით ნულოვანი სიხშირის მიდამოდან $\pm \omega_0$ წერტილების მიდამოში. ყველა სპექტრული მდგენელის ამპლიტუდები ორჯერ მცირდება; უარყოფითი სიხშირეების არეში სპექტრის მისაღებად გამოიყენება კომპლექსური შეუღლების ოპერაცია.

ფორმულა (5.36) სასარგებლოა იმით, რომ ვიწროზოლოვანი სიგნალის ცნობილი სპექტრის მიხედვით შესაძლებელია ვიპოვოთ მისი კომპლექსური მომვლების სპექტრი, რომელიც თავის მხრივ, განსაზღვრავს მის ფიზიკურ მომვლებს და სიგნალის მყისიერ სიმკვრივეს.

(ფიზიკური მომვლები ნამდვილად “მოავლებს” ვიწროზოლო-

ვან სიგნალს და მას გააჩნია ასეთი რხევის მყისიერი ამპლიტუდის აზრი ნახ. 5.19)

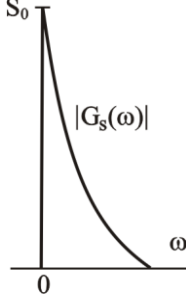


ნახ. 5.20

მაგალითი 5.5. როცა $\omega > 0$, ვიწროზოლოვან ნამდვილ $s(t)$ სიგნალს (იხ. ნახ. 5.20), გააჩნია სპექტრული სიმკვრივე, რომელიც არასიმეტრიულია ω_0 სიხშირის მიმართ:

$$S(\omega) = \begin{cases} 0, & 0 < \omega < \omega_0, \\ \frac{1}{2} S_0 e^{-b(\omega-\omega_0)}, & \omega \geq \omega_0. \end{cases}$$

ამოხსნა: (5.36) ფორმულის საფუძველზე კომპლექსური მოვლუბის სპექტრული სიმკვრივეა



ნახ. 5.21

$$G_s(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < 0, \\ S_0 e^{-b\omega}, & \omega \geq \omega_0. \end{cases}$$

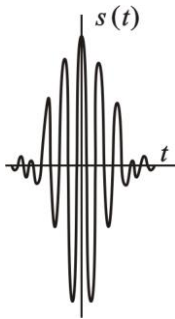
ფურიეს შექცეული გარდაქმნის გამოყენებით, ვპოულობთ მის კომპლექსურ მომვლუბს

$$\tilde{U}_s(t) = \frac{S_0}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{(-b+jt)\omega} d\omega = \frac{S_0}{2\pi(b-jt)}.$$

გამოსაკვლევი სიგნალის სიმფაზური და კვადრატურული ამპლიტუდების მოსანახათ, გამოვყოთ ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები:

$$A_s(t) = \frac{bS_0}{2\pi(b^2+t^2)}; \quad B_s(t) = \frac{tS_0}{2\pi(b^2+t^2)}.$$

განსახილავი სიგნალის ფიზიკური მომვლუბი



$$U_s(t) = |\tilde{U}_s(t)| = \frac{S_0}{2\pi\sqrt{b^2+t^2}}.$$

მყისიერი სიხშირის უდიდესი მნიშვნელობა

$$\omega_s(t) = \omega_0 + \frac{d}{dt} \arctg \frac{t}{b} = \omega_0 + \frac{b}{b^2+t^2}$$

ქვს, როცა $t=0$, ანუ $\omega_s(t) = \omega_0 + \frac{1}{b}$.

$s(t)$ რხევის ოსცილოგრამა (იხ. ნახ. 5.22) წარმოადგენს სიმეტრიულ რადიომპულსს

დრო-

ნახ. 5.22

ში არამუდმივი შევსების სიხშირით.

5.4. მმ-5 თავის მოკლე მიმოხილვა

5.4.1. შედეგები

- სიგნალები დროში შეზღუდული სპექტრით უსასრულოდ გაჭიმულია.
- ამ კლასის უმარტივეს სიგნალებს – იდეალურ დაბალსიხშირულს და იდეალურ ზოლოვანს – ვაკვირდებით იდეალური ფილტრების გამოსავალზე, რომლებიც აღიზნებიან დელტა-იმპულსებით.
- ორი იდეალური დაბალსიხშიროვანი სიგნალი ხდება ორ-თოვონადური მათ შორის დროის წანაცვლების შესაბამისი შერჩევით.
- კოტელნიკოვის რიგი წარმოადგენს განზოგადოებული ფურიეს რიგის კერძო შემთხვევას. აქ ბაზისურ ფუნქციებად არის იდეალური დაბალსიხშიროვანი სიგნალები, ერთმანეთის მიმართ წანაცვლებული დროის ინტერვალებით, რომლებიც π/ω_c ჯერადია.
- კოტელნიკოვის რიგის კოეფიციენტები არის დასაშლელი სიგნალის მნიშვნელობები აღებული დროის ტოლ შუალედების შემდეგ.
- თუ სიგნალის სპექტრში არ არის მდგენელები f_c -ზე მეტი სიხშირებით, მაშინ კოტელნიკოვის თეორემა იძლევა ზუსტ (საშუალოკვადრატული აზრით) წარმოდგენას სიგნალზე.
- ვიწროზოლოვანი სიგნალის სპექტრის სიგანე ნაკლებია ცენტრალურ სიხშირეზე. ვიწროზოლოვანი სიგნალები არის კვაზიპარმონიული – ზოგადად მათი ამპლიტუდა და სიხშირე დროში ნელა იცვლება.
- კომპლექსური მომენტები აერთიანებს კომპლექსური ამპლიტუდის ცნებას ვიწროზოლოვანი სიგნალის შემთხვევაში.
- ფიზიკური მომენტები უდრის კომპლექსური მომენტების მოდულს. მისი სახე არ არის დამოკიდებული სიგნალის საყრდენი სიხშირის არჩევაზე.
- ვიწროზოლოვანი სიგნალის მყისიერი სიხშირე არის ჯამი საყრდენი სიხშირისა და კომპლექსური მომენტების არგუმენტის დროის წარმოებულისა.
- ვიწროზოლოვანი სიგნალის სპექტრი მიიღება მისი კომპლექსური მომენტების სპექტრის გადატანით მონაკვეთზე, რომელიც რიცხობრივად უდრის საყრდენი სიხშირის მნიშვნელობას.
- ყოველი ნამდვილ სიგნალს შესაძლებელია შევუსაბამოთ კომპლექსური ანალიტიკური სიგნალი, რომელსაც აქვს

სპექტრული მდგენელები მხოლოდ დადებითი სისშირეების არეში.

- ანალიტიკური სიგნალის ნამდვილი ნაწილი უდრის საწყის სიგნალს. მის წარმოსახვით ნაწილს უწოდებენ შეუღლებულ სიგნალს.
- საწყის და შეუღლებულ სიგნალებს შორის კავშირი დგინდება გილბერტის გარდაქმნების წყვილით.
- ნებისმიერი სიგნალის მომკვლეები უდრის შესაბამისი ანალიტიკური სიგნალის მოდულს. მყისიერი სისშირე განისაზღვრება როგორც ანალიტიკური სიგნალის არგუმენტის წარმოებული.

5.4.2. საკონტროლო კითხვები

1. რატომ არის მოსახერხებელი რადიოტექნიკურ მოწყობილობებში სიგნალების რეალური რხევების აღწერისათვის მათემატიკური მოდელები შეზღუდული სპექტრით?
2. რა სახის არის იდეალური დაბალსიხშიროვანი და იდეალური ზოლური სიგნალების მიხედვებითი ოსცილოგრამები?
3. რა ძირითადი თვისებები გააჩნია ფუნქციას, რომელიც ქმნის კოტელნიკოვის ბაზისს?
4. როგორ ფორმულირდება კოტელნიკოვის თეორემა?
5. რა თვალსაჩინო აზრი აქვს სიგნალების სივრცის განზომილებას შეზღუდულ სპექტრით და ხანგძლივობით?
6. როგორ გამოიყურება მახასიათებელი ოსცილოგრამა?
7. რაში მდგომარეობს ვიწროზოლოვანი სიგნალის სიმფაზური და კვადრატურიანი მდგენელების აპარატურული პოვნის ხერხი?
8. რა თვისებები გააჩნია ფიზიკურ მომკვლეს?
9. როგორ არის დაკავშირებული ერთმანეთთან საწყისი და შეუღლებული სპექტრალური სიმკვრივები?
10. როგორ გამოიანგარიშებენ ვიწროზოლოვანი სიგნალისათვის გილბერტის გარდაქმნას?
11. რატომ პოულობს დიდ განზოგადებას ანალიტიკური სიგნალის მეთოდი კომპლექსური მომკვლების მეთოდთან შედარებით?

5.4.3. ამოცანის/მაგალითის გამოთვლის ზოგადი მეთოდიკა

ზოგადი მეთოდი არ არსებობს. ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში მაგალითის/ამოცანის ამოხსნას უნდა მივუსადაგოთ შესაბამისი მათემატიკური აპარატი და ლოგიკური მსჯელობით ამოვხსნათ დასმული მაგალითი ან ამოცანა.

5.4.4. ტიპიური ამოცანების ამოხსნის მაგალითები

5.4.4.1. დაბალსიხშირული სიბნალები შეზღუდული სპექტრით. კოტელნიკოვის რიბი

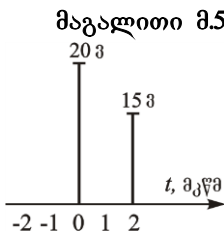
მაგალითი მ.5.1. შეზღუდული სპექტრით მქონე $s(t)$ სიგნალს აქვს სპექტრული სიმკვრივე $S(\omega) = \begin{cases} 0 & , \quad \omega < -\omega_b, \\ S_0 \cos\left(\frac{\pi\omega}{2\omega_b}\right) & , \quad -\omega_b \leq \omega \leq \omega_b, \\ 0 & , \quad \omega > \omega_b. \end{cases}$

მიიღეთ მოცემული სიგნალის წარმოდგენა ორი იდეალური დაბალსიხშირული სიგნალის ჯამად, რომელთა სპექტრული სიმკვრივეები მუდმივია სიხშირული ინტერვალის $[-\omega_b, \omega_b]$ ზღვრებში.

ამოხსნა: ფურიეს შებრუნებული გარდაქმნის გამოთვლისას

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\omega_b}^{\omega_b} \cos\left(\frac{\pi\omega}{2\omega_b}\right) \cos \omega t d\omega = \\ &= \frac{S_0}{2\pi} \int_0^{\omega_b} \cos \omega \left(t + \frac{\pi}{2\omega_b}\right) d\omega + \frac{S_0}{2\pi} \int_0^{\omega_b} \cos \omega \left(t - \frac{\pi}{2\omega_b}\right) d\omega = \\ &= \frac{S_0 \omega_b}{2\pi} \left[\frac{\sin \omega_b \left(t + \frac{\pi}{2\omega_b}\right)}{\omega_b \left(t + \frac{\pi}{2\omega_b}\right)} + \frac{\sin \omega_b \left(t - \frac{\pi}{2\omega_b}\right)}{\omega_b \left(t - \frac{\pi}{2\omega_b}\right)} \right]. \end{aligned}$$

აქედან ჩანს, რომ სიგნალი, რომელსაც ვიხილავთ, არის ორი იდეალური დაბალსიხშირული სიგნალის ნახევარჯამი ერთნაერი S_0 და ω_b პარამეტრებით. სიგნალები დროში წანაცვლებულია $\pm \pi / (2\omega_b)$ მონაკვეთებად დროის ათვლის სათავეს მიმართ.



ნახ. მ.5.1

მაგალითი მ.5.3. $u(t)$ სიგნალი კოტელნიკოვის თეორემის შესაბამისად დაყოფილია (დისკრეტიზირებულია) და გააჩნია ორი არანულოვანი ათვლა (იხ. ნახ. მ.5.1). იპოვეთ ანალოგური სიგნალის მყისიერი მნიშვნელობა დროის $t=1$ მკწმ მომენტში.

ამოხსნა: ნახაზის შესაბამისად განვსაზღვროთ დისკრეტიზაციის ინტერვალი $t_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ წმ. აქედან ვპოულობთ სიგნალის

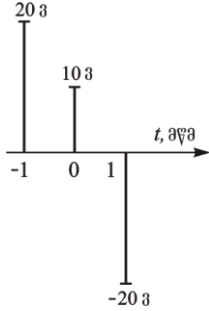
სპექტრის ზედა სიხშირეს $\omega_b = \pi/t_0 = 1.57 \cdot 10^6$ წმ⁻¹.

განსახილავი სიგნალის კოტელნიკოვის რიგს აქვს სახე

$$s(t) = 20 \frac{\sin \omega_b t}{\omega_b t} + 15 \frac{\sin(\omega_b t - \pi)}{\omega_b t - \pi},$$

საიდანაც როცა $t = 10^{-6}$ წმ, მივიღებთ $s(10^{-6}) = 22.28$ ვ.

მაგალითი მ.5.4. $s(t)$ სიგნალის კოტელნიკოვის რიგი შეიცავს სამ არანულოვან მდგენელს (ნახ. მ.5.2). ყველა ანათვლები გაზომილია ვოლტებში.



გამოთვალეთ ამ სიგნალის E_s ენერგია.

ამოხსნა: კოტელნიკოვის რიგის ბაზისური ფუნქციების ორთოგონალობის პრინციპიდან გამომდინარე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ თითოეულ სპექტრულ მდგენელს შეაქვს თავისი დამოუკიდებელი წვლილი სიგნალის E_s ენერჯიის მნიშვნელობის სიდიდის გამოთვლაში. ამიტომ მათი ნორმების კვადრატები

ნახ. მ.5.2 იკრიბება, ანუ $E_s = (20^2 + 10^2 + (-20)^2) \cdot 10^{-3}$ ვჯ

მაგალითი მ.5.5. გაუსის ვიდეოიმპულსი $s(t) = U_0 \exp(-\beta t^2)$ მოცემული, როცა $-\infty < \omega < +\infty$, მიახლოებით შეიცვლება შეზღუდული სპექტრის მქონე $s_{\text{შვ}}(t)$ სიგნალით, რომლის სპექტრული სიმკვრივე $0 < \omega < \omega_b$ ინტერვალში, ემთხვევა $s(t)$ სიგნალის სპექტრულ სიმკვრივეს, ხოლო როცა $\omega > \omega_b$ გადაიქცევა ნულად. იპოვეთ ასეთი აპროქსიმაციის შეცდომის ნორმა $\|s_{\text{შვ}}\|$.

ამოხსნა: ვინაიდან $s(t)$ სიგნალის ენერგეტიკული სპექტრი არის $W_s(\omega) = \frac{U_0^2 \pi}{\beta} \cdot e^{-\omega^2/(2\beta)}$, ამიტომ

$$\|s_{\text{შვ}}\| = \sqrt{U_0^2 \sqrt{\frac{2\pi}{\beta}} \left(1 - \Phi\left(\frac{\omega_b}{\sqrt{\beta}}\right)\right)}.$$

თუ გამოვიყენებთ ცნობილ არაელემენტარულ ფუნქციას – ალბათობის ინტეგრალს [4]

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt, \text{ რომლისა-}$$

თვის $\Phi(\infty) = 1$, მივიღებთ

$$\|s_{\text{შვ}}\| = \sqrt{\frac{U_0^2}{\beta} \int_{\omega}^{\infty} e^{-\frac{\omega'^2}{2\beta}} d\omega'}.$$

თუ $\omega_b = 0$, მაშინ ბუნებრივია, რომ $\|s_{\text{შეც}}\| = \|s\|$. მართლაც,
 $\Phi(0) = 0.5$ და ამიტომ $\|s_{\text{შეც}}\| = U_0 \sqrt{\pi/(2\beta)} = \|s\|$.

$\Phi(x)$ ფუნქცია x -ის ზრდასთან ერთად სწრაფად მიისწრაფის ერთისაკენ. ამას მივეყვართ იმისკენ, რომ ω_b -ის საკმაოდ დიდი მნიშვნელობისათვის ცდომილობის სიგნალის ნორმა ხდება საკმარისად მცირე. მაგალითად, თუ $\omega_b/\sqrt{\beta} = 3$, მაშინ $\Phi(\omega_b/\sqrt{\beta}) = 0.9986$ და $\|s_{\text{შეც}}\| = 0.052\|s\|$.

5.4.4.2. ზოლოვანი სიბნალები. კომპლექსური მომგვები

ამოცანა 5.8. $f(t)$ ვიწროზოლოვან სიგნალს აქვს სახე

$$f(t) = 10 \cos \Omega t \cos \omega_0 t + [30 \sin \Omega t + 5 \sin(2\Omega t + \pi/4)] \sin \omega_0 t.$$

იპოვეთ მოცემული რხევის კომპლექსური მომგვლების $\tilde{U}_f(t)$ გამოსახულება.

პასუხი: $\tilde{U}_f(t) = 10 \cos \Omega t + j[30 \sin \Omega t + 5 \sin(2\Omega t + \pi/4)]$.

ამოცანა 5.9. იპოვეთ ერთტონალური ამპლიტუდურ მოდულირებული (ამ) სიგნალის კომპლექსური მომგვები $\tilde{U}_f(t)$, მისი სიმფაზური $A_s(t)$ და კვადრატული $B_s(t)$ ამპლიტუდების გამოსახულებები.

პასუხი: $U_s(t) = U_m (1 + M \cos \Omega t) \exp(j\pi/4)$,

$$A_s(t) = B_s(t) = (U_m \sqrt{2})(1 + M \cos \Omega t).$$

ამოცანა 5.10. ერთტონალური კუთხად მოდულირებული სიგნალი აღიწერება დამოკიდებულებით

$$s(t) = U_m \cos(\omega t + m \sin \Omega t).$$

დაუშვით, რომ საყრდენი სიხშირე უდრის გადამტან სიხშირეს. მიიღეთ კომპლექსური მომგვლების $\tilde{U}_f(t)$, სიმფაზური $A_s(t)$ და კვადრატული $B_s(t)$ ამპლიტუდების გამოსახულებები. დაამტკიცეთ, რომ სიგნალის სიხშირე $\omega_s = \omega + m\Omega \cos \Omega t$

პასუხი: $\tilde{U}_s(t) = U_m \exp(j\omega \sin \Omega t)$,

$$A_s(t) = U_m \cos(m \sin \Omega t),$$

$$B_s(t) = U_m \sin(m \sin \Omega t).$$

დასამტკიცებლად საკმარისია ავიღოთ $s(t)$ სიგნალის არგუმენტის წარმოებულები და მივიღებთ $\omega_s = \omega + m\Omega \cos \Omega t$.

ამოცანა 5.11. იპოვეთ ჰარმონიული სიგნალის $s(t) = U_0 \sin \omega_0 t$, $-\infty < t < +\infty$, კომპლექსური მოძვლები. საყდენ სიხშირედ აირჩიეთ ω_0 . მიიღეთ სპექტრული სიმკვრივების გამოსახულებები კომპლექსური მოძვლების $G_s(\omega)$ და რხევის $S(\omega)$, შესაბამისად.

ამოხსნა: ვინაიდან $\sin x = \cos(x - 90^\circ)$, ამიტომ

$$s(t) = U_0 \cos(\omega_0 t - 90^\circ) = \operatorname{Re} \left(U_0 e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\omega_0 t} \right),$$

საიდანაც კომპლექსური მოძვლები წარმოიღვინება დროში მუდ-

მივი რიცხვით $\tilde{U}_s = U_0 e^{-j\frac{\pi}{2}} = -jU_0$.

კომპლექსური მოძვლების სპექტრული სიმკვრივე

$$G_s(\omega) = -j2\pi U_0 \delta(\omega).$$

საძიებელი სპექტრული სიმკვრივე

$$S(\omega) = -j\pi U_0 [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$$

5.4.4. ანალიტიკური სიბნალი. ზილჰერტის ბარდაქმნა

ამოცანა 5.18. $s(t)$ სიგნალის სპექტრული სიმკვრივე მოცემულია

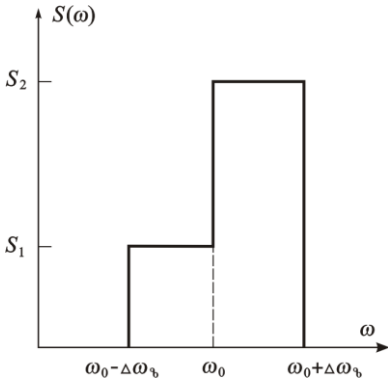
$$\text{გამოსახულებით } S(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_b, \\ S_0 \exp(-\alpha|\omega|), & -\omega_b \leq \omega \leq \omega_b, \\ 0, & \omega > \omega_b, \end{cases}$$

სადაც S_0 , α , ω_b - დადებითი რიცხვებია. იპოვეთ შესაბამისი ანალიტიკური $z_s(t)$ სიგნალი.

$$\begin{aligned} \text{ამოხსნა: } z_s(t) &= \frac{S_0}{\pi} \int_0^{\omega_b} e^{(-\alpha+jt)\omega} d\omega = \frac{S_0}{\pi(-\alpha+jt)} [1 - e^{(-\alpha+jt)\omega_b}] = \\ &= \frac{S_0(\alpha+jt)}{\pi(\alpha+t^2)} [1 - e^{-\alpha\omega_b} \cos \omega_b t - j e^{-\alpha\omega_b} \sin \omega_b t]. \end{aligned}$$

ამოცანა 5.19. $s(t)$ სიგნალს აქვს ნამდვილი სპექტრული სიმკვრივე $S(\omega)$. მისი გრაფიკი, როცა $\omega > 0$ მოყვანილია ნახ. მ.5.3-ზე. გამოთვალეთ ანალიტიკური სიგნალი $z_s(t)$ და განსაზღვრეთ სიგნალის მყისიერი სიხშირის $\omega_s(t)$ დროში ცვლილების კანონი.

მითითება: მიაქციეთ ყურადღება იმას, რომ $S(\omega)$ გრაფიკის



არასიმეტრიულობას ω_0 -ის მიმართ მივყავართ დროში სისწორის არამუდმივობისკენ. ამიტომ განიხილეთ კერძო შემთხვევები: ა) $S_1 = 0$, ბ) $S_2 = 0$, გ) $S_1 = S_2$.

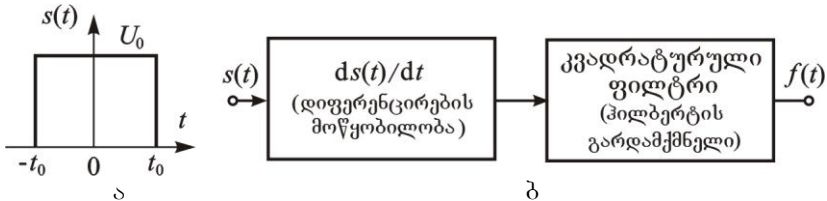
პასუხი:

$$z_s(t) = \frac{e^{j\omega_0 t}}{j\pi t} [S_1(1 - e^{j\Delta\omega t}) + S_2(e^{j\Delta\omega t} - 1)],$$

$$\omega_s(t) = \omega_0 + \frac{(S_2^2 - S_1^2)\Delta\omega}{2(S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2 \cos \Delta\omega t)}.$$

ნახ. მ.5.3

ამოცანა 5.24. დროის ათვლის საწყისის მიმართ სიმეტრიული მართკუთხა ვიდეოიმპულსი $s(t)$ (ნახ. მ.5.4.ა), მიეწოდება სისტემის შესასვლელს, რომელიც შედგება იდეალური დიფერენცირების და კვადრატურული ფილტრისაგან და ასრულებს



ნახ. მ.5.4

პილბერტის გარდაქმნის (პბ) ოპერაციას (ნახ. მ.5.4.ბ). განსაზღვრეთ $f(t)$ სიგნალი სისტემის გამოსასვლელზე.

ამოხსნა: შესასვლელი რხევის წარმოებული

$$s'(t) = U_0\delta(t+t_0) - U_0\delta(t-t_0).$$

კვადრატურული ფილტრის გამოსასვლელზე სიგნალი

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{U_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\tau+t_0)}{t-\tau} d\tau - \frac{U_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\tau-t_0)}{t-\tau} d\tau \\ &= \frac{U_0}{\pi} \left(\frac{1}{t+t_0} - \frac{1}{t-t_0} \right) = -\frac{2U_0}{\pi} \frac{t_0}{t^2 - t_0^2}. \end{aligned}$$

თავი VI. შემთხვევითი სიდიდეების თეორიის საფუძვლები

ბოლო ათწლეულებში დიდი განვითარება ჰპოვა ევრეთ-წოდებულმა **სტატისტიკურმა რადიოფიზიკამ**. ეს საგანი შეისწავლის მოვლენებს შეტყობინებების გადაცემისას, როდესაც მისი დეტერმინირებული აღწერა შეუძლებელია და მათ ადგილს ჩანაცვლებს ალბათური (სტატისტიკური) აღწერა.

შემთხვევითი სიგნალის განმასხვავებელი ნიშანი მდგომარეობს იმაში, რომ მისი მყისიერი მნიშვნელობა წინდაწინ განუსაზღვრელია (იხ. ნახ. 6.1). მაგრამ, ასეთი სიგნალის შესწავლისას შესაძლებელია შევნიშნოთ, რომ ზოგი მახასიათებელი ალბათობის აზრით აღიწერება სავსებით ზუსტად. აღსანიშნავია, რომ ყველაზე ხშირად შეიმჩნევა საშუალო დონიდან შედარებით უმნიშვნელო გადახრები; რაც უფრო



ნახ. 6.1 დიდია გადახრა აბსოლუტური მნიშვნელობით, მით იშვიათად შეინიშნება ისინი. უკვე ამით მულაგნდება რაიმე სტატისტიკური კანონზომიერება. თუ გვაქვს განსხვავებული სიდიდეების მონაცემები ალბათურ ფლუქტუაციებზე, შესაძლებელია შეიქმნას შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური მოდელი, რომელიც მისაღებია როგორც მეცნიერული, ასევე გამოყენებითი აზრით.

ალბათური კანონები წარმოიშვება ყოველთვის, როცა ფიზიკური სისტემა, რომელიც კმნის შემთხვევით სიგნალს, წარმოადგენს დიდი რაოდენობის მცირე ქვესისტემებს, რომლებიც ასრულებენ ინდივიდუალურ, დიდი ან მცირე ხარისხით ერთმანეთზე დამოკიდებულ მოძრაობებს.

რადიოტექნიკაში შემთხვევით სიგნალებს ხშირად შემოფოთების სახე აქვთ. ეს არის ქაოტურად დროში ცვლადი ელექტრომაგნიტური რხევა, სადაც მუხტის გადამტანები, მაგალითად, ელექტრონები, ასრულებენ მოუწესრიგებელ მოძრაობას.

შემთხვევითი სიგნალის მათემატიკური მოდელს მიმართავენ ასევე ინფორმაციის თეორიაში კანონზომიერების მათემატიკური აღწერისათვის, რომელიც დამახასიათებელია გააზრებული შეტყობინებისათვის.

და ბოლოს, სტატისტიკური ბუნება გააჩნიათ ლაზერულ დამაკავშირებელ ხაზებს. იმის გამო, რომ ელექტრომაგნიტური ველის კვანტს (ფოტონს) შედარებით დიდი ენერჯია გააჩნია,

აუცილებელია სპეციფიკური კვანტური ხმაურის გათვალისწინება.

6.1. შემთხვევითი სიდიდეები და მათი მახასიათებლები

ამ პარაგრაფში მოყვანილია ალბათობის თეორიის ძირითადი ცნებები სტატისტიკურ რადიოელექტრონიკის ამოცანებში გამოსაყენებლად. ამ საკითხები უფრო ცვლად განიხილება [11,12]

6.1.1. ალბათობა

თანამედროვე ალბათობის თეორია წარმოადგენს მათემატიკის აქსიომატიზირებულ განშტოებას, რომელმაც გააერთიანა დიდი მოცულობის, მეცნიერებით დაგროვებული ემპირიული მასალა, განსხვავებული შემთხვევითი მოვლენების შესწავლისას.

ალბათობის თეორიას საფუძვლად უდევს სრული სიმრავლის “ელემენტარული შედეგების” ან შემთხვევითი მოვლენების $\Omega = \{A_1, A_2, \dots, A_n, \dots\}$ ცნება. A_i სიმბოლოთი აღნიშნავენ რაიმე შემთხვევითი ექსპერიმენტის შესაძლო შედეგს. თითოეულ შედეგს $A_i \in \Omega$ შეესაბამება ნამდვილი რიცხვი $P(A_i)$, რომელსაც უწოდებენ ამ შემთხვევის **ალბათობას**.

მიღებულია შემდეგი აქსიომები:

1) ალბათობა არაუარყოფითია და არ აღემატება ერთს:

$$0 \leq P(A_i) \leq 1;$$

2) თუ A_i და A_j არათავსებადი შემთხვევებია, მაშინ

$$P(A_i + A_j) = P(A_i) + P(A_j);$$

3) ყველა შემთხვევის ჯამი, რომლებიც შედიან Ω , არის უტყუარი შემთხვევა:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \dots = 1.$$

6.1.2. ალბათობების ბაზოზა

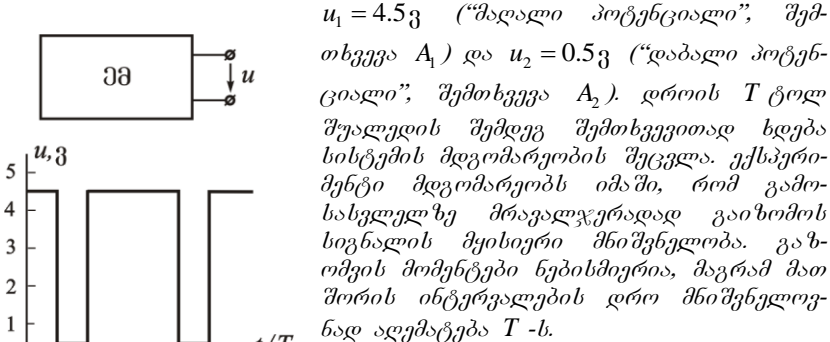
შემთხვევითი მოვლენის ალბათობის მათემატიკური ცნება არის აბსტრაქტული მახასიათებელი, რომელიც ახასიათებს არა მატერიალური სამყაროს ობიექტებს, რომლებიც ჩვენ გვანინტერესებს, არამედ მათ თეორეტიკულ სიმრავლეების მოდელს. აუცილებელია შემოვიტანოთ დამატებითი შეთანხმება იმისათვის, რომ შესაძლებელი იყოს ალბათობაზე ცოდნის ამოღება ექსპერიმენტალური მონაცემებიდან.

საზოგადოდ მიღებულია ალბათობის მოვლენის შეფასება შედეგების ხელსაყრელი ფარდობითი სიხშირით. თუ შესრულებულია N დამოუკიდებელი გამოცდა, ამასთან მათ შორის n -დან შეინიშნება A შემთხვევა, მაშინ ემპირიული (ამონაკრეფი) ანუ ალბათობის შეფასება $P(A)$, რომელიც შესაძლებელია მივიღოთ ამ სერიიდან, იქნება:

$$P_{\text{ემპ}}(A) = n/N. \quad (6.1)$$

ჩვეულებრივ მიიჩნევენ, რომ $P_{\text{ემპ}} \rightarrow P$, თუ გამოცდების რიცხვი $N \rightarrow \infty$.

მაგალითი 6.1. რაიმე ელექტრონული მოწყობილობის გამოსავალზე (იხ. ნახ. 6.2) სიგნალ "u"-ს შეუძლია მიიღოს მარტო ორი მნიშვნელობა:



$u_1 = 4.5$ ვ ("მაღალი პოტენციალი", შემთხვევა A_1) და $u_2 = 0.5$ ვ ("დაბალი პოტენციალი", შემთხვევა A_2). დროის T ციკლში შეუძლია შემდეგ შემთხვევითად ხდება სისტემის მდგომარეობის შეცვლა. ექსპერიმენტი მდგომარეობს იმაში, რომ გამოსავალზე მრავალჯერადად გაიზომოს სიგნალის მესიური მნიშვნელობა. გაზომვის მომენტები ნებისმიერია, მაგრამ მათ შორის ინტერვალების დრო მნიშვნელოვნად აღემატება T -ს.

დავუშვათ, რომ, 100 დამოუკიდებელი ცდის ჩატარების შემდეგ, ჩვენ 43 ჯერ მივიღეთ შემთხვევა A_1 და 57 ჯერ – შემთხვევა A_2 .

(6.1) ფორმულის შესაბამისად ალბათობის ემპირიული შეფასებისას $P_{\text{ემპ}}(A_1) = 0.43$ და $P_{\text{ემპ}}(A_2) = 0.57$. გაზომვების მონაცემებიდან არ გამოდინარეობს, რომ ზუსტად ასეთი უნდა იყოს ამ შემთხვევების თეორიული ალბათობები. როგორც ჩანს, ექსპერიმენტატორი გამოთქვამს ჰიპოთეზას იმაზე, რომ ეს შემთხვევები თანაბარ ალბათურია: $P(A_1) = P(A_2) = 0.5$. მაგრამ, თუ ასეთივე ემპირიული შეფასებები მიიღება 100000 ცდის ჩატარების შემდეგ, მაშინ ეს ჰიპოთეზა, შესაძლებელია, უნდა უარვეყო.

6.13. ბანაჟილის ფუნქცია და ალბათობის სიმპტოზი

ვთქვით X - შემთხვევითი სიდიდეა, ანუ ნამდვილი x რიცხვების ერთობლიობა, რომლებიც იღებენ შემთხვევით მნიშვნელობებს. X -ის სტატისტიკური თვისებების ამომწურავი

აღწერა შესაძლებელია მივიღოთ იმ შემთხვევაში, თუ გვექნება ნამდვილი x არგუმენტის არაშემთხვევითი $F(x)$ ფუნქცია, რომელიც უდრის იმ ალბათობას, რომ შემთხვევითი რიცხვი X - დან, მიიღებს მნიშვნელობას, რომელიც ტოლია ან ნაკლებია x -ის კონკრეტულ მნიშვნელობაზე: $F(x) = P(X \leq x)$.

$F(x)$ ფუნქციას ეწოდება შემთხვევითი X სიდიდის **განაწილების ფუნქცია**. თუ X -ს შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი მნიშვნელობა, მაშინ $F(x)$ არის გლუვი არაკლებადი ფუნქცია, რომლის მნიშვნელობა ძვეს $0 \leq F(x) \leq 1$ მონაკვეთზე. ადგილი აქვს შემდეგ ზღვრულ ტოლობას: $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$.

განაწილების ფუნქციის წარმოებული $p(x) = dF/dx$ არის მოცემული შემთხვევითი სიდიდის **განაწილების ალბათობის სიმკვრივე** (ან, მოკლედ, **ალბათობის სიმკვრივე**). ცხადია, რომ $p(x)dx = P(x < X \leq x + dx)$, ანუ $p(x)dx$ სიდიდე არის შემთხვევითი სიდიდის $(x, x + dx]$ ნახევარინტერვალში მოხვედრის ალბათობა.

უწყვეტი X შემთხვევითი სიდიდის ალბათობის სიმკვრივე $p(x)$ წარმოადგენს გლუვ ფუნქციას. თუ კი X - დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეა, რომელიც იღებს ფიქსირებულ მნიშვნელობებს $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ ალბათობებით $\{P_1, P_2, \dots, P_n, \dots\}$, შესაბამისად, მაშინ მისთვის ალბათობის სიმკვრივე გამოისახება როგორც დელტა-ფუნქციების ჯამი:

$$p(x) = \sum_i P_i \delta(x - x_i).$$

ორივე შემთხვევაში ალბათობის სიმკვრივე უნდა იყოს არაუარყოფითი: $p(x) \geq 0$ და აკმაყოფილებდეს **ნორმირების**

პირობას:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$$

6.14. ბაზუპლევა. შემთხვევითი სიდიდის მორფენტაზი

შემთხვევით სიდიდეებზე ექსპერიმენტის შედეგები, როგორც წესი, არის ამ სიდიდეების ამა თუ იმ ფუნქციების საშუალო მნიშვნელობები. თუ $\phi(x)$ - ცნობილი ფუნქციაა x -დან, მაშინ, განსაზღვრის თანახმად, მისი საშუალო მნიშვნელობა

$$\overline{\varphi(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)p(x)dx \quad (6.2)$$

(ხაზი ზევიდან ნიშნავს გაშუალედების ოპერაციას შემთხვევითი გამოცდების დასასრულის სიმრავლეზე).

უნდა ავლნიშნოთ შემდეგი: უდიდესი შენატანი საშუალო მნიშვნელობა იძლევა x ღერძის ის მონაკვეთები, სადაც ერთდროულად დიდებია როგორც გასაშუალედებული ფუნქცია $\varphi(x)$, ასევე $p(x)$ ალბათობის სიმკრივე.

სტატისტიკურ რადიოტექნიკაში ფართოდ გამოიყენება შემთხვევითი სიდიდეების განსაკუთრებული რიცხვითი მახასიათებლები, რომლებსაც უწოდებენ მათი შემთხვევითი სიდიდეების მომენტებს. X შემთხვევითი სიდიდის n -რივის მომენტი არის n -რი ხარისხის შემთხვევითი ცვლადის საშუალო მნიშვნელობა:

$$m_n = \overline{x^n} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x)dx. \quad (6.3)$$

ყველაზე უბრალო არის ეგრეთწოდებული მათემატიკური მოლოდინი

$$m_1 = \overline{x} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx, \quad (6.4)$$

რომელიც წარმოადგენს შემთხვევითი სიდიდის საშუალო მნიშვნელობის თეორიულ შეფასებას და მიიღება საკმარისად გაფართოებული ცდების ჩატარების შემდეგ.

მეორე რივის მომენტი

$$m_2 = \overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx, \quad (6.5)$$

არის შემთხვევითი სიდიდის საშუალო კვადრატი.

გამოიყენება ასევე შემთხვევითი სიდიდეების ცენტრალური მომენტები, რომლებიც მოიცემა შემდეგი ზოგადი ფორმულით:

$$\mu_m = \overline{(x - \bar{x})^m} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^m p(x)dx. \quad (6.6)$$

მნიშვნელოვანი ცენტრალური მომენტია – ეგრეთწოდებული დისპერსია

$$\sigma_x^2 = \mu_2 = \overline{(x - \bar{x})^2}. \quad (6.7)$$

ცხადია, რომ

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2 - 2x\bar{x} + \bar{x}^2} = \overline{x^2} - (\bar{x})^2. \quad (6.8)$$

σ_x სიდიდეს, ანუ კვადრატულ ფესვს დისპერსიიდან, **საშუალო კვადრატული გადახრა** ეწოდება, რომელიც გამოიყენება მათემატიკური მოლოდინის მიმართ, ცალკეული შემთხვევითი გამოცდის შედეგების გაბნევის რიცხობრივი შეფასებისათვის.

6.1.5. თანაბარი განაწილება

ვთქვათ, რაიმე შემთხვევით X სიგნალს შეუძლია მიიღოს მნიშვნელობები, რომლებიც ეკუთვნის მხოლოდ $x_1 \leq x \leq x_2$ ინტერვალს, ამასთან მოხვედრის ალბათობები ნებისმიერ შიდა ინტერვალში ერთნაირი Δx სიგანის ტოლია. მაშინ ალბათობის სიმკვრივე

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1, \\ 1/(x_2 - x_1), & x_1 \leq x \leq x_2, \\ 0, & x > x_2. \end{cases}$$

განაწილების ფუნქცია იძებნება ინტეგრირების გზით:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(\xi) d\xi = \begin{cases} 0, & x < x_1, \\ \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, & x_1 \leq x \leq x_2, \\ 1, & x > x_2. \end{cases}$$

მათემატიკური მოლოდინი

$$\bar{x} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} x dx = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

ბუნებრივია, ემთხვევა $[x_1, x_2]$ მონაკვეთის ცენტრს.

ადვილად შესამოწმებელია, რომ თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის ალბათობის დისპერსია უდრის

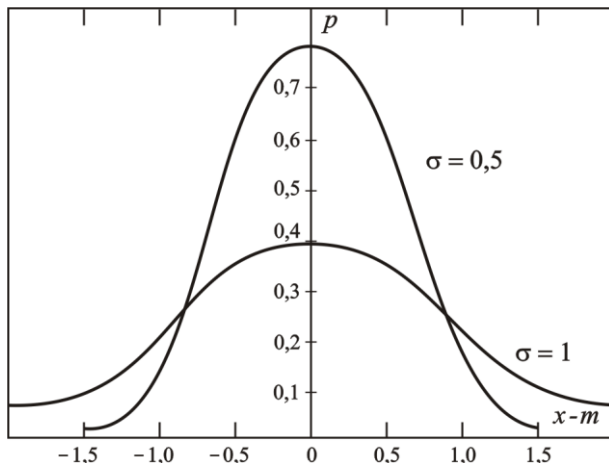
$$\sigma_x^2 = (x_2 - x_1)^2 / 12.$$

6.1.6. ბაჟისის (ნორმალური) განაწილება

შემთხვევითი სიდიდეების თეორიაში ფუნდამენტური მნიშვნელობა აქვს **გაუსის ალბათობის სიმკვრივეს**

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right], \quad (6.9)$$

რომელიც შეიცავს ორ რიცხობრივ m და σ პარამეტრებს. ფუნქციის მახასიათებელი წარმოადგენს **ზარისებულ მრუდს** ერთადერთი მაქსიმუმით $x=m$ წერტილში (იხ. ნახ. 6.3).



ნახ. 6.3. გაუსის ალბათობის სიმკვრივის მახასიათებელი σ პარამეტრის სხვადასხვა მნიშვნელობებისას

უშუალო გამოთვლებით შესაძლებელია დაერწმუნდეთ, რომ გაუსის განაწილების პარამეტრებს აქვს, მათემატიკური მოლოდინის და დისპერსიის აზრი, შესაბამისად: $\bar{x} = m$; $\sigma_x^2 = \sigma^2$.

შემთხვევითი სიდიდის გაუსის განაწილების ფუნქცია

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{(\xi-m)^2}{2\sigma^2}\right] d\xi.$$

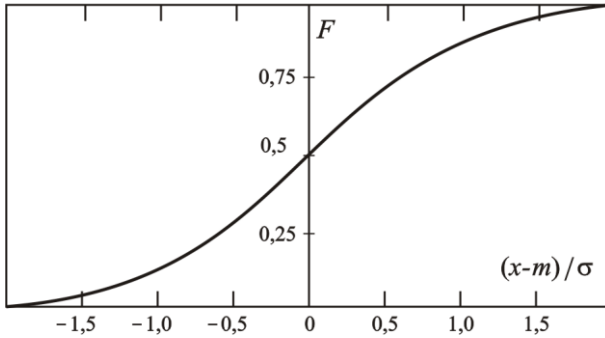
ცვლადის $t = (\xi - m)/\sigma$ შეცვლა იძლევა

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(x-m)/\sigma} \exp(-t^2/2) dt = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right). \quad (6.10)$$

აქ Φ - კარგად შესწავლილი არაელემენტარული ფუნქციაა, მაშინ ეგრეთწოდებული ალბათობის ინტეგრალი [15]:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] dt.$$

$F(x)$ ფუნქციის მახასიათებელს (ნახ. 6.4) აქვს მონოტონური მრუდის სახე, რომელიც იცვლება ნულიდან ერთამდე.



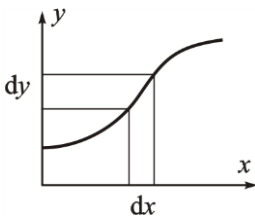
ნახ. 6.4. გაუსის შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია

6.17. შემთხვევითი სიდიდის ალბათობის ფუნქციის სიმკვრივე

ვთქვათ Y - შემთხვევითი სიდიდეა, რომელიც დაკავშირებულია X -თან ცალსახა ფუნქციონალური $y = f(x)$ დამოკიდებულებით. შემთხვევითი x წერტილის dx სიგანის ინტერვალში მოხვედრა და შემთხვევითი y წერტილის $|dy| = |f'(x)|dx$ სიგანის ინტერვალში მოხვედრა არის ექვივალენტური შემთხვევები, ამიტომ მათი ალბათობები ემთხვევა ერთმანეთს: $p_x(x)dx = p_y(y)|dy|$. აქედან

$$p_y(y) = p_x(x) \left| \frac{dx}{dy} \right| = p_x[g(y)] \left| \frac{dg}{dy} \right|, \quad (6.11)$$

სადაც $x = g(y)$ არის $y = f(x)$ -ის შებრუნებული ფუნქცია.



ნახ. 6.5

თუ ფუნქციური კავშირი X -სა და Y -ს შორის არაცალსახაა, ისე რომ $x_1 = g_1(y), x_2 = g_2(y), \dots, x_N = g_N(y)$, მაშინ (6.11) ერთიანდება შემდეგნაირად:

$$p_y(y) = \sum_{i=1}^N p_i(x_i) \left| \frac{dx_i}{dy} \right|. \quad (6.12)$$

(აქ გამოიყენება ის, რომ არათავსებადი შემთხვევების ალბათობები იჯამება (იხ. ნახ. 6.5)).

მაგალითი 6.2. გაუსის შემთხვევითი სიდიდის ხაზოვანი გარდაქმნა.

ამოსხნა: ვთქვათ $Y = aX + b$, ამასთან ალბათობის სიმკვრივე

$$p_x(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right].$$

ვინაიდან $|dx/dy| = 1/|a|$, მაშინ (6.11)-ის საფუძველზე

$$p_y(y) = \frac{1}{\sigma|a|\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y-b-ma)^2}{2a^2\sigma^2}\right].$$

მაშ ასე, გაუსის შემთხვევითი სიდიდის ხასიათი ნარჩუნდება ხაზოვანი გარდაქმნისას. სიდიდეს, მიღებულს ასეთი გარდაქმნისას, აქვს მათემატიკური მოლოდინი $\bar{y} = b + ma$ და $\sigma_y^2 = a^2\sigma_x^2$ დისპერსია.

6.18. მახასიათებელი ფუნქცია

ალბათობის თეორიაში დიდ როლს თამაშობს სტატისტიკური საშუალო სახით

$$\Theta(\nu) = \overline{\exp(j\nu x)} = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)e^{j\nu x} dx, \quad (6.13)$$

რომელსაც ეწოდება **შემთხვევითი X სიდიდის მახასიათებელი ფუნქცია**. ფუნქციის კოეფიციენტის სიზუსტით $\theta(\nu)$ არის ფურციეს გარდაქმნის ალბათობის სიმკვრივე, ამიტომ

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(\nu)e^{-j\nu x} d\nu. \quad (6.14)$$

ელემენტარული გარდაქმნის **ნაშვებით**, მოგვეავს ზოგიერთი შედეგი:

$0 \leq x \leq a$ მონაკვეთზე თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდისათვის

$$\Theta(\nu) = [\exp(ja\nu) - 1]/(ja\nu); \quad (6.15)$$

m, σ მოცემული პარამეტრების გაუსის შემთხვევითი სიდიდისათვის

$$\Theta(\nu) = \exp(jm\nu - \sigma^2\nu^2/2). \quad (6.16)$$

მახასიათებელი ფუნქციის გამოყენებით, ადვილად მოიპოვება შემთხვევითი სიდიდეების მომენტები, მართლაც, ვინაიდან

$$\frac{d^n \Theta}{d\nu^n} = j^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x) e^{j\nu x} dx,$$

მაშინ, თუ დაუშვებთ, რომ $\nu = 0$ და შევადარებთ (6.3), ვიპოვით $m_n = j^{-n} \Theta^{(n)}(0)$. (6.17)

მახასიათებელი ფუნქციის გამოყენებით, მოსახერხებელია ასევე შემთხვევითი სიდიდეების სიმკვრივის მოპოვება, შევასრულებთ ფუნქციონალურ გარდაქმნას. ასე თუ $y = f(x)$, მაშინ

$$\Theta_y(\nu) = \overline{\exp(j\nu y)} = \overline{\exp[j\nu f(x)]}.$$

თუ შევძლებთ (6.14) სახის ფურიეს გარდაქმნის გამოთვლას, მაშინ დასმული ამოცანა ამოიხსნება.

მაგალითი 6.3. ვთქვათ $y = U_0 \cos x$, სადაც $U_0 = const$, ამ დროს x - შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობაა, რომელიც თანაბრად განაწილებულია $-\pi \leq x \leq \pi$ მონაკვეთზე.

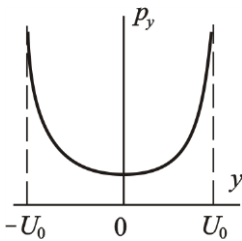
ამოხსნა: ვინაიდან $p_x(x) = 1/(2\pi)$, მაშინ

$$\Theta_y(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(j\nu U_0 \cos x) dx = J_0(\nu U_0),$$

სადაც J_0 - ნულოვანი ინდექსის მქონე პირველი რიგის ბესელის ფუნქციაა.

ტაბულიროვანი ინტეგრალის გამოყენებით [18] ვღებულობთ

$$p_y(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} J_0(\nu U_0) e^{j\nu y} d\nu = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{U_0^2 - y^2}}, & |y| \leq U_0, \\ 0, & |y| > U_0. \end{cases}$$



ნახ. 6.6

ალბათობის სიმკვრივის მახასიათებელი (იხ. ნახ. 6.6) დაკავშირებულია იმასთან, რომ, თუ განვახორციელებთ დიდი ოდენობის ცდების სერიას, და ყოველჯერ შემთხვევითი სახით მოცემული არიდან x მნიშვნელობების ამოღებას, მაშინ $U_0 \cos x$ უფრო ხშირად მიიღებს $\pm U_0$ - თან ახლოს მდებარე მნიშვნელობებს, ვიდრე 0 - თან ახლოს.

6.2. შემთხვევითი სიდიდეების სისტემების სტატისტიკური მახასიათებლები

მიღებულია, რომ შემთხვევითი სიგნალების თვისებები აღიწეროს არა მარტო იმ თვისებების განხილვით, რომელთა დაკვირვება ხდება დროის რომელიმე მომენტში, არამედ ამ სიდიდეების ერთობლიობების შესწავლით, რომლებიც მიეკუთვნება დროის სხვადასხვა ფიქსირებულ მომენტებს. გადავიდეთ მსგავსი მრავალგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდეების თეორიაზე.

6.2.1. განაწილების ფუნქცია და ალბათობის სიმკვრივე

ვთქვათ მოცემულია შემთხვევითი სიდიდეები $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, რომლებიც ქმნიან n -განზომილებიან შემთხვევით ვექტორს X . ერთგანზომილებიანი შემთხვევის ანალოგიით ამ ვექტორის განაწილების ფუნქცია

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n).$$

მისი მოპასუხე – n განზომილებიანი სიმკვრივის ალბათობა $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ აკმაყოფილებს თანაფარდობას

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n &= \\ &= P\{x_1 < X_1 \leq x_1 + dx_1, \dots, x_n < X_n \leq x_n + dx_n\}. \end{aligned}$$

ცხადია, განაწილების ფუნქცია შეიძლება ნაპოვნი იყოს ალბათობის სიმკვრივის ინტეგრირების გზით:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n.$$

ნებისმიერ მრავალგანზომილებიან სიმკვრივეს გააჩნია თვისებები, დამახასიათებელი ალბათობის სიმკვრივისათვის:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0; \quad \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1.$$

თუ გვეცოდინება n -განზომილებიანი სიმკვრივე, ყოველთვის შეიძლება ვიპოვოთ m -განზომილებიანი სიმკვრივე, როცა $m < n$, "ზედმეტი" კოორდინატების მიხედვით ინტეგრირებით:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_{m+1} \dots dx_n;$$

6.2.2. მორენტების ბამოთგლა

თუ გვაქვს ალბათობის შესაბამისი მრავალგანზომილებიანი სიმკვრივე, შეიძლება ვიპოვოთ განსახილველი შემთხვევითი სიდიდეებიდან ნებისმიერი კომბინაციის საშუალო მნიშვნელობები, კერძოდ, გამოვთვალოთ მათი მომენტები. ამგვარად, თუ შემოვიფარგლებით მომავლისათვის უფრო მნიშვნელოვანი ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის შემთხვევით, (6.4)-ის და (6.7)-ის ანალიგით ვიპოვით **მათემატიკურ მოლოდინებს**

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 p(x_1, x_2) dx_1 dx_2; \\ \bar{x}_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_2 p(x_1, x_2) dx_1 dx_2; \end{aligned} \tag{6.18}$$

და დისპერსიებს

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \bar{x}_1)^2 p(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \\ \sigma_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_2 - \bar{x}_2)^2 p(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \end{aligned} \tag{6.19}$$

ერთგანზომილებიან შემთხვევასთან შედარებით ახალს აქ წარმოადგენს მეორე რიგის შერეული მომენტის წარმოქმნის შესაძლებლობა

$$K_{12} = \overline{x_1 x_2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \tag{6.20}$$

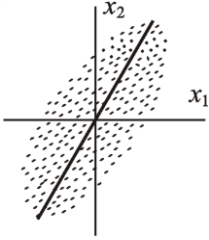
რომელსაც უწოდებენ ორი შემთხვევითი სიდიდის სისტემის **კოვარიაციონულ მომენტს**.

6.2.3. კორელაცია

დავუშვათ, რომ ჩატარებულია ცდების სერია, რომელთა შედეგად ყოველ დროს შეინიშნებოდა ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდე $\{X_1, X_2\}$. პირობითად ყოველი ცდის წარმომავლობა გამოვსახოთ წერტილით დეკარტის სიბრტყეზე.

შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ გამომსახველობითი წერტილები საშუალოდ განლაგებულნი იყვნენ ზოგიერთი წრფის გასწვრივ (იხ. ნახ. 6.7), ასე რომ სიდიდის ყოველი ცალკეული გამოცდისას x_1 -ს და x_2 -ს **ვევლაზე ხშირად ექნებათ ერთნაირი**

ნიშანი. მას მიეყვართ იმ მოსაზრებამდე, რომ x_1 -სა და x_2 -ს

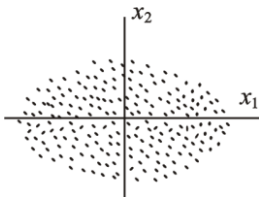


კავშირი,
ნახ. 6.7

შორის არსებობს სტატისტიკური კავშირი, რომელსაც ეწოდება **კორელაცია**.

თუმცადა შესაძლებელია სიბრტყეზე წერტილთა ქაოტური განლაგების შემთხვევა (იხ. ნახ. 6.8).

ამბობენ, რომ ამ დროს განსახილველი სიდიდეები **არაკორელირებულია**, ე.ი. მათ შორის არ არსებობს მდგრადი



ნახ. 6.8

ალბათური აზრით.

ორი შემთხვევითი სიდიდის სტატისტიკური კავშირის ხარისხის რაოდენობრივ მახასიათებელს წარმოადგენს მათი კოვარიაციული მომენტი K_{12} ან, რაც ხშირად უფრო მოსახერხებელია, **კორელაციური მომენტი** R_{12} , განსაზღვრული როგორც ნამრავლის საშუალო მნიშვნე-

ლობა $(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)$:

$$R_{12} = \int \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)p(x_1, x_2)dx_1dx_2 = K_{12} - \bar{x}_1\bar{x}_2 \quad (6.21)$$

შემოაქვთ ასევე **კორელაციის უგანზომილებო კოეფიციენტი**

$$r_{12} = R_{12} / (\sigma_1\sigma_2). \quad (6.22)$$

იმ შემთხვევითი სიდიდეებისთვის, რომლებიც ერთმანეთს ემთხვევიან, როცა $x_1 = x_2$, ადგილი აქვს ტოლობას

$$R_{11} = R_{22} = \sigma^2, \quad r_{11} = r_{22} = 1.$$

თუ შემთხვევითი ვექტორის განზომილება ორზე მეტია, მაშინ შეიძლება ავაგოთ ყველა შესაძლებელი ჯვარედინი კორელაციური მომენტები

$$R_{ij} = \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)p(x_1, \dots, x_n)dx_1 \dots dx_n, \text{ სადაც } i, j = 1, 2, \dots, n,$$

და კორელაციის კოეფიციენტები $r_{ij} = R_{ij} / (\sigma_i\sigma_j)$., რომლებიც ერთიანდება შემდეგი მატრიცის შესაბამისად

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & R_{nn} \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n1} & r_{n1} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

შეიძლება ვახევნოთ, რომ ყოველთვის $|r_{ij}| \leq 1$, ამასთან ცოლობა შესაძლებელია მხოლოდ $x_i = \pm x_j$ პირობისას (მთლიანად კორელირებული სიდიდეები).

6.2.4. შემთხვევითი სიდიდეების სტატისტიკური დამოუკიდებლობა

განმარტების თანახმად, შემთხვევითი სიდიდეები X_1, X_2, \dots, X_n **სტატისტიკურად დამოუკიდებელია**, თუ მათი მრავალგანზომილებიანი ალბათობის სიმკვრივე შეიძლება წარმოდგენილი იყოს შესაბამისი ერთგანზომილებიანი სიმკვრივეების ნამრავლის სახით:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_1(x_1)p_2(x_2) \dots p_n(x_n). \quad (6.23)$$

სტატისტიკურად დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეები ერთმანეთთან არაკორელირებულია. მართლაც, მათთვის

$$R_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \bar{x}_i)p_i(x_i)dx_i \int_{-\infty}^{\infty} (x_j - \bar{x}_j)p_j(x_j)dx_j = 0$$

როცა $i \neq j$. ზოგად შემთხვევაში არასწორია უკუ მტკიცება: არაკორელირებულობიდან ავტომატურად არ გამომდინარეობს შემთხვევითი სიდიდეების დამოუკიდებლობა.

6.2.5. მრავალგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდეების ფუნქციონალური გარდაქმნები

დავუშვათ, რომ ორი შემთხვევითი \bar{X} და \bar{Y} ვექტორის შემდგენელი დაკავშირებულია ცალსახა დამოკიდებულებით

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

.....

$$y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

ამასთან ცნობილია უკუ ფუნქციები

$$x_1 = g_1(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

.....

$$x_n = g_n(y_1, y_2, \dots, y_n).$$

საწყისი ალბათობის სიმკვრივე $P_{საწყ}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ მოცემულია. იმისათვის, რომ განვაზოვადოთ ფორმულა (6.11) მრავალგანზომილებიან შემთხვევაზე და გამოვთვალოთ **გარდაქმნილი** ვექტორის ალბათობის სიმკვრივე $P_{გარ}(y_1, y_2, \dots, y_n)$, საჭიროა ვიპოვოთ **გარდაქმნის იაკობიანი** (იაკობიანი წარმოადგენს პროპორციულობის კოეფიციენტს ელემენტარულ მოცულობებს შორის ფუნქციონალური გარდაქმნისას)

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_n}{\partial y_1} & \frac{\partial g_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}, \quad (6.24)$$

მაშინ საძიებელი ალბათობის სიმკვრივე

$$P_{გარ}(y_1, y_2, \dots, y_n) = P_{საწყ}(g_1, g_2, \dots, g_n) \cdot |D|. \quad (6.25)$$

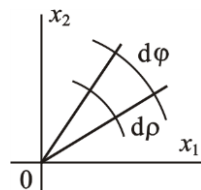
მაგალითი 6.4. ვთქვათ x_1 და x_2 სიბრტყეზე ვექტორის ბოლოს შემთხვევითი კოორდინატებია (ივ. ნახ. 6.9).

გადავიღეთ პოლარულ კოორდინატებზე (ρ, φ) :

$$\begin{cases} x_1 = \rho \cos \varphi, \\ x_2 = \rho \sin \varphi, \end{cases} \begin{cases} 0 \leq \rho < \infty \\ 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

ასეთი გარდაქმნის იაკობიანი

$$D = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho.$$



ნახ. 6.9

ამიტომ თუ მოცემულია ალბათობის სიმკვრივი

$$P_{საწყ}(x_1, x_2), \text{ მაშინ } P_{გარ}(\rho, \varphi) = \rho P_{საწყ}(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi).$$

6.2.6. მრავალგანზომილებიანი ბაჟის ბანაჟილება

დავუშვათ, რომ $\vec{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ n -განზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდისთვის ცნობილია საშუალო მნიშვნელობების m_1, m_2, \dots, m_n და $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$ დისპერსიების ერთობლიობანი, ასევე კორელაციის კოეფიციენტების მატრიცა r .

ზოგად შემთხვევაში ეს ცნობები არასაკმარისია n -განზომილებიანი ალბათობის სიმკვრივის ასაგებად. გამონაკლისს წარმოადგენს შემთხვევა, როცა \vec{X} მრავალგან-

6.2. შემთხვევითი სიდიდეების სისტემების სტატისტიკური ...;

ზომილებიანი გაუსის სიდიდეა. მაშინ, განმარტების თანახმად

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\sigma_1 \dots \sigma_n (2\pi)^{n/2} |r|^{1/2}} \times \exp \left[-\frac{1}{2|r|} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{(x_i - m_i)(x_j - m_j)}{\sigma_i \sigma_j} \right], \quad (6.26)$$

სადაც $|r| - r$ მატრიცის განმსაზღვრელი; $A_{ij} - |r|$ გამსაზღვრელის r_{ij} ელემენტის ალგებრული დამატება.

გაუსის განაწილების მნიშვნელოვანი თვისება მდგომარეობს შემდეგში. ვთქვათ ვექტორი \bar{X} შექმნილია არაკორელირებული შემთხვევითი სიდიდეებით ისე, რომ r მატრიცაში ნულისგან განსხვავებულია მხოლოდ ელემენტები მთავარ დიაგონალზე: $r_{ij} = \sigma_{ij}$ ამასთან $|r| = 1$, ალგებრული დამატება $A_{ij} = \sigma_{ij}$,

ხოლო σ_{ij} არის კორნეკერის სიმბოლო და $\sigma_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$.

წარმოვადგინოთ ეს სიდიდეები (6.26)-ში, მივიღებთ

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\sigma_1 \dots \sigma_n (2\pi)^{n/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - m_i)^2}{\sigma_i^2} \right] = p(x_1) p(x_2) \dots p(x_n),$$

სადაც თითოეულს ერთგანზომილებიანი გაუსის განაწილებებიდან აქვს პარამეტრები $m_i, \sigma_i \dots$

ამრიგად, თუ გაუსის ერთობლიობა შექმნილია არაკორელირებული შემთხვევითი სიდიდეებით, მაშინ ყველა ისინი სტატისტიკურად დამოუკიდებელია.

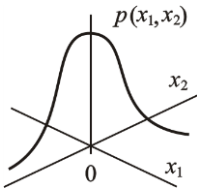
შემდგომში სშირად გამოიყენება ორგანზომილებიანი გაუსის ალბათობის სიმკვრივე $p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \times$

$$\times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(x_1 - m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r \frac{(x_1 - m_1)(x_2 - m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2 - m_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\} \quad (6.27)$$

სადაც $r = r_{12} = r_{21}$ - x_1 და x_2 შემდგენების კორელაციის კოეფიციენტებია.

ეს ფორმულა მარტივდება, თუ $m_1 = m_2 = 0$ და $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$:

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-r^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-r^2)\sigma^2}(x_1^2 - 2rx_1x_2 + x_2^2)\right]. \quad (6.28)$$



ნახ. 6.10

მსგავსი ალბათობის სიმკვრივე აისახება გლუვი ზედაპირით (იხ. ნახ. 6.10), რომელიც აგებულია (x_1, x_2) კოორდინატულ სიბრტყეზე. სიდიდე $p(x_1, x_2)$ აღწევს მაქსიმუმს კოორდინატთა სათავეში. ზედაპირის კონფიგურაცია დამოკიდებულია კორელაციის r კოეფიციენტზე.

6.2.7. მრავალგანზომილებიანი მახასიათებელი ფუნქცია

მახასიათებელ ფუნქციათა ცნებების განზოგადებას წარმოადგენს შესაბამისი ალბათობის სიმკვრივის ფურიეს n -განზომილებიანი გარდაქმნა:

$$\Theta(v_1, v_2, \dots, v_n) = \overline{\exp[j(x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n)]} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp[j(x_1v_1 + \dots + x_nv_n)] p(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (6.29)$$

მრავალგანზომილებიანი მახასიათებელი ფუნქცია აღწერს შემთხვევითი სიდიდეების სისტემას სისრულის იმავე ხარისხით, რასაც მისი მოპასუხე ალბათობის სიმკვრივე, რომელიც გამოისახება ფურიეს გარდაქმნით:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \times \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(v_1, \dots, v_n) \exp[-j(x_1v_1 + \dots + x_nv_n)] dv_1 \dots dv_n \quad (6.30)$$

თუ $\{X_1, \dots, X_n\}$ სტატისტიკურად დამოუკიდებელი სიდიდეების ერთობლიობაა, მაშინ (6.29)-ის საფუძველზე მრავალგანზომილებიანი მახასიათებელი ფუნქცია იშლება ცალკეული შემთხვევითი სიდიდეების ერთგანზომილებიან

მახასიათებელ ფუნქციებად:
$$\Theta(v_1, v_2, \dots, v_n) = \prod_{i=1}^n \Theta_i(v_i) \quad (6.31)$$

(ფუნქციის წარმოდგენას თანამამრავლთა ნამრავლის სახით ეწოდება ამ ფუნქციის ფაქტორიზაცია)

6.2. შემთხვევითი სიდიდეების სისტემების სტატისტიკური ...;

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ მრავალგანზომილებიან გაუსის შემთხვევით სიდიდეს $\vec{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ პასუხობს მახასიათებელი ფუნქცია

$$\Theta(v_1, v_2, \dots, v_n) = \exp \left[j \sum_{k=1}^n m_k v_k - \frac{1}{2} \sum_{k,i=1}^n \sigma_k \sigma_i r_{ki} v_k v_i \right] \quad (6.32)$$

სადაც m_k და σ_k^2 X_k შემთხვევითი სიდიდის საშუალო მნიშვნელობა და დისპერსიაა, r_{ki} კორელაციური მატრიცის ელემენტი.

6.2.8. შემთხვევით სიდიდეთა ჯამის ალბათობის სიმკვრივე

თუ (6.29) ფორმულაში დაეუშვებთ $v_1 = v_2 = \dots = v_n = v$, მაშინ მრავალგანზომილებიანი მახასიათებელი ფუნქცია გადადის $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ ჯამის ერთგანზომილებიან მახასიათებელ ფუნქციაში:

$$\Theta_{\Sigma}(v) = \exp jv(x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

აქედან, თუ შევასრულებთ ფურიეს უკუგარდაქმნას, შეიძლება ვიპოვოთ ამ ჯამის ალბათობის სიმკვრივე. მაგალითად, თუ $\{X_1, \dots, X_n\}$ გაუსის არაკორელირებული (და მაშასადამე დამოუკიდებელიც) შემთხვევითი სიდიდეებია, თითოეული m_k , σ_k პარამეტრებით, მაშინ (6.32)-დან

$$\text{გამომდინარეობს, რომ } \Theta(v) = \exp \left[jv \sum_{k=1}^n m_k - \frac{1}{2} v^2 \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 \right]. \quad (6.33)$$

(ეს არის მახასიათებელი ფუნქციის თვისება)

ამ შედეგის შედარებით (6.16) ფორმულასთან ვრწმუნდებით, რომ ნორმალური შემთხვევითი სიდიდეების ჯამი განაწილებულია ასევე ნორმალურად, ამასთან შესაკრებთა მათემატიკური მოლოდინი და დისპერსია ჯამდება:

$$m_{\Sigma} = \sum_{k=1}^n m_k, \quad \sigma_{\Sigma}^2 = \sum_{k=1}^n m \sigma_k^2. \quad (6.34)$$

ალბათობის თეორიაში მტკიცდება გაცილებით უფრო ძლიერი დებულება, რომელიც წარმოადგენს **ა.მ. ლიაპუნოვის ცენტრალური ზღვრული თეორემის** არსს [19]. ამ თეორემის თანახმად, დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების ჯამის განაწილება, რომელთა დისპერსიები სასრულია, ხოლო ალბათობის განაწილებანი ნებისმიერი, ზოგიერთი შეზღუდვებისას, როგორც წესი, შესრულებად ფიზიკურ ამოცანებში, შესაკრებთა რიცხვის ზრდით მიისწრაფის გაუსისკენ.

6.3 შემთხვევითი პროცესები

შემთხვევითი სიდიდეების თეორია შეისწავლის ალბათურ მოვლენებს "სტატისტიკაში". სიგნალების აღსაწერად, რომლებიც ასახავენ დროში ცვლად განვითარებად მოვლენებს, არასაკმარისია კლასიკური ალბათობის თეორიის მეთოდების გამოყენება. მსგავს ამოცანებს შეისწავლის **შემთხვევითი პროცესების თეორია**.

შემთხვევითი პროცესის ცნება: შემთხვევითი $X(t)$ პროცესი არის განსაკუთრებული ფუნქცია, რომელიც ხასიათდება იმით, რომ ის დროის ნებისმიერ t მომენტში დებულობს შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობებს.

6.3.1. რეალიზაციის ანსამბლი

თუ საქმე გვაქვს დეტერმინირებულ სიგნალებთან, ჩვენ ავსახავთ მათ ფუნქციონალური დამოკიდებულებებით ან ოსცილოგრამებით. შემთხვევით პროცესებში სიტუაცია გაცილებით რთულია. **დროის რაიმე შუალედში დაფიქსირებული შემთხვევითი სიგნალის მყისიერი მნიშვნელობები, ვლებულობთ მხოლოდ ერთ განუმეორებელ რეალიზაციას.** შემთხვევითი პროცესი წარმოადგენს ასეთი სახის რეალიზაციების უსასრულო ერთობლიობას, რომლებიც ქმნიან **სტატისტიკურ ანსამბლს**. მაგალითად, ანსამბლი არის სიგნალების გროვა $\{x_1(t), x_2(t), \dots\}$, რომლებსაც შესაძლებელია ერთდროულად დაგაკვირდეთ ერთნაირი ხმაურის ძაბვის გენერატორების გამოსასვლელებზე (იხ. ნახ. 6.10).

ხშირად ცდილობენ შემთხვევითი პროცესები წარმოიდგინონ ყველანაირი პარამონიული სიგნალებით $U \cos(\omega t + \varphi)$, რომელთა საში U , ω , φ პარამეტრიდან ერთ-ერთი შემთხვევითი სიდიდეა, რომელიც დებულობს განსაზღვრულ მნიშვნელობას თითოეული რეალიზაციის დროს. შეუძლებელია წინასწარ ვიცოდეთ ამ პარამეტრის მნიშვნელობა.

შემთხვევით პროცესებს, შექმნილი რეალიზაციებით, რომლებიც დამოკიდებულია ზღვრული პარამეტრების რიცხვზე, ეწოდება **კვაზიდეტერმინირებული შემთხვევითი პროცესები**.

6.3.2. შემთხვევითი პროცესების ალბათობის სიმკვრივე

ვთქვათ $X(t)$ - შემთხვევითი პროცესია, რომელიც მოცემულია რეალიზაციების ანსამბლით, ხოლო t_1 - რაიმე ნებისმიერი დროის მომენტი, თუ დავაფიქსირებთ $\{x_1(t_1), x_2(t_1), \dots, x_k(t_1), \dots\}$

სიდიდეების ცალკეულად აღებულ რეალიზაციებში და განვახორციელებთ ერთ განზომილებას შემთხვევითი პროცესის კვეთას, დავაკვირდებით შემთხვევით სიდიდეს $X(t_1)$. მისი ალბათობის სიმკვრივეს $p(x, t_1)$ ეწოდება $X(t)$ პროცესის ერთ განზომილებიანი ალბათობის სიმკვრივე t_1 დროის მომენტში. განსაზღვრის თანახმად, სიდიდე $dP = p(x, t_1)dx$ არის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი პროცესის რეალიზაცია დროის t_1 მომენტში მიიღებს მნიშვნელობებს, რომლებიც განლაგდება $(x, x + dx)$ ინტერვალში.

მნიშვნელოვნად მეტი ინფორმაცია შესაძლებელია მივიღოთ, თუ გვექნება შემთხვევითი პროცესის კვეთები არათანხვედრი დროის t_1 და t_2 მომენტებში. ასეთი ორ განზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდე $\{X(t_1), X(t_2)\}$ აღიწერება ორ განზომილებიანი ალბათობის სიმკვრივე $p(x_1, x_2, t_1, t_2)$. შემთხვევითი პროცესის ეს მახასიათებელი გვაძლევს იმის ხდომილობის ალბათობას, რომ შემთხვევითი პროცესის რეალიზაცია, როცა $t = t_1$ მოხდება x_1 წერტილის მცირე მიდამოში, ხოლო როცა $t = t_2$ მოხდება x_2 წერტილის მცირე მიდამოში.

ბუნებრივი განზოგადებაა შემთხვევითი პროცესის n - განზომილებიანი ($n > 2$) კვეთა, რომელსაც მივეყვართ n - განზომილებიანი ალბათობის სიმკვრივესთან.

მრავალგანზომილებიანი შემთხვევითი პროცესის ალბათობის სიმკვრივე უნდა აკმაყოფილებდეს ჩვეულებრივ პირობებს, რომლებიც ედება შემთხვევითი სიდიდეების ალბათობის სიმკვრივის ერთობლიობას (იხ. §6.2). გარდა ამისა, $p(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n)$ სიდიდე არ უნდა იყოს დამოკიდებული მისი არგუმენტების განლაგების წყობის რიგზე (სიმეტრიულობის პირობა).

ზოგჯერ ალბათობის სიმკვრივის n - განზომილებიანი სიმკვრივის ნაცვლად მოხერხებულია n - განზომილებიანი მახასიათებელი ფუნქციის გამოყენება, რომელიც დაკავშირებულია შესაბამის ფურიეს გარდაქმნის სიმკვრივესთან (6.35):

$$\Theta(u_1, u_2, \dots, u_n, t_1, t_2, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) \exp[j(u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_n x_n)] dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

შემთხვევითი პროცესების თვისებების აღწერა მრვალგანზომილებიანი მაღალი რივის ალბათობის სიმკრივეებით შესაძლებელია იყოს ძალზე ვრცელი. მაგრამ ამ გზაზე ხშირად გვხვდება სერიოზული მათემატიკური სირთულეები.

6.3.3. შემთხვევითი პროცესების მომენტური ფუნქციები

როგორც წესი, პრაქტიკული თვალსაზრისით მისაღები შემთხვევითი პროცესების მახასიათებლები, შესაძლებელია მივიღოთ იმ შემთხვევითი სიდიდეების მომენტების გამოთვლით, რომლებიც შეიმჩნევა ასეთი პროცესების კვებებში. ვინაიდან ზოგად შემთხვევაში ეს მომენტები დამოკიდებულია დროში ცვლად არგუმენტებზე, მათ მიიღეს დასახელება **მომენტური ფუნქციები**.

სტატისტიკურ რადიოტექნიკაში მნიშვნელოვანია დაბალი რივის სამი მომენტური ფუნქცია, დასახელებით **მათემატიკური მოლოდინი, დისპერსია და კორელაციის ფუნქცია**.

მათემატიკური მოლოდინი
$$m(t) = \overline{x(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x,t)dx \quad (6.36)$$

არის პროცესის $X(t)$ საშუალო მნიშვნელობა t დროის მიმდინარე მომენტში; გაშუალდება ტარდება პროცესის რეალიზაციის სრულ ანსამბლზე,

დისპერსია
$$\sigma^2(t) = \overline{[x(t) - m(t)]^2} = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - m(t)]^2 p(x,t)dx \quad (6.37)$$

იძლევა მყისიერი მნიშვნელობების გაბნევის ხარისხის შეფასების საშუალებას საშუალო მნიშვნელობის მიმართ, რომლებსაც დებულობს ცალკეული რეალიზაცია t დროის ფიქსირებულ კვეთაში.

ორგანზომილებიანი ცენტრალური მომენტი

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= \overline{[x(t_1) - m(t_1)][x(t_2) - m(t_2)]} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x(t_1) - m(t_1)][x(t_2) - m(t_2)] p(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (6.38)$$

ეწოდება $X(t)$ შემთხვევითი პროცესის კორელაციის ფუნქციას. ეს მომენტური ფუნქცია ახასიათებს იმ შემთხვევითი სიდიდეების სტატისტიკური კავშირის ხარისხს, რომლებიც შეიმჩნევა $t=t_1$ და $t=t_2$ დროს. თუ შევადარებთ (6.37) და (6.38), შევაძინებთ, რომ თუ კვეთებს შევათავსებთ, მაშინ კორელაციის ფუნქცია რიცხობრივად გაუტოლდება დისპერსიას:

$$R(t_1, t_2) \Big|_{t_1=t_2=t} = \sigma^2(t). \quad (6.39)$$

6.3.4. სტაციონარული შემთხვევითი პროცესები

ასე ეწოდება შემთხვევით პროცესებს, რომლის სტატისტიკური მახასიათებლები ერთნაირია ყველა კვეთებში.

შემთხვევითი სიგნალები არის სტაციონარული შემთხვევითი პროცესების ტიპური რეალიზაციები, რომლებიც შეადგენენ ფართოდ გავრცელებული შემთხვევითი რხევების კლასს.

ამბობენ, რომ შემთხვევითი პროცესი არის **სტაციონარული ვიწრო გაგებით**, თუ მისი n -განზომილებიანი ალბათობის სიმკვრივე ინვარიანტულია τ დროის წანაცვლების მიმართ:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) = P(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau). \quad (6.40)$$

თუ კი მოთხოვნა შევზღუდოთ იმით, რომ პროცესის მათემატიკური მოლოდინი m და σ^2 დისპერსია არ იყოს დამოკიდებული დროზე, ხოლო კორელაციის ფუნქცია დამოკიდებული იყოს მხოლოდ $\tau = |t_2 - t_1|$, ანუ $R(t_1, t_2) = R(\tau)$ სხვაობაზე, მაშინ ასეთი შემთხვევა იქნება **სტაციონარული ფართო გაგებით**.

განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ სტაციონარული პროცესის კორელაციის ფუნქცია არის **ლუწი**: $R(\tau) = R(-\tau)$.

ამის გარდა, ამ ფუნქციის აბსოლუტური მნიშვნელობა ნებისმიერი τ -ს მნიშვნელობისათვის არ აღემატება ფუნქციის მნიშვნელობას, როცა $\tau = 0$:

$$|R(\tau)| \leq R(0) = \sigma^2. \quad (6.41)$$

დამტკიცების მეთოდი ასეთია: ჭეშმარიტი უტოლობიდან

$$\begin{aligned} \overline{[(x(t) - m) - (x(t + \tau) - m)]^2} &\geq 0 && \text{გამომდინარეობს, რომ} \\ \overline{[(x(t) - m)]^2} - 2\overline{[(x(t) - m)][x(t + \tau) - m]} &\geq \overline{[x(t + \tau) - m]^2} = \\ &= 2\sigma^2 - 2R(\tau) \geq 0, \end{aligned}$$

აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს (6.41) უტოლობა.

სწორად გამოსაყენებლად მოსახერხებელია ნორმირებული კორელაციური ფუნქცია $r(\tau) = R(\tau)/\sigma^2$, (6.42) რომლისათვის $r(0) = 1$.

სტაციონარული შემთხვევითი პროცესის ცნების ილუსტრაციისათვის განვიხილოდ ორი მაგალითი.

მაგალითი 6.5. $U(t)$ შემთხვევითი პროცესი შექმნილია შემდეგი სახის $u(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ რეალიზაციებით, სადაც U_m და ω_0 წინასწარ ცნობილია, მაშინ როცა ფაზური კუთხე φ - შემთხვევითი სიდიდეა, რომელიც თანაბრად არის განაწილებული $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ მონაკვეთზე. აკმაყოფილებს თუ არა მოცემულ შემთხვევაში პროცესი ფართო გაგებით სტაციონარულობის აუცილებელ პირობებს?

ამოხსნა: ვინაიდან ფაზური კუთხის სიმკვრივე $p_\varphi = 1/(2\pi)$, მაშინ პროცესის მათემატიკური მოლოდინი

$$\bar{u} = \overline{U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)} = \frac{U_m}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega_0 t + \varphi) d\varphi = 0.$$

ანალოგურად შეიძლება ვიპოვოთ დისპერსია:

$$\sigma^2 = [u - \bar{u}]^2 = U_m^2 \overline{\cos^2(\omega_0 t + \varphi)} = U_m^2 / 2.$$

ბოლოს, კორელაციის ფუნქცია იქნება:

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= \overline{U_m^2 \cos^2(\omega_0 t_1 + \varphi) \cos(\omega_0 t_2 + \varphi)} = \\ &= \frac{1}{2} U_m^2 \left\{ \overline{\cos[\omega_0(t_1 + t_2) + 2\varphi]} + \overline{\cos \omega_0(t_2 - t_1)} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} U_m^2 \cos \omega_0(t_2 - t_1). \end{aligned}$$

მაშასადამე, მოცემული შემთხვევითი პროცესი აკმაყოფილებს ყველა აუცილებელ პირობას, რომ უზრუნველყოფილი იქნეს სტაციონარობა ფართო გაგებით.

მაგალითი 6.6. $U(t)$ შემთხვევითი პროცესი შექმნილია შემდეგი სახის $u(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ რეალიზაციებით, სადაც ω_0 და φ - მოცემული რიცხვებია. U_m - შემთხვევითი სიდიდეა ნებისმიერი განაწილების კანონით. იქნება თუ არა სტაციონარული ეს პროცესი?

ამოხსნა: ვინაიდან პროცესის მათემატიკური მოლოდინი $\bar{u}(t) = \overline{U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)}$ არ იქნება დამოკიდებული დროზე მხოლოდ მაშინ, როცა შესრულდება $\bar{U}_m = 0$ პირობა, ამიტომ ზოგად შემთხვევაში განხილული შემთხვევითი პროცესი იქნება არასტაციონარული.



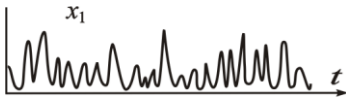
6.4. VI თავის მოკლე მიმოხილვა
(ძირითადი დებულებები, თანაზარდობები და
თავისებურებანი

6.4.1. თავის შედეგები

- ალბათური კანონზომიერებანი გამოვლინდება ფიზიკურ სისტემებში, რომლებიც შეიქმნება დიდი რაოდენობის უფრო წვრილი ქვესისტემებიდან.
- შემთხვევითი სიდიდის ძირითადი მახასიათებლებებია: **განაწილების ფუნქცია** და **ალბათობის სიმკვრივე**.
- რიცხვითი პარამეტრები, რომლებიც აღწერენ შემთხვევით სიდიდეს, არის **მომენტები**, ისეთი როგორცაა, მაგალითად, მათემატიკური მოლოდინი და დისპერსია.
- მიღებულია მრავალგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის ცალკეული მდგენელების სტატისტიკური კავშირები აღიწერებოდა მეორე რიგის შერეული მომენტებით, რომლებსაც ეწოდება **კორელაციის კოეფიციენტები**.
- არაკორელირებული გაუსის სიდიდეები სტატისტიკურად დამოუკიდებელია.
- ცენტრალური ზღვრული თეორემის შესაბამისად, დიდი რიცხვის დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების ჯამი შესაკრებების რიცხვის გაზრდისას განაწილებულია ნორმალური კანონით.
- შემთხვევითი პროცესი მოიცემა უსასრულო რეალიზაციების ანსამბლით.
- შემთხვევითი პროცესის **უმნიშვნელოვანესი** მომენტური ფუნქციებია: მათემატიკური მოლოდინი, დისპერსია და კორელაციის ფუნქცია.
- თუ შემთხვევითი პროცესის სტატისტიკური მახასიათებლები დროში უცვლელია, მაშინ პროცესს ეწოდება **სტაციონარული**
- სტაციონარული **ერგოდიული** შემთხვევითი პროცესების მახასიათებლები შესაძლებელია შეისწავლებოდეს ექსპერიმენტალურად საკმარისად გრძელი ერთადერთი რეალიზაციის ანალიზის ჩატარებისას.
- გაუსის სტაციონარული შემთხვევითი პროცესის ნებისმიერი მრავალგანზომილებიანი ალბათობის სიმკვრივე შესაძლებელია გამოვთვალოთ, თუ გვეცოდინება მისი მათემატიკური მოლოდინი და კორელაციის ფუნქცია.

6.4.2. საკონტროლო კითხვები

1. როგორ ფორმულირდება ალბათობის თეორიის აქსიომები?
2. რაშია განსხვავება მათემატიკური და ექსპერიმენტული (ამორჩევითი) ალბათობების ცნებებს შორის?
3. მოიყვანეთ შემთხვევითი სიდიდის ალბათობის სიმკვრივის ძირითადი თვისებები?
4. როგორ უნდა მოვიპოვოთ შემთხვევითი სიდიდის ალბათობის ფუნქციის სიმკვრივე ერთ- და არაერთკავშირების დროს?
5. როგორ არის დაკავშირებული ერთმანეთთან ალბათობის სიმკვრივე და შემთხვევითი სიდიდის მახასიათებელი ფუნქცია?
6. რა აზრი აქვს ორი შემთხვევითი სიდიდის კორელაციის ცნებას?
7. რა არის უფრო მკაცრი მოთხოვნა – არაკორელირება თუ შემთხვევითი სიდიდის სტატისტიკური დამოუკიდებლობა?
8. რა თვისებებით განსხვავდებიან მრავალგანზომილებიანი გაუსის შემთხვევითი სიდიდეები?
9. როგორ ფორმულირდება ცენტრალური ზღვრული თეორემა?
10. და განსხვავებაა ორ ცნებას შორის – ”შემთხვევითი პროცესი” და ”შემთხვევითი რეალიზაცია”?
11. ექსპერიმენტულად მიღებულია ნახ. მ.6.1 მოყვანილი შემთხვევითი სიგნალის რეალიზაცია:



ნახ. მ.6.1

- პრინციპულად შეიძლება თუ არა მოყვანილი სიგნალი მიეკუთვნებოდეს გაუსის შემთხვევითი პროცესის რეალიზაციის ანსამბლს?
12. მოიყვანეთ სტაციონარული შემთხვევითი პროცესის ცნებების განსაზღვრებები ფართო და ვიწრო გაგებით?
 13. რაში მდგომარეობს ერგოდიული შემთხვევითი პროცესის განსხვავებული თვისება?
 14. რა ფიზიკური აზრი აქვს ერგოდიული შემთხვევითი პროცესის დისპერსიას?
 15. როგორ განისაზღვრება ორი შემთხვევითი პროცესის ურთიერთკორელაციური ფუნქციის ცნება?

6.4.3. ბამოთვლის ზოგადი მეთოდება

ზოგადი მეთოდი არ არსებობს. ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში მაგალითის/ამოცანის ამოხსნას უნდა მიუსადაგოთ შესაბამისი მათემატიკური აპარატი და ლოგიკური მსჯელობით ამოხსნათ დასმული მაგალითი ან ამოცანა.

6.4.4. ტიპიური ამოცანების ამოხსნის მაგალითები

6.4.4.1. შემთხვევითი ხლომილობა და მისი ალბათობა

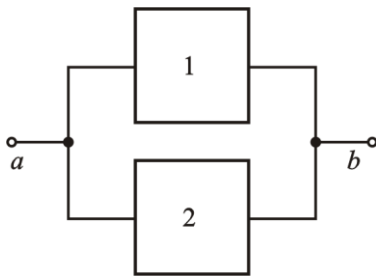
მაგალითი მ.6.1. ორი A და B პირი, რიგრიგობით ავღებენ სათამაშო ძვალს. თამაშს იწყებს A . იგებს ის, რომელიც პირველი ამოავდებს 6 ქულას. იპოვეთ P_A ალბათობა იმისა, რომ მოიგებს A პირი.

ამოხსნა: გამოიყენეთ არათავსებადი მოვლენის ალბათობის გამოთვლის წესი. ავღნიშნოთ n -იანის ამოვარდნა X სიმბოლოთი, ხოლო ნებისმიერი სხვა რიცხვისა ერთიდან ხუთამდე - Y სიმბოლოთ. A პირის მოგებისაკენ მიყვავართ შემდეგ სიტუაციებს: X -ალბათობით $1/6$; YYX - ალბათობით $(5/6)^2 \cdot 1/6$; $YYYYX$ - ალბათობით $(5/6)^4 \cdot 1/6$ და ა.შ. აქედან ადვილად ჩანს, რომ A პირის მოგების ალბათობა გამოითვლება შემდეგი ფორმულით

$$P_A = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{2n} = \frac{1}{6} \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2\right]^{-1} = 0.545,$$

ანუ პირს, რომელიც იწყებს თამაშს, აქვს მცირე უპირატესობა.

მაგალითი მ.6.5. რაღაც სისტემა, რომელიც გადასცემს სიგნალებს a წერტილიდან b წერტილში, მოყვანილია ნახ. მ.6.2 -ზე. სისტემა შეიცავს ორ ელემენტს, რომლებიც არეზერვებენ ერთმანეთს. ნორმალური ფუნქციონირება სრულდება, თუ ერთ-ერთი ამ ელემენტებიდან მუშა მდგომარეობაშია.



ნახ. მ.6.2

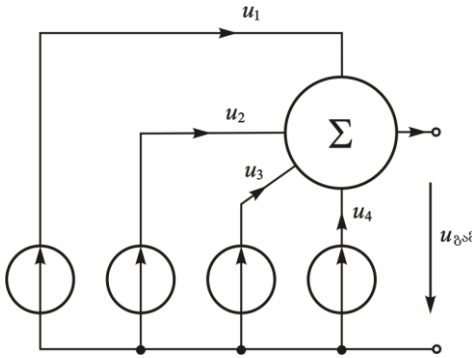
მუშაობის P ალბათობა დროის იგივე შუალედში.

ცნობილია, რომ რაიმე დროის შუალედში 1 ელემენტი მუშაობს გამართულად ალბათობით $P_1 = 0.8$, ხოლო ელემენტი 2 - ალბათობით $P_2 = 0.7$. იპოვეთ სარეზერვო სისტემის გამართული

მითითება: შეადგინეთ შემთხვევების სრული ჯგუფი, რომლებიც პასუხობს სისტემის გამართულ მუშაობას. გამოიყენეთ ჯგუფის არათავსებადი შემთხვევების ალბათობის გამოთვლის წესი.

ამოხსნა: ვინაიდან $P = P_1P_2 + P_1(P_1 - P_2) + P_2(1 - P_1) = 0.94$

მაგალითი მ.6.6. ამჯამავის (სუმატორის) შესასვლელზე (იხ. ნახ. მ.6.3) მიეწოდება ოთხი დამოუკიდებელი, დროში მუდმივი, შემთხვევითი u_1, u_2, u_3 და u_4 ძაბვები. ამ ძაბვებიდან თითოეულს



ნახ. მ.6.3

შეუძლია ტოლი ალბათობით მიიღოს 0.5 ვ მნიშვნელობა (პოტენციალის "დაბალი" დონე) ან 4.5 ვ (პოტენციალის "მაღალი" დონე).

განსაზღვრეთ ძაბვების $u_{გამ}$ ერთობლიობა ამჯამავის გამოსასვლელზე მათი გამოჩენის ალბათობებთან ერთად.

მითითება: გამოიყენეთ შესასვლელი ძაბვების სტატისტიკური დამოუკიდებლობით. შეადგინეთ შემთხვევების სრული ჯგუფი

პასუხი: $u_{გამ} = \{2\text{ვ}, 6\text{ვ}, 10\text{ვ}, 14\text{ვ}, 18\text{ვ}\}$.

6.4.4.2. ბანაწილევის ფუნქცია და ალბათობის სიმკვრივე. მონომენტები

ამოცანა მ.6.8. X შემთხვევითი სიდიდის ალბათობის

სიმკვრივეს აქვს სახე
$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 2/(1+x)^3, & x \geq 0. \end{cases}$$

იპოვეთ მოცემული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების $F(x)$ ფუნქცია, ასევე შემთხვევითი წერტილის $[0, 1]$

მონაკვეთის შიგნით მოხვედრის ალბათობა $P(0 \leq X \leq 1)$.

ამოხსნა: განსაზღვრების თანახმად

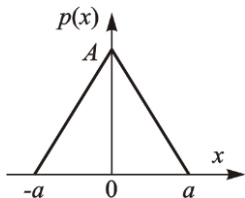
$$F(x) = \int_0^x p(\xi)d(\xi) = 2 \int_0^1 \frac{d(\xi)}{(1+\xi)^3}.$$

შეცვალეთ ξ ცვლადი $\eta = 1 + \xi$ -ით, გექნება

$$F(x) = 2 \int_1^{1+x} d\xi/\xi^3 = 1 - (1+x)^{-2}.$$

შემდეგ, $P(0 \leq X \leq 1) = F(1) - F(0) = 0.75$

ამოცანა 6.10. უწყვეტ შემთხვევით სიდიდეს X აქვს სამკუთ-
სა ფორმის ალბათობის სიმკვრივის $p(x)$
გრაფიკი (იხ. ნახ. 6.4). პარამეტრი a -
მოცემული რიცხვია, სიდიდე A წინასწარ
უცნობია. მიიღეთ ფორმულა, რომელიც
აღწერს $p(x)$ ფუნქციას.



ნახ. 6.4

ამოხსნა:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < -a, \\ (a+x)/a^2, & -a \leq x < 0, \\ (a-x)/a^2, & 0 \leq x < a, \\ 0, & x \geq a. \end{cases}$$

ამოცანა 6.11. შემთხვევითი სიდიდე $m=0$, $\sigma=2$ პარა-
მეტრებით განაწილებულია ნორმალური კანონის მიხედვით.
იპოვეთ ამ შემთხვევითი სიდიდის მოხვედრა $0 < x \leq 2$ ნახე-
ვარინტერვალში.

პასუხი: ფორმულის $P(a < x \leq b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$

გამოყენებით მოცემულ შემთხვევაში მივიღებთ

$$P(0 < x \leq 2) = \Phi(1) - \Phi(0) = 0.341.$$

ამოცანა 6.13. იპოვეთ შემთხვევითი სიდიდის R ალბათო-
ბის სიმკვრივე. R არის ორი პარალელურად შეერთებული რე-
ზისტორის წინაღობა. ერთ მათგანს აქვს ფიქსირებული
წინაღობა R_0 , მაშინ როცა მეორის წინაღობა შემთხვევითი
სიდიდეა, რომელიც თანაბრად არის განაწილებული მონაკვეთ-
ზე $[R_0 - a, R_0 + a]$, სადაც $a < R_0$ - მუდმივი რიცხვებია.

ამოხსნა: ვინაიდან $R = rR_0/(r+R_0)$, მაშინ მისი შებრუნებუ-
ლი ფუნქციაა $r = RR_0/(R_0 - R)$, ხოლო მისი წარმოებულია
 $dr/dR = R_0^2/(R_0 - R)^2$. r წინაღობის ალბათობის სიმკვრივეს აქვს
სახე $p(r) = 1/(2a)$, ამიტომ $p(R) = p(r) \cdot |dr/dR| = R_0^2/[2a(R_0 - R)^2]$.
 R წინაღობა იცვლება შემდეგ ზღვრებში

$$R_{\min} = \frac{R_0(R_0 - a)}{2R_0 - a} \text{ -დან } R_{\max} = \frac{R_0(R_0 + a)}{2R_0 + a} \text{ -დე.}$$

საბოლოოდ

$$p(R) = \begin{cases} 0 & , \quad R < R_{\min} \\ R_0^2 / [2a(R_0 - R)^2] & , \quad R_{\min} < R < R_{\max} \\ 0 & , \quad R > R_{\max} \end{cases} .$$

ამოცანა 6.6.14. დამოუკიდებელ X და Y შემთხვევით სიდიდეებს აქვს სპექტრული სიმკვრივები $p_1(x)$ და $p_2(y)$, შესაბამისად. იპოვეთ შემთხვევითი $Z = X + Y$ სიდიდის სპექტრული სიმკვრივე $p_3(z)$.

ამოხსნა: განვიხილოთ ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდე $W = (X, Y)$. ვინაიდან X და Y დამოუკიდებელია, მაშინ $p_w(x, y) = p_1(x) \cdot p_2(y)$. გადავიდეთ (x, y) არგუმენტებიდან ახალ (x, z) არგუმენტებზე, სადაც $z = x + y$. ვინაიდან **იაკობიანი** $D = 1$, მაშინ ახალ ცვლადებში ალბათობის ორგანზომილებიანი სპექტრული სიმკვრივე იქნება $p_w(x, z) = p_1(x) \cdot p_2(z - x)$. აქედან ჯამის ალბათობის სპექტრული სიმკვრივე არის შესაბამისი ალბათობების სიმკვრივების ნახევვი:

$$p_3(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x) \cdot p_2(z - x) dx.$$

ამბობენ, რომ მოყვანილი გამოსახულება აღწერს ორი კანონის განაწილების კომპოზიციას.

ამოცანა 6.6.19. გამოთვალეთ **ამოცანა 6.6.8** -ში განხილული X შემთხვევითი სიდიდის \bar{x} საშუალო მნიშვნელობა და \bar{x}^2 საშუალო კვადრატი.

ამოხსნა: გაშუალდების პრინციპიდან გამომდინარე

$$\bar{x} = 2 \int_0^{\infty} \frac{\xi d\xi}{(1 + \xi)^3} = 2 \int_1^{\infty} \frac{d\eta}{\eta^2} - 2 \int_1^{\infty} \frac{d\eta}{\eta^3} = 1$$

საშუალო კვადრატის პოვნა დადის ინტეგრალის გამოთვლაზე $\bar{x}^2 = 2 \int_0^{\infty} \frac{\xi^2 d\xi}{(1 + \xi)^3} = 2 \left[\ln(1 + \eta) + \frac{1}{1 + \eta} - \frac{1}{2(1 + \xi)^3} \right] \Big|_0^{\infty} = \infty$

მ.შ. აქ განხილულ შემთხვევით სიდიდეს გააჩნია უსასრულოდ დიდი დისპერსია.

ამოცანა 6.21. უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდე X თანაბრად არის განაწილებული $a < x \leq b$ ნახევარმონაკვეთზე. გამოთვალეთ შემთხვევითი სიდიდის $m_1 = \bar{x}$ საშუალო მნიშვნელობა, $m_2 = \bar{x}^2$ საშუალო კვადრატი და $\sigma_x^2 = m_2 - m_1^2$ დისპერსია.

ამოხსნა: მოცემულ შემთხვევაში

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{b+a}{2},$$

ანუ საშუალო მნიშვნელობა ემთხვევა შუა მონაკვეთს. **შენდავ**

$$\bar{x}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}.$$

და ბოლოს,
$$\sigma_x^2 = \bar{x}^2 - (\bar{x})^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

ამოცანა 6.22. შემთხვევით X სიდიდეს აქვს ცალმხრივი ექსპონენციალური ალბათობის სიმკვრივე

$$p(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & \text{როცა } x \geq 0, \\ 0 & \text{როცა } x < 0. \end{cases}$$

იპოვეთ ამ შემთხვევითი სიდიდის \bar{x} საშუალო მნიშვნელობა და σ_x^2 დისპერსია.

მითითება. ისარგებლეთ **ტაბულირებული** ინტეგრალით

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} = n! a^{-n-1}.$$

პასუხი: $\bar{x} = 1/\lambda$, $\sigma_x^2 = 1/\lambda^2$.

ამოცანა 6.24. უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდე X თანაბრად არის განაწილებული მონაკვეთზე $[0, 1]$. იპოვეთ Z შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური მოლოდინი და დისპერსია, რომლის თითოეული რეალიზაცია უდრის მონაკვეთების სიგრძეების ნამრავლს, რომლებზეც გაყოფილია მონაკვეთი x შემთხვევითი წერტილით.

ამოხსნა: როგორც ჩანს, $z = x(1-x)$. ალბათობის სიმკვრივე

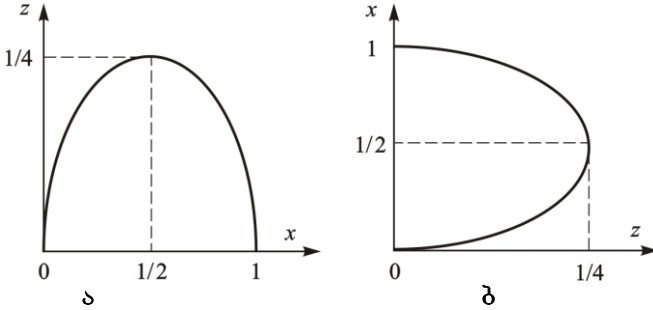
$p(x=1)$. მაშინ $\bar{z} = \int_0^1 x(1-x)dx = 1/6$ და $\bar{z}^2 = \int_0^1 x^2(1-x)^2 dx = 1/30$.

აქედან
$$\sigma_x^2 = \bar{z}^2 - (\bar{z})^2 = \frac{1}{30} - \frac{1}{36} = \frac{1}{180}.$$

6.4.4.3. შემთხვევითი სიდიდის ფუნქციონალური ბარდაქმნა.
მრავალზომიერობიანი შემთხვევითი სიდიდეები

ამოცანა 6.25. იპოვეთ Z შემთხვევითი სიდიდის ალბათობის სიმკვრივე, განხილული ამოცანა 6.24-ში.

ამოხსნა: თუ $z = x(1-x)$ (ნახ. მ.6.5, ა), მაშინ შებრუნებული ფუნქცია $x = 1/2 \pm \sqrt{1/4 - z}$ ორნიშნაა (ნახ. მ.6.5, ბ). მისი წარმოე-

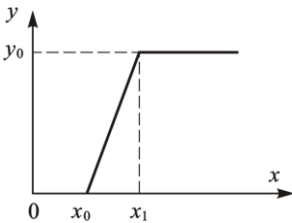


ნახ. მ.6.5

ბული $\frac{dx}{dz} = \frac{\mp 1}{2\sqrt{1/4 - z}}$, საიდანაც

$$p(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ 1/\sqrt{1/4 - z}, & 0 < z \leq 1/4, \\ 0 & z > 1/4. \end{cases}$$

ამოცანა მ.6.26. X შემთხვევით სიდიდეს აქვს ცალმხრივი ექსპონენციალური ალბათობის სახის სიმკვრივე



ნახ. მ.6.6

$$p(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & \text{როცა } x \geq 0, \\ 0 & \text{როცა } x < 0. \end{cases}$$

ფიქსირებული $\lambda > 0$ პარამეტრის მნიშვნელობით. შემთხვევითი სიდიდე Y მიიღება X -დან ფუნქციური გარდაქმნის გზით. გარდაქმნის გრაფიკი მოყვანილია ნახ. მ.6.6-ზე.

განსაზღვრეთ გარდასაქმნელი შემთხვევითი სიდიდის ალბათობის სიმკვრივე $P_{\text{გარ}}(y)$.

პასუხი:
$$p_{\text{გარ}}(y) = \begin{cases} 0 & , \quad y < 0 \\ (1 - e^{-\lambda x_0}) \delta(y) + \lambda e^{-\lambda x_0} e^{-\lambda y(x_1 - x_0)/y_0} \times \\ \quad \times (x_1 - x_0)/y_0 + e^{-\lambda x_1} \delta(y - y_0), & 0 \leq y \leq y_0, \\ 0 & , \quad y > y_0. \end{cases}$$

ამოცანა. სამ დამოუკიდებელ შემთხვევით X, Y და Z სიდიდეს აქვს ერთნაირი ნორმალური ალბათობის სიმკვრივე $p(\xi) = \exp(-\xi/(2\sigma^2))/(\sqrt{2\pi}\sigma)$, სადაც ξ სიმბოლო შეესაბამება x, y და z . ვთქვათ (x, y, z) - წერტილებია სამ განზომილებიან დეკარტულ კოორდინატთა სივრცეში, რომლებიც დაკავშირებულია სფერულ (r, ϑ, φ) კოორდინატებთან ცნობილი თანაფარდობებით: $x = r \sin \vartheta \cos \varphi$, $y = r \sin \vartheta \sin \varphi$, $z = r \cos \vartheta$.

იპოვეთ ერთგანზომილებიანი R შემთხვევითი სიდიდის ალბათობის $p(r)$ სიმკვრივე, რომელიც წარმოადგენს კოორდინატთა სფერული სისტემის რადიუს-ვექტორს.

ამოცანა: x, y, z ცვლადებიდან r, ϑ, φ ცვლადებზე იაკობიანის გარდაქმნას აქვს სახე

$$D = \begin{vmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \vartheta.$$

მაშასადამე, ალბათობის სიმკვრივის გარდაქმნა

$$p(r, \vartheta, \varphi) = \frac{r^2 \sin \vartheta}{(2\pi)^{3/2} \sigma^3} \exp(-r^2/(2\sigma^2)).$$

ერთგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის სიმკვრივის გამოსათვლელად ვიყენებთ გამოსახულებას:

$$p(r) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \cdot p(r, \vartheta, \varphi) = \frac{2r^2}{(2\pi)^{1/2} \sigma^3} \exp(-r^2/(2\sigma^2)).$$

6.4.4 შემთხვევითი სიდიდის მახასიათებელი ფუნქცია

ამოცანა 6.6.30. იპოვეთ X შემთხვევითი სიდიდის მახასიათებელი ფუნქცია, რომელსაც აქვს შემდეგი სახის ალბათობის

სიმკვრივე $p_x(x) = \lambda e^{(-\lambda x)} \sigma(x)$.

პასუხი: $\Theta(u) = \lambda / (\lambda - ju)$

ამოცანა მ.6.31. გამოთვალეთ X შემთხვევითი სიდიდის $\Theta(u)$ მახასიათებელი ფუნქცია, რომელიც თანაბრად განაწილებულია $a \leq x \leq b$ მონაკვეთზე.

პასუხი: $\Theta(u) = \frac{e^{jbu} - e^{jau}}{j(b-a)u}$

ამოცანა მ.6.32. $a \leq x \leq b$ მონაკვეთზე თანაბრადგანაწილებულ X შემთხვევით სიდიდეს აქვს $\Theta(u) = \lambda / (\lambda - ju)$ სახის მახასიათებელი ფუნქცია. იპოვეთ შემთხვევითი სიდიდის საშუალო \bar{x} მნიშვნელობა.

ამოხსნა: გამოვიყენოთ ცნობილი კავშირები მომენტებსა და მახასიათებელ ფუნქციას შორის: $m_n = j^{-n} \Theta^{(n)}(0)$.

მახასიათებელი ფუნქციის წარმოებულ

$$\Theta'(u) = \frac{1}{j(b-a)} \cdot \frac{ju(be^{jbu} - ae^{jau}) - e^{jbu} + e^{jau}}{a^2}. \quad (*)$$

როცა $u \rightarrow 0$, მაშინ განტოლების მარჯვენა მხარეს წარმოიქმნება განუსაზღვრელობა. განუსაზღვრელობის გასნისათვის უნდა ვისარგებლოთ შემდეგი დაშლებით:

$$e^{jau} = 1 + jau - \frac{a^2 u^2}{2} - \dots; \quad \text{და} \quad e^{jbu} = 1 + jbu - \frac{b^2 u^2}{2} - \dots$$

თუ ჩავსვავთ ამ გამოსახულებებს (*)-ში, მივიღებთ

$$\Theta'(0) = \frac{j(a+b)}{2}; \quad \text{ხოლო} \quad m_1 = \bar{x} = \frac{a+b}{2}.$$

ამოცანა მ.6.33. X შემთხვევითი სიდიდე თანაბრად განაწილებულია $-1/2 \leq x \leq 1/2$ მონაკვეთზე. გამოთვალეთ Y შემთხვევითი სიდიდის ალბათობის სიმკვრივე, რომლის თითოეული რეალიზაცია უდრის X შემთხვევითი სიდიდის სამი დამოუკიდებელი რეალიზაციების ჯამს.

ამოხსნა: გამოვიყენოთ **ამოცანა მ.6.31**-ში მიღებული შედეგი

$$\Theta_x(u) = \frac{e^{ju/2} - e^{-ju/2}}{j(1/2 - (-1/2))u} = \frac{e^{ju/2} - e^{-ju/2}}{ju} = \sin(u/2)/(u/2),$$

საიდანაც $\Theta_y(u) = \sin^3(u/2)/(u/2)^3$.

იმისათვის, რომ მახასიათებელი ფუნქციიდან გადავიდეთ $p(y)$ ალბათობის სიმკვრივეზე, აუცილებელია ფურიეს ინტეგრალის გამოთვლა

$$p(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_y(u) e^{-jyu} du. \quad \text{იმის გამო,}$$

რომ ფუნქცია $\Theta_y(u)$ ლუწია, ინტეგრალი შეიძლება ჩაიწეროს ასე

$$p(y) = \frac{8}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin^3(u/2) \cos yu}{u^2} du.$$

შესაბამისი **ტაბულირებული** ინტეგრალის სახეს

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin^3(u/2) \cos yu}{u^3} du = \begin{cases} \frac{\pi}{8} \left(\frac{3}{4} - y^2 \right), & 0 < y < \frac{1}{2}, \\ \frac{\pi}{16} \left(\frac{3}{2} - y \right)^2, & \frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}, \\ 0, & y > \frac{3}{2} \end{cases}$$

მიყვავართ $p(y)$ ალბათობის სიმკვრივის შემდეგი გამოსახულება

$$p(y) = \begin{cases} \left(\frac{3}{4} - y^2 \right), & 0 < y < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - y \right)^2, & \frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}, \\ 0, & y > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

ბისაკენ, როცა $y > 0$:

ცხადია, რომ ფუნქცია არის ლუწი და ამიტომ სიმეტრიული ორდინატა ღერძის მიმართ. ანუ როცა $y < 0$ ფუნქციის გრაფიკს უნდა დაემატოს შესაბამისი მარცხენა შტო (იხ. ნახ. მ.6.6).

აღსანიშნავია, რომ სამი დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდის ალბათობის სიმკვრივების ჯამი აისახება “გლუვი” მრუდის სახით, იმისდა მიუხედავად, რომ ალბათობის სიმკვრივების ცალკეულ შესაკრებებს აქვს წვეტილი ხასიათი. ამაში გამოიხატება კანონი, რომლის მიხედვით შესაკრებთა რიცხვის არაშეზღუდულ ზრდასთან ერთად განაწილების კანონი ასიმპტოტურად მიისწრაფის ნორმალურისკენ (**ცენტრალური ზღვრული თეორემა** ალბათობის თეორიაში).

რეკომენდირებული ლიტერატურის ნუსხა

1. Говоровский И.С., Демин М.П. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Радио и связь, 1994.У
2. Сиберт У.М. Цепи, сигналы, системы: В 2-х ч.: Пер. с англ. Под ред. И.С.Рыжака. – М.: Мир, 1988.
3. Попов В.П. Основы теории цепей. – М.: Высшая школа, 2000.
4. Статистическая радиотехника. Примеры и задачи / Под ред. В.И.Тихонова. - М.: Советское радио, 1980.
5. Задачник по курсу «Радиотехнические цепи и сигналы»/В.П.Жуков, В.Г.Карташов, А.М.Николаев. - М.: Высшая школа, 1986.
6. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. Руководство к решению задач. – М.: Высшая школа, 1987.
7. Колмогоров А.Т., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.- М.: Наука, 1972.
8. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. - М.: Наука, 1977.
9. Бремерман Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье: Пер. с англ. / Под ред. В.С.Владимирова. - М.: Мир, 1968.
10. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Физматгиз, 1958.). (см. Лекция 10-11, Тема 2.5, с.81.
11. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Пер. с англ. т. 1. - М.: Наука, 1984.
12. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Книга первая. - М.: Советское радио, 1974.
13. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров: Пер. с англ. / Под ред И.Г.Арамановича. - М.: Наука, 1970.
14. Френкс Л. Теория сигналов: Пер. с англ. / Под ред. Д.Е.Вакмана. - М.: Советское радио, 1974.
15. Котельников В.А. Теория потенциальной помехоустойчивости. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1956.
16. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике: Пер. с англ. / Под ред. Р.Л.Добрушина и О.Б.Лупановава. - М.: ИЛ, 1963.
17. Chul С.Н. Wavelet Analysis and its Application, NY, Akademic Press, 1992.
18. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. - М.: Наука, 1981.
19. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику.Ч.1.-М.: Наука, 1976.

* * *		
	ა	
აბსოლუტურად ინტეგრირება.....	59	– თანაბარი განაწილება.....
აბსოლუტური კრებადობის		– მომენტები.....
აბსცისა.....	80	ამპლიტუდა
აპკ (ავტოკორელაციური		– სიმფაზური.....
ფუნქცია).....	112	– კვადრატურული
– გვერდითი ფურცლები.....	115	ამ სიგნალები.....
– სიგნალების ურთიერთ		– კოეფიციენტი.....
სიმძლავრის კავშირი	116	– პრინციპი
– დისკრეტული.....	120	– ერთნაირი.....
– (მაგალითები).....	133	– მრავალნაირი.....
– (მართკუთხა ვიდეომი-		ამ-სიგნალის
პულსის).....	113	– ანალიზური გამოსა-
– (მართკუთხა რადიომი-		ხელება.....
პულსის).....	114	– ენერგეტიკული
– მიმდევრობითი მართკუთხა		მახასიათებლები.....
ვიდეომიპულსების.....	114,115	– სპექტრის სიგანე.....
– თვისებები.....	112,121	– რთული მამოღულირებელი
– მთავარი ფურცელი	115	სიგნალის დროს.....
– (უსაზღვროდ გაჭიმული		ანალოგური სიგნალები.....
სიგნალისათვის).....	115	ანსამბლი, რეალიზაცია
აპკ-ის		არაინტეგრირებადი სიგნალებ-
– განზომილება	116	ის სპექტრული სიმკვრივები..
– განსაზღვრა	78,112	აქსიომები:
– და სიგნალის ენერგეტიკულ		– კომპლექსური ხაზოვანი
სპექტრს შორის კავშირი.....	116	სივრცე
– დისკრეტული სიგნალი.....	119	– მეტრული სივრცე
– სიგნალის ღსმ.....	113	– ნამდვილი ხაზოვანი სივრცე...26
– შეზღუდვები	118	– ალბათობის
ამპლიტუდური დეტექტორები		არაპერიოდული სიგნალის
(დემოდულატორები)	175	სპექტრული ანალიზი.
ალბათობა	186	(ფურიეს გარდაქმნა).....
ალბათობის აქსიომები.....	186	* * *
– თეორია (ცენტრალური		ბ
ზღვრული თეორემა).....	218	ბარკერის სიგნალები.....
ალბათობების გაზომვა	186	ბერგის ფუნქციები.....
ალბათობის სიმკვრივე და განა-		ბესელის ფუნქცია.....
წილების ფუნქცია.....	187,195	* * *
– გაუსის ორგანზომილები-		ბ
ანი.....	200	გადამოღულაცია.....
– სიმკვრივის ნორმირების		გადამტანი რხევის ცნება.....
პირობა.....	188	– სისშირე
– ფუნქციის სიმკვრივე.....	192	გამოსახულება.....
– გაშუალდება.....	188	– წარმოებულის.....
		განაწილების ფუნქცია და
		ალბათობის სიმკვრივე.....

— — — — (მაგალითები).....211

განსხვავებები **ფმ-** და **სმ-**
სიგნალებს შორის.....145

განუსაზღვრელი ინტეგრალის
სპექტრული სიმკვრივე.....66

განუსაზღვრელობის
თანაფარდობა64

გარდაქმნის იაკობიანი.....199

გაუსის ალბათობის სიმკვრივე
(ზარისებური მრუდი) 190,191

— — — ორგანზომილებიანი.....200

— იმპულსის ეფექტური
ხანგრძლივობა62

— განაწილება (მრავალგანზომილებიანი).....199

— ვიდუიმიპულსის სპექტრული
სიმკვრივე.....62

— ნორმალური განაწილება190

— იმპულსის მეორე წარმოებული
("სომბრერო").....87

გვერდითი სისშირე
— — ზედა139

— — ქვედა139

გილბერტის ნამდვილი სივრცე...33

— კომპლექსური სივრცე33

გეომეტრიული მეთოდები
სიგნალების თეორიაში.....25

გილბერტის გარდაქმნა
(მაგალითები).....183

* * *

დ

დაბალი სისშირეების ფილტრი169

დაბალსისშირული იდეალური
სიგნალი.....160

დაქვანტული და დროის მიხედ-
ვით უწყვეტი სიგნალი.....17

— — — — დისკრეტული (ციფრუ-
ლი) სიგნალი17

დელტა-ფუნქციის მაფილტრე-
ბელი თვისება 25

— სპექტრული სიმკვრივე63

დირაკის (დელტა) ფუნქცია..... 23

დისკრეტული სიგნალები.....16

დისკრეტული სიგნალების
შემთხვევისათვის შპვ

განზოგადობა.....127

— ვეივლეტ - ანალიზი 85

დისკრეტული სიგნალის ავტო-
კორელაციური ფუნქცია... 119,120

— — ენერჯია..... 121

— — ლუწობა 121

— რთული სტრუქტურის მქონე
სიგნალების აღწერა. 119

— — ამპლიტუდური კოდირება ..120

— — პოზიციები..... 119

— — — —, ზოგიერთი მაგალითი 121

— ბარკერის სიგნალები123

დისპერსია.....205

დევიაცია

— სიგნალის სისშირის.....144

— — — ზევით.....144

— — — ქვევით.....144

— — ფაზის.....144

დელტა-ფუნქცია (დირაკის).....23

დროში მუდმივი სიგნალის
სპექტრული სიმკვრივე.....72

დროში დამრული სიგნალების
შედარება111

დროში წანაცვლებული სიგნა-
ლის სპექტრული სიმკვრივე...66

დეტერმინირებული სიგნალები...14

* * *

ე

ენერგეტიკული სპექტრი,
სიგნალების.....107

— — (მაგალითები)..... 130

ენერგიის განაწილება მართ-
კუთხა ვიდუიმიპულსის
სპექტრში.....109

ერთგონალური ამ სიგნალი..... 138

— სიგნალები კუთხური
მოდულაციით (კმ)..... 144

— კმ-ის ინდექსი..... 144

ექსპონენციალური ვიდუიმიპუ-
ლსის სპექტრული სიმკვრივე...60

— — ეფექტური ხანგრძლივობა...64

* * *

ვ

ვეივლეტ-ანალიზი..... 84

— გარდაქმნა.....87

– – დისკრეტული.....85
 – – ცნება.....84
 ვიეველტი (საარას).....84,85
 ვიდეოიმიჟუსი.....18
 -, მახასიათებელი პარამეტრები 18
 ვიწროზოლოვანი სიგნალები..... 171
 – სიგნალის მათემატიკური
 მოდელი 171,172
 – – მყისიერი სისშირის
 თვისებები 175
 – – ფიზიკური მომვლების
 თვისებები 175
 – სიგნალების კომპლექსური
 წარმოდგენა..... 173
 * * *

ზ

ზარისებური მრუდი (გაუსის
 ალბათობის სიმკვრივე) ...190,191
 * * *

თ

თავი I. რადიოტექნიკური სიგ-
 ნალების ზოგადი თეორიის
 ელემენტები 12
 თავი II. სიგნალების სპექტრუ-
 ლი წარმოდგენა.....47
 თავი III. სიგნალების ენერგე-
 ტიკული სპექტრები.
 კორელაციური ანალიზის
 პრინციპები.....103
 თავი IV. მოდულირებული
 სიგნალები 136
 თავი V. სიგნალები შეზღუდუ-
 დული სპექტრით.....160
 თავი VI. შემთხვევითი სიდიდე-
 ების თეორიის საფუძვლები ...185
 თვისებები ზოგადი:
 – აკვ-ის..... 121
 – შკვ-ის..... 125
 * * *

ი

იდეალური ზოლური
 სიგნალი.....162
 იმპულსების შეკვრა..... 115
 იმპულსი 18
 იმპულსის პერიოდული

გაგრძელება.....54
 – ვუვქტური ხანგძლივობა.....62
 – სიმქსრე.....50
 იმპულსური სიგნალები..... 18
 – – ვიდეოიმიჟუსი 18
 – – რადიოიმიჟუსი 18
 ინტეგრატორი 68
 * * *

კ

კავშირი იმპულსის ხანგრძლი-
 ვობასა და მისი სპექტრის
 სიგანეს შორის.....63
 – აკვ და სიგნალის ენერგეტი-
 კულ სპექტრს შორის..... 116
 – შკვ და ურთიერთსპექტრა-
 ლურ სიმკვრივეს შორის 127
 კვადრატურული ამპლიტუდა.....127
 კოვარიაციული მომენტი (ორი
 შემთხვევითი სიდიდის) 196
 კომპლექსური ექსპონენციალუ-
 რი სიგნალის სპექტრული
 სიმკვრივე..... 73
 კომპლექსური მომვლები
 (მაგალითები)..... 182
 კომპლექსური სისშირის ცნება..78
 – გილბერტის სივრცე..... 33
 – – შეუღლებული სიდიდე..... 78
 კომუტაციურობა (მათემატიკური
 ოპერაცია).....70
 კორორდინატული ბაზისის ცნება27
 – ბაზისი (ხაზონად დამოუკი-
 დებელი).....27
 კორელაცია..... 196,197
 კორელაციის ინტერვალი.....118
 – უზომილო კოეფიციენტი..... 197
 კორელაციური ანალიზი,
 სიგნალების 110
 – მომენტი.....197
 კოტელნიკოვის თეორემა..... 164,166
 კოტელნიკოვის მწკრივი და
 თეორემა..... 165
 – ბაზისი
 – მწკრივით წარმოდგენილი
 სიგნალის სინთეზის აპარა-
 ტურული რეალიზაცია 167

- აპროქსიმაციისას ცდომილების შეფასება, რომელიც აღიძვრება ნებისმიერი სიგნალის.....	168	- სისშირული.....	143
- რიგი (მაგალითები).....	180	- ფაზური.....	142
კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობა.....	33,125	- შიდაიმპულსური სისშირული.....	146
კრონეკერის სიმბოლო.....	200	- ხაზოვანი სისშირული.....	146
კუთხური მოდულაციის სახეები	142	მოდულაციის პროცესი	
- ა) ფაზური მოდულაცია.....	142	- პარციალური (ნაწილობრივი) კოეფიციენტების ერთობლიობა	140
- ბ) სისშირული მოდულაცია	143	- ფარდობითი კოეფიციენტი ზემოთ	138
- ერთტონალური სიგნალები.....	144	- ფარდობითი კოეფიციენტი ქვემოთ	138
კუთხური სისშირე	56	მრავალგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდეების ფუნქციონალური გარდაქმნები.....	198
* * *		- გაუსის განაწილება.....	199
ლ		- სიდიდეები (მაგალითები).....	215
ლაპლასის გარდაქმნა.....	78	- მახასიათებელი ფუნქცია.....	201
- შექცეული გარდაქმნის ფორმულა	81	მომვლები.....	18,78,175,182
- კომპლექსური სისშირის ცნება.....	78	მომენტების გამოთვლა (შემთხვევითი სიდიდეების).....	196
- ძირითადი თანაფარდობანი.....	79	მომენტები (მაგალითები).....	211
- გამოთვლის მაგალითები	81	მყისიერი სისშირე	141,174,175
- წარმოებულების გამოსახულება	83	* * *	
- (მაგალითები).....	100	ნ	
* * *		ნახევვი (ფუნქციის)	70
მ		ნებისმიერი პერიოდული სიგნალის სპექტრული სიმკვრივე.....	74
მათემატიკური მოლოდინი	189,196,205	- სიგნალის დინამიური წარმოდგენა ჩართვის ფუნქციის გამოყენებით	22
მარტკუთხა ვიდეოიმპულსის		ნორმა (სიგნალის).....	29
- ენერჯის განაწილება სპექტრში.....	109	ნორმირებული ხაზოვანი სივრცე.....	28
- სპექტრული სიმკვრივე	59	* * *	
- ხსმ-იმპულსის სპექტრი.....	147	ო	
მახასიათებელი ფუნქცია (შემთხვევითი სიდიდეების)	193	ორგანზომილებიანი გაუსის ალბათობის სიმკვრივე.....	200
- მრავალგანზომილებიანი	200	- ცენტრალური მომენტი	205
მეტრული სივრცე	29	ორი სიგნალის ურთიერთორელაციური ფუნქცია.....	124
- სივრცის აქსიომები.....	29	ორიგინალი.....	80
მოდულაცია	136	ორთოგონალობის პრინციპი.....	34
- ამპლიტუდური	137	ორთოგონალური სიგნალი	
- ამპლიტუდის კოეფიციენტი	137	შეზღუდული სპექტრით.....	162
- კუთხური	142		

– სიგნალების თეორია32
 – სიგნალები34
 ორთონორმირებული ბაზისი.....34
 – ბაზისების მაგალითები.....35
 ორთონორმირებული ბაზისის
 აგება85,164
 ორთონორმირებული სისტემა
 (უოღშის ფუნქციები).....36
 ორთომანალიზებული
 ფილტრი104
 ოსცილაციის პერიოდი.....88
 * * *

პ

პარციალური (ნაწილობრივი)
 მოდულაციის კოეფიციენტების
 ერთობლიობა.....140
 პერიოდი, ოსცილაციის.....88
 პერიოდული სიგნალები(ს) და
 ფურიეს მწკრივი47
 – – სპექტრული დიოგრამა.....49
 – – (მაგალითები).....90
 * * *

რ

რადიომიკსული.....18
 რადიომიკსულის სპექტრული
 სიმკვრივე.....75
 რადიოტექნიკური სიგნალები
 ბის კლასიფიკაცია.....13
 – – აღწერა მათემატიკური
 მოდელებით14
 რეალიზაცია.....155
 რეალიზაციის ანსამბლი.....203
 რელეის განზოგადებული
 ფორმულა71,102,104,163
 – – – (მაგალითები).....130
 რთული დისკრეტული სტრუქტურის
 მქონე სიგნალების
 აღწერა.....119
 რხევა გადამტანი.....139
 – გვერდითი139
 რხევის გადამტანის ცნება.....136
 – სრული ფაზა
 * * *

ს

საარას ვეივლეტი.....84,85
 საშუალო კვადრატული
 გადახრა (მათემატიკური
 მოლოდინი).....190
 სიგნალი
 – ამპლიტუდური მოდულა-
 ციით.....136,142,154
 – ანალოგური15
 – დაბალსიხშირული იდეა-
 ლური160
 – დეტერმინირებული14
 – დისკრეტული15
 – ერთგანზომილებიანი14
 – ერთნაწილური ამ-ლი.....138
 – იდეალური ზოლური.....162
 – იმპულსური18
 – მრავალგანზომილებიანი14
 – მრავალტონალური ამ-ლი .141
 – პერიოდული47
 – შიდაიმპულსური სიხშირული
 მოდულაციით146
 – შემთხვევითი15
 – ციფრული.....15
 სიგნალები ამპლიტუდური მოდუ-
 ლაციით (მაგალითები).....154
 – კუთხური მოდულიაციით
 (მაგალითები).....142,157
 – შეზღუდული სპექტრით160
 – ხაზოვან-სიხშირული მოდუ-
 ლაციით (მაგალითები)....158
 სიგნალების
 – აღწერა მათემატიკური მოდე-
 ლებით13
 – დინამიური წარმოდგენა18
 – ენერგია28
 – ენერგეტიკული სპექტრი107
 – კორელაციური ანალიზი110
 – ნამრავლის სპექტრული
 სიმკვრივე69
 – ორთოგონალური დაშლის
 აპარატურული რეალიზაცია.38
 – სივრცის ზომა.....170
 – სკალარული ნამრავლი32

– სპექტრული დაშლა.....	49	– ციკლური.....	56
– სპექტრული წარმოდგენა.....	47	– მყისიერი.....	143
– ურთიერთსპექტრული სიმკვრივე.....	103	სისწორული სპექტრი.....	49
– ურთიერთენერგეტიკული სპექტრი.....	127	– მოდულაცია.....	143
– შედარება (დროში დაძრული).....	111	სკალარული ნამრავლის თვისებები.....	32,33
– ხაზოვანი სივრცე	26	სმ- და შმ- სიგნალებს შორის განსხვავებები.....	145
– – – პრინციპი	19	სპექტრის სიგანეს და იმპულსის ხანგრძლივობას შორის კავშირი.....	63
– – –, ჩართვის ფუნქცია.....	20	– სიგანე.....	54
– – –, – –, გამოყენება.....	22	სპექტრული ანალიზი (არაპერი- ოდული სიგნალი).....	54
– – –, დელტა-ფუნქცია	23	– – განზოგადებული ცნება	72
– – –, – –, გამოყენება.....	23	სპექტრული სიმკვრივე	56
სიგნალის		– – არაინტეგრირებადი სიგნა- ლების	71
– ავტოკორელაციური ფუნქცია.....	112	– – განუხაზღვრელი ინტეგრა- ლის	66
– ამპლიტუდური სპექტრი.....	61	– – გაუსის ვიდეოიმპულსის.....	62
– დინამიური წარმოდგენა ჩარ- თვის ფუნქციის გამოყენებით	22	– – დელტა-ფუნქციის	63
– დინამიური წარმოდგენა დელ- ტა-ფუნქციის გამოყენებით.....	24	– – დროში მუდმივი სიგნალის.....	72
– ენერგეტიკულ სპექტრსა და მის აპო შორის კავშირი.....	116	– – დროში წანაცვლებული სიგნალის	66
– ენერგეტიკული სპექტრი.....	107	– – ექსპონენციალური ვიდეო- იმპულსის	60
– ენერგია.....	28	– – კომპლექსური ექსპონენცი- ალური სიგნალის.....	73
– ენერგიის სპექტრული სიმკვრივე.....	107	– – მართკუთხა ვიდეოიმპულსის.....	59
– ეფექტური ხანგრძლივობა	60,61	– – ნებისმიერი პერიოდული სიგნალის	74
– ნორმა.....	29	– – სიგნალების ნამრავლის.....	69
– სივრცის ზომა, რომლებიც შეზღუდულია სპექტრისა და ხანგრძლივობის მიხედვით	170	– – ჩართვის ფუნქციის	74
– სისწირის დევიაცია.....	144	– – წარმოებული – – ჰარმონიული რხევების.....	73
– სპექტრული სიმკვრივის ცნება	55	– – რადიოიმპულსის	75
– სრული ფაზა.....	146	სპექტრული სიმკვრივის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილების თვისებები	65
– ფაზური სპექტრი.....	61	– დიაგრამა	49
– ფორმის დამახინჯების ხარისხი.....	109	– ფუნქცია (იგივე სპ. სიმკვრივე)	56
სიმფაზური ამპლიტუდა.....	127	– – არსებობის პირობა.....	59
სივრცე, მეტრული.....	29		
– ნორმირებული ხაზოვანი.....	28		
– უსასრულოგანზომილებიანი.....	27		
სიმენსრე (იმპულსის).....	50		
სისწორე კომპლექსური (ცნება).....	78		
– კუთხური.....	56		

სპექტრისა და ხანგრძლივობის მიხედვით შეზღუდული სიხალეების სივრცის ზომა.....170

სპექტრი

- ამპლიტუდური.....61
- ფაზური.....61

სპექტრული სიმკვრივე ინტეგრატორის გამოსასვლელზე...69

- სიმკვრივის ცნება55
- - დამოკიდებულება დროის გაზომვის მასშტაბის ამორჩევაზე.....66
- - - ცნების ფიზიკური აზრი56

სრული ფაზა სიგნალის.....146

სტატისტიკური ანსამბლი203

სტაციონარული შემთხვევითი პროცესები.....206

- ვიწრო გაგებით.....206
- ფართო გაგებით.....206
- - პროცესის კორელაციის ფუნქციის თვისებები.....206

* * *

უ

უოლშის ფუნქციების ორთონორმირებული სისტემა.....36

შპშ (ორი სიგნალის).....124

- განსაზღვრის პრინციპი.....124
- ზოგიერთი თვისება.....125
- განზოგადოება დისკრეტული სიგნალების შემთხვევითის სივრცის.....127
- და ურთიერთსპექტრულ სიმკვრივეს შორის კავშირი.....127
- (მაგალითები).....135
- მდგრადობის ზომა სიგნალების დაძვრისას.....124

ურთიერთენერგეტიკული სპექტრი.....103

ურთიერთენერგია.....32

ურთიერთსპექტრული სიმკვრივე, სიგნალების.....103

უსაზღვროდ გაჭიმული სიგნალის აპშ.....115

უსასრულოგანზომილებიანი სივრცე.....27

* * *

ფ

ფაზა სრული (სიგნალის).....146

ფაზური სპექტრი.....149

ფმ ფაზის დევიაცია.....143

- - - ზევით.....143
- - - ქვევით.....143

ფაზური მოდულაცია.....142

ფიზიკური მომენტები, სრული ფაზა და მყისიერი სიხშირე..174

ფმ- და **სმ-** სიგნალებს შორის განსხვავებები.....145

ფრენელის ინტეგრალები149

ფუნქცია

- სინფაზური ამპლიტუდით.....172
- კვადრატული ამპლიტუდით ...172

ფუნქციის ნახვევი.....70

ფუნქციის ფაქტორიზაცია.....201

ფუნქციების კომუტატიურობა.....70

ფურიეს განზოგადოებული მწკრივი(ები).....34,65

- გარდაქმნის ძირითადი თვისებები.....65
- რიგი.....48
- - მწკრივის გამოყენება არაპერიოდული სიგნალის სპექტრული ანალიზისთვის54
- - - კოეფიციენტები.....35
- - - წრფივობა.....65

ფურიეს მწკრივის.....48

- - გარდაქმნა.....54
- - კომპლექსური ფორმა.....52
- - ტრიგონომეტრიული ფორმა 53
- შექცეული გარდაქმნა57,58

* * *

ფ

შეზღუდვები, რომელიც დადის სიგნალის ავტოკორელაციური ფუნქციის სახეზე.....118

შემთხვევითი პროცესის ცნება .203

შემთხვევითი პროცესები.....203

- - კვაზიდეტერმინირებული.....203
- - სტაციონარული206

შემთხვევითი პროცესების

– ალბათობის სიმკრივე..203,204

– მომენტური ფუნქციები.....205

შემთხვევით სიდიდეთა ჯამის
ალბათობის სიმკრივე.....202

შემთხვევითი სიდიდეები და მათი
მასსიათებლები.....186

– ალბათობის ფუნქციის
სიმკრივე.....192

– გაშუალელება.....188

– თანაბარი განაწილება.....190

– მომენტები.....188

– ცენტრალური.....189

– სიგნალები.....14

– სიდიდეების კორელაცია.....196

შემთხვევითი სიდიდეების
სისტემების სტატისტიკური
მასსიათებლები.....195

– სტატისტიკური დამოუკი-
დებლობა.....198

– მასსიათებელი ფუნქცია
(მაგალითები)217

– ფუნქციონალური გარდაქმნა
(მაგალითები).....215

– ხდომილება და მისი
ალბათობა (მაგალითები).....210

შეზღუდული სპექტრის სიგნა-
ლების ზოგიერთი მათემატი-
კური მოდელი.....160

შექცევული გარდაქმნა (ფურიეს).58

შეცდომის აპროქსიმაციის
ზომა.....168

* * *

გ

ცდომილების შეფასება,
რომელიც აღიძვრება ნებისმიერი
სიგნალის კოტელნიკოვის
მწკრივით აპრო-
ქსიმაციისას.....168

ცენტრალური ზღვრული თეო-
რემა ალბათობის თეორიაში..218

ცენტრალური მომენტი/ები.....189

– დისპერსია.....189

– ორგანოზომილებიანი.....205

ციკლური სისშირე.....56

ციფრული სიგნალები.....17

* * *

ნ

ნართვის (ხვეისაიდის) ფუნქცია.20

ნართვის ფუნქციის სპექტრუ-
ლი სიმკრივე.....74

* * *

ფ

წარმოებულების გამოსახულება 83

წარმოებულის სპექტრული
სიმკრივე.....66

* * *

ხ

ხაზოვანი სივრცის სტრუქტურა 26

– კომპლექსური სივრცე.....27

– სისშირული მოდულაციის
პრინციპი (ხსმ).....146

– აქსიომები.....26

ხაზოვანად დამოუკიდებელი
ვექტორების სისტემა.....27

ხვეისაიდის (ნართვის) ფუნქცია.20

ხსმ-სიგნალი დიდი ბაზით.....149

ხსმ-სიგნალის ავტოკორელა-
ციური ფუნქცია.....150

ხსმ-სიგნალის ბაზა.....149

– ნაკლოვანებები.....151

* * *

ჰ

ჰარმონიული რხევების სპექ-
ტრული სიმკრივე.....73

ჰარმონიული რხევის ორთონო-
რმირებული სისტემა.....35

– კომპლექსური ამპლიტუდა 173

– მომენტები.....173

* * *

თავზვის მოკლე მიმოხილვა

I-ლი თავის მოკლე მიმოხილვა..39

– შედეგები.....39

– საკონტროლო კითხვები.....40

– ამოცანების ამოხსნის
ზოგადი მეთოდიკა.....40

– ტიპური ამოცანების
ამოხსნის მაგალითები.....40

მე-II თავის მოკლე მიმოხილვა.....88

– – შედეგები	88	– – ... – დაბალსიხშირული ტიპის სიგნალები შეზღუდული სპექტრით. კოტელნიკოვის რიგი.....	180
– – საკონტროლო კითხვები	89	– – ... – ზოლოვანი ტიპის სიგნალები. კომპლექსური მომენტები	182
– – ამოცანების ამოსხნის ზოგადი მეთოდика.....	90	– – ... – ანალიტიკური სიგნალი. გილბერტის გარდაქმნა.....	183
– – ტიპური ამოცანების ამოსხნის მაგალითები	90	მე-VI თავის მოკლე მიმოხილვა.....	208
– – ... – პერიოდული სიგნალები და ფურიეს მწკრივები.....	90	– – შედეგები	208
– – ... – ლაპლასის გარდაქმნა.....	100	– – საკონტროლო კითხვები.....	209
მე-III თავის მოკლე მიმოხილვა.....	129	– – ამოცანის/მაგალითის ამოსხნის ზოგადი მეთოდика	210
– – შედეგები	129	– – ტიპური ამოცანების ამოსხნის მაგალითები	210
– – საკონტროლო კითხვები	129	– – ... – რელეას განზოგადობული ფორმულა	130
– – ამოცანების ამოსხნის ზოგადი მეთოდика.....	130	– – ... – ენერგეტიკული სპექტრები.....	130
– – ტიპური ამოცანების ამოსხნის მაგალითები	130	– – ... – ავტოკორელაციური ფუნქცია.....	133
– – ... – რელეას განზოგადობული ფორმულა	130	– – ... – ურთიერთკორელაციის ფუნქცია.....	135
– – ... – ენერგეტიკული სპექტრები.....	130	მე-IV თავის მოკლე მიმოხილვა.....	152
– – ... – ავტოკორელაციური ფუნქცია.....	133	– – შედეგები	152
– – ... – ურთიერთკორელაციის ფუნქცია.....	135	– – საკონტროლო კითხვები	153
მე-IV თავის მოკლე მიმოხილვა.....	152	– – ამოცანის ამოსხნის ზოგადი მეთოდика.....	154
– – შედეგები	152	– – ტიპური ამოცანების ამოსხნის მაგალითები	154
– – საკონტროლო კითხვები	153	– – ... – სიგნალები ამპლიტუდური მოდულაციით	154
– – ამოცანის ამოსხნის ზოგადი მეთოდика.....	154	– – ... – სიგნალები კუთხური მოდულაციით	157
– – ტიპური ამოცანების ამოსხნის მაგალითები	154	– – ... – სიგნალები ხაზოვანსიხშირული მოდულაციით.....	158
– – ... – სიგნალები ამპლიტუდური მოდულაციით	154	მე-V თავის მოკლე მიმოხილვა.....	177
– – ... – სიგნალები კუთხური მოდულაციით	157	– – შედეგები	178
– – ... – სიგნალები ხაზოვანსიხშირული მოდულაციით.....	158	– – საკონტროლო კითხვები	179
მე-V თავის მოკლე მიმოხილვა.....	177	– – ამოცანის ამოსხნის ზოგადი მეთოდика.....	179
– – შედეგები	178	– – ტიპური ამოცანების ამოსხნის მაგალითები	180
– – საკონტროლო კითხვები	179		
– – ამოცანის ამოსხნის ზოგადი მეთოდика.....	179		
– – ტიპური ამოცანების ამოსხნის მაგალითები	180		

ოთარ ლაბაძე

ტექნიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
ივანე ჯავახიშვილის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის
ასოცირებული პროფესორი,
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის
არჩილ ელიაშვილის მართვის სისტემების ინსტიტუტის
მთავარი მეცნიერი თანამშრომელი,
ინფორმაციის გარდაქმნის პრობლემების განყოფილების გამგე,
საქართველოს საინჟინრო აკადემიის აკადემიკოსი

იხეზდება ავტორის მიერ წარმოდგენილი სახით

გადაეცა წარმოებას 06.04.2012. ხელმოწერილია დასაბეჭდად
05.04.2011. ქალაქის ზომა 60X84 1/16. პირობითი ნაბეჭდი
თაბახი 14.375. ტირაჟი 40 ეგზ.

საგამომცემლო სახლი „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, თბილისი,
კოსტავას ქ. №77

