ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ბესიკ ჩიქვინიძე

**ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი
მათემატიკის დეპარტამენტი**

შექცეული სტოქასტურ-დიფერენციალური განტოლებები ამოზნექილი გენერატორით

ს ა დ ო ქ ტ ო რ ო   დ ი ს ე რ ტ ა ც ი ა

სამეცნიერო ხელმძღვანელი:

ფიზ-მათ. მეცნ. დოქტორი მიხეილ მანია

თბილისი 2013 წელი

შ ი ნ ა ა რ ს ი

შესავალი

შექცეული სტოქასტურ-დიფერენციალური განტოლებების (BSDE) თეორია წარმოადგენს ეფექტურ იარაღს ფინანსური აქტივების ფასდადებისა და ჰეჯირების პრობლემის შესწავლასა და სტოქასტური მართვის ამოცანებში ოპტიმალური სტრატეგიების აგებაში. წრფივი BSDE შემოიღო ბისმუთმა [4] 1978 წელს სტოქასტური მაქსიმუმის პრინციპის შეუღლებული პროცესებისათვის. არაწრფივი BSDE პირველად 1983 წელს შეისწავლა რ. ჩიტაშვილმა [9], როდესაც გამოიყვანა ბელმანის განტოლების სტოქასტური ანალოგი ოპტიმალური მართვის გარკვეული ტიპის ამოცანებისათვის. 1990 წელს პარდუმ და პენგმა [31] განიხილეს ზოგადი სახის BSDE და დაამტკიცეს ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა, როდესაც გენერატორი აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას. ლიფშიცური ტიპის შექცეული განტოლებები ბუნებრივად ჩნდება ფინანსური მათემატიკისა და ოპტიმალური მართვის ამოცანებში, თუმცა უმრავლეს შემთხვევებში საჭირო ხდება უფრო ზოგადი ტიპის გენერატორის მქონე BSDE-ს განხილვა. გამოყენებების ისეთ სფეროებში, როგორებიც არის ჰეჯირების და ინვესტირების ამოცანები და რისკისადმი მგრძნობიარე მართვის ამოცანები, გენერატორის ლიფშიცური სტრუქტურა არ არის საკმარისი და ბუნებრივად ჩნდება კვადრატულ გენერატორიანი შექცეული განტოლებები. ასეთი ტიპის განტოლებები პირველად შეისწავლეს კობილანსკიმ (1997) [22] და ლეპელტიერმა და სან მარტინმა (1998) [25] ვინერის ფილტრაციის შემთხვევაში და შემოსაზღვრული სასაზღვრო პირობით. 2008 წელს მათი შედეგები განზოგადებულ იქნა მორლესის [30] და თევზაძის [32] მიერ უწყვეტი მარტინგალებისათვის. ამის შემდგომ 2009 წელს ვინერის ფილტრაციის შემთხვევაში ბრაიანდმა და ჰუმ [5] ერთგანზომილებიანი კვადრატული BSDE-სთვის განაზოგადეს არსებობის შედეგი შემოუსაზღვრელი სასაზღვრო პირობით. 2011 წელს დელბაენმა, ჰუმ და რიჩოუმ [11] ვინერის ფილტრაციის შემთხვევაში განიხილეს კვადრატულად მზარდი ამოზნექილ გენერატორიანი BSDE. ამოზნექილი ფუნქციების ლეჟანდრ-ფრეშეს გარდაქმნით მათ აჩვენეს, რომ ასეთი განტოლების ნებისმიერი ამონახსნი შეიძლება წარმოდგინდეს როგორც გარკვეული ოპტიმიზაციის ამოცანის ფასის ფუნქცია, რაც ავტომატურად ამტკიცებს ამონახსნის ერთადერთობას ასეთი ტიპის განტოლებებისათვის.

სადისერტაციო ნაშრომში შესწავლილია კვადრატული ზრდის, ამოზნექილ გენერა-ტორიან შექცეულ სტოქასტურ-დიფერენციალურ განტოლებები. დამტკიცებულია ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა უწყვეტ მარტინგალურ დასმაში (**თეორემა 2.1, თეორემა 2.2** და **თეორემა 2.3**). ნაშრომის სიახლეა ამონახსნის არსებობის დამტკიცება შექცეული განტოლებისათვის, რომლის მამოძრავებელი შემოუსაზღვრელი მახასიათებლის მქონე უწყვეტი მარტინგალია და ამასთან ისეთი ოპტიმიზაციის ამოცანის აგება (პოვნა), რომლის შესაბამისი ფასის პროცესი აკმაყოფილებს ამ განტოლებას. აღვნიშნოთ, რომ ჩვენს მიერ განხილული ოპტიმიზაციის ამოცანა და დასაშვებ მართვათა კლასი განსხვავდება [11]-ში განსაზღვრული ოპტიმიზაციის ამოცანისაგან, თუმცა შესაბამისი ფასის პროცესები ერთმანეთს

ემთხვევა. [11]-საგან განსხვავებით ჩვენ ვიყენებთ ამოზნექილი ფუნქციის წრფივ მომვლებს და ამათან ჩვენს მიერ განხილული ოპტიმიზაციის ამოცანისათვის ოპტიმალური მართვა საზოგადოდ არ არსებობს, რამაც საშუალება მოგვცა დაგვემტკიცებინა არსებობის შედეგი გენერატორთა უფრო ფართო კლასისათვის. ყოველივე ამას შეგვიძლია შევხედოთ როგორც დამტკიცების მეთოდს, როდესაც არამარკოვული ოპტიმიზაციის ამოცანის ფასის პროცესი აკმაყოფილებს შესაბამის შექცეულ განტოლებას იმ შემთხვევაშიც, როდესაც ოპტიმალური მართვა შეიძლება არ არსებობდეს. ამასთან, ზემოხსენებული შექცეული განტოლებისათვის, დავამტკიცეთ ამონახსნის ერთადერთობა ძირითად თეორემაზე (**თეორემა 2.1**) დამატებითი დაშვებების საფუძველზე.

კვადრატულად მზარდი, ამოზნექილ გენერატორიანი შექცეულ სტოქასტურ-დიფერენციალური განტოლებების ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემებს ვიყენებთ წრფივი რეგულატორის (LQR) ამოცანის ამოსახსნელად ზოგად მარტინგალურ დასმაში. (LQR) ამოცანისთვის გამოყვანილია შესაბამისი შექცეული განტოლება და ოპტიმალურ მართვას აღვწერთ ამ განტოლების ერთადერთი ამონახსნის საშუალებით (**თეორემა 3.1**).

ჩვენს მიდგომებში არსებითად ვიყენებთ BMO მარტინგალების თვისებებსა და BMO ნორმების შეფასებებს. BMO მარტინგალების თეორია ინტენსიურად გამოიყენება შექცეული განტოლებების შესასწავლად. BMO მარტინგალების ზოგიერთი თვისება გამოიყენა ბისმუთმა [4], როდესაც მან რიკატის შექცეული განტოლებისათვის არსებობისა და ერთადერთობის საკითხების შესწავლისას, შეარჩია BMO სივრცე ამონახსნის მარტინგალური ნაწილისათვის. დელბაენის [12] შრომებში ჰეჯირების ამოცანებსა და წრფივ შექცეულ განტოლებებთან კავშირში დადგენილ იქნა სემიმარტინგალების მიმართ სტოქასტური ინტეგრალების L^2 სივრცეში ჩაკეტილობის პირობები. ამ პირობების უმრავლესობა ჩამოყალიბებულია BMO მარტინგალებისა და ჰელდერის შექცეული უტოლობების (reverse Hölder) ტერმინებში. BMO მარტინგალები ბუნებრივად ჩნდება კვადრატულ გენერატორიანი შექცეული განტოლებების შესწავლისას. კვადრატული გენერატორების შემთხვევაში, ნებისმიერი შემოსაზღვრული ამონახსნის მარტინგალური ნაწილი BMO მარტინგალია. ეს შედეგი დამტკიცებულია [19, 22, 26, 27, 29, 32]-ში ზოგადობის სხვადასხვა შემთხვევებში. მოგვიანებით მარტინგალების BMO ნორმები გამოყენებულ იქნა BSDE-ისთვის ერთა-დერთობისა და სტაბილურობის შედეგების დასამტკიცებლად [1, 2, 6, 7, 18, 28, 30, 32].

როგორც აღვნიშნეთ, კვადრატულ გენერატორიანი შექცეული განტოლების ნებისმიერი შემოსაზღვრული ამონახსნის მარტინგალური ნაწილი BMO მარტინგალია, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ მარტინგალური ნაწილის სტოქასტური ექსპონენტა თანაბრად ინტეგრებადი მარტინგალია. შევნიშნოთ, რომ ასეთი განტოლების შემოუსაზღვრელი ამონახსნის მარტინგალური ნაწილი საზოგადოდ არ არის BMO კლასში. თუმცა ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ თუ კვადრატულ გენერატორიანი შექცეული განტოლების ამონახსნი

გარკვეულ ექსპონენციალურ ხარისხში ინტეგრებადია, მაშინ მისი მარტინგალური ნაწილის სტოქასტური ექსპონენტა იქნება თანაბრად ინტეგრებადი მარტინგალი.

პირველ თავში მოცემულია BMO მარტინგალების რამოდენიმე კლასიკური შედეგის ახლებური დამტკიცება: თავდაპირველად, შექცეული განტოლებების ტექნიკის გამოყენებით, მოყვანილია ახალი დახასიათება ჰელდერის შექცეული უტოლობისა და მაკენჰაუფტის უტოლობისათვის, რომლებიც მარტინგალების BMO თვისების ექვივალენტურია. ეს თვისებები იწვევს შესაბამისი სტოქასტური ექსპონენტის თანაბრად ინტეგრებადობას და იძლევა გირსანოვის გარდაქმნის საშუალებით ზომის შეცვლის შესაძლებლობას. ამის შემდგომ შექცეული განტოლებების ტექნიკის გამოყენებით დავამტკიცებთ, რომ გირსანოვის გარდაქმნა წარმოადგენს იზომორფიზმს BMO სივრცეებს შორის მაშინ, როდესაც ზომის მომცემი მარტინგალი BMO მარტინგალია. გარდა ამისა დამტკიცების ამ გზამ საშუალება მოგვცა გაგვეუმჯობესებინა იზომორფიზმის უტოლობის მუდმივი, ზომის მომცემი მარტინგალის ნორმის ყველა მნიშვნელობისათვის.

ნაშრომის ძირითადი შედეგების ჩამოსაყალიბებლად განვსაზღვროთ ძირითადი ობიექტები და მოვიყვანოთ რამოდენიმე განმარტება.

ვთქვათ მოცემულია ალბათური სივრცე ფილტრაციით $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T},\ P)$. დავუშვათ, რომ σ-ალგებრების ნაკადი არის სრული და მარჯვნიდან უწყვეტი.

განვიხილოთ შემდეგი სახის შექცეული სტოქასტურ-დიფერენციალური განტოლება $(BSDE)$:

$$\begin{cases} Y_t = Y_0 - \int\limits_0^t f(s,Z_s)d\langle M\rangle_s + \int\limits_0^t Z_s dM_s + L_t \\ \qquad\qquad Y_T = \eta \end{cases} \tag{1}$$

სადაც გენერატორი $f : [0;T]\times\Omega\times R\ \to\ R$ არის ზომადი ფუნქცია და ყოველი z-თვის $f(\cdot,\ \cdot,\ z)$ არის ჭვრეტადი; η $\mathcal{F}_T$-ზომადი შემთხვევით სიდიდეა, ხოლო $\{M_t\}_{0\le t\le T}$ მოცემული ლოკალურად კვადრატით ინტეგრებადი მარტინგალია $\{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T}$ ფილტრაციის მიმართ. წყვილს $(\,f,\ \eta)$ ვუწოდებთ (1) განტოლების პარამეტრებს.

განმარტება 1.1 (1) განტოლების ამონახსნს ვუწოდებთ სამეულს (Y,Z,L), სადაც $\{Y_t\}_{0\le t\le T}$ სპეციალური სემიმარტინგალია; $\{Z_t\}_{0\le t\le T}$ ჭვრეტადი, M-ინტეგრებადი პროცესია; $\{L_t\}_{0\le t\le T}$ M-ის ორთოგონალური ლოკალური მარტინგალია და ამასთან სამეული (Y,Z,L) აკმაყოფილებს (1) განტოლებას.

ხშირად (1) განტოლების ამონახსნს ვუწოდებთ მხოლოდ Y-ს, იმის გათვალისწინებით, რომ $\int ZdM + L$ წარმოადგენს Y სემიმარტინგალის მარტინგალურ ნაწილს.

ამჯერად მოვიყვანოთ BMO მარტინგალის, ჰელდერის შექცეული პირობის და მაკენჰაუფტის პირობის განმარტებები:

განმარტება 1.2 ვიტყვით, რომ უწყვეტი M მარტინგალი არის BMO კლასში, თუ

$$\sup_{\tau}\|E[\langle M\rangle_T-\langle M\rangle_\tau|\mathcal{F}_\tau]\|_\infty<\infty,$$

სადაც sup აღებულია ყველა τ გაჩერების მომენტის მიმართ: $(0\le\tau\le T)$.

შემთხვევით პროცესს $\mathcal{E}_t(M)=exp\left(M_t-\frac{1}{2}\langle M\rangle_t\right)$ ეწოდება M მარტინგალის სტოქასტური ექსპონენტა. სიმარტივისათვის შემოვიტანოთ აღნიშვნა: $\mathcal{E}_{t,T}(M):=\mathcal{E}_T(M)/\mathcal{E}_t(M)$.

ცნობილია, რომ თუ M ლოკალური მარტინგალია, მაშინ $\mathcal{E}(M)$ ასევე არის ლოკალური მარტინგალი. კაზამაკიმ [21] დაამტკიცა, რომ თუ M BMO მარტინგალია, მაშინ $\mathcal{E}(M)$ იქნება თანაბრად ინტეგრებადი მარტინგალი. შესაბამისად $\mathcal{E}(M)$ განსაზღვრავს ახალ ალბათურ ზომას: $d\tilde{P}=\mathcal{E}_T(M)dP$, ხოლო გირსანოვის თეორემის თანახმად $\widetilde{M}=\langle M\rangle-M$ იქნება ლოკალური მარტინგალი $\tilde{P}$ ზომის მიმართ.

განმარტება 1.3 დავუშვათ $1<p<\infty$. ვიტყვით, რომ $\mathcal{E}(M)$ აკმაყოფილებს ჰელდერის შექცეულ პირობას (R_p), თუ შემდეგი უტოლობა

$$E\left[\left\{\mathcal{E}_{\tau,T}(M)\right\}^p\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\le C_p$$

სრულდება ყოველი τ გაჩერების მომენტისათვის, სადაც მუდმივი C_p დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე.

შევნიშნოთ, რომ თუ $\mathcal{E}(M)$ თანაბრად ინტეგრებადი მარტინგალია, მაშინ იენსენის უტოლობის თანახმად გვექნება, რომ $E\left[\left\{\mathcal{E}_{\tau,T}(M)\right\}^p\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\ge 1$.

(R_p) პირობის დუალური არის მაკენჰაუფტის (A_p) პირობა.

განმარტება 1.4 ვიტყვით, რომ $\mathcal{E}(M)$ აკმაყოფილებს (A_p) პირობას $1<p<\infty$-თვის თუ არსებობს ისეთი მუდმივი $D_p>0$, რომ ყოველი τ გაჩერების მომენტისათვის ადგილი აქვს შემდეგ უტოლობას:

$$E\left[\left\{\mathcal{E}_{\tau,T}(M)\right\}^{-\frac{1}{p-1}}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\le D_p.$$

რადგან $\mathcal{E}(M)$ წარმოადგენს სუპერმარტინგალს, იენსენის უტოლობის გამოყენებით მივიღებთ შებრუნებულ უტოლობასაც:

$$E\left[\left\{\mathcal{E}_{\tau,T}(M)\right\}^{-\frac{1}{p-1}}\middle|\mathcal{F}_\tau\right] \geq \left\{E\left[\mathcal{E}_{\tau,T}(M)\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\right\}^{-\frac{1}{p-1}} \geq 1.$$

შემდეგი ლემა, რომელიც დამტკიცებულია პირველ თავში, ამყარებს კავშირს შექცეულ განტოლებებს, ჰელდერის შექცეულ პირობასა და მაკენჰაუფტის პირობას შორის:

ლემა 1.1 დავუშვათ M უწყვეტი ლოკალური მარტინგალია.

ა) $\mathcal{E}(M)$ აკმაყოფილებს (R_p)-ს, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც არსებობს შემდეგი $BSDE$-ს დადებითი და შემოსაზღვრული ამონახსნი:

$$\begin{cases} Y_t = Y_0 - \int\limits_0^t \left[\frac{p(p-1)}{2} Y_s + p\psi_s\right] d\langle M\rangle_s + \int\limits_0^t \psi_s dM_s + N_t \\ Y_T = 1. \end{cases} \tag{2}$$

ბ) $\mathcal{E}(M)$ აკმაყოფილებს (A_p)-ს, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც არსებობს შემდეგი $BSDE$-ს დადებითი და შემოსაზღვრული ამონახსნი:

$$\begin{cases} X_t = X_0 - \int\limits_0^t \left[\frac{p}{2(p-1)^2} X_s - \frac{1}{p-1}\varphi_s\right] d\langle M\rangle_s + \int\limits_0^t \varphi_s dM_s + L_t \\ X_T = 1. \end{cases} \tag{3}$$

შექცეული განტოლებების თვისებების გამოყენებით ასევე დავამტკიცებთ ცნობილ ექვივალენტობებს მარტინგალების BMO თვისებასა და მაკენჰაუფტის და ჰელდერის შექცეულ პირობებს შორის (დოლეანს-დედი და მეიერი [15], კაზამაკი [21]). შედეგად ჩვენ მივიღებთ BMO ნორმების შეფასებებს მაკენჰაუფტის და ჰელდერის შექცეული პირობების მუდმივების მეშვეობით. ყოველივე ეს ასახულია პირველი თავის **თეორემა 1.1**-ში.

თეორემა 1.1 დავუშვათ $\mathcal{E}(M)$ თანაბრად ინტეგრებადი მარტინგალია. მაშინ შემდეგი ოთხი პირობა ერთმანეთის ექვივალენტურია:

$\boldsymbol{i}$). $\widetilde{M} \in BMO(\tilde{P})$.
$\boldsymbol{ii}$). $\mathcal{E}(M)$ აკმაყოფილებს (R_p) პირობას რომელიმე $p > 1$-თვის.
$\boldsymbol{iii}$). $M \in BMO(P)$.
$\boldsymbol{iv}$). $\mathcal{E}(M)$ აკმაყოფილებს (A_p) პირობას რომელიმე $p > 1$-თვის.

ცნობილია, რომ თუ M BMO მარტინგალია, მაშინ ასახვა $\phi : \mathcal{L}(P) \ni X \to \tilde{X} = \langle X, M\rangle - X \in \mathcal{L}(\tilde{P})$ წარმოადგენს იზომორფიზმს $BMO(P)$ და $BMO(\tilde{P})$ სივრცეებს შორის, სადაც $d\tilde{P} = \mathcal{E}_T(M)dP$. კაზამაკის [20, 21] მიერ დამტკიცებული იყო, რომ უტოლობა

$$\left\|\tilde{X}\right\|_{BMO(\tilde{P})} \leq C_K\big(\widetilde{M}\big) \cdot \|X\|_{BMO(P)} \tag{4}$$

სამართლიანია ყოველი $X \in BMO(P)$-თვის, სადაც მუდმივი $C_K(\widetilde{M}) > 0$ დამოუკიდებელია X-ისგან, მაგრამ დამოკიდებულია M მარტინგალზე. შესაბამისი $BSDE$-ს თვისებების გამოყენებით ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ სამართლიანია (4) უტოლობა $C(\widetilde{M})$ მუდმივისთვის, რომელსაც წარმოვადგენთ, როგორც $\widetilde{M} = \langle M \rangle - M$-ის $BMO(\tilde{P})$ ნორმის წრფივ ფუნქციას და რომელიც ნაკლები იქნება $C_K(\widetilde{M})$-ზე $\widetilde{M}$-ის ნორმის ყოველი მნიშვნელობისათვის. ეს შედეგი დამტკიცებულია პირველი თავის **თეორემა 1.2** -ში.

თეორემა 1.2 თუ $M \in BMO(P)$, მაშინ $\phi : X \to \tilde{X}$ წარმოადგენს იზომორფიზმს $BMO(P)$ და $BMO(\tilde{P})$ სივრცეებს შორის და ყოველი $X \in BMO(P)$-თვის ადგილი აქვს შემდეგ ორმხრივ უტოლობას:

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\|M\|_{BMO(P)}\right)}\|X\|_{BMO(P)} \leq \|\tilde{X}\|_{BMO(\tilde{P})} \leq \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\|\widetilde{M}\|_{BMO(\tilde{P})}\right)\|X\|_{BMO(P)} \qquad (5)$$

შევადაროთ ჩვენს მიერ მიღებული $C(\widetilde{M}) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\|\widetilde{M}\|_{BMO(\tilde{P})}$ მუდმივი კაზამაკის [20, 21] $C_K(\widetilde{M})$ მუდმივს (4)-დან. რადგანაც $E^{\tilde{P}}\left[\left\{\mathcal{E}_{\tau,T}(\widetilde{M})\right\}^{-\frac{1}{p-1}}\middle|\mathcal{F}_\tau\right] \geq 1$, ამიტომ $C_K(\widetilde{M})$ მუდმივი მეტია $\sqrt{2p}$-ზე, სადაც p ისეთია, რომ სრულდება უტოლობა: $\|\widetilde{M}\|_{BMO(\tilde{P})} < \sqrt{2}(\sqrt{p} - 1)$. ეს უკანასკნელი ექვივალენტურია შემდეგი უტოლობის $p > \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\|\widetilde{M}\|_{BMO(\tilde{P})}\right)^2$, საიდანაც მივიღებთ, რომ როგორც მინიმუმ $C^2(\widetilde{M}) \leq \frac{1}{2}C_K^2(\widetilde{M})$.

(5) უტოლობიდან გამომდინარეობს შემდეგი მარტივი შედეგი, რომელსაც ვერ გამოვიყვანთ (4) უტოლობიდან.

შედეგი. დავუშვათ $(M^n,\ n \geq 1)$ არის $BMO(P)$ მარტინგალების მიმდევრობა ისეთი, რომ $\lim_{n\to\infty}\|M^n\|_{BMO(P)} = 0$. შემოვიღოთ ზომები $dP^n = \mathcal{E}_T(M^n)dP$ და $\tilde{X}^n = \langle X, M^n \rangle - X$. მაშინ ყოველი $X \in BMO(P)$-თვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\lim_{n\to\infty}\|\tilde{X}^n\|_{BMO(P^n)} = \|X\|_{BMO(P)}.$$

მეორე თავში განვიხილავთ (1) ტიპის შექცეულ განტოლებას, კვადრატული და ამოზნექილი გენერატორის შემთხვევაში. ასეთი განტოლებისათვის დავამტკიცებთ ამონახსნის არსებობასა და ერთადერთობას, როდესაც მარტინგალის კვადრატული მახასიათებელი და სასაზღვრო პირობა ექსპონენციალურ ხარისხშია ინტეგრებადი. ამონახსნის არსებობის შედეგი მოცემულია **თეორემა 2.1**-ში.

თეორემა 2.1 დავუშვათ $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$ ფილტრაცია უწყვეტია და M BMO მარტინგალია. ამასთან პარამეტრები (f, η) აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

1) ყოველი (t,ω)-თვის $f(t,\omega,\ \cdot\ )$ უწყვეტი და ამოზნექილი ფუნქციაა.

2) არსებობს ისეთი არაუარყოფითი ჭვრეტადი პროცესი α_t და მუდმივი $\gamma \geq 0$, რომ $\int \alpha dM \in BMO$ და ყოველი (t,ω,z)-თვის ადგილი აქვს უტოლობას:

$$|f(t,\omega,z)| \leq \alpha_t(\omega) + \frac{\gamma}{2}z^2.$$

3) $Ee^{\gamma\eta+\gamma\int_0^T \alpha_s d\langle M\rangle_s} < \infty$ და $\eta + \int_0^T f(s,0)d\langle M\rangle_s \geq -C$ რომელიღაც $C \geq 0$-თვის.

მაშინ არსებობს (1) განტოლების ამონახსნი $V = (V_t)_{0\leq t\leq T}$, რომელიც შემდეგი სახით წარმოიდგინება:

$$V_t = \underset{u\in U}{ess\ sup}\, E\left[\mathcal{E}_{t,T}\left(\int f_l'(u)dM\right)\left(\eta + \int_t^T [f(s,u_s) - f_l'(s,u_s)u_s]d\langle M\rangle_s\right)\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

სადაც U არის შემოსაზღვრულ და ჭვრეტად მართვათა კლასი.

დამტკიცების ძირითადი იდეა შემდეგში მდგომარეობს: ლემა 2.16-ის (იხ. დანართი) თანახმად f-ის ამოზნექილობიდან გამომდინარე ადგილი აქვს ტოლობას:

$$f(t,Z_t) = \underset{u\in U}{ess\ sup}[f(t,u_t) + f_l'(t,u_t)(Z_t - u_t)].$$

განვიხილოთ წრფივი $BSDE$

$$\begin{cases} Y_t = Y_0 - \int\limits_0^t [f(s,u_s) + f_l'(s,u_s)(Z_s - u_s)]d\langle M\rangle_s + \int\limits_0^t Z_s dM_s + L_t \\ \qquad\qquad Y_T = \eta. \end{cases} \tag{6}$$

ყოველი $u \in U$-თვის (6) განტოლებას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი (Y^u, Z^u, L^u), რომლის პირველ კომპონენტს აქვს სახე:

$$Y_t^u = E^u\left[\eta + \int_t^T [f(s,u_s) - f_l'(s,u_s)u_s]d\langle M\rangle_s \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

სადაც E^u აღნიშნავს პირობით მათემატიკურ ლოდინს $dP^u = \mathcal{E}_T(\int f_l'(u)dM)dP$ ზომის მიმართ. ჩვენი მიზანია დავამტკიცოთ, რომ ფასის პროცესი

$$V_t = \underset{u\in U}{ess\ sup}\, Y_t^u$$

წარმოადგენს (1) განტოლების ამონახსნს.

თავდაპირველად ამას ვაჩვენებთ იმ შემთხვევაში, როდესაც η, $\langle M\rangle_T$ და $\int_0^T \alpha_s d\langle M\rangle_s$ შემოსაზღვრული შემთხვევითი სიდიდეებია, ხოლო ზღვარზე გადასვლით დავასრულებთ **თეორემა 2.1**-ის დამტკიცებას.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ ამოზნექილ და კვადრატულ გენერატორიანი შექცეული განტოლებებისათვის დელბაენმა, ჰუმ და რიჩოუმ [11] დაამტკიცეს ამონახსნის ერთადერთობა ვინერის ფილტრაციის შემთხვევაში. იმავე მეთოდის გამოყენებით დავამტკიცებთ ერთადერ-თობის შედეგს შემოუსაზღვრელ მახასიათებლიანი უწყვეტი მარტინგალებისათვის.

(1) განტოლების ამონახსნის ერთადერთობას დავამტკიცებთ ამონახსნთა კლასში:

$$\aleph=\left\{(Y,Z,L)\ \ :\ \ Ee^{p\left(Y^{+}+\int\alpha d\langle M\rangle\right)^{*}}+Ee^{\varepsilon(Y^{-})^{*}}<\infty\right\}$$

სადაც $p>\gamma$ და $\varepsilon>0$.

თეორემა 2.3 თუ დამატებით **თეორემა 2.1**-ის პირობებისა სრულდება პირობა

$$Ee^{p\left(\eta^{+}+\int\alpha d\langle M\rangle\right)^{*}}<\infty,$$

სადაც $p>\gamma$, მაშინ ფასის პროცესი V ამონახსნთა $\aleph$ კლასში წარმოადგენს (1) განტოლების ერთადერთ ამონახსნს.

ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემებს (**თეორემა 2.1** და **თეორემა 2.3**) გამოვიყენებთ წრფივი რეგულატორის ამოცანის (LQR) ამოსახსნელად ზოგად მარტინგალურ დასმაში (იხ. **თავი 3**). დავუშვათ A გადაწყვეტილებების სიმრავლეა და M უწყვეტი ლოკალური მარტინგალია. ყოველ $a\in A$-ს შევუსაბამებთ ლოკალურ მარტინგალს $M^a=aM$. მართვები არის ჭვრეტადი ასახვები $u:\Omega\times[0;T]\to A$ და შესაბამისი ალბათური ზომები განისაზღვრება შემდეგნაირად $dP^u=\mathcal{E}_T(M^u)dP$, სადაც $M_t^u=\int_0^t u_s dM_s$ (აქ u მართვები აღებულია ისეთნაირად, რომ $\mathcal{E}_t(M^u)$ თანაბრად ინტეგრებადი მარტინგალია). დავუშვათ მიმდინარე მოგების ფუნქციას აქვს სახე $r(t,a)=-g(t)a^2+h(t)$ და განვიხილოთ ოპტიმიზაციის ამოცანა

$$\sup_u E^u\left[\eta+\int_0^T[h(s)-g(s)u_s^2]d\langle M\rangle_s\right]$$

სადაც $u\in U$ წარმოადგენს დასაშვებ მართვათა კლასს, ხოლო η $\mathcal{F}_T$-ზომადი შემთხვევითი სიდიდეა. დავუშვათ

$$V_t=ess\,\sup_u E^u\left[\eta+\int_t^T[h(s)-g(s)u_s^2]d\langle M\rangle_s\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

წარმოადგენს (LQR) ამოცანის ფასის პროცესს. მის შესაბამის შექცეულ განტოლებას ექნება სახე:

$$\begin{cases} Y_t = Y_0 - \int\limits_0^t \left[h(s) + \frac{1}{4g(s)} Z_s^2\right] d\langle M\rangle_s + \int\limits_0^t Z_s dM_s + L_t \\ Y_T = \eta. \end{cases}$$

შევნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაში არ სრულდება $(ess\, sup_u \langle M^u\rangle)_t$-ის ლოკალურად შემოსაზღვრულობის პირობა და შესაბამისი $BSDE$-სთვის ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა არ გამომდინარეობს რ. ჩიტაშვილის [9] შედეგიდან. მაგრამ შეგვიძლია გამოვიყენოთ ზემოაღნიშნული არსებობის და ერთადერთობის თეორემები. შესაბამისად თუკი სრულდება პირობები

(i) $\quad M, \int |h| dM \in BMO$

(ii) $\quad Ee^{p\left(\eta^+ + \int |h| d\langle M\rangle\right)^*} < \infty$ და $\eta + \int_0^T h(s) d\langle M\rangle_s \geq -D > -\infty$

სადაც $p > \frac{1}{2\varepsilon}$ და $g(s) \geq \varepsilon$ რომელიღაც $\varepsilon > 0$-თვის, მაშინ არსებობს () განტოლების ერთადერთი ამონახსნი $(\tilde{V}, \varphi, L)$, სადაც პირველ კომპონენტი $\tilde{V}$ ემთხვევა ფასის პროცესს, ხოლო ოპტიმალური მართვა იქნება $\frac{\varphi}{2g}$.

თ ა ვ ი 1

BMO მარტინგალებში რამოდენიმე კლასიკური შედეგის ახლებური დამტკიცება BSDE-ს გამოყენებით

ამ თავში BSDE–ს გამოყენებით დავამტკიცებთ რამოდენიმე კლასიკურ შედეგს BMO მარტინგალების თეორიაში. შემოვიღებთ რა ძირითად ობიექტებსა და განმარტებებს, დავამყარებთ კავშირებს BMO მარტინგალების სხვადასხვა მახასიათებლებსა და შექცეულ განტოლებებს შორის.

შემოვიღოთ ძირითადი ალბათური სივრცე $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, დროის სასრული ინტერვალი $0 < T < \infty$ და ფილტრაცია $F = (\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le T}$, რომელიც აკმაყოფილებს სისრულისა და მარჯვნიდან უწყვეტობის პირობებს.

ამ თავში დავუშვებთ, რომ M არის უწყვეტი ლოკალური მარტინგალი ისეთი, რომ $\langle M \rangle_T < \infty$ P - თ. ყ. ამის შედეგად კი გვექნება, რომ $\mathcal{E}_t(M) > 0$ P – თ. ყ. ყოველი $t \in [0;T]$-თვის, რაც საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ $\mathcal{E}_{\tau,T}(M)$ როგორც $\mathcal{E}_{\tau,T}(M) = \mathcal{E}_T(M)/\mathcal{E}_\tau(M)$.

§ 1.1 მაკენჰაუფტის და ჰელდერის შექცეული პირობების კავშირები შექცეულ განტოლებებთან

თავდაპირველად მოვიყვანოთ BMO მარტინგალის, მაკენჰაუფტის პირობის და ჰელდერის შექცეული პირობის განმარტებები (იხ. მაგ. დოლეანს დედი და მეიერი [15], ან კაზამაკი [21]).

განმარტება 1.2 ვიტყვით, რომ უწყვეტი ლოკალური მარტინგალი M არის BMO კლასში, თუ

$$\sup_{\tau} \| E[\langle M \rangle_T - \langle M \rangle_\tau | \mathcal{F}_\tau] \|_\infty < \infty,$$

სადაც sup აღებულია ყველა τ გაჩერების მომენტის მიმართ: $(0 \le \tau \le T)$.

განმარტება 1.3 დავუშვათ $1 < p < \infty$. ვიტყვით, რომ $\mathcal{E}(M)$ აკმაყოფილებს ჰელდერის შექცეულ პირობას (R_p), თუ შემდეგი უტოლობა

$$E\left[\{\mathcal{E}_{\tau,T}(M)\}^p \middle| \mathcal{F}_\tau\right] \le C_p$$

სრულდება ყოველი τ გაჩერების მომენტისათვის, სადაც მუდმივი C_p დამოკიდებულია მხოლოდ p-ზე.

შევნიშნოთ, რომ თუ $\mathcal{E}(M)$ თანაბრად ინტეგრებადი მარტინგალია, მაშინ იენსენის უტოლობის თანახმად გვექნება, რომ $E\left[\left\{\mathcal{E}_{\tau,T}(M)\right\}^p \middle| \mathcal{F}_\tau\right] \geq 1$.

(R_p) პირობის დუალური არის მაკენჰაუფტის (A_p) პირობა.

განმარტება 1.4 ვიტყვით, რომ $\mathcal{E}(M)$ აკმაყოფილებს (A_p) პირობას $1 < p < \infty$-თვის თუ არსებობს ისეთი მუდმივი $D_p > 0$, რომ ყოველი τ გაჩერების მომენტისათვის ადგილი აქვს შემდეგ უტოლობას:

$$E\left[\left\{\mathcal{E}_{\tau,T}(M)\right\}^{-\frac{1}{p-1}} \middle| \mathcal{F}_\tau\right] \leq D_p.$$

გამომდინარე იქიდან, რომ $\mathcal{E}(M)$ სუპერმარტინგალია, იენსენის უტოლობის გამოყენებით მივიღებთ პირიქით უტოლობასაც:

$$E\left[\left\{\mathcal{E}_{\tau,T}(M)\right\}^{-\frac{1}{p-1}} \middle| \mathcal{F}_\tau\right] \geq \left\{E\left[\mathcal{E}_{\tau,T}(M) \middle| \mathcal{F}_\tau\right]\right\}^{-\frac{1}{p-1}} \geq 1.$$

ამ თავში განვიხილავთ მხოლოდ შემდეგი ტიპის წრფივ BSDE-ს:

$$\begin{cases} Y_t = Y_0 - \int_0^t [\alpha Y_s + \beta \psi_s] d\langle M\rangle_s + \int_0^t \psi_s dM_s + N_t, \\ Y_T = 1, \end{cases} \tag{7}$$

სადაც α და β მუდმივებია.

ლემა 1.1 დავუშვათ M უწყვეტი ლოკალური მარტინგალია. მაშინ

ა) $\mathcal{E}(M)$ აკმაყოფილებს (R_p)-ს, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც არსებობს შემდეგი $BSDE$-ს დადებითი და შემოსაზღვრული ამონახსნი:

$$\begin{cases} Y_t = Y_0 - \int_0^t \left[\frac{p(p-1)}{2} Y_s + p\psi_s\right] d\langle M\rangle_s + \int_0^t \psi_s dM_s + N_t \\ Y_T = 1. \end{cases} \tag{8}$$

ბ) $\mathcal{E}(M)$ აკმაყოფილებს (A_p)-ს, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც არსებობს შემდეგი $BSDE$-ს დადებითი და შემოსაზღვრული ამონახსნი:

$$\begin{cases} X_t = X_0 - \int\limits_0^t \left[\frac{p}{2(p-1)^2} X_s - \frac{1}{p-1}\varphi_s\right] d\langle M\rangle_s + \int\limits_0^t \varphi_s dM_s + L_t \\ X_T = 1. \end{cases} \tag{9}$$

დამტკიცება: ა) თავდაპირველად ვაჩვენოთ, რომ თუ $\mathcal{E}(M)$ აკმაყოფილებს (R_p)-ს, მაშინ პროცესი $Y_t = E\left[\left\{\mathcal{E}_{t,T}(M)\right\}^p \middle| \mathcal{F}_t\right]$ იქნება (8) განტოლების დადებითი და შემოსაზღვრული ამონახსნი. ცხადია, რომ Y დადებითი და შემოსაზღვრული პროცესია და $Y_t\{\mathcal{E}_t(M)\}^p$ თანაბრად ინტეგრებადი მარტინგალია. ამასთან, რადგანაც $\mathcal{E}_t(M) > 0$, ამიტომ Y იქნება სპეციალური სემიმარტინგალი. დავუშვათ $Y_t = Y_0 + A_t + m_t$ წარმოადგენს Y-ის კანონიკურ გაშლას, სადაც m ლოკალურად კვადრატით ინტეგრებადი მარტინგალია, ხოლო A ჭვრეტადი, სასრული ვარიაციის პროცესია. თუ m-ისთვის ვისარგებლებთ კუნიტა-ვატანაბეს გაშლით, მივიღებთ, რომ

$$Y_t = Y_0 + A_t + \int_0^t \psi_s dM_s + N_t, \tag{10}$$

სადაც N M-ის ორთოგონალური ლოკალური მარტინგალია.

იტოს ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ, რომ

$$Y_t\{\mathcal{E}_t(M)\}^p = Y_0 + \int_0^t \left[\frac{p(p-1)}{2} Y_s + p\psi_s\right] \{\mathcal{E}_s(M)\}^p d\langle M\rangle_s + \int_0^t \{\mathcal{E}_s(M)\}^p dA_s + \widetilde{m}_t, \tag{11}$$

სადაც $\widetilde{m}_t$ ლოკალური მარტინგალია.

რადგანაც $Y_t\{\mathcal{E}_t(M)\}^p$ მარტინგალია, ამიტომ თუ (11)-ში სასრული ვარიაციის ნაწილებს გავუტოლებთ 0-ს, მივიღებთ, რომ

$$A_t = -\int_0^t \left[\frac{p(p-1)}{2} Y_s + p\psi_s\right] d\langle M\rangle_s,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $Y_t = E\left[\left\{\mathcal{E}_{t,T}(M)\right\}^p \middle| \mathcal{F}_t\right]$ არის (8) განტოლების ამონახსნი.

ამჯერად დავუშვათ, რომ (8) განტოლებას გააჩნია დადებითი და შემოსაზღვრული ამონახსნი Y_t. $Y_t\{\mathcal{E}_t(M)\}^p$-თვის იტოს ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ, რომ $Y_t\{\mathcal{E}_t(M)\}^p$ ლოკალური მარტინგალია. შესაბამისად იქნება სუპერმარტინგალი, როგორც დადებითი ლოკა-ლური მარტინგალი. ამიტომ სუპერმარტინგალური უტოლობიდან და $Y_T = 1$ პირობიდან გვექნება, რომ $E\left[\left\{\mathcal{E}_{t,T}(M)\right\}^p \middle| \mathcal{F}_t\right] \le Y_t$. Y-ის შემოსაზღვრულობიდან კი მივიღებთ, რომ $\mathcal{E}(M)$ აკმაყოფილებს (R_p) პირობას.

ბ) დამტკიცება ანალოგიურია **ა)** ნაწილის დამტკიცებისა, თუ p სიდიდეს ჩავანაცვლებთ $-\frac{1}{p-1}$ სიდიდით.

ლემა 1.1 დამტკიცებულია.

დავუშვათ $\mathcal{E}(M)$ თანაბრად ინტეგრებადი მარტინგალია. შემოვიტანოთ ახალი ალბათური ზომა $d\tilde{P} = \mathcal{E}_T(M)dP$ და $\tilde{M} = \langle M \rangle - M$.

შემდეგ თეორემაში ახლებურად დავამტკიცებთ ცნობილ ექვივალენტობებს მარტინ-გალების BMO თვისებასა და მაკენჰაუფტის და ჰელდერის შექცეულ პირობებს შორის.

თეორემა 1.1 დავუშვათ $\mathcal{E}(M)$ თანაბრად ინტეგრებადი მარტინგალია. მაშინ შემდეგი ოთხი პირობა ერთმანეთის ექვივალენტურია:

$\boldsymbol{i}$). $\tilde{M} \in BMO(\tilde{P})$.
$\boldsymbol{ii}$). $\mathcal{E}(M)$ აკმაყოფილებს (R_p) პირობას რომელიმე $p > 1$-თვის.
$\boldsymbol{iii}$). $M \in BMO(P)$.
$\boldsymbol{iv}$). $\mathcal{E}(M)$ აკმაყოფილებს (A_p) პირობას რომელიმე $p > 1$-თვის.

დამტკიცება: სიმარტივისათვის აქ მოცემულ ყველა დამტკიცებაში დავუშვებთ, რომ სტოქასტური ინტეგრალები მარტინგალებია, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში შეგვიძლია ლოკალიზაციის მეთოდის გამოყენება. სანამ უშუალოდ დამტკიცებაზე გადავიდოდეთ, შემოვიღოთ (7) განტოლების ამონახსნთა სპეციალური კლასი: განვიხილოთ (7) განტოლების ამონახსნი (Y, ψ, N) $(\langle N, M \rangle = 0)$ $S^{\infty} \times BMO(P) \times H^2(P)$ სივრციდან, რომელიც აღჭურვილია შემდეგი ნორმებით:

$$\|Y\|_{\infty} = \|Y_T^*\|_{L^{\infty}}, \text{ სადაც } Y_T^* = \sup\nolimits_{t \in [0;T]} |Y_t|,$$
$$\|\psi \cdot M\|_{BMO(P)} = \sup_{\tau} \left\| E\left[\int_{\tau}^{T} \psi_s^2 d\langle M \rangle_s \middle| \mathcal{F}_{\tau} \right]^{1/2} \right\|_{\infty},$$
$$\|N\|_{H^2} = E^{1/2}[N]_T,$$

სადაც $[N]$ არის N მარტინგალის ოფციონალური კვადრატული მახასიათებელი. შევნიშნოთ, რომ რადგანაც M უწყვეტი მარტინგალია, ამიტომ ნახტომები შეიძლება გააჩნდეს (7) განტოლების მხოლოდ უკანასკნელ წევრს, ანუ $\Delta Y = \Delta N$. იმისათვის, რომ თავი ავარიდოთ მარჯვნიდან უწყვეტი მარტინგალებისათვის BMO ნორმის განმარტებას, ორთოგონალური მარტინგალური ნაწილისათვის ვიყენებთ H^2 ნორმას. ეს საკმარისია ჩვენი მიზნებისათვის, რადგან განსახილველი განტოლების გენერატორი არაა დამოკიდებული ორთოგონალურ მარტინგალურ ნაწილზე.

$i) \Rightarrow ii)$

დავუშვათ $\widetilde{M} \in BMO(\widetilde{P})$. **ლემა 1.1**-ის თანახმად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ (8) განტოლებას რომელიღაც $p > 1$-თვის გააჩნია დადებითი და შემოსაზღვრული ამონახსნი. გადავწეროთ (8) განტოლება $\widetilde{M}$-ის ტერმინებში, რომელიც წარმოადგენს $\widetilde{P}$ მარტინგალს:

$$\begin{cases} Y_t = Y_0 - \int\limits_0^t \left[\frac{p(p-1)}{2} Y_s + (p-1)\psi_s\right] d\langle\widetilde{M}\rangle_s - \int\limits_0^t \psi_s d\widetilde{M}_s + N_t, \\ \qquad Y_T = 1, \end{cases} \tag{12}$$

რადგანაც $\langle N, M\rangle = 0$, ამიტომ გირსანოვის თეორემის თანახმად N იქნება $\widetilde{M}$-ის ორთოგონალური ლოკალური $\widetilde{P}$ მარტინგალი.

განვსაზღვროთ ასახვა $H : S^\infty \times BMO(\widetilde{P}) \times H^2(\widetilde{P}) \longrightarrow S^\infty \times BMO(\widetilde{P}) \times H^2(\widetilde{P})$, რომელიც ყოველ $(y, \psi, n) \in S^\infty \times BMO(\widetilde{P}) \times H^2(\widetilde{P})$ ასახავს (Y, Ψ, N)-ში, სადაც

$$Y_t = E^{\widetilde{P}}\left[1 + \int_t^T \left[\frac{p(p-1)}{2} y_s + (p-1)\psi_s\right] d\langle\widetilde{M}\rangle_s \middle| \mathcal{F}_t\right],$$

$$-\int_0^t \Psi_s d\widetilde{M}_s + N_t = E^{\widetilde{P}}\left[1 + \int_t^T \left[\frac{p(p-1)}{2} y_s + (p-1)\psi_s\right] d\langle\widetilde{M}\rangle_s \middle| \mathcal{F}_t\right] -$$

$$-E^{\widetilde{P}}\left[1 + \int_0^T \left(\frac{p(p-1)}{2} y_s + (p-1)\psi_s\right) d\langle\widetilde{M}\rangle_s\right].$$

ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ არსებობს ისეთი $p > 1$, რომ H იქნება კუმშვადი ასახვა. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\delta Y = Y^1 - Y^2, \quad \delta y = y^1 - y^2, \quad \delta\Psi = \Psi^1 - \Psi^2, \quad \delta\psi = \psi^1 - \psi^2, \quad \delta N = N^1 - N^2.$$

ცხადია, რომ $\delta Y_T = 0$ და

$$\delta Y_t = \delta Y_0 - \int_0^t \left[\frac{p(p-1)}{2} \delta y_s + (p-1)\delta\psi_s\right] d\langle\widetilde{M}\rangle_s - \int_0^t \delta\Psi_s d\widetilde{M}_s + \delta N_t.$$

თუ $(\delta Y_\tau)^2 - (\delta Y_T)^2$-თვის გამოვიყენებთ იტოს ფორმულას, ხოლო შემდეგ ავიღებთ პირობით მათემატიკურ ლოდინებს, მივიღებთ ტოლობას:

$$(\delta Y_\tau)^2 + E^{\widetilde{P}}\left[\int_\tau^T (\delta\Psi_s)^2 d\langle\widetilde{M}\rangle_s \middle| \mathcal{F}_\tau\right] + E^{\widetilde{P}}[[\delta N]_T - [\delta N]_\tau | \mathcal{F}_\tau] =$$

$$= E^{\widetilde{P}}\left[\int_\tau^T p(p-1)\delta Y_s \delta y_s d\langle\widetilde{M}\rangle_s \middle| \mathcal{F}_\tau\right] + E^{\widetilde{P}}\left[\int_\tau^T 2(p-1)\delta Y_s \delta\psi_s d\langle\widetilde{M}\rangle_s \middle| \mathcal{F}_\tau\right].$$

თუ უკანასკნელ ტოლობაში გამოვიყენებთ ელემენტარული უტოლობების თვისებებს, მივიღებთ:

$$(\delta Y_\tau)^2 + E^{\tilde{P}}\left[\int_\tau^T (\delta\Psi_s)^2 d\langle\widetilde{M}\rangle_s \middle| \mathcal{F}_\tau\right] + E^{\tilde{P}}[[\delta N]_T - [\delta N]_\tau | \mathcal{F}_\tau] \leq$$

$$\leq \frac{p(p-1)}{2}\left\|\widetilde{M}\right\|_{BMO(\tilde{P})}^2 \cdot \|\delta Y\|_\infty^2 + \frac{p(p-1)}{2}\left\|\widetilde{M}\right\|_{BMO(\tilde{P})}^2 \cdot \|\delta y\|_\infty^2 +$$

$$+(p-1)\left\|\widetilde{M}\right\|_{BMO(\tilde{P})}^2 \cdot \|\delta Y\|_\infty^2 + (p-1)\left\|\int \delta\psi d\widetilde{M}\right\|_{BMO(\tilde{P})}^2.$$

გამომდინარე იქიდან, რომ უტოლობის მარჯვენა მხარე არაა დამოკიდებული τ-ზე, გვექნება:

$$\|\delta Y\|_\infty^2 + \left\|\int \delta\Psi d\widetilde{M}\right\|_{BMO(\tilde{P})}^2 + \|\delta N\|_{H^2(\tilde{P})}^2 \leq$$

$$\leq \frac{3p(p-1)}{2}\left\|\widetilde{M}\right\|_{BMO(\tilde{P})}^2 \cdot \|\delta Y\|_\infty^2 + \frac{3p(p-1)}{2}\left\|\widetilde{M}\right\|_{BMO(\tilde{P})}^2 \cdot \|\delta y\|_\infty^2 +$$

$$+3(p-1)\left\|\widetilde{M}\right\|_{BMO(\tilde{P})}^2 \cdot \|\delta Y\|_\infty^2 + 3(p-1)\left\|\int \delta\psi d\widetilde{M}\right\|_{BMO(\tilde{P})}^2.$$

აქედან კი მარტივად მივიღებთ უტოლობას:

$$\left(1 - \frac{3p(p-1)}{2}\left\|\widetilde{M}\right\|_{BMO(\tilde{P})}^2 - 3(p-1)\left\|\widetilde{M}\right\|_{BMO(\tilde{P})}^2\right)\|\delta Y\|_\infty^2 +$$

$$+\left\|\int \delta\Psi d\widetilde{M}\right\|_{BMO(\tilde{P})}^2 + \|\delta N\|_{H^2(\tilde{P})}^2 \leq$$

$$\leq \frac{3p(p-1)}{2}\left\|\widetilde{M}\right\|_{BMO(\tilde{P})}^2 \cdot \|\delta y\|_\infty^2 + 3(p-1)\left\|\int \delta\psi d\widetilde{M}\right\|_{BMO(\tilde{P})}^2. \qquad (13)$$

როდესაც p საკმარისად ახლოსაა ერთთან, მაშინ $1 - \frac{3}{2}(p-1)(p+2)\left\|\widetilde{M}\right\|_{BMO(\tilde{P})}^2 > 0$. ამიტომ ერთთან საკმარისად ახლოს მყოფი p-თვის (13) უტოლობაში $\|\delta Y\|_\infty^2$-ს ექნება დადებითი კოეფიციენტი. ყოველივე ამის გათვალისწინებით საბოლოოდ მივიღებთ შემდეგ უტოლობას:

$$\|\delta Y\|_\infty^2 + \left\|\int \delta\Psi d\widetilde{M}\right\|_{BMO(\tilde{P})}^2 + \|\delta N\|_{H^2(\tilde{P})}^2 \leq \alpha(p) \cdot \|\delta y\|_\infty^2 + \beta(p) \cdot \left\|\int \delta\psi d\widetilde{M}\right\|_{BMO(\tilde{P})}^2, \quad (14)$$

სადაც

$$\alpha(p) = \frac{3p(p-1)\|\widetilde{M}\|^2_{BMO(\tilde{P})}}{2-3(p-1)(p+2)\|\widetilde{M}\|^2_{BMO(\tilde{P})}}, \qquad \beta(p) = \frac{6(p-1)}{2-3(p-1)(p+2)\|\widetilde{M}\|^2_{BMO(\tilde{P})}}.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $\lim_{p\downarrow 1} \alpha(p) = \lim_{p\downarrow 1} \beta(p) = 0$. ამიტომ, თუ ავიღებთ ისეთ p^*-ს, რომ $\alpha(p^*) < 1$ და $\beta(p^*) < 1$, მივიღებთ, რომ არსებობს ისეთი $0 < C < 1$, რომ ადგილი აქვს უტოლობას:

$$\|\delta Y\|^2_\infty + \left\|\int \delta\Psi d\widetilde{M}\right\|^2_{BMO(\tilde{P})} + \|\delta N\|^2_{H^2(\tilde{P})} \leq$$

$$\leq C\left(\|\delta y\|^2_\infty + \left\|\int \delta\psi d\widetilde{M}\right\|^2_{BMO(\tilde{P})} + \|\delta n\|^2_{H^2(\tilde{P})}\right), \qquad (15)$$

ყოველი $(y, \psi, n) \in S^\infty \times BMO(\tilde{P}) \times H^2(\tilde{P})$-თვის.

ანუ მივიღეთ, რომ H არის კუმშვითი ასახვა და არსებობს ე. წ. უძრავი წერტილი (Y, Ψ, N), რომელიც $S^\infty \times BMO(\tilde{P}) \times H^2(\tilde{P})$ კლასში იქნება (8) განტოლების ერთადერთი ამონახსნი.

რადგანაც $\alpha(p)$ და $\beta(p)$ $p \in (1;\infty)$-ს კლებადი ფუნქციებია, ამიტომ როგორც p-ს ფუნქციები $\|Y\|_\infty$ და $\|\Psi \cdot M\|_{BMO(\tilde{P})}$ თანაბრად შემოსაზღვრულებია, როდესაც $p \in [1;p^*]$. ამიტომ ყოველი $p \in [1;p^*]$-თვის გვექნება:

$$Y_t = E^{\tilde{P}}\left[1 + \int_t^T \left[\frac{p(p-1)}{2} Y_s + (p-1)\Psi_s\right] d\langle\widetilde{M}\rangle_s \middle| \mathcal{F}_t\right] \qquad (16)$$

ხოლო როდესაც p საკმარისად ახლოსაა ერთთან, მივიღებთ

$$Y_t \geq 1 - \frac{p(p-1)}{2}\|Y\|_\infty \|\widetilde{M}\|^2_{BMO(\tilde{P})} - \frac{p-1}{2}\|\widetilde{M}\|^2_{BMO(\tilde{P})} - \frac{p-1}{2}\|\Psi \cdot \widetilde{M}\|^2_{BMO(\tilde{P})} \geq 0.$$

ანუ რომელიღაც $p > 1$-თვის არსებობს (8) განტოლების დადებითი და შემოსაზღვრული ამონახსნი, რაც **ლემა 1.1**-ის თანახმად, ექვივალენტურია $\mathcal{E}(M)$-ისთვის (R_p) პირობის შესრულებისა.

$ii) \Rightarrow iii)$

დავუშვათ $\mathcal{E}(M)$ თანაბრად ინტეგრებადი მარტინგალია და რომელიღაც $p > 1$-თვის აკმაყოფილებს (R_p) პირობას. მაშინ პროცესი $Y_t = E\left[\{\mathcal{E}_{t,T}(M)\}^p \middle| \mathcal{F}_t\right]$ იქნება (8) განტოლების ამონახსნი და დააკმაყოფილებს შემდეგ ორმხრივ უტოლობას:

$$1 \leq Y_t \leq C_p. \qquad (17)$$

თუ $e^{-\beta Y_T} - e^{-\beta Y_\tau}$-თვის გამოვიყენებთ იტოს ფორმულას, ხოლო შემდეგ ავიღებთ პირობით მათემატიკურ ლოდინებს, მივიღებთ ტოლობას:

$$e^{-\beta} - e^{-\beta Y_\tau} = \beta \frac{p(p-1)}{2} E\left[\int_\tau^T Y_s e^{-\beta Y_s} d\langle M\rangle_s \middle| \mathcal{F}_\tau\right] +$$

$$+E\left[\int_\tau^T e^{-\beta Y_s}\left(\frac{\beta^2}{2}\psi_s^2 + \beta p \psi_s\right) d\langle M\rangle_s \middle| \mathcal{F}_\tau\right] + \frac{\beta^2}{2} E\left[\int_\tau^T e^{-\beta Y_s} d\langle N^c\rangle_s \middle| \mathcal{F}_\tau\right] +$$

$$+E\left[\sum_{\tau<s\le T}\left(e^{-\beta Y_s} - e^{-\beta Y_{s-}} + \beta e^{-\beta Y_{s-}}\Delta Y_s\right) \middle| \mathcal{F}_\tau\right].$$

გამომდინარე იქიდან, რომ $\frac{\beta^2}{2}\psi_s^2 + \beta p \psi_s \ge -\frac{p^2}{2}$ და $e^{-\beta Y_s} - e^{-\beta Y_{s-}} + \beta e^{-\beta Y_{s-}}\Delta Y_s \ge 0$, მივიღებთ შემდეგ უტოლობას

$$\frac{p}{2} E\left[\int_\tau^T (\beta(p-1)Y_s - p) e^{-\beta Y_s} d\langle M\rangle_s \middle| \mathcal{F}_\tau\right] \le e^{-\beta} - e^{-\beta Y_\tau}.$$

(17) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი $\beta > \frac{p}{p-1}$-თვის

$$\frac{p}{2}(\beta(p-1) - p) e^{-\beta C_p} E[\langle M\rangle_T - \langle M\rangle_\tau | \mathcal{F}_\tau] \le e^{-\beta} - e^{-\beta C_p}. \tag{18}$$

რადგან (18) უტოლობის მარჯვენა მხარე არაა დამოკიდებული τ-ზე, ამიტომ გვექნება

$$\|M\|_{BMO(P)}^2 \le \frac{2(e^{\beta(C_p-1)} - 1)}{p(\beta(p-1) - p)}.$$

$iii) \Rightarrow iv)$

დავუშვათ $M \in BMO(P)$. **ლემა 1.1**-ის თანახმად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ (9) განტოლებას რომელიღაც $p > 1$-თვის გააჩნია დადებითი და შემოსაზღვრული ამონახსნი. ეს ფაქტი დამტკიცდება $i) \Rightarrow ii)$ გამომდინარეობის ანალოგიურად. იმავე მეთოდებით ვაჩვენებთ, რომ საკმარისად დიდი p-თვის H იქნება კუმშვითი ასახვა. ამ შემთხვევაში ყოველ $(x, \varphi, l) \in S^\infty \times BMO(P) \times H^2(P)$-ს შეესაბამება (X, Φ, L), სადაც

$$X_t = E\left[1 + \int_t^T \left[\frac{p}{2(p-1)^2} x_s - \frac{1}{p-1}\varphi_s\right] d\langle M\rangle_s \middle| \mathcal{F}_t\right],$$

ხოლო $-\int_0^t \Phi_s dM_s + L_t$ წარმოადგენს X-ის მარტინგალურ ნაწილს. ამ შემთხვევაში (14) უტოლობა მიიღებს სახეს

$$\|\delta X\|_\infty^2 + \left\|\int \delta\Phi dM\right\|_{BMO(P)}^2 + \|\delta L\|_{H^2(P)}^2 \le \alpha(p)\cdot\|\delta x\|_\infty^2 + \beta(p)\cdot\left\|\int \delta\varphi dM\right\|_{BMO(P)}^2,$$

სადაც

$$\alpha(p) = \frac{3p\|M\|_{BMO(P)}^2}{2(p-1)^2-(9p-6)\|M\|_{BMO(P)}^2}, \qquad \beta(p) = \frac{6(p-1)}{2(p-1)^2-(9p-6)\|M\|_{BMO(P)}^2}.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ $\lim_{p\to\infty}\alpha(p) = \lim_{p\to\infty}\beta(p) = 0$. ანუ შეგვიძლია p იმდენად დიდი ავიღოთ, რომ $\alpha(p) < 1$ და $\beta(p) < 1$.

$iv) \Rightarrow i)$
დამტკიცება ანალოგიურია $ii) \Rightarrow iii)$ გამომდინარეობის და ამიტომ მხოლოდ მოკლე მონახაზით შემოვიფარგლებით.

ლემა 1.1-ის თანახმად, რადგანაც $\mathcal{E}(M)$ აკმაყოფილებს (A_p) პირობას $X_t = E\left[\left\{\mathcal{E}_{t,T}(M)\right\}^{-\frac{1}{p-1}}\middle|\mathcal{F}_t\right]$ იქნება (9) განტოლების დადებითი და შემოსაზღვრული ამონახსნი. გადავწეროთ (9) განტოლება $\widetilde{M}$-ის ტერმინებში

$$X_t = X_0 - \int_0^t \left[\frac{p}{2(p-1)^2}X_s - \frac{p}{p-1}\varphi_s\right] d\langle\widetilde{M}\rangle_s - \int_0^t \varphi_s d\widetilde{M}_s + L_t.$$

შევნიშნოთ, რომ $\langle\widetilde{M}\rangle = \langle M\rangle$ და L არის $\widetilde{M}$-ის ორთოგონალური $\tilde{P}$ მარტინგალი.

თუ მსგავსად $ii) \Rightarrow iii)$ გამომდინარეობისა $e^{-\beta X_T} - e^{-\beta X_\tau}$-თვის გამოვიყენებთ ჯერ იტოს ფორმულას და პირობითი ლოდინის თვისებებს, ხოლო შემდეგ $1 \le X_t \le D_p$ და $\frac{\beta^2}{2}\varphi_s^2 - \frac{\beta p}{p-1}\varphi_s \ge -\frac{p^2}{2(p-1)^2}$ უტოლობებს, ყოველი $\beta > p$-თვის მივიღებთ $\widetilde{M}$-ის BMO ნორმის შეფასებას მაკენჰაუფტის D_p მუდმივის საშუალებით:

$$\|\widetilde{M}\|_{BMO(\tilde{P})}^2 \le \frac{2(p-1)^2}{p(\beta-p)}\left(e^{\beta(D_p-1)} - 1\right).$$

თეორემა 1.1 დამტკიცებულია.

§ 1.2 BMO მარტინგალების გირსანოვის გარდაქმნა და მისი კავშირი შექცეულ განტოლებებთან

დავუშვათ M უწყვეტი ლოკალური P-მარტინგალია ისეთი, რომ $\mathcal{E}(M)$ თანაბრად ინტეგრებადი მარტინგალია და ვთქვათ $d\tilde{P} = \mathcal{E}_T(M)dP$. ყოველ X უწყვეტ ლოკალურ მარტინგალს შევუსაბამოთ პროცესი $\tilde{X} = \langle X, M\rangle - X$, რომელიც გირსანოვის თეორემის თანახმად იქნება $\tilde{P}$-ლოკალური მარტინგალი. აღვნიშნოთ ეს ასახვა φ-თი: $\varphi : \mathcal{L}(P) \to \mathcal{L}(\tilde{P})$, სადაც $\mathcal{L}(P)$ და $\mathcal{L}(\tilde{P})$, შესაბამისად, წარმოადგენენ P და $\tilde{P}$ ლოკალური მარტინგალების სივრცეებს.

განვიხილოთ პროცესი

$$Y_t = E^{\tilde{P}}[\langle X\rangle_T - \langle X\rangle_t | \mathcal{F}_t] = E\big[\mathcal{E}_{t,T}(M)(\langle X\rangle_T - \langle X\rangle_t) | \mathcal{F}_t\big]. \tag{19}$$

რადგან $\langle \tilde{X}\rangle = \langle X\rangle$ ორივე ალბათური ზომის მიმართ, ამიტომ ცხადია, რომ

$$\|Y\|_\infty = \|\tilde{X}\|^2_{BMO(\tilde{P})}. \tag{20}$$

დავუშვათ $M \in BMO(P)$. **თეორემა 1.1**-ის თანახმად რომელიღაც $p > 1$-თვის სრულდება (R_p). (R_p) პირობა პირობით ენერგეტიკულ უტოლობებთან (კაზამაკი [21], გვ. 29) ერთად საშუალებას გვაძლევს მარტივად ვაჩვენოთ, რომ Y პროცესი შემოსაზღვრული იქნება ყოველი $X \in BMO(P)$-თვის, რაც იმას ნიშნავს, რომ φ ასახვს $BMO(P)$-ს $BMO(\tilde{P})$-ში. მეტიც, კაზამაკიმ [20, 21] აჩვენა, რომ თუ $M \in BMO(P)$, მაშინ φ ასახვა წარმოადგენს იზომორფიზმს $BMO(P)$ და $BMO(\tilde{P})$ სივრცეებს შორის და დაამტკიცა, რომ ყოველი $X \in BMO(P)$-თვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\|\tilde{X}\|^2_{BMO(\tilde{P})} \le C_K^2(\tilde{M}) \cdot \|X\|^2_{BMO(P)} \tag{21}$$

სადაც

$$C_K^2(\tilde{M}) = 2p \cdot 2^{1/p} \sup_\tau \left\| E^{\tilde{P}}\left[\left\{\mathcal{E}_{\tau,T}(\tilde{M})\right\}^{-\frac{1}{p-1}} \middle| \mathcal{F}_\tau \right] \right\|_\infty^{(p-1)/p} \tag{22}$$

და p ისეთია, რომ

$$\|\tilde{M}\|_{BMO(\tilde{P})} < \sqrt{2}(\sqrt{p} - 1). \tag{23}$$

შევნიშნოთ, რომ ანალოგიურ უტოლობას ადგილი აქვს φ^{-1} შექცეული ასახვისთვისაც.

ლემა 1.1-ის მსგავსად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ ყოველი $X \in BMO(P)$-თვის (19)-ში განსაზღვრული Y პროცესი წარმოადგენს შემდეგი BSDE-ს დადებით და შემოსაზღვრულ ამონახსნს

$$\begin{cases} Y_t = Y_0 - \langle X \rangle_t - \int_0^t \varphi_s d\langle M \rangle_s + \int_0^t \varphi_s dM_s + L_t, \\ Y_T = 0, \end{cases} \tag{24}$$

მართლაც, ცხადია, რომ $(Y_t + \langle X \rangle_t)\mathcal{E}_t(M)$ ლოკალური მარტინგალია. გამომდინარე იქიდან, რომ $\mathcal{E}_t(M) > 0$ P - თ. ყ. ყოველი $t \in [0;T]$-თვის, Y პროცესი იქნება სპეციალური სემიმარტინგალი შემდეგი კანონიკური გაშლით

$$Y_t = Y_0 + A_t + \int_0^t \varphi_s dM_s + N_t, \tag{25}$$

სადაც A სასრული ვარიაციის ჭვრეტადი პროცესია და N M-ის ორთოგონალური ლოკალური მარტინგალია.

იტოს ფორმულის თანახმად

$$(Y_t + \langle X \rangle_t)\mathcal{E}_t(M) = \int_0^t \mathcal{E}_s(M)[dA_s + d\langle X \rangle_s + \varphi_s d\langle M \rangle_s] + m_t,$$

სადაც m ლოკალური მარტინგალია. რაკი $(Y_t + \langle X \rangle_t)\mathcal{E}_t(M)$ ლოკალური მარტინგალია ამიტომ მივიღებთ, რომ სასრული ვარიაციის ნაწილი 0-ის ტოლია, რაც იმას ნიშნავს, რომ $A_t = -\langle X \rangle_t - \int_0^t \varphi_s d\langle M \rangle_s$. შესაბამისად (25)-დან მივიღებთ, რომ Y აკმაყოფილებს (24) განტოლებას.

ახლა მოვიყვანოთ თეორემა, რომელშიც ახლებურადაა დამტკიცებული φ ასახვის იზომორფიზმობა და გაუმჯობესებულია კაზამაკის მიერ (21)-ში მიღებული იზომორფიზმის მუდმივი.

თეორემა 1.2 თუ $M \in BMO(P)$, მაშინ $\varphi : X \to \tilde{X}$ წარმოადგენს $BMO(P)$ და $BMO(\tilde{P})$ სივრცეების იზომორფიზმს. კერძოდ ყოველი $X \in BMO(P)$-თვის ადგილი აქვს შემდეგ ორმხრივ უტოლობას:

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\|M\|_{BMO(P)}\right)}\|X\|_{BMO(P)} \le \|\tilde{X}\|_{BMO(\tilde{P})} \le \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\|\tilde{M}\|_{BMO(\tilde{P})}\right)\|X\|_{BMO(P)} \tag{26}$$

დამტკიცება: თუ $(Y_\tau+\varepsilon)^p-(Y_T+\varepsilon)^p$-თვის (სადაც $0<p<1,\ \varepsilon>0$) გამოვიყენებთ იტოს ფორმულას, ხოლო შემდეგ ავიღებთ პირობით მათემატიკურ ლოდინებს, მივიღებთ ტოლობას:

$$(Y_\tau+\varepsilon)^p-\varepsilon^p=E\left[\int_\tau^T p(Y_s+\varepsilon)^{p-1}d\langle X\rangle_s\middle|\mathcal{F}_\tau\right]+\frac{p(1-p)}{2}E\left[\int_\tau^T (Y_s+\varepsilon)^{p-2}d\langle L^c\rangle_s\middle|\mathcal{F}_\tau\right]+$$

$$+E\left[\int_\tau^T\left(\frac{p(1-p)}{2}(Y_s+\varepsilon)^{p-2}\varphi_s^2+p(Y_s+\varepsilon)^{p-1}\varphi_s\right)d\langle M\rangle_s\middle|\mathcal{F}_\tau\right]-$$

$$-E\left[\sum_{\tau<s\le T}((Y_s+\varepsilon)^p-(Y_{s-}+\varepsilon)^p-p(Y_{s-}+\varepsilon)^{p-1}\Delta Y_s)\middle|\mathcal{F}_\tau\right]. \qquad (27)$$

რადგან ყოველი $p\in(0;1)$-თვის $f(x)=x^p$ ამოზნექილი ფუნქციაა, (27)-ის უკანასკნელი წევრი იქნება არაუარყოფითი. ამიტომ შემდეგი უტოლობის გამოყენებით

$$\frac{p(1-p)}{2}(Y_s+\varepsilon)^{p-2}\varphi_s^2+p(Y_s+\varepsilon)^{p-1}\varphi_s+\frac{p}{2(1-p)}(Y_s+\varepsilon)^p\ge 0$$

(27)-დან მივიღებთ, რომ

$$(Y_\tau+\varepsilon)^p-\varepsilon^p\ge E\left[\int_\tau^T p(Y_s+\varepsilon)^{p-1}d\langle X\rangle_s\middle|\mathcal{F}_\tau\right]-\frac{p}{2(1-p)}E\left[\int_\tau^T (Y_s+\varepsilon)^p d\langle M\rangle_s\middle|\mathcal{F}_\tau\right]. \quad (28)$$

რადგან $0<p<1$, ამიტომ

$$p(\|Y\|_\infty+\varepsilon)^{p-1}E[\langle X\rangle_T-\langle X\rangle_\tau|\mathcal{F}_\tau]\le E\left[\int_\tau^T p(Y_s+\varepsilon)^{p-1}\langle X\rangle_s\middle|\mathcal{F}_\tau\right],$$

და (28)-დან გვექნება

$$p(\|Y\|_\infty+\varepsilon)^{p-1}E[\langle X\rangle_T-\langle X\rangle_\tau|\mathcal{F}_\tau]\le (Y_\tau+\varepsilon)^p-\varepsilon^p+\frac{p}{2(1-p)}E\left[\int_\tau^T (Y_s+\varepsilon)^p d\langle M\rangle_s\middle|\mathcal{F}_\tau\right]$$

საიდანაც, თუ უტოლობის ორივე მხარეს ავიღებთ შესაბამის ნორმებს, მივიღებთ:

$$p(\|Y\|_\infty+\varepsilon)^{p-1}\cdot\|X\|_{BMO(P)}^2\le(\|Y\|_\infty+\varepsilon)^p-\varepsilon^p+\frac{p}{2(1-p)}(\|Y\|_\infty+\varepsilon)^p\cdot\|M\|_{BMO(P)}^2.$$

გადავიდეთ ზღვარზე როდესაც $\varepsilon\to 0$ და ყოველი $p\in(0;1)$-თვის გვექნება

$$\|X\|_{BMO(P)}^2\le\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2(1-p)}\|M\|_{BMO(P)}^2\right)\cdot\|Y\|_\infty.$$

რადგან $f(p)=\frac{1}{p}+\frac{1}{2(1-p)}\|M\|^2_{BMO(P)}$ ფუნქციის მინიმუმი მიიღწევა $p^*=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\|M\|_{BMO(P)}}$ წერტილზე და $f(p^*)=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\|M\|_{BMO(P)}\right)^2$, ამიტომ

$$\|X\|^2_{BMO(P)}\leq \min_{p\in(0;1)}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2(1-p)}\|M\|^2_{BMO(P)}\right)\cdot\|Y\|_\infty=$$

$$=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\|M\|_{BMO(P)}\right)^2\cdot\|Y\|_\infty\,. \tag{29}$$

შესაბამისად (29) და (20)-დან გვექნება უტოლობა

$$\frac{1}{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\|M\|_{BMO(P)}\right)}\|X\|_{BMO(P)}\leq\left\|\tilde{X}\right\|_{BMO(\tilde{P})}.$$

(29) უტოლობა შეიძლება გამოვიყენოთ $\tilde{X}$-ის გირსანოვის გარდაქმნისათვის. რადგან $dP/d\tilde{P}=\mathcal{E}_T^{-1}(M)=\mathcal{E}_T(\widetilde{M})$; $\widetilde{M},\ \tilde{X}\in BMO(\tilde{P})$ და

$$\varphi(\tilde{X})=\langle\tilde{X},\widetilde{M}\rangle-\tilde{X}=X,$$

ამიტომ (29)-დან მივიღებთ შებრუნებულ უტოლობასაც:

$$\left\|\tilde{X}\right\|_{BMO(\tilde{P})}\leq\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\left\|\widetilde{M}\right\|_{BMO(\tilde{P})}\right)\|X\|_{BMO(P)}. \tag{30}$$

თეორემა 1.2 დამტკიცებულია.

შევადაროთ ჩვენს მიერ (26)-ში მიღებული

$$C(\widetilde{M})=1+\frac{\sqrt{2}}{2}\left\|\widetilde{M}\right\|_{BMO(\tilde{P})}$$

მუდმივი კაზამაკის [20, 21] მიერ (21)-ში მიღებულ $C_K(\widetilde{M})$ მუდმივს. რადგან

$$E^{\tilde{P}}\left[\left\{\mathcal{E}_{\tau,T}(\widetilde{M})\right\}^{-\frac{1}{p-1}}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\geq 1,$$

$C_K(\widetilde{M})$ მუდმივი იქნება $\sqrt{2p}$-ზე მეტი, სადაც p ისეთია, რომ $\left\|\widetilde{M}\right\|_{BMO(\tilde{P})}<\sqrt{2}(\sqrt{p}-1)$. უკანასკნელი უტოლობა ექვივალენტურია $p>\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\left\|\widetilde{M}\right\|_{BMO(\tilde{P})}\right)^2$ უტოლობისა და ამიტომ მივიღებთ, რომ როგორც მინიმუმ

$$C^2(\widetilde{M}) \leq \frac{1}{2} C_K^2(\widetilde{M}).$$

(26) უტოლობიდან გამომდინარეობს შემდეგი მარტივი შედეგი, რომელიც არ გამომდინარეობს კაზამაკის მიერ მიღებული (21) უტოლობიდან.

შედეგი. დავუშვათ $(M^n,\ n \geq 1)$ არის $BMO(P)$ მარტინგალების მიმდევრობა ისეთი, რომ $\lim_{n\to\infty} \|M^n\|_{BMO(P)} = 0$. შემოვიღოთ ზომები $dP^n = \mathcal{E}_T(M^n)dP$ და $\tilde{X}^n = \langle X, M^n\rangle - X$. მაშინ ყოველი $X \in BMO(P)$-თვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{X}^n\|_{BMO(P^n)} = \|X\|_{BMO(P)}.$$

დამტკიცება: თუ (26) უტოლობას გამოვიყენებთ $X = M^n$ და $M = M^n$-თვის, მივიღებთ

$$\|\widetilde{M}^n\|_{BMO(P^n)} \leq \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \|\widetilde{M}^n\|_{BMO(P^n)}\right) \|M^n\|_{BMO(P)}.$$

ამიტომ

$$\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1/\|\widetilde{M}^n\|_{BMO(P^n)}} \leq \|M^n\|_{BMO(P)}$$

საიდანაც დავასკვნით, რომ $\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{M}^n\|_{BMO(P^n)} = 0$. ამჯერად, თუ (26) ორმხრივ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე როდესაც $n \to \infty$ მივიღებთ, რომ

$$\|X\|_{BMO(P)} \leq \lim_{n\to\infty} \|\tilde{X}^n\|_{BMO(P^n)} \leq \|X\|_{BMO(P)}.$$

შედეგი დამტკიცებულია.

შენიშვნა: შევნიშნოთ, რომ სამართლიანია **თეორემა 1.2**-ის შებრუნებული თეორემაც. კერძოდ, თუ M ისეთი უწყვეტი ლოკალური მარტინგალია, რომ $\mathcal{E}(M)$ თანაბრად ინტეგრებადია, მაშინ შახერმაიერმა [33] დაამტკიცა, რომ თუ $M \notin BMO(P)$, მაშინ φ ასახვა არ არის $BMO(P)$ და $BMO(\tilde{P})$ სივრცეების იზომორფიზმი.

თ ა ვ ი 2

ამოზნექილ გენერატორიანი შექცეული სტოქასტურ დიფერენციალური განტოლებები

როგორც შესავალში აღვნიშნეთ, ამ თავში ჩვენი მიზანია ამოზნექილ და კვადრატულ გენერატორიანი შექცეული განტოლებისათვის დავამტკიცოთ ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემები. ანუ ვიხილავთ (1) განტოლებას, როდესაც f გენერატორი არის ამოზნექილი და კვადრატული ზრდის. ამონახსნის არსებობის თეორემას აქვს შემდეგი სახე:

თეორემა 2.1 დავუშვათ $\{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T}$ ფილტრაცია უწყვეტია და M BMO მარტინგალია. ამასთან (1) განტოლების (f,η) პარამეტრები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

1) ყოველი (t,ω)-თვის $f(t,\omega,\cdot)$ უწყვეტი და ამოზნექილი ფუნქციაა.
2) არსებობს ისეთი არაუარყოფითი ჭვრეტადი პროცესი α_t და მუდმივი $\gamma\ge 0$, რომ $\int \alpha dM \in BMO$ და ყოველი (t,ω,z)-თვის ადგილი აქვს უტოლობას:

$$|f(t,\omega,z)| \le \alpha_t(\omega) + \frac{\gamma}{2}z^2.$$

3) $Ee^{\gamma\eta+\gamma\int_0^T \alpha_s d\langle M\rangle_s} < \infty$ და $\eta + \int_0^T f(s,0)d\langle M\rangle_s \ge -C$ რომელიღაც $C\ge 0$-თვის.

მაშინ არსებობს (1) განტოლების ამონახსნი $V=(V_t)_{0\le t\le T}$, რომელიც შემდეგი სახით წარმოიდგინება:

$$V_t = \operatorname*{ess\,sup}_{u\in U} E\left[\mathcal{E}_{t,T}\left(\int f_l'(u)dM\right)\left(\eta + \int_t^T [f(s,u_s) - f_l'(s,u_s)u_s]d\langle M\rangle_s\right)\middle|\,\mathcal{F}_t\right],$$

სადაც U არის შემოსაზღვრულ და ჭვრეტად მართვათა კლასი.

თეორემა 2.1-ს დამტკიცება მოიცავს მიმდინარე თავის პირველ ოთხ პარაგრაფს. პირველ პარაგრაფში ვაჩვენებთ, რომ ფასის პროცესი V წარმოადგენს (1) განტოლების სუპერამონახსნს; მეორე პარაგრაფი დაეთმობა **თეორემა** 2.1-ს დამტკიცებას იმ შემთხვევაში, როდესაც (1) განტოლების ძირითადი პარამეტრები შემოსაზღვრულია; მესამე ნაწილში განვიხილავთ შემთხვევას, როდესაც გენერატორი და სასაზღვრო პირობა არაუარყოფითებია, ხოლო მეოთხე პარაგრაფში დავასრულებთ **თეორემა** 2.1-ს დამტკიცებას. მეხუთე პარაგრაფში მოვიყვანთ **თეორემა** 2.1-ის მრავალგანზომილებიან ანალოგს. მეორე თავის მეექვსე ნაწილში კი დავამტკიცებთ ამონახსნის ერთადერთობის თეორემას დამატებითი პირობების შემთხვევაში. მეორე თავის ბოლოს დანართის სახით წარმოვადგენთ რამოდენიმე დამხმარე ლემას, რომელთაც არსებითად გამოვიყენებთ **თეორემა** 2.1-ის დამტკიცებისას.

§ 2.1 ფასის პროცესი, როგორც (1) განტოლების სუპერამონახსნი

განვიხილოთ ყოველი $u \in U$-თვის წრფივი BSDE

$$\begin{cases} Y_t = Y_0 - \int\limits_0^t [f(s,u_s) + f_l'(s,u_s)(Z_s - u_s)]d\langle M\rangle_s + \int\limits_0^t Z_s dM_s + L_t \\ Y_T = \eta. \end{cases} \tag{6}$$

თეორემა 2.1-ის **2)** პირობის და ლემა 2.14-ის (იხ. დანართი) თანახმად ყოველი $u \in U$-თვის $\mathcal{E}(\int f_l'(u)dM)$ იქნება თანაბრად ინტეგრებადი მარტინგალი. ამიტომ შეგვიძლია შემოვიღოთ ალბათური ზომა $dP^u = \mathcal{E}_T(\int f_l'(u)dM)dP$. ყოველივე ამის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ არსებობს (6) განტოლების ერთადერთი ამონახსნი

$$Y_t^u = E^u\left[\eta + \int_t^T [f(s,u_s) - f_l'(s,u_s)u_s]d\langle M\rangle_s \middle| \mathcal{F}_t\right].$$

განვიხილოთ ფასის პროცესი $(V_t)_{0\le t\le T}$:

$$V_t = \underset{u\in U}{ess\,sup}\, Y_t^u = \underset{u\in U}{ess\,sup}\, E^u\left[\eta + \int_t^T [f(s,u_s) - f_l'(s,u_s)u_s]d\langle M\rangle_s \middle| \mathcal{F}_t\right].$$

ამ წარმოდგენიდან ცხადია, რომ $V_T = \eta$.

განმარტება 2.1 ვიტყვით, რომ $(Y_t)_{0\le t\le T}$ პროცესი არის (1) განტოლების სუპერამონახსნი, თუ არსებობს ისეთი ზრდადი პროცესი $(K_t)_{0\le t\le T}$, რომ Y აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\begin{cases} Y_t = Y_0 - K_t - \int\limits_0^t f(s,Z_s)d\langle M\rangle_s + \int\limits_0^t Z_s dM_s + L_t, \\ Y_T = \eta, \end{cases}$$

სადაც Z ჭვრეტადი პროცესია, რომლისთვისაც $\int_0^T Z_s^2 d\langle M\rangle_s < \infty$ P თ. ყ. ხოლო L M-ის ორთოგონალური ლოკალური მარტინგალია.

ჩვენი საბოლოო მიზანია ვაჩვენოთ, რომ V არის (1) განტოლების ამონახსნი. ის, რომ V არის (1) განტოლების სუპერამონახსნი, ამას დავამტკიცებთ მიმდინარე პარაგრაფში. ამისათვის დაგვჭირდება ე. წ. **ოპტიმალობის პრინციპი** [17], რომელიც ჩვენს შემთხვევაში ასე ჩამოყალიბდება:

წინადადება 2.1 (ოპტიმალობის პრინციპი) არსებობს V პროცესის მარჯვნიდან უწყვეტი და მარცხენა ზღვრების მქონე $(RCLL)$ მოდიფიკაცია ისეთი, რომ

ა) ყოველი $u \in U$-თვის $V_t + \int_0^t [f(s,u_s) - f_l'(s,u_s)u_s] d\langle M\rangle_s$ იქნება სუპერმარტინგალი P^u ზომის მიმართ.

ბ) u^* მართვა ოპტიმალურია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $V_t + \int_0^t [f(s,u_s^*) - f_l'(s,u_s^*)u_s^*] d\langle M\rangle_s$ არის მარტინგალი P^{u^*} ზომის მიმართ.

მოვიყვანოთ ამ პარაგრაფის ძირითადი შედეგი წინადადების სახით:

წინადადება 2.2 დავუშვათ $(M_t)_{0\le t\le T}$ BMO მარტინგალია და (1) განტოლების (f,η) პარამეტრები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

1) ყოველი (t,ω)-თვის $f(t,\omega,\cdot)$ უწყვეტი და ამოზნექილი ფუნქციაა.
2) არსებობს ისეთი არაუარყოფითი ჭვრეტადი პროცესი α_t და მუდმივი $\gamma \ge 0$, რომ $\int \alpha dM \in BMO$ და ყოველი (t,ω,z)-თვის ადგილი აქვს უტოლობას:

$$|f(t,\omega,z)| \le \alpha_t(\omega) + \frac{\gamma}{2} z^2.$$

მაშინ $(V_t)_{0\le t\le T}$ პროცესი იქნება (1) განტოლების სუპერამონახსნი.

დამტკიცება: წინადადება 2.1-ის თანახმად $V_t + \int_0^t [f(s,u_s) - f_l'(s,u_s)u_s] d\langle M\rangle_s$ P^u-სუპერმარტინგალია. ამიტომ იგივე პროცესი იქნება P-სემიმარტინგალი. აქედან გამომდინარე V პროცესიც იქნება P-სემიმარტინგალი. დავუშვათ

$$V_t = V_0 + A_t + \int_0^t \varphi_s dM_s + L_t \tag{\#}$$

წარმოადგენს V-ს სემიმარტინგალურ გაშლას, სადაც A სასრული ვარიაციის პროცესია; φ ჭვრეტადი პროცესია, რომლისთვისაც $\int_0^T \varphi_s^2 d\langle M\rangle_s < \infty$ P თ. ყ. ხოლო L M-ის ორთოგონალური ლოკალური მარტინგალია (V-ს მარტინგალური ნაწილის გასაშლელად გამოვიყენეთ კუნიტა-ვატანაბეს [24] გაშლა). V-ს ამ გაშლის გამოყენებით მივიღებთ ტოლობებს

$$V_t + \int_0^t [f(s,u_s) - f_l'(s,u_s)u_s] d\langle M\rangle_s =$$

$$= V_0 + A_t + \int_0^t [f(s,u_s) - f_l'(s,u_s)u_s] d\langle M\rangle_s + \int_0^t \varphi_s dM_s + L_t =$$

$$= V_0 + A_t + \int_0^t [f(s,u_s) - f_l'(s,u_s)u_s] d\langle M\rangle_s + \int_0^t \varphi_s dM_s -$$

$$-\int_0^t \varphi_s f_l'(s,u_s)d\langle M\rangle_s + \int_0^t \varphi_s f_l'(s,u_s)d\langle M\rangle_s + L_t =$$

$$= V_0 + \int_0^t \varphi_s dM_s - \int_0^t \varphi_s f_l'(s,u_s)d\langle M\rangle_s + L_t + A_t + \int_0^t [f(s,u_s) + f_l'(s,u_s)(\varphi_s - u_s)]d\langle M\rangle_s.$$

გირსანოვის თეორემის თანახმად $\int \varphi dM - \int \varphi f_l'(u)d\langle M\rangle$ და L იქნებიან ორთოგონალური P^u-ლოკალური მარტინგალები. ამიტომ $A_t + \int_0^t [f(s,u_s) + f_l'(s,u_s)(\varphi_s - u_s)]d\langle M\rangle_s$ იქნება კლებადი პროცესი. რადგან A_t არაა დამოკიდებული u-ზე, ასევე კლებადი იქნება

$$A_t + \underset{u\in U}{ess\ sup} \int_0^t [f(s,u_s) + f_l'(s,u_s)(\varphi_s - u_s)]d\langle M\rangle_s.$$

ვაჩვენოთ, რომ

$$\underset{u\in U}{ess\ sup} \int_0^t [f(s,u_s) + f_l'(s,u_s)(\varphi_s - u_s)]d\langle M\rangle_s = \int_0^t f(s,\varphi_s)d\langle M\rangle_s.$$

ლემა 2.15-ის თანახმად (იხ. დანართი)

$$\underset{u\in U_n}{ess\ sup}[f(s,u_s) + f_l'(s,u_s)(\varphi_s - u_s)] = f(s,\varphi_s^n) + f_l'(s,\varphi_s^n)(\varphi_s - \varphi_s^n) = g^n(s,\varphi_s),$$

სადაც $U_n = \{u \in U : |u_s(\omega)| \le n\}$ ხოლო g^n ფუნქციას აქვს სახე:

$$g^n(s,x) = 1_{(x>n)}[f(s,n) + f_l'(s,n)(x-n)] + 1_{(|x|\le n)} f(s,x) +$$

$$+1_{(x<-n)}[f(s,-n) + f_l'(s,-n)(x+n)].$$

ეს ტოლობა აჩვენებს, რომ მართვათა U_n კლასში sup მიიღწევა $\varphi^n = n1_{(\varphi>n)} + \varphi 1_{(|\varphi|\le n)} - n1_{(\varphi<-n)}$ მართვაზე. ამიტომ სამართლიანი იქნება შემდეგი ტოლობა:

$$\underset{u\in U_n}{ess\ sup} \int_0^t [f(s,u_s) + f_l'(s,u_s)(\varphi_s - u_s)]d\langle M\rangle_s =$$

$$= \int_0^t \underset{u\in U_n}{ess\ sup}[f(s,u_s) + f_l'(s,u_s)(\varphi_s - u_s)]\, d\langle M\rangle_s.$$

ამასთან P თ. ყ. ადგილი აქვს $g^n(s,\varphi_s) \uparrow f(s,\varphi_s)$ ზრდადობით კრებადობას და ყოველი n-თვის $g^n(s,\varphi_s) \ge g^0(s,\varphi_s) = f(s,0) + f_l'(s,0)\varphi_s$.

P თ. ყ. ადგილი ექნება შემდეგ უტოლობებს

$$\int_0^t g^0(s,\varphi_s)d\langle M\rangle_s = \int_0^t f(s,0)d\langle M\rangle_s + \int_0^t f_l'(s,0)\varphi_s d\langle M\rangle_s \geq$$

$$\geq -\int_0^t \alpha_s d\langle M\rangle_s - \int_0^t (\gamma+2\alpha_s)|\varphi_s| d\langle M\rangle_s \geq$$

$$\geq -\int_0^t \alpha_s d\langle M\rangle_s - \sqrt{\int_0^t (\gamma+2\alpha_s)^2 d\langle M\rangle_s} \cdot \sqrt{\int_0^t |\varphi_s|^2 d\langle M\rangle_s} > -\infty.$$

აქედან გამომდინარე, მონოტონური კრებადობის თეორემით ადგილი ექნება ინტეგრალების P თ. ყ. კრებადობას

$$\int_0^t g^n(s,\varphi_s)d\langle M\rangle_s \longrightarrow \int_0^t f(s,\varphi_s)d\langle M\rangle_s.$$

ყოველივე ამის გათვალისწინებით მივიღებთ ტოლობათა შემდეგ ჯაჭვს:

$$\underset{u\in U}{ess\ sup} \int_0^t [f(s,u_s) + f_l'(s,u_s)(\varphi_s - u_s)]d\langle M\rangle_s =$$

$$= \sup_n \left\{ \underset{u\in U_n}{ess\ sup} \int_0^t [f(s,u_s) + f_l'(s,u_s)(\varphi_s - u_s)]d\langle M\rangle_s \right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underset{u\in U_n}{ess\ sup} \int_0^t [f(s,u_s) + f_l'(s,u_s)(\varphi_s - u_s)]d\langle M\rangle_s =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^t \underset{u\in U_n}{ess\ sup} [f(s,u_s) + f_l'(s,u_s)(\varphi_s - u_s)]\, d\langle M\rangle_s =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^t g^n(s,\varphi_s)d\langle M\rangle_s = \int_0^t f(s,\varphi_s)d\langle M\rangle_s.$$

ეს ნიშნავს, რომ $-K_t = A_t + \int_0^t f(s,\varphi_s)d\langle M\rangle_s$ იქნება კლებადი პროცესი. მაშინ ცხადია, რომ K იქნება ზრდადი. თუ (#)-ში ჩავსვამთ $A_t = -K_t - \int_0^t f(s,\varphi_s)d\langle M\rangle_s$-ს მივიღებთ, რომ

$$V_t = V_0 - K_t - \int_0^t f(s,\varphi_s)d\langle M\rangle_s + \int_0^t \varphi_s dM_s + L_t$$

რაც ნიშნავს იმას, რომ V არის (1) განტოლების სუპერამონახსნი.

წინადადება 2.2 დამტკიცებულია.

§ 2.2 შემოსაზღვრული მახასიათებლების შემთხვევა

ამ პარაგრაფში დავუშვებთ, რომ η, $\langle M\rangle_T$ და $\int_0^T \alpha_t^2 d\langle M\rangle_t$ შემოსაზღვრული შემთხვევითი სიდიდეებია და ამ შემთხვევაში დავამტკიცებთ, რომ ფასის პროცესი V წარმოადგენს (1) განტოლების შემოსაზღვრულ ამონახსნს.

წინადადება 2.3 V პროცესი შემოსაზღვრულია.

დამტკიცება: დავუშვათ η, $\langle M\rangle_T$ და $\int_0^T \alpha_t^2 d\langle M\rangle_t$ შემთხვევითი სიდიდეები შემოსაზღვრულია ერთიდაიმავე D მუდმივით. f-ის ამოზნექილობიდან გამომდინარე გვექნება, რომ $f(s,u_s)-f_l'(s,u_s)u_s\le f(s,0)$ და **თეორემა 2.1**-ის **2)** პირობის ძალით $|f(s,0)|\le\alpha_s$. ამ ორი უტოლობის გამოყენებით მივიღებთ

$$V_t=\operatorname*{ess\,sup}_{u\in U}E^u\left[\eta+\int_t^T[f(s,u_s)-f_l'(s,u_s)u_s]d\langle M\rangle_s\middle|\mathcal{F}_t\right]\le$$

$$\le\operatorname*{ess\,sup}_{u\in U}E^u\left[\|\eta\|_\infty+\int_t^T f(s,0)d\langle M\rangle_s\middle|\mathcal{F}_t\right]\le$$

$$\le\operatorname*{ess\,sup}_{u\in U}E^u\left[\|\eta\|_\infty+\int_t^T \alpha_s d\langle M\rangle_s\middle|\mathcal{F}_t\right]\le$$

$$\le\|\eta\|_\infty+\left\|\int_0^T\alpha_s d\langle M\rangle_s\right\|_\infty\le 2D.$$

მეორეს მხრივ $u^0\equiv 0$ მართვისათვის გვექნება

$$V_t\ge E^{u^0}\left[\eta+\int_t^T[f(s,u_s^0)-f_l'(s,u_s^0)u_s^0]d\langle M\rangle_s\middle|\mathcal{F}_t\right]\ge$$

$$\ge-\|\eta\|_\infty+E^{u^0}\left[\int_t^T f(s,0)d\langle M\rangle_s\middle|\mathcal{F}_t\right]\ge$$

$$\ge-\|\eta\|_\infty-E^{u^0}\left[\int_t^T \alpha_s d\langle M\rangle_s\middle|\mathcal{F}_t\right]\ge$$

$$\ge-\|\eta\|_\infty-\left\|\int_0^T\alpha_s d\langle M\rangle_s\right\|_\infty\ge-2D>-\infty.$$

ეს ნიშნავს იმას, რომ V იქნება შემოსაზღვრული $2D$ მუდმივით.

წინადადება 2.3 დამტკიცებულია.

ყოველი $n \in N$-თვის შემოვიღოთ პროცესი:

$$V_t^n = \underset{u \in U_n}{ess\ sup}\, E^u \left[\eta + \int_t^T [f(s,u_s) - f_l'(s,u_s)u_s] d\langle M \rangle_s \middle| \mathcal{F}_t \right],$$

სადაც U_n არის n-ით შემოსაზღვრულ ჭვრეტად მართვათა კლასი. ცხადია, რომ ყოველი $t \in [0;T]$-თვის $V_t^n \leq V_t$ და P თ. ყ. $V_t = \uparrow \lim_{n\to\infty} V_t^n$, მაგრამ ჩვენ გვჭირდება ვაჩვენოთ, რომ ალბათობა იმ ω-ებისა, რომელთათვისაც ყოველი $t \in [0;T]$-თვის $\lim_{n\to\infty} V_t^n(\omega) = V_t(\omega)$, ტოლია ერთის. სწორედ ამას ამბობს შემდეგი ლემა:

ლემა 2.1 V და V^n პროცესებისათვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$P\left(\omega:\ \lim_{n\to\infty} V_t^n(\omega) = V_t(\omega) \quad \forall\ \ t \in [0;T]\right) = 1.$$

დამტკიცება: როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ P თ. ყ. $V_t = sup_n V_t^n = \lim_{n\to\infty} V_t^n$ ყოველი $t \in [0;T]$-თვის. $n \in N$-თვის განვიხილოთ პროცესი $X_t^n = V_t^n + \int_0^t f(s,0) d\langle M \rangle_s$. $dP^0 = \mathcal{E}_T(\int f_l'(0) dM)$ იყოს $u^0 \equiv 0$ მართვის შესაბამისი ზომა. ცხადია, რომ ნებისმიერი $n \in N$-თვის $u^0 \in U_n$. **წინადადება 2.1**-ის თანახმად $X_t^n = V_t^n + \int_0^t f(s,0) d\langle M \rangle_s$ და $Y_t = V_t + \int_0^t f(s,0) d\langle M \rangle_s$ არიან მარჯვნიდან უწყვეტი P^0-სუპერმარტინგალები. ანუ შედეგად გვაქვს მარჯვნიდან უწყვეტი P^0-სუპერმარტინგალების ზრდადი მიმდევრობა $(X^n)_{n\geq 1}$. ამასთან ყოველი $t \in [0;T]$-თვის P თ. ყ. ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$Y_t = V_t + \int_0^t f(s,0) d\langle M \rangle_s = \lim_{n\to\infty}\left[V_t^n + \int_0^t f(s,0) d\langle M \rangle_s\right] =$$

$$= \sup_n \left[V_t^n + \int_0^t f(s,0) d\langle M \rangle_s\right] = \sup_n X_t^n.$$

თეორემა T16-ის [14] თანახმად რადგანაც $sup_n X^n$ მარჯვნიდან უწყვეტია, ამიტომ

$$P^0\left(V_t + \int_0^t f(s,0) d\langle M \rangle_s = \sup_n \left[V_t^n + \int_0^t f(s,0) d\langle M \rangle_s\right] \quad \forall\ \ t \in [0;T]\right) = 1.$$

გამომდინარე იქიდან, რომ $sup_n \left[V_t^n + \int_0^t f(s,0) d\langle M \rangle_s\right] = sup_n V_t^n + \int_0^t f(s,0) d\langle M \rangle_s$, $V_t = sup_n V_t^n = \lim_{n\to\infty} V_t^n$ და P და P^0 ზომები ექვივალენტურია, მივიღებთ, რომ

$$P\left(\omega:\ \lim_{n\to\infty} V_t^n(\omega) = V_t(\omega) \quad \forall\ \ t \in [0;T]\right) = 1.$$

ლემა 2.1 დამტკიცებულია.

ამჯერად გამოვიყვანოთ V^n პროცესის შესაბამისი შექცეული განტოლება.

წინადადება 2.4 V^n პროცესი აკმაყოფილებს შემდეგ შექცეულ განტოლებას:

$$\begin{cases} Y_t = Y_0 - \int\limits_0^t g^n(s, Z_s) d\langle M\rangle_s + \int\limits_0^t Z_s dM_s + L_t, \\ Y_T = \eta. \end{cases} \tag{31}$$

დამტკიცება: წინადადება 2.1-ის თანახმად ყოველი $u \in U_n$-თვის $V_t^n + \int_0^t [f(s, u_s) - f_l'(s, u_s)u_s] d\langle M\rangle_s$ P^u-სუპერმარტინგალია. ამიტომ V_t^n იქნება P სემიმარტინგალი და ადგილი ექნება მის სემიმარტინგალურ გაშლას:

$$V_t^n = V_0^n + A_t^n + \int_0^t \varphi_t^n dM_s + L_t^n,$$

სადაც A^n სასრული ვარიაციის პროცესია; φ^n ჭვრეტადი პროცესია, რომლისთვისაც $\int_0^T (\varphi_s^n)^2 d\langle M\rangle_s < \infty$ P თ. ყ. ხოლო L^n M-ის ორთოგონალური ლოკალური მარტინგალია. იმავე მეთოდით, როგორც ეს გავაკეთეთ **წინადადება 2.2**-ის შემთხვევაში მივიღებთ, რომ

$$A_t^n + \operatorname*{ess\,sup}_{u \in U_n} \int_0^t [f(s, u_s) + f_l'(s, u_s)(\varphi_s^n - u_s)] d\langle M\rangle_s =$$

$$= A_t^n + \int_0^t \operatorname*{ess\,sup}_{u \in U_n} [f(s, u_s) + f_l'(s, u_s)(\varphi_s^n - u_s)]\, d\langle M\rangle_s =$$

$$= A_t^n + \int\limits_0^t g^n(s, \varphi_s^n) d\langle M\rangle_s$$

იქნება კლებადი პროცესი. რადგანაც $u \in U_n$ მართვების მნიშვნელობათა სიმრავლე კომპაქტია, ამიტომ არსებობს ოპტიმალური $u^* \in U_n$ მართვა ([16] და [10]). შესაბამისად **წინადადება 2.1**-ის თანახმად

$$V_t^n + \int_0^t [f(s, u_s^*) - f_l'(s, u_s^*) u_s^*] d\langle M\rangle_s$$

იქნება P^{u^*}-მარტინგალი. აქედან კი დავასკვნით, რომ

$$A_t^n + \int_0^t [f(s, u_s^*) + f_l'(s, u_s^*)(\varphi_s^n - u_s^*)] d\langle M\rangle_s = 0.$$

ყოველივე ამის გამოყენებით გვექნება, რომ

$$A_t^n = -\int_0^t \underset{u\in U_n}{ess\,sup}[f(s,u_s) + f_l'(s,u_s)(\varphi_s^n - u_s)]\,d\langle M\rangle_s = -\int_0^t g^n(s,\varphi_s^n)d\langle M\rangle_s.$$

თუ მიღებულ გამოსახულებას ჩავსვამთ V^n-ის სემიმარტინგალურ გაშლაში, მივიღებთ

$$\begin{cases} V_t^n = V_0^n - \int_0^t g^n(s,\varphi_s^n)d\langle M\rangle_s + \int_0^t \varphi_s^n dM_s + L_t^n, \\ V_T^n = \eta. \end{cases} \tag{32}$$

წინადადება 2.4 დამტკიცებულია.

ამჯერად უკვე მზადა ვართ, რომ η, $\langle M\rangle_T$ და $\int_0^T \alpha_t^2 d\langle M\rangle_t$-ის შემოსაზღვრულობის პირობებში დავამტკიცოთ, რომ V არის (1) განტოლების ამონახსნი. ამისათვის დაგვჭირდება ე. წ. მონოტონური სტაბილურობის ლემა, რომელიც ბროუნის ფილტრაციის შემთხვევაში დამტკიცებულ იქნა კობილანსკის [22] მიერ, ხოლო შემდეგ მორლესმა [30] განაზოგადა უწყვეტი მარტინგალების შემთხვევაში. ჩვენს შემთხვევაში ლემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

ლემა 2.2 (მონოტონური სტაბილურობის) განვიხილოთ (1) განტოლება (f,η) პარამეტრებით. დავუშვათ მოცემულია პარამეტრების მიმდევრობა (f^n,η^n), რომელიც აკმაყო-ფილებს შემდეგ პირობებს:

1) P თ. ყ. და ყოველი s-თვის $f^n: z \to f^n(z)$ მიმდევრობა R-ზე ზრდადობით, ხოლო R-ის ყოველ კომპაქტურ ქვესიმრავლეზე თანაბრად მიისწრაფის $f: z \to f(z)$-ისკენ (ამასთან f უწყვეტია z არგუმენტის მიმართ).

2) ყოველი n-თვის f^n არის კვადრატულად მზარდი გენერატორი n-ისგან დამოუკიდებელი პარამეტრებით. ანუ არსებობს ისეთი არაუარყოფითი ჭვრეტადი პროცესი $\bar{\alpha}_t$ და მუდმივი $\bar{\gamma} \geq 0$, რომ ყოველი n-თვის სრულდება $|f^n(s,x)| \leq \bar{\alpha}_s + \bar{\gamma}x^2$ სადაც $\left\|\int_0^T \bar{\alpha}_t d\langle M\rangle_t\right\|_\infty < \infty$.

3) $(\eta^n)_{n\geq 1}$ $\mathcal{F}_T$-ზომად, თანაბრად შემოსაზღვრულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევ-რობაა, რომელიც P თ. ყ. ზრდადობით მიისწრაფის η შემთხვევითი სიდიდისაკენ.

თუ ყოველი n-თვის არსებობს (f^n,η^n) პარამეტრების შესაბამისი BSDE-ს (Y^n,Z^n,L^n) ამონახსნი ისეთი, რომ Y^n ზრდადია, მაშინ (Y^n,Z^n,L^n) მიმდევრობა მიისწრაფის (f,η) პარამეტრების შესამაბისი BSDE-ს $(\tilde{Y},\tilde{Z},\tilde{L})$ ამონახსნისაკენ შემდეგი აზრით:

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\sup_{t\in[0;T]}\left|Y_t^n - \tilde{Y}_t\right|\right) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} E\left(\int_0^T \left|\tilde{Z}_t - Z_t^n\right|^2 d\langle M\rangle_t + \left|\tilde{L}_T - L_T^n\right|^2\right) = 0.$$

შევამოწმოთ **ლემა 2.2**-ის პირობები ჩვენი პარამეტრების შემთხვევაში. ჩვენს შემთხვევაში პარამეტრებია (g^n, η). g^n-ის განმარტებიდან ცხადია, რომ $(g^n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა ზრდადობით მიისწრაფის f გენერატორისაკენ. ამასთან, რადგანაც g^n და f z არგუმენტის უწყვეტი ფუნქციებია, კრებადობა იქნება თანაბარი R-ის ნებისმიერ კომპაქტურ ქვესიმრავლეზე. სასაზღვრო პირობა η შემოსაზღვრულია და არაა n-ზე დამოკიდებული. **წინადადება 2.4**-ის თანახმად (V^n, φ^n, L^n) სამეული არის (g^n, η) პარამეტრების შესაბამისი BSDE-ს ამონახსნი, რომლისთვისაც V^n არის ზრდადი მიმდევრობა. ასე რომ შესამოწმებელი დაგვრჩა **ლემა 2.2**-ის მხოლოდ **2)** პირობა. ამისათვის უნდა ვიპოვოთ ისეთი პროცესი $\bar{\alpha}_t$ და მუდმივი $\bar{\gamma} \geq 0$, რომ ყოველი n-თვის სრულდებოდეს $|g^n(s,x)| \leq \bar{\alpha}_s + \bar{\gamma} x^2$ უტოლობა.

g^n-ის განმარტებიდან გვექნება, რომ $g^n(s,x) \leq f(s,x) \leq \alpha_s + \frac{\gamma}{2} x^2$ ხოლო ქვედა საზღვრისათვის კი გვაქვს

$$g^n(s,x) \geq g^0(s,x) = f(s,0) + f_l'(s,0)x \geq -\alpha_s - |f_l'(s,0)| \cdot |x| \geq$$

$$\geq -\alpha_s - \frac{1}{2}(|f_l'(s,0)|^2 + |x|^2) \geq -\alpha_s - \frac{1}{2}|2\alpha_s + \gamma|^2 - \frac{1}{2}|x|^2 \geq -\gamma^2 - \alpha_s - 4\alpha_s^2 - \frac{1}{2}|x|^2.$$

ავიღოთ $\bar{\alpha}_s \coloneqq \gamma^2 + \alpha_s + 4\alpha_s^2$, $\quad \bar{\gamma} = \frac{1+\gamma}{2}$ და g^n-ისთვის მივიღებთ სასურველ შეფასებას $|g^n(s,x)| \leq \bar{\alpha}_s + \bar{\gamma} x^2$. გამომდინარე იქიდან, რომ $\langle M \rangle_T$ და $\int_0^T \alpha_t^2 d\langle M \rangle_t$ შემოსაზღვრულებია, მივიღებთ, რომ $\int_0^T \bar{\alpha}_t d\langle M \rangle_t$-ც ასევე იქნება შემოსაზღვრული.

ახლა უკვე მზადა ვართ გამოვიყენოთ მონოტონური სტაბილურობის ლემა. შედეგად კი გვექნება, რომ არსებობს სამეული $(\tilde{V}, \varphi, L)$ ისეთი, რომ ადგილი აქვს კრებადობებს:

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\sup_{t\in[0;T]} \left|V_t^n - \tilde{V}_t\right|\right) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} E\left(\int_0^T |\varphi_t - \varphi_t^n|^2 d\langle M \rangle_t + |L_T - L_T^n|^2\right) = 0.$$

თუ (32) განტოლების ორივე მხარეს გადავალთ ზღვარზე როცა $n \to \infty$ მივიღებთ, რომ $(\tilde{V}, \varphi, L)$ სამეული არის (1) განტოლების ამონახსნი. მაგრამ **ლემა 2.1**-ის თანახმად V და $\tilde{V}$ განურჩეველი პროცესებია. ამიტომ V იქნება (1) განტოლების შემოსაზღვრული ამონახსნი.

§ 2.3 არაუარყოფითი (f,η) პარამეტრების შემთხვევა

ამ პარაგრაფში დავამტკიცებთ **თეორემა** 2.1-ს იმ შემთხვევაში, როდესაც f გენერატორი და η სასაზღვრო პირობა არაუარყოფითებია. მანამდე კი დავამტკიცოთ ლემა, რომელიც (1) განტოლების ნებისმიერი შემოსაზღვრული ამონახსნისათვის გვაძლევს აპრიორულ შეფასებას.

ლემა 2.3 თუ $\|\eta\|_\infty + \left\|\int_0^T \alpha_s d\langle M\rangle_s\right\|_\infty < \infty$, მაშინ (1) განტოლების ყოველი შემოსაზღვრული Y ამონახსნისათვის ადგილი აქვს უტოლობას:

$$Y_t \le \frac{1}{\gamma}\ln E\left[e^{\gamma\eta+\gamma\int_t^T \alpha_s d\langle M\rangle_s}\middle|\mathcal{F}_t\right].$$

დამტკიცება: იტოს ფორმულის თანახმად

$$e^{\gamma Y_t+\gamma\int_0^t \alpha_s d\langle M\rangle_s} = e^{\gamma Y_0} - \gamma\int_0^t e^{\gamma Y_s+\gamma\int_0^s \alpha_r d\langle M\rangle_r} f(s,Z_s)d\langle M\rangle_s +$$

$$+\gamma\int_0^t e^{\gamma Y_s+\gamma\int_0^s \alpha_r d\langle M\rangle_r} Z_s dM_s + \gamma\int_0^t e^{\gamma Y_s+\gamma\int_0^s \alpha_r d\langle M\rangle_r} dL_s +$$

$$+\gamma\int_0^t e^{\gamma Y_s+\gamma\int_0^s \alpha_r d\langle M\rangle_r}\alpha_s d\langle M\rangle_s + \frac{\gamma^2}{2}\int_0^t e^{\gamma Y_s+\gamma\int_0^s \alpha_r d\langle M\rangle_r} Z_s^2 d\langle M\rangle_s +$$

$$+\frac{\gamma^2}{2}\int_0^t e^{\gamma Y_s+\gamma\int_0^s \alpha_r d\langle M\rangle_r} d\langle L\rangle_s. \qquad (*)$$

რადგან $f(s,Z_s) \le \alpha_s + \frac{\gamma}{2}Z_s^2$ მივიღებთ, რომ

$$-\gamma\int_0^t e^{\gamma Y_s+\gamma\int_0^s \alpha_r d\langle M\rangle_r} f(s,Z_s)d\langle M\rangle_s + \gamma\int_0^t e^{\gamma Y_s+\gamma\int_0^s \alpha_r d\langle M\rangle_r}\alpha_s d\langle M\rangle_s +$$

$$+\frac{\gamma^2}{2}\int_0^t e^{\gamma Y_s+\gamma\int_0^s \alpha_r d\langle M\rangle_r} Z_s^2 d\langle M\rangle_s = \gamma\int_0^t e^{\gamma Y_s+\gamma\int_0^s \alpha_r d\langle M\rangle_r}\left(\frac{\gamma}{2}Z_s^2+\alpha_s - f(s,Z_s)\right)d\langle M\rangle_s$$

იქნება ზრდადი პროცესი. შესაბამისად რადგანაც $(*)$-ში სტოქასტური ინტეგრალები მარტინგალებია, გვექნება, რომ $e^{\gamma Y_t+\gamma\int_0^t \alpha_s d\langle M\rangle_s}$ არის სუბმარტინგალი. ამიტომ მისთვის სამართლიანი იქნება სუბმარტინგალური უტოლობა:

$$e^{\gamma Y_t+\gamma\int_0^t \alpha_s d\langle M\rangle_s} \le E\left[e^{\gamma\eta+\gamma\int_0^T \alpha_s d\langle M\rangle_s}\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

საიდანაც მარტივად მივიღებთ, რომ

$$Y_t \le \frac{1}{\gamma} \ln E\left[e^{\gamma\eta+\gamma\int_t^T \alpha_s d\langle M\rangle_s}\middle|\mathcal{F}_t\right].$$

ლემა 2.3 დამტკიცებულია.

წინადადება 2.5 დავუშვათ სრულდება **თეორემა 2.1**-ის პირობები და f და η არაუარყოფითებია. მაშინ არსებობს (1) განტოლების ამონახსნი (Y,φ,L), სადაც Y წარმოდგება შემდეგი სახით

$$Y_t = \underset{u\in U}{ess\ sup}\, E^u\left[\eta + \int_t^T [f(s,u_s) - f_l'(s,u_s)u_s] d\langle M\rangle_s \middle| \mathcal{F}_t\right].$$

დამტკიცება: ვთქვათ $\eta^n = \eta \wedge n$, შემოვიღოთ გაჩერების მომენტების მიმდევრობა

$$\tau_n = \inf\left\{t \ge 0 :\ \int_0^t \alpha_s^2 d\langle M\rangle_s \vee \langle M\rangle_t \ge n\right\}.$$

ყოველი n-თვის განვიხილოთ განტოლება:

$$\begin{cases} Y_t = Y_0 - \int\limits_0^t 1_{(s\le\tau_n)} f(s,Z_s) d\langle M\rangle_s + \int\limits_0^t Z_s dM_s + L_t, \\ \qquad\qquad Y_T = \eta^n. \end{cases} \tag{33}$$

იმისათვის, რომ ყოველი n-თვის ამოვხსნათ (33) განტოლება, უნდა გამოვიყენოთ § 2.2-ში მიღებული შედეგი. ამისათვის საკმარისია შევამოწმოთ მონოტონური სტაბილურობის ლემის 2) პირობა $\left(1_{(s\le\tau_n)} g^m(s,x)\right)_{m\ge1}$ გენერატორებისათვის, სადაც g^m ფუნქციები გან-მარტებულია **ლემა 2.15**-ში (იხ. დანართი). ყოველი n-თვის ავიღოთ $\bar{\gamma} = \frac{1+\gamma}{2}$ და $\bar{\alpha}_s^n = 1_{(s\le\tau_n)}(\gamma^2 + \alpha_s + 4\alpha_s^2)$. ცხადია, რომ ადგილი ექნება შეფასებას

$$\left|1_{(s\le\tau_n)} g^m(s,x)\right| \le \bar{\alpha}_s^n + \bar{\gamma}x^2$$

ხოლო τ_n გაჩერების მომენტის განმარტებიდან ადვილად მივიღებთ, რომ $\int_0^T \bar{\alpha}_s^n d\langle M\rangle_s$ შემოსაზღვრულია n-ზე დამოკიდებული მუდმივით.

ამიტომ § 2.2–ის თანახმად მივიღებთ, რომ ყოველი n-თვის არსებობს (33) განტოლების შემოსაზღვრული (Y^n,φ^n,L^n) ამონახსნი

$$\begin{cases} Y_t^n = Y_0^n - \int\limits_0^t 1_{(s\le\tau_n)} f(s,\varphi_s^n) d\langle M\rangle_s + \int\limits_0^t \varphi_s^n dM_s + L_t^n, \\ Y_T^n = \eta^n, \end{cases} \tag{34}$$

სადაც Y^n-ს აქვს სახე:

$$Y_t^n = \underset{u\in U}{ess\,sup}\, E\left[\mathcal{E}_{t,T}\left(\int 1_{(s\le\tau_n)} f_l'(u)dM\right)\left(\eta^n + \int_t^T 1_{(s\le\tau_n)}[f(s,u_s) - f_l'(s,u_s)u_s]d\langle M\rangle_s\right)\middle|\mathcal{F}_t\right].$$

მარტივი გამოთვლებით მივიღებთ, რომ

$$Y_t^n = \underset{u\in U}{ess\,sup}\, E\left[\mathcal{E}_{t\wedge\tau_n,\tau_n}\left(\int f_l'(u)dM\right)\left(\eta^n + \int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n}[f(s,u_s) - f_l'(s,u_s)u_s]d\langle M\rangle_s\right)\middle|\mathcal{F}_t\right].$$

ამასთან შემოვიტანოთ ფასის პროცესი V:

$$V_t = \underset{u\in U}{ess\,sup}\, E^u\left[\eta + \int_t^T [f(s,u_s) - f_l'(s,u_s)u_s]d\langle M\rangle_s\middle|\mathcal{F}_t\right].$$

თავდაპირველად ჩვენი მიზანია ვაჩვენოთ, რომ $(Y^n)_{n\ge1}$ ზრდადია და $V_t = sup_n\, Y_t^n$.

ლემა 2.4 ყოველი $n\in N$-თვის $Y^n \le Y^{n+1}$.

დამტკიცება: შევნიშნოთ, რომ რადგან f არაუარყოფითია და Y^n არის (33) განტოლების შემოსაზღვრული ამონახსნი, ამიტომ ყოველი n-თვის Y^n იქნება სუპერმარტინგალი.

სიმარტივისათვის შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$g(s,u_s) := f(s,u_s) - f_l'(s,u_s)u_s,$$

$$H_t^n(u) := E\left[\mathcal{E}_{t\wedge\tau_n,\tau_n}\left(\int f_l'(u)dM\right)\left(\eta^n + \int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n} g(s,u_s)d\langle M\rangle_s\right)\middle|\mathcal{F}_t\right].$$

ასე რომ $Y_t^n = ess\,sup_{u\in U}\, H_t^n(u)$ და $Y_t^{n+1} = ess\,sup_{u\in U}\, H_t^{n+1}(u)$.

ჩვენ უნდა დავამტკიცოთ, რომ $Y_t^n \le Y_t^{n+1}$ და ამისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ყოველი $\tilde{u}\in U$-თვის $H_t^n(\tilde{u}) \le Y_t^{n+1}$.

$$H_t^n(\tilde{u}) = E\left[\mathcal{E}_{t\wedge\tau_n,\tau_n}\left(\int f_l'(\tilde{u})dM\right)\left(\eta^n + \int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n} g(s,\tilde{u}_s)d\langle M\rangle_s\right)\middle|\mathcal{F}_t\right] =$$

$$= E\left[\mathcal{E}_{t\wedge\tau_n,\tau_n}\left(\int f_l'(\tilde{u})dM\right)E[\eta^n|\mathcal{F}_{t\vee\tau_n}]\middle|\mathcal{F}_t\right] +$$

$$+E\left[\mathcal{E}_{t\wedge\tau_n,\tau_n}\left(\int f_l'(\tilde{u})dM\right)\int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n} g(s,\tilde{u}_s)d\langle M\rangle_s\middle|\mathcal{F}_t\right] \leq$$

$$\leq E\left[\mathcal{E}_{t\wedge\tau_n,\tau_n}\left(\int f_l'(\tilde{u})dM\right)E[\eta^{n+1}|\mathcal{F}_{t\vee\tau_n}]\middle|\mathcal{F}_t\right] +$$

$$+E\left[\mathcal{E}_{t\wedge\tau_n,\tau_n}\left(\int f_l'(\tilde{u})dM\right)\int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n} g(s,\tilde{u}_s)d\langle M\rangle_s\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

ხოლო Y_t^{n+1}-თვის გვაქვს წარმოდგენა:

$$Y_t^{n+1} = \underset{u\in U}{ess\ sup}\, E\left[\mathcal{E}_{t\wedge\tau_{n+1},\tau_{n+1}}\left(\int f_l'(u)dM\right)\left(\eta^{n+1} + \int_{t\wedge\tau_{n+1}}^{\tau_{n+1}} g(s,u_s)d\langle M\rangle_s\right)\middle|\mathcal{F}_t\right] =$$

$$= \underset{u\in U}{ess\ sup}\, E\left[\mathcal{E}_{t\wedge\tau_{n+1},\tau_{n+1}}\left(\int f_l'(u)dM\right)\left(\eta^{n+1} + \int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n} g(s,u_s)d\langle M\rangle_s + \int_{(t\vee\tau_n)\wedge\tau_{n+1}}^{\tau_{n+1}} g(s,u_s)d\langle M\rangle_s\right)\middle|\mathcal{F}_t\right] =$$

$$= \underset{u\in U}{ess\ sup}\left\{E\left[\mathcal{E}_{t\wedge\tau_{n+1},\tau_{n+1}}\left(\int f_l'(u)dM\right)\int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n} g(s,u_s)d\langle M\rangle_s\middle|\mathcal{F}_t\right] + E\left[\mathcal{E}_{t\wedge\tau_{n+1},\tau_{n+1}}\left(\int f_l'(u)dM\right)\left(\eta^{n+1} + \int_{(t\vee\tau_n)\wedge\tau_{n+1}}^{\tau_{n+1}} g(s,u_s)d\langle M\rangle_s\right)\middle|\mathcal{F}_t\right]\right\} =$$

$$= \underset{u\in U}{ess\ sup}\left\{E\left[\mathcal{E}_{t\wedge\tau_n,\tau_n}\left(\int f_l'(u)dM\right)\int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n} g(s,u_s)d\langle M\rangle_s\middle|\mathcal{F}_t\right] + E\left[\mathcal{E}_{t\wedge\tau_n,\tau_n}\left(\int f_l'(u)dM\right)E\left[\mathcal{E}_{(t\vee\tau_n)\wedge\tau_{n+1},\tau_{n+1}}\left(\int f_l'(u)dM\right)\left(\eta^{n+1} + \int_{(t\vee\tau_n)\wedge\tau_{n+1}}^{\tau_{n+1}} g(s,u_s)d\langle M\rangle_s\right)\middle|\mathcal{F}_{t\vee\tau_n}\right]\middle|\mathcal{F}_t\right]\right\} =$$

$$= \underset{u\in U}{ess\ sup}\left\{E\left[\mathcal{E}_{t\wedge\tau_n,\tau_n}\left(\int f_l'(u)dM\right)H_{t\vee\tau_n}^{n+1}(u)|\mathcal{F}_t\right] + E\left[\mathcal{E}_{t\wedge\tau_n,\tau_n}\left(\int f_l'(u)dM\right)\int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n} g(s,u_s)d\langle M\rangle_s\middle|\mathcal{F}_t\right]\right\}.$$

შემოვიღოთ მართვათა ახალი კლასი $U_{\tau_n}^T = \{u \in U : u_t 1_{(t\leq\tau_n)} = \tilde{u}_t 1_{(t\leq\tau_n)}\}$. რადგან $U_{\tau_n}^T \subset U$ და $H_t^n(u)$-ს გააჩნია მესრის თვისება ([17]), ამიტომ მივიღებთ უტოლობათა შემდეგ ჯაჭვს:

$$Y_t^{n+1} \geq \underset{u \in U_{\tau_n}^T}{ess\ sup} \left\{ E\left[\mathcal{E}_{t\wedge\tau_n,\tau_n}\left(\int f_l'(u)dM\right) H_{t\vee\tau_n}^{n+1}(u) \middle| \mathcal{F}_t \right] \right.$$

$$\left. + E\left[\mathcal{E}_{t\wedge\tau_n,\tau_n}\left(\int f_l'(u)dM\right) \int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n} g(s,u_s)d\langle M\rangle_s \middle| \mathcal{F}_t \right] \right\} =$$

$$= \underset{u \in U_{\tau_n}^T}{ess\ sup}\, E\left[\mathcal{E}_{t\wedge\tau_n,\tau_n}\left(\int f_l'(u)dM\right) H_{t\vee\tau_n}^{n+1}(u) \middle| \mathcal{F}_t \right] +$$

$$+E\left[\mathcal{E}_{t\wedge\tau_n,\tau_n}\left(\int f_l'(\tilde{u})dM\right) \int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n} g(s,\tilde{u}_s)d\langle M\rangle_s \middle| \mathcal{F}_t \right] =$$

$$= E\left[\mathcal{E}_{t\wedge\tau_n,\tau_n}\left(\int f_l'(\tilde{u})dM\right) \underset{u \in U_{\tau_n}^T}{ess\ sup}\, H_{t\vee\tau_n}^{n+1}(u) \middle| \mathcal{F}_t \right] +$$

$$+E\left[\mathcal{E}_{t\wedge\tau_n,\tau_n}\left(\int f_l'(\tilde{u})dM\right) \int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n} g(s,\tilde{u}_s)d\langle M\rangle_s \middle| \mathcal{F}_t \right] =$$

$$= E\left[\mathcal{E}_{t\wedge\tau_n,\tau_n}\left(\int f_l'(\tilde{u})dM\right) Y_{t\vee\tau_n}^{n+1} \middle| \mathcal{F}_t \right] +$$

$$+E\left[\mathcal{E}_{t\wedge\tau_n,\tau_n}\left(\int f_l'(\tilde{u})dM\right) \int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n} g(s,\tilde{u}_s)d\langle M\rangle_s \middle| \mathcal{F}_t \right] \geq$$

$$\geq E\left[\mathcal{E}_{t\wedge\tau_n,\tau_n}\left(\int f_l'(\tilde{u})dM\right) E[\eta^{n+1}|\mathcal{F}_{t\vee\tau_n}] \middle| \mathcal{F}_t \right] +$$

$$+E\left[\mathcal{E}_{t\wedge\tau_n,\tau_n}\left(\int f_l'(\tilde{u})dM\right) \int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n} g(s,\tilde{u}_s)d\langle M\rangle_s \middle| \mathcal{F}_t \right] \geq H_t^n(\tilde{u}).$$

ეს კი ნიშნავს, რომ $Y_t^n \leq Y_t^{n+1}$.

ლემა 2.4 დამტკიცებულია.

შემოვიღოთ პროცესი $Y_t := sup_n Y_t^n = \lim_n Y_t^n$. ჩვენი მიზანია დავამტკიცოთ, რომ $V_t = Y_t$. თავდაპირველად ვაჩვენებთ, რომ $V_t \leq Y_t$. ამისათვის დაგვჭირდება შემდეგი

ლემა 2.5 ყოველი $u \in U$-თვის და $t \in [0;T]$-თვის შემთხვევით სიდიდეთა ოჯახი

$$\left\{ \xi_n = \mathcal{E}_{t\wedge\tau_n,\tau_n}\left(\int f_l'(u)dM\right)\left(\eta^n + \int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n} g(s,u_s)d\langle M\rangle_s\right) \right\}_{n\geq 1}$$

თანაბრად ინტეგრებადია.

დამტკიცება: როგორც ვიცით ყოველი $u \in U$-თვის $\int f_l'(u)dM \in BMO$ და

$$\mathcal{E}_{t\wedge\tau_n,\tau_n}\left(\int f_l'(u)dM\right) = \mathcal{E}_{t,T}\left(\int f_l'(u)dM^n\right)$$

სადაც $M^n = M^{\tau_n}$. რადგან $\int_0^t f_l'(s,u_s)dM_s^n = \int_0^{t\wedge\tau_n} f_l'(s,u_s)dM_s$, ამიტომ ყოველი $n \in N$-თვის ადგილი ექნება უტოლობას

$$\left\|\int f_l'(u)dM^n\right\|_{BMO_2} \leq \left\|\int f_l'(u)dM\right\|_{BMO_2} < \infty. \tag{35}$$

კაზამაკის [21] შედეგის მიხედვით არსებობს ისეთი $p > 1$ და $C_p > 0$, რომ ყოველი n-თვის

$$E\left[\left\{\mathcal{E}_{t,T}\left(\int f_l'(u)dM^n\right)\right\}^p\middle|\mathcal{F}_t\right] \leq C_p,$$

სადაც p და C_p n-ისგან დამოუკიდებელი მუდმივებია.

ახლა ავიღოთ $0 < \varepsilon < p - 1$, $\tilde{p} = \frac{p}{1+\varepsilon} > 1$ და $\tilde{q}$ ისეთი, რომ $\frac{1}{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{q}} = 1$. ჰელდერის უტოლობით მივიღებთ, რომ

$$\sup_n E|\xi_n|^{1+\varepsilon} \leq \sup_n\left\{E\left|\mathcal{E}_{t,T}\left(\int f_l'(u)dM^n\right)\right|^{1+\varepsilon}\cdot\left|\eta^n + \int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n} g(s,u_s)d\langle M\rangle_s\right|^{1+\varepsilon}\right\} \leq$$

$$\leq \sup_n\left[\left\{E\left|\mathcal{E}_{t,T}\left(\int f_l'(u)dM^n\right)\right|^{(1+\varepsilon)\tilde{p}}\right\}^{\frac{1}{\tilde{p}}}\cdot\left\{E\left|\eta^n + \int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n} g(s,u_s)d\langle M\rangle_s\right|^{(1+\varepsilon)\tilde{q}}\right\}^{\frac{1}{\tilde{q}}}\right] =$$

$$= \sup_n\left[\left\{E\left|\mathcal{E}_{t,T}\left(\int f_l'(u)dM^n\right)\right|^{p}\right\}^{\frac{1}{\tilde{p}}}\cdot\left\{E\left|\eta^n + \int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n} g(s,u_s)d\langle M\rangle_s\right|^{(1+\varepsilon)\tilde{q}}\right\}^{\frac{1}{\tilde{q}}}\right] \leq$$

$$\leq (C_p)^{\frac{1}{\tilde{p}}}\cdot\sup_n\left\{2^{(1+\varepsilon)\tilde{q}-1}\left[E|\eta^n|^{(1+\varepsilon)\tilde{q}} + E\left(\int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n}|g(s,u_s)|d\langle M\rangle_s\right)^{(1+\varepsilon)\tilde{q}}\right]\right\}^{\frac{1}{\tilde{q}}} \leq$$

$$\leq 2^{1+\varepsilon-\frac{1}{\tilde{q}}}\cdot(C_p)^{\frac{1}{\tilde{p}}}\cdot\left\{E|\eta|^{(1+\varepsilon)\tilde{q}} + E\left(\int_0^T|g(s,u_s)|d\langle M\rangle_s\right)^{(1+\varepsilon)\tilde{q}}\right\}^{\frac{1}{\tilde{q}}}.$$

თეორემა 2.1-ის **3)** პირობის თანახმად η ექსპონენციალურ ხარისხში ინტეგრებადი შემთხვევითი სიდიდეა და ამიტომ $E|\eta|^{(1+\varepsilon)\tilde{q}} < \infty$. ამასთან ერთად გვჭირდება, რომ

$E\left(\int_0^T |g(s,u_s)| d\langle M\rangle_s\right)^{(1+\varepsilon)\tilde{q}} < \infty$. რადგან $u \in U$, ამიტომ არსებობს ისეთი მუდმივი D, რომ $|u_s| \leq D$. აქედან გამომდინარე მივიღებთ:

$$E\left(\int_0^T |g(s,u_s)| d\langle M\rangle_s\right)^{(1+\varepsilon)\tilde{q}} = E\left(\int_0^T |f(s,u_s) - f_l'(s,u_s)u_s| d\langle M\rangle_s\right)^{(1+\varepsilon)\tilde{q}} \leq$$

$$\leq 2^{(1+\varepsilon)\tilde{q}-1}\left[E\left(\int_0^T |f(s,u_s)| d\langle M\rangle_s\right)^{(1+\varepsilon)\tilde{q}} + D^{(1+\varepsilon)\tilde{q}} E\left(\int_0^T |f_l'(s,u_s)| d\langle M\rangle_s\right)^{(1+\varepsilon)\tilde{q}}\right].$$

ლემა 2.13-დან (იხ. დანართი), f გენერატორის კვადრატულობიდან, $M, \int \alpha dM \in BMO$-დან და ენერგეტიკული უტოლობებიდან [21] მივიღებთ, რომ

$$E\left(\int_0^T |f(s,u_s)| d\langle M\rangle_s\right)^{(1+\varepsilon)\tilde{q}} \leq E\left(\int_0^T \left(\alpha_s + \frac{\gamma}{2}D^2\right) d\langle M\rangle_s\right)^{(1+\varepsilon)\tilde{q}} =$$

$$= E\left(\int_0^T \alpha_s d\langle M\rangle_s + \frac{\gamma}{2}D^2\langle M\rangle_T\right)^{(1+\varepsilon)\tilde{q}} < \infty,$$

ხოლო $f_l'(s,u_s)$-თვის

$$E\left(\int_0^T |f_l'(s,u_s)| d\langle M\rangle_s\right)^{(1+\varepsilon)\tilde{q}} \leq E\left(2\int_0^T \alpha_s d\langle M\rangle_s + \left(\gamma + \frac{3\gamma D^2}{2}\right)\langle M\rangle_T\right)^{(1+\varepsilon)\tilde{q}} < \infty.$$

ანუ საბოლოოდ მივიღეთ, რომ $sup_n E|\xi_n|^{1+\varepsilon} < \infty$ რომელიღაც $\varepsilon > 0$-თვის, რაც ნიშნავს, რომ $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ ოჯახი თანაბრად ინტეგრებადია.

ლემა 2.5 დამტკიცებულია.

ლემა 2.6 $V_t \leq Y_t$ P თ. ყ.

დამტკიცება: **ლემა 2.5**-ის თანახმად გვექნება

$$Y_t = \lim_n Y_t^n = \lim_n \operatorname*{ess\,sup}_{u\in U} E\left[\mathcal{E}_{t\wedge\tau_n,\tau_n}\left(\int f_l'(u)dM\right)\left(\eta^n + \int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n} g(s,u_s)d\langle M\rangle_s\right)\middle| \mathcal{F}_t\right] \geq$$

$$\geq \operatorname*{ess\,sup}_{u\in U} \lim_n E\left[\mathcal{E}_{t\wedge\tau_n,\tau_n}\left(\int f_l'(u)dM\right)\left(\eta^n + \int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n} g(s,u_s)d\langle M\rangle_s\right)\middle| \mathcal{F}_t\right] =$$

$$= \operatorname*{ess\,sup}_{u\in U} E\left[\mathcal{E}_{t,T}\left(\int f_l'(u)dM\right)\left(\eta + \int_t^T g(s,u_s)d\langle M\rangle_s\right)\middle| \mathcal{F}_t\right] = V_t.$$

ლემა 2.6 დამტკიცებულია.

ამჯერად $V_t = Y_t$ ტოლობის დასამტკიცებლად საკმარისია შებრუნებული $V_t \geq Y_t$ უტოლობის დამტკიცება. ამისათვის გვჭირდება ვაჩვენოთ, რომ V არის სუპერმარტინგალი.

ლემა 2.7 V პროცესი სუპერმარტინგალია.

დამტკიცება: § 2.1-ის თანახმად V არის (1) განტოლების სუპერამონახსნი და რადგანაც f გენერატორი არაუარყოფითია, ამიტომ იქნება ლოკალური სუპერმარტინგალი. ეს ნიშნავს, რომ არსებობს გაჩერების მომენტების ისეთი მიმდევრობა $(\zeta_m)_{m\geq 1}$, რომ ყოველი m-თვის და $t > s$-თვის ადგილი აქვს უტოლობას: $E[V_{t\wedge\zeta_m}|\mathcal{F}_s] \leq V_{s\wedge\zeta_m}$. იმისათვის, რომ მივიღოთ $E[V_t|\mathcal{F}_s] \leq V_s$ უტოლობა, გვჭირდება **ფატუს ლემა** და $\lim_m V_{\zeta_m} = \eta$ ტოლობა. ამას დავამტკიცებთ შემდეგ ლემაში.

ლემა 2.8 V პროცესისათვის ადგილი აქვს შემდეგ აპრიორულ შეფასებას

$$E\left[\mathcal{E}_{t,T}\left(\int f_l'(0)dM\right)\left(\eta + \int_t^T f(s,0)d\langle M\rangle_s\right)\middle|\mathcal{F}_t\right] \leq V_t \leq \frac{1}{\gamma}\ln E\left[e^{\gamma\eta+\gamma\int_t^T \alpha_s d\langle M\rangle_s}\middle|\mathcal{F}_t\right].$$

დამტკიცება: ლემა 2.3-ის თანახმად ყოველი n-თვის ადგილი აქვს უტოლობას:

$$Y_t^n \leq \frac{1}{\gamma}\ln E\left[e^{\gamma\eta^n+\gamma\int_t^T 1_{(s\leq\tau_n)}\alpha_s d\langle M\rangle_s}\middle|\mathcal{F}_t\right] = \frac{1}{\gamma}\ln E\left[e^{\gamma\eta^n+\gamma\int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n} \alpha_s d\langle M\rangle_s}\middle|\mathcal{F}_t\right].$$

თეორემა 2.1-ის **3)** პირობის თანახმად უტოლობის ორივე მხარეს შეგვიძლია ზღვარზე გადასვლა როდესაც $n \to \infty$. შედეგად მივიღებთ, რომ

$$Y_t \leq \frac{1}{\gamma}\ln E\left[e^{\gamma\eta+\gamma\int_t^T \alpha_s d\langle M\rangle_s}\middle|\mathcal{F}_t\right].$$

რადგან $V_t \leq Y_t$, ამიტომ უკანასკნელი შეფასება სამართლიანი იქნება V პროცესისთვისაც. საბოლოოდ, თუ V-ს წარმოდგენაში ჩავსვამთ $u^0 \equiv 0$ მართვას, მივიღებთ ქვემოდან შეფასებასაც

$$V_t \geq E\left[\mathcal{E}_{t,T}\left(\int f_l'(0)dM\right)\left(\eta + \int_t^T f(s,0)d\langle M\rangle_s\right)\middle|\mathcal{F}_t\right].$$

ლემა 2.8 დამტკიცებულია.

ამჯერად თუ V-ს აპრიორულ შეფასებაში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $t \to T$ მივიღებთ, რომ $\eta \leq \lim_{t\to T} V_t \leq \eta$. ეს ნიშნავს, რომ ფასის პროცესი უწყვეტია T-ში და $\eta = \lim_m V_{\zeta_m}$.

რადგან f და η არაუარყოფითებია, ამიტომ **ლემა 2.8**-დან გვექნება, რომ V-ც არაუარყოფითია. ამის შედეგად ფატუს ლემის გამოყენებით მივიღებთ

$$E[V_t|\mathcal{F}_s] = E\left[\lim_m inf\, V_{t\wedge\zeta_m}\middle|\mathcal{F}_s\right] \le \lim_m inf\, E\left[V_{t\wedge\zeta_m}\middle|\mathcal{F}_s\right] \le \lim_m inf\, V_{s\wedge\zeta_m} = V_s.$$

ეს ნიშნავს, რომ V სუპერმარტინგალია.

ლემა 2.7 დამტკიცებულია.

ამჯერად მზადა ვართ დავამტკიცოთ, რომ $V_t = Y_t$ P თ. ყ.

ლემა 2.9 $V_t = Y_t$ P თ. ყ.

დამტკიცება: ლემა 2.9-ის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი n-თვის $Y^n \le V$. ეს დამტკიცდება ზუსტად ისევე როგორც დამტკიცდა **ლემა 2.4**, თუ ავიღებთ $\tau_{n+1} = T$ და η-ს η^{n+1}-ის ნაცვლად.

ლემა 2.9 დამტკიცებულია.

წინადადება 2.5-ის დამტკიცების დასასრულებლად უნდა ვაჩვენოთ, რომ Y არის (1) განტოლების ამონახსნი. **ლემა 2.3**-ის თანახმად ყოველი n-თვის სრულდება უტოლობა:

$$Y_t^n \le \frac{1}{\gamma}\ln E\left[e^{\gamma\eta^n+\gamma\int_t^T 1_{(s\le\tau_n)}\alpha_s d\langle M\rangle_s}\middle|\mathcal{F}_t\right] = \frac{1}{\gamma}\ln E\left[e^{\gamma\eta^n+\gamma\int_0^{\tau_n}\alpha_s d\langle M\rangle_s}\middle|\mathcal{F}_t\right].$$

თეორემა 2.1-ის **3)** პირობის თანახმად უტოლობის ორივე მხარეს შეგვიძლია ზღვარზე გადასვლა როდესაც $n\to\infty$. შედეგად მივიღებთ, რომ

$$Y_t \le \frac{1}{\gamma}\ln E\left[e^{\gamma\eta+\gamma\int_0^T\alpha_s d\langle M\rangle_s}\middle|\mathcal{F}_t\right].$$

მეორეს მხრივ რადგანაც Y^n სუპერმარტინგალია, ამიტომ $Y_t^n \ge E[Y_T^n|\mathcal{F}_t] = E[\eta^n|\mathcal{F}_t] \ge 0$. ასე რომ გვექნება შემდეგი ორმხრივი შეფასება:

$$0 \le Y_t^n \le Y_t \le \frac{1}{\gamma}\ln E\left[e^{\gamma\eta+\gamma\int_0^T\alpha_s d\langle M\rangle_s}\middle|\mathcal{F}_t\right].$$

შემოვიღოთ გაჩერების მომენტები:

$$\sigma_k = inf\left\{t\ge 0:\ \frac{1}{\gamma}\ln E\left[e^{\gamma\eta+\gamma\int_0^T\alpha_s d\langle M\rangle_s}\middle|\mathcal{F}_t\right]\ge k\right\}.$$

ცხადია, რომ $\left|Y_{t\wedge\sigma_k}\right| \le k$ და $\left|Y^n_{t\wedge\sigma_k}\right| \le k$. (34)-დან ვიცით, რომ

$$Y_t^n = Y_0^n - \int_0^t 1_{(s\le\tau_n)} f(s,\varphi_s^n)d\langle M\rangle_s + \int_0^t \varphi_s^n dM_s + L_t^n.$$

ამ უკანასკნელიდან ცხადია, რომ

$$Y^n_{t\wedge\sigma_k} = Y^n_0 - \int_0^t 1_{(s\le\sigma_k\wedge\tau_n)} f\big(s, 1_{(s\le\sigma_k)}\varphi^n_s\big) d\langle M\rangle_s + \int_0^t 1_{(s\le\sigma_k)}\varphi^n_s dM_s + L^n_{t\wedge\sigma_k}.$$

შემოვიღოთ პროცესები

$$Y^n_k(t) = Y^n_{t\wedge\sigma_k}, \qquad \varphi^n_k(t) = 1_{(t\le\sigma_k)}\varphi^n_t, \qquad L^n_k(t) = L^n_{t\wedge\sigma_k}.$$

შედეგად მივიღებთ, რომ $(Y^n_k, \varphi^n_k, L^n_k)$ სამეული აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\begin{cases} Y^n_k(t) = Y^n_0 - \int_0^t 1_{(s\le\sigma_k\wedge\tau_n)} f\big(s, \varphi^n_k(s)\big) d\langle M\rangle_s + \int_0^t \varphi^n_k(s) dM_s + L^n_k(t), \\ Y^n_k(T) = Y^n_{\sigma_k}. \end{cases} \tag{36}$$

რადგან f არაუარყოფითია, ამიტომ $1_{(s\le\sigma_k\wedge\tau_n)} f(s,x) \uparrow 1_{(s\le\sigma_k)} f(s,x)$ და $Y^n_{\sigma_k} \uparrow Y_{\sigma_k}$. **ლემა 2.4**-ის თანახმად $Y^n_k \le Y^{n+1}_k$, საიდანაც **ლემა 2.2**-ის (მონოტომური სტაბილურობის ლემა) თანახმად არსებობს ისეთი სამეული (Y_k, φ_k, L_k), რომელიც აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\begin{cases} Y_k(t) = Y_k(0) - \int_0^t 1_{(s\le\sigma_k)} f\big(s, \varphi_k(s)\big) d\langle M\rangle_s + \int_0^t \varphi_k(s) dM_s + L_k(t), \\ Y_k(T) = Y_{\sigma_k}. \end{cases} \tag{37}$$

ცხადია, რომ $Y_k(t) = sup_n Y^n_k(t) = sup_n Y^n_{t\wedge\sigma_k} = Y_{t\wedge\sigma_k}$ და ასევე

$$1_{(s\le\sigma_k)}\varphi_{k+1}(s) = 1_{(s\le\sigma_k)} \lim_n \varphi^n_{k+1}(s) = 1_{(s\le\sigma_k)} \lim_n 1_{(s\le\sigma_{k+1})}\varphi^n_s =$$

$$= 1_{(s\le\sigma_k)} \lim_n 1_{(s\le\sigma_k)}\varphi^n_s = 1_{(s\le\sigma_k)} \lim_n \varphi^n_k(s) = 1_{(s\le\sigma_k)}\varphi_k(s).$$

ასე რომ შეგვიძლია კორექტულად განვსაზღვროთ პროცესი $\varphi_t \coloneqq \varphi_k(t)$ როდესაც $t \le \sigma_k$.

გადავწეროთ (37) განტოლება შემდეგი ფორმით

$$Y_{t\wedge\sigma_k} = Y_0 - \int_0^{t\wedge\sigma_k} f(s, \varphi_s) d\langle M\rangle_s + \int_0^{t\wedge\sigma_k} \varphi_s dM_s + L_k(t).$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $k \to \infty$ მივიღებთ, რომ $[[0;T[[$ სტოქასტურ ინტერვალზე სრულდება ტოლობა

$$Y_t = Y_0 - \int_0^t f(s, \varphi_s) d\langle M\rangle_s + \int_0^t \varphi_s dM_s + L_t. \qquad (38)$$

შესამოწმებელი დაგვრჩა რომ $\eta = Y_T = \lim_{t\to T} Y_t$. ეს კი ცხადია, რადგან, როგორც უკვე ვაჩვენეთ, $Y_t = V_t$ და ამასთან V_t უწყვეტია T-ში.

წინადადება 2.5 დამტკიცებულია.

შენიშვნა 2.1 ***წინადადება 2.5*** *ზუსტად ისევე დამტკიცდება თუ η-ს ავიღებთ ქვემოდან რაიმე მუდმივით შემოსაზღვრულს.*

§ 2.4 ზოგადი შემთხვევა: თეორემა 2.1-ის დამტკიცება

ამ პარაგრაფში შემოგთავაზებთ **თეორემა 2.1**-ის დამტკიცების მოკლე მონახაზს, რადგან ის თითქმის ისეთივეა, როგორც ეს იყო **§ 2.3**–ში.

განვიხილოთ (1) განტოლება და დავუშვათ, რომ სრულდება **თეორემა 2.1**-ის პირობები. შემოვიღოთ ახალი ალბათური ზომა $d\tilde{P} = \mathcal{E}_T(\int f_l'(0)dM)dP$ და ახალი გენერატორი $h(s,x) = f(s,x) - f_l'(s,0)x - f(s,0)$. f-ის ამოზნექილობის გამო h იქნება ამოზნექილი და არაუარყოფითი გენერატორი. გირსანოვის თეორემის და კაზამაკის [21] შედეგის თანახმად $\widetilde{M}_t = M_t - \int_0^t f_l'(s,0)d\langle M\rangle_s$ იქნება $BMO(\tilde{P})$ მარტინგალი. (1) განტოლებასთან ერთად განვიხილოთ $(\tilde{1})$ განტოლება:

$$\begin{cases} Y_t = Y_0 - \int_0^t h(s, Z_s) d\langle \widetilde{M}\rangle_s + \int_0^t Z_s d\widetilde{M}_s + L_t, \\ Y_T = \eta + \int_0^T f(s,0) d\langle M\rangle_s. \end{cases} \qquad (\tilde{1})$$

ლემა 2.10 **ა)** (Y_t, φ_t, L_t) სამეული (1) განტოლების ამონახსნია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $(\tilde{Y}_t = Y_t + \int_0^t f(s,0)d\langle M\rangle_s, \varphi_t, L_t)$ სამეული არის $(\tilde{1})$ განტოლების ამონახსნი.

ბ) თუ $\|\eta\|_\infty + \left\|\int_0^T \alpha_s d\langle M\rangle_s\right\|_\infty < \infty$, მაშინ $(\tilde{1})$ განტოლების ნებისმიერი შემოსაზღვრული ამონახსნისათვის ადვილი აქვს შემდეგ შეფასებას:

$$\tilde{Y}_t \le \frac{1}{\gamma} \ln E\left[e^{\gamma\eta + \gamma\int_t^T \alpha_s d\langle M\rangle_s} \middle| \mathcal{F}_t\right] + \int_0^t \alpha_s d\langle M\rangle_s. \qquad (39)$$

დამტკიცება: ა) ნაწილის დამტკიცება პირდაპირ გამომდინარეობს გირსანოვის თეორემიდან.

ბ) თუ $\tilde{Y}_t$ არის $(\tilde{1})$ განტოლების შემოსაზღვრული ამონახსნი, მაშინ **ა)** ნაწილის თანახმად $\tilde{Y}_t - \int_0^t f(s,0)d\langle M\rangle_s$ იქნება (1) განტოლების შემოსაზღვრული ამონახსნი. **ლემა 2.3**-ის თანახმად $\tilde{Y}_t - \int_0^t f(s,0)d\langle M\rangle_s$-თვის გვექნება შეფასება

$$\tilde{Y}_t - \int_0^t f(s,0)d\langle M\rangle_s \le \frac{1}{\gamma}\ln E\left[e^{\gamma\eta+\gamma\int_t^T \alpha_s d\langle M\rangle_s}\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

საიდანაც მარტივად მივიღებთ (39) უტოლობას.

ლემა 2.10 დამტკიცებულია.

$(\tilde{1})$ განტოლების შესაბამის ფასის პროცესს ექნება სახე

$$\tilde{V}_t = \underset{u\in U}{ess\ sup}\,\tilde{E}\left[\mathcal{E}_{t,T}\left(\int h_l'(u)d\widetilde{M}\right)\left(\eta + \int_0^T f(s,0)d\langle M\rangle_s + \int_t^T [h(s,u_s) - h_l'(s,u_s)u_s]d\langle \widetilde{M}\rangle_s\right)\middle|\mathcal{F}_t\right].$$

შემდეგი ლემა გვიჩვენებს კავშირს (1) და $(\tilde{1})$ განტოლებების შესაბამის ფასის პროცესებს შორის:

ლემა 2.11 $\tilde{V}_t - \int_0^t f(s,0)d\langle M\rangle_s = V_t$, სადაც V_t არის (1) განტოლების შესაბამისი ფასის პროცესი.

დამტკიცება: პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ $h_l'(s,u_s) = f_l'(s,u_s) - f_l'(s,0)$ და

$$h(s,u_s) - h_l'(s,u_s)u_s = f(s,u_s) - f_l'(s,0)u_s - f(s,0) - f_l'(s,u_s)u_s + f_l'(s,0)u_s =$$

$$= f(s,u_s) - f_l'(s,u_s)u_s - f(s,0).$$

ახლა გავამარტივოთ $\mathcal{E}_{t,T}\left(\int h_l'(u)d\widetilde{M}\right)$ გამოსახულება:

$$\mathcal{E}_{t,T}\left(\int h_l'(u)d\widetilde{M}\right) = exp\left\{\int_t^T h_l'(s,u_s)d\widetilde{M}_s - \frac{1}{2}\int_t^T |h_l'(s,u_s)|^2 d\langle M\rangle_s\right\} =$$

$$= exp\left\{\int_t^T f_l'(s,u_s)d\widetilde{M}_s - \int_t^T f_l'(s,0)d\widetilde{M}_s - \frac{1}{2}\int_t^T |f_l'(s,u_s) - f_l'(s,0)|^2 d\langle M\rangle_s\right\} =$$

$$= exp\left\{\int_t^T f_l'(s,u_s)dM_s - \int_t^T f_l'(s,u_s)f_l'(s,0)d\langle M\rangle_s - \int_t^T f_l'(s,0)dM_s + \int_t^T |f_l'(s,0)|^2 d\langle M\rangle_s \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}\int_t^T |f_l'(s,u_s)|^2 d\langle M\rangle_s + \int_t^T f_l'(s,u_s)f_l'(s,0)d\langle M\rangle_s - \frac{1}{2}\int_t^T |f_l'(s,0)|^2 d\langle M\rangle_s \right\}$$
$$= exp\left\{\int_t^T f_l'(s,u_s)dM_s - \frac{1}{2}\int_t^T |f_l'(s,u_s)|^2 d\langle M\rangle_s \right.$$
$$\left. - \left(\int_t^T f_l'(s,0)dM_s - \frac{1}{2}\int_t^T |f_l'(s,u_s)|^2 d\langle M\rangle_s\right)\right\} = \frac{\mathcal{E}_{t,T}(\int f_l'(u)dM)}{\mathcal{E}_{t,T}(\int f_l'(0)dM)}.$$

ამ გამოსახულებების გამოყენებით კი მივიღებთ

$$\tilde{V}_t - \int_0^t f(s,0)d\langle M\rangle_s$$
$$= \operatorname*{ess\,sup}_{u\in U} \tilde{E}\left[\mathcal{E}_{t,T}\left(\int h_l'(u)d\widetilde{M}\right)\left(\eta + \int_0^T f(s,0)d\langle M\rangle_s \right.\right.$$
$$\left.\left. + \int_t^T [h(s,u_s) - h_l'(s,u_s)u_s]d\langle \widetilde{M}\rangle_s\right)\middle| \mathcal{F}_t\right] - \int_0^t f(s,0)d\langle M\rangle_s$$
$$= \operatorname*{ess\,sup}_{u\in U} \tilde{E}\left[\frac{\mathcal{E}_{t,T}(\int f_l'(u)dM)}{\mathcal{E}_{t,T}(\int f_l'(0)dM)}\left(\eta + \int_0^T f(s,0)d\langle M\rangle_s \right.\right.$$
$$\left.\left. + \int_t^T [f(s,u_s) - f_l'(s,u_s)u_s - f(s,0)]d\langle M\rangle_s\right)\middle| \mathcal{F}_t\right] - \int_0^t f(s,0)d\langle M\rangle_s$$
$$= \operatorname*{ess\,sup}_{u\in U} E\left[\mathcal{E}_{t,T}\left(\int f_l'(u)dM\right)\left(\eta + \int_0^t f(s,0)d\langle M\rangle_s \right.\right.$$
$$\left.\left. + \int_t^T [f(s,u_s) - f_l'(s,u_s)u_s]d\langle M\rangle_s\right)\middle| \mathcal{F}_t\right] - \int_0^t f(s,0)d\langle M\rangle_s$$
$$= \operatorname*{ess\,sup}_{u\in U} E^u\left[\eta + \int_t^T [f(s,u_s) - f_l'(s,u_s)u_s]d\langle M\rangle_s \middle| \mathcal{F}_t\right] = V_t.$$

ლემა 2.11 დამტკიცებულია.

ლემა 2.10-ის და **ლემა 2.11**-ის თანახმად **თეორემა 2.1**-ის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ფასის პროცესი $\tilde{V}_t$ არის $(\tilde{1})$ განტოლების ამონახსნი. ამას (39) აპრიორული შეფასების გამოყენებით ვაჩვენებთ ზუსტად ისევე, როგორც ეს გავაკეთეთ § **2.3**-ში არაუარყოფითი f და η-ს შემთხვევაში.

თეორემა 2.1 დამტკიცებულია.

§ 2.5 (1) განტოლების მრავალგანზომილებიანი შემთხვევა

დავუშვათ M d-განზომილებიანი ლოკალური მარტინგალია, განსაზღვრული მარჯვნიდან უწყვეტ და სრულ ფილტრულ ალბათურ სივრცეზე $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}, P)$. შევნიშნოთ, რომ M-ის კვადრატული ვარიაცია $\langle M\rangle$ წარმოადგენს მატრიცას კომპონენტებით $\langle M^i, M^j\rangle$ $i,j \in \{1,\dots,d\}$. რადგანაც ყოველი კომპონენტი $d\langle M^i, M^j\rangle$ აბსოლუტურად უწყვეტია $dC = \sum_i d\langle M^i\rangle$-ის მიმართ, ამიტომ არსებობს ჭვრეტადი პროცესი m მნიშვნელობებით $R^{d\times d}$-ში, რომ $d\langle M\rangle$ შემდეგნაირად შეიძლება წარმოვადგინოთ: $d\langle M\rangle_s = m_s m_s' dC_s$.

განვიხილოთ შემდეგი სახის შექცეული სტოქასტურ-დიფერენციალური განტოლება:

$$\begin{cases} Y_t = Y_0 - \int_0^t f(s, Z_s) dC_s + \int_0^t Z_s dM_s + L_t, \\ \qquad\qquad Y_T = \eta. \end{cases} \tag{40}$$

სადაც გენერატორი $f : [0;T] \times \Omega \times R^d \to R$ არის ზომადი ფუნქცია და ყოველი $z = (z^1, \dots, z^d)$-თვის $f(\cdot\,,\,\cdot\,,\,z)$ არის ჭვრეტადი; η $\mathcal{F}_T$-ზომადი შემთხვევითი სიდიდეა, ხოლო $\{M_t\}_{0\le t\le T}$ მოცემული ლოკალურად კვადრატით ინტეგრებადი მარტინგალია $\{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T}$ ფილტრაციის მიმართ. წყვილს $(f,\ \eta)$ ვუწოდებთ (40) განტოლების პარამეტრებს.

ვიტყვით, რომ უწყვეტი d-განზომილებიანი ლოკალური მარტინგალი არის BMO კლასიდან, თუ ყოველი $i = 1, \dots d$-თვის $\sup_\tau \left\| E\left[\langle M^i\rangle_T - \langle M^i\rangle_\tau \middle| \mathcal{F}_\tau\right]\right\|_\infty < \infty$, სადაც sup აიღება ყველა გაჩერების მომენტის მიმართ $0 \le \tau \le T$.

თეორემა 2.2 დავუშვათ $\{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T}$ ფილტრაცია უწყვეტია და M BMO მარტინგალია. ამასთან პარამეტრები (f, η) აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

1) ყოველი (t, ω)-თვის $f(t, \omega,\ \cdot\,)$ უწყვეტი და ამოზნექილი ფუნქციაა.
2) არსებობს ისეთი არაუარყოფითი ჭვრეტადი პროცესი α_t და მუდმივი $\gamma \ge 0$, რომ $\sup_\tau \left\| E\left[\int_\tau^T \alpha_s dC_s \middle| \mathcal{F}_\tau\right]\right\|_\infty < \infty$ და ყოველი (t, ω, z)-თვის ადგილი აქვს უტოლობას:

$$|f(t,\omega,z)| \le \alpha_t(\omega) + \frac{\gamma}{2}|z|^2.$$

3) $Ee^{\gamma\eta + \gamma\int_0^T \alpha_s dC_s} < \infty$ და $\eta + \int_0^T f(s,0)dC_s \ge -D$ რომელიღაც $D \ge 0$-თვის.

მაშინ არსებობს (40) განტოლების ამონახსნი $V = (V_t)_{0\le t\le T}$, რომელიც შემდეგი სახით წარმოიდგინება:

$$V_t = \underset{u\in U}{ess\ sup}\, E\left[\mathcal{E}_{t,T}\left(\int f'(u)dM\right)\left(\eta + \int_t^T [f(s,u_s) - f'(s,u_s)u_s]dC_s\right)\middle| \mathcal{F}_t\right]$$

სადაც U არის შემოსაზღვრულ და ჭვრეტად მართვათა კლასი მნიშვნელობებით R^d-ში:

$$U = \{u \; : \; \exists \; C_u \geq 0, |u_t| \leq C_u\},$$

ხოლო f' წარმოადგენს f-ის სუბდიფერენციალის ზომად ვერსიას.

თეორემა 2.2 დამტკიცდება ანალოგიურად **თეორემა 2.1**-ისა.

§ 2.6 ამონახსნის ერთადერთობა (1) განტოლებისათვის

ამ პარაგრაფში ჩვენი მიზანია დავამტკიცოთ, რომ ამონახსნთა სპეციალურ კლასში (1) განტოლებას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი.

შემოვიღოთ ამონახსნთა შემდეგი კლასი:

$$\aleph = \left\{(Y, Z, L) \; : \; Ee^{p(Y^+ + \int \alpha d\langle M \rangle)^*} + Ee^{\varepsilon (Y^-)^*} < \infty\right\}$$

$p > \gamma$-თვის და $\varepsilon > 0$-თვის, სადაც γ მუდმივია **თეორემა 2.1**-ის მე-**2)** პირობიდან.

როგორც წინა პარაგრაფებში ვაჩვენეთ, სამეული (V, φ, L) აკმაყოფილებს (1) განტოლებას, სადაც პირველი კომპონენტი V წარმოადგენს ფასის პროცესს:

$$V_t = \underset{u \in U}{ess\,sup}\, E^u \left[\eta + \int_t^T [f(s, u_s) - f_l'(s, u_s) u_s] d\langle M \rangle_s \middle| \mathcal{F}_t\right],$$

სადაც U არის ჭვრეტად შემოსაზღვრულ მართვათა კლასი.

წინადადება 2.6 თუ $Ee^{p\eta^+ + p\int_0^T \alpha_s d\langle M \rangle_s} < \infty$, მაშინ V ეკუთვნის ამონახსნთა $\aleph$ კლასს.

დამტკიცება: § **2.2**-ის და **ლემა 2.3**-ის თანახმად

$$\underset{u \in U}{ess\,sup}\, E\left[\mathcal{E}_{t\wedge\tau_n, \tau_n}\left(\int f_l'(u) dM\right)\left(\eta^n + \int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n} g(s, u_s) d\langle M \rangle_s\right) \middle| \mathcal{F}_t\right] \leq$$

$$\leq \frac{1}{\gamma} \ln E\left[e^{\gamma\eta^n + \gamma\int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n} \alpha_s d\langle M \rangle_s} \middle| \mathcal{F}_t\right], \tag{41}$$

სადაც $\eta^n = \eta^+ \wedge n - \eta^- \wedge n$ და $\tau_n = inf\left\{t \geq 0 \; : \; \int_0^t \alpha_s^2 d\langle M \rangle_s \vee \langle M \rangle_t \geq n\right\}$. რადგანაც $e^{\gamma\eta^n + \gamma\int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n} \alpha_s d\langle M \rangle_s} \leq e^{\gamma\eta^+ + \gamma\int_0^T \alpha_s d\langle M \rangle_s}$ და $Ee^{\gamma\eta^+ + \gamma\int_0^T \alpha_s d\langle M \rangle_s} < \infty$, ფატუს ლემის გამოყენებით მივიღებთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{\gamma}\ln E\left[e^{\gamma\eta^n+\gamma\int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n}\alpha_s d\langle M\rangle_s}\middle|\mathcal{F}_t\right]\leq\frac{1}{\gamma}\ln E\left[e^{\gamma\eta+\gamma\int_t^T\alpha_s d\langle M\rangle_s}\middle|\mathcal{F}_t\right]. \tag{42}$$

მეორეს მხრივ sup-ის თვისების და **ლემა 2.5**-ის გამოყენებით გვექნება:

$$\lim_{n\to\infty}\sup\underset{u\in U}{ess\,sup}\,E\left[\mathcal{E}_{t\wedge\tau_n,\tau_n}\left(\int f_l'(u)dM\right)\left(\eta^n+\int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n}g(s,u_s)d\langle M\rangle_s\right)\middle|\mathcal{F}_t\right]\geq$$

$$\geq\underset{u\in U}{ess\,sup}\lim_{n\to\infty}\sup E\left[\mathcal{E}_{t\wedge\tau_n,\tau_n}\left(\int f_l'(u)dM\right)\left(\eta^n+\int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n}g(s,u_s)d\langle M\rangle_s\right)\middle|\mathcal{F}_t\right]=$$

$$=E\left[\mathcal{E}_{t,T}\left(\int f_l'(u)dM\right)\left(\eta+\int_t^T g(s,u_s)d\langle M\rangle_s\right)\middle|\mathcal{F}_t\right]=V_t. \tag{43}$$

ასე რომ (41), (42) და (43)-დან მივიღებთ ზემოდან შეფასებას V პროცესისათვის:

$$V_t\leq\frac{1}{\gamma}\ln E\left[e^{\gamma\eta+\gamma\int_t^T\alpha_s d\langle M\rangle_s}\middle|\mathcal{F}_t\right].$$

ქვემოდან შესაფასებლად, თუ V-ს წარმოდგენაში ჩავსვამთ $u^0\equiv 0$ მართვას, მივიღებთ

$$E\left[\mathcal{E}_{t,T}\left(\int f_l'(0)dM\right)\left(\eta+\int_t^T f(s,0)d\langle M\rangle_s\right)\middle|\mathcal{F}_t\right]\leq V_t.$$

ანუ საბოლოოდ V-სთვის მივიღებთ შემდეგ აპრიორულ შეფასებას:

$$E\left[\mathcal{E}_{t,T}\left(\int f_l'(0)dM\right)\left(\eta+\int_t^T f(s,0)d\langle M\rangle_s\right)\middle|\mathcal{F}_t\right]\leq V_t\leq\frac{1}{\gamma}\ln E\left[e^{\gamma\eta+\gamma\int_t^T\alpha_s d\langle M\rangle_s}\middle|\mathcal{F}_t\right].$$

რადგანაც $\eta+\int_0^T f(s,0)d\langle M\rangle_s\geq -C$, ამიტომ

$$V_t+\int_0^t f(s,0)d\langle M\rangle_s\geq E\left[\mathcal{E}_{t,T}\left(\int f_l'(0)dM\right)\left(\eta+\int_0^T f(s,0)d\langle M\rangle_s\right)\middle|\mathcal{F}_t\right]\geq -C$$

ხოლო $|f(s,0)|\leq\alpha_s$ პირობიდან მივიღებთ V-ს შემდეგ შეფასებას:

$$-C-\int_0^t\alpha_s d\langle M\rangle_s\leq V_t\leq\frac{1}{\gamma}\ln E\left[e^{\gamma\eta+\gamma\int_t^T\alpha_s d\langle M\rangle_s}\middle|\mathcal{F}_t\right].$$

ამ უკანასკნელიდან $V^+ +\int\alpha d\langle M\rangle$-თვის გვექნება შეფასება:

$$V_t^+ +\int_0^t\alpha_s d\langle M\rangle_s\leq\frac{1}{\gamma}\ln E\left[e^{\gamma\eta^+ +\gamma\int_t^T\alpha_s d\langle M\rangle_s}\middle|\mathcal{F}_t\right]+\int_0^t\alpha_s d\langle M\rangle_s=$$

$$= \frac{1}{\gamma} \ln E\left[e^{\gamma\eta^+ + \gamma\int_t^T \alpha_s d\langle M\rangle_s} \middle| \mathcal{F}_t \right] + \frac{1}{\gamma} \ln E\left[e^{\gamma\int_0^t \alpha_s d\langle M\rangle_s} \middle| \mathcal{F}_t \right] \le$$

$$\le \frac{1}{\gamma} \ln E\left[e^{\gamma\eta^+ + \gamma\int_0^T \alpha_s d\langle M\rangle_s} \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

$V^+ + \int \alpha d\langle M\rangle$-ის შეფასების და დუბის მარტინგალური უტოლობის გამოყენებით მივიღებთ:

$$Ee^{p(V^+ + \int \alpha d\langle M\rangle)^*} \le Ee^{\frac{p}{\gamma}\ln\left(E\left[e^{\gamma\eta^+ + \gamma\int_0^T \alpha_s d\langle M\rangle_s}\middle|\mathcal{F}_t\right]\right)^*} = E\left|E\left[e^{\gamma\eta^+ + \gamma\int_0^T \alpha_s d\langle M\rangle_s}\middle|\mathcal{F}_t\right]^*\right|^{\frac{p}{\gamma}} \le$$

$$\le C_p E\left(e^{\gamma\eta^+ + \gamma\int_0^T \alpha_s d\langle M\rangle_s}\right)^{\frac{p}{\gamma}} = C_p E e^{p\eta^+ + p\int_0^T \alpha_s d\langle M\rangle_s} < \infty.$$

ქვემოდან შესაფასებლად როგორც ვიცით $V_t^- \le C + \int_0^t \alpha_s d\langle M\rangle_s$ და $(V^-)^* \le C + \int_0^T \alpha_s d\langle M\rangle_s$. რადგანაც $Ee^{p(V^-)^*} \le Ee^{pC + p\int_0^T \alpha_s d\langle M\rangle_s} < \infty$ მივიღებთ, რომ $V \in \aleph$.

წინადადება 2.6 დამტკიცებულია.

შემდეგ თეორემას დავამტკიცებთ იმავე მეთოდით, როგორც ეს გააკეთეს დელბაენმა, ჰუმ და რიჩოუმ [11] ბროუნის ფილტრაციის შემთხვევაში.

თეორემა 2.3 თუ არსებობს (1) განტოლების ამონახსნი $\aleph$ კლასიდან, მაშინ ის ამ კლასში ერთადერთია.

დამტკიცება: შემოვიღოთ მართვათა ახალი კლასი

$$\widetilde{U} = \left\{ (u_t)_{0\le t\le T} : \mathcal{E}\left(\int f_l'(u)dM\right) \text{ თ. ი.};\ E^u\left[|\eta| + \int_0^T |f(s,u_s) - f_l'(s,u_s)u_s| d\langle M\rangle_s\right] < \infty \right\}$$

და შესაბამისი ფასის პროცესი

$$\tilde{V}_t = \operatorname*{ess\,sup}_{u\in\widetilde{U}} E^u\left[\eta + \int_t^T [f(s,u_s) - f_l'(s,u_s)u_s] d\langle M\rangle_s \middle| \mathcal{F}_t\right].$$

ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ თუ Y არის (1) განტოლების ამონახსნი $\aleph$ კლასიდან, მაშინ $Y_t = \tilde{V}_t$ ყოველი $t \in [0;T]$-თვის P თ. ყ. თავდაპირველად ვაჩვენოთ, რომ ყოველი $u \in \widetilde{U}$-თვის

$$Y_t \ge E^u\left[\eta + \int_t^T [f(s,u_s) - f_l'(s,u_s)u_s] d\langle M\rangle_s \middle| \mathcal{F}_t\right].$$

სიმარტივისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნა: $g(s,x) = f(s,x) - f_l'(s,x)x$.

რადგანაც Y არის (1) განტოლების ამონახსნი, ამიტომ იტოს ფორმულიდან და f-ის ამოზნექილობის უტოლობიდან მარტივად შევამოწმებთ, რომ

$$\mathcal{E}_t\left(\int f_l'(u)dM\right)\left(Y_t+\int_0^t g(s,u_s)d\langle M\rangle_s\right)$$

არის ლოკალური სუპერმარტინგალი. ვთქვათ $(\tau_n)_{n\geq 1}$ წარმოადგენს მალოკალიზებელ მიმდევრობას $\mathcal{E}_t(\int f_l'(u)dM)\left(Y_t+\int_0^t g(s,u_s)d\langle M\rangle_s\right)$ ლოკალური სუპერმარტინგალისათვის. მაშინ სუპერმარტინგალობის თვისებიდან მივიღებთ, რომ ყოველი $n\geq 1$-თვის

$$\mathcal{E}_{t\wedge\tau_n}\left(\int f_l'(u)dM\right)\left(Y_{t\wedge\tau_n}+\int_0^{t\wedge\tau_n} g(s,u_s)d\langle M\rangle_s\right)\geq$$

$$\geq E\left[\mathcal{E}_{\tau_n}\left(\int f_l'(u)dM\right)\left(Y_{\tau_n}+\int_0^{\tau_n} g(s,u_s)d\langle M\rangle_s\right)\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

რაც ექვივალენტურია შემდეგი უტოლობისა

$$Y_{t\wedge\tau_n}\geq E\left[\mathcal{E}_{t\wedge\tau_n,\tau_n}\left(\int f_l'(u)dM\right)\left(Y_{\tau_n}+\int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n} g(s,u_s)d\langle M\rangle_s\right)\middle|\mathcal{F}_t\right]=$$

$$=E^u\left[Y_{\tau_n}+\int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n} g(s,u_s)d\langle M\rangle_s\middle|\mathcal{F}_t\right]. \tag{44}$$

ჩვენ გვჭირდება ზღვარზე გადასვლა უკანასკნელი უტოლობის ორივე მხარეს. ამისათვის შევამოწმოთ ფატუს ლემის პირობები. ცხადია, რომ

$$\left|\int_{t\wedge\tau_n}^{\tau_n} g(s,u_s)d\langle M\rangle_s\right|\leq\int_0^T|g(s,u_s)|d\langle M\rangle_s$$

და რადგან $u\in\widetilde{U}$, ამიტომ

$$E^u\int_0^T|g(s,u_s)|d\langle M\rangle_s<\infty.$$

$(Y_{\tau_n})_{n\geq 1}$ ოჯახისათვის საკმარისია გამოვიყენოთ ფატუს ლემა. ცხადია, რომ $Y_{\tau_n}\geq -(Y^-)^*$. ამიტომ საკმარისია მივიღოთ, რომ $E^u(Y^-)^*<\infty$. ამისათვის დაგვჭირდება შემდეგი ლემა:

ლემა 2.12 $E[\mathcal{E}_t(\int f_l'(u)dM)\ln\mathcal{E}_t(\int f_l'(u)dM)]<\infty$ ყოველი $t\in[0;T]$-თვის და $u\in\widetilde{U}$-თვის.

დამტკიცება: შემოვიღოთ გაჩერების მომენტები:

$$\sigma_n = inf\left\{t \geq 0 : \int_0^t f_l'^2(s,u_s)d\langle M\rangle_s \geq n\right\} \wedge T.$$

$\mathcal{E}(\int f_l'(u)dM)$-ის განმარტების, გირსანოვის თეორემის, **ლემა 2.17**-ის (იხ. დანართი **§2.7**) და

$$xy \leq e^{px} + \frac{y}{p}(\ln y - \ln p - 1) \qquad \forall (x,y) \in R \times R^+ \tag{45}$$

უტოლობის თანმიმდევრობით გამოყენების შედეგად მივიღებთ უტოლობათა შემდეგ ჯაჭვს:

$$E\left[\mathcal{E}_{t\wedge\sigma_n}\left(\int f_l'(u)dM\right)\ln \mathcal{E}_{t\wedge\sigma_n}\left(\int f_l'(u)dM\right)\right] = \frac{1}{2}E^u\left[\int_0^{t\wedge\sigma_n} f_l'^2(s,u_s)d\langle M\rangle_s\right] \leq$$

$$\leq \gamma E^u \int_0^{t\wedge\sigma_n} \alpha_s d\langle M\rangle_s + \gamma E^u \int_0^{t\wedge\sigma_n} |g(s,u_s)| d\langle M\rangle_s \leq$$

$$\leq \gamma E e^{p\int_0^{t\wedge\sigma_n}\alpha_s d\langle M\rangle_s} + \frac{\gamma}{p}E\left[\mathcal{E}_{t\wedge\sigma_n}\left(\int f_l'(u)dM\right)\ln \mathcal{E}_{t\wedge\sigma_n}\left(\int f_l'(u)dM\right)\right] -$$

$$-\frac{\gamma}{p}(1+\ln p) + \gamma E^u \int_0^{t\wedge\sigma_n} |g(s,u_s)| d\langle M\rangle_s.$$

ეს შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\left(1-\frac{\gamma}{p}\right)E\left[\mathcal{E}_{t\wedge\sigma_n}\left(\int f_l'(u)dM\right)\ln \mathcal{E}_{t\wedge\sigma_n}\left(\int f_l'(u)dM\right)\right] \leq$$

$$\leq \gamma E e^{p\int_0^{t\wedge\sigma_n}\alpha_s d\langle M\rangle_s} + \gamma E^u \int_0^{t\wedge\sigma_n} |g(s,u_s)| d\langle M\rangle_s - \frac{\gamma}{p}(1+\ln p) \leq$$

$$\leq \gamma E e^{p\int_0^{T}\alpha_s d\langle M\rangle_s} + \gamma E^u \int_0^{T} |g(s,u_s)| d\langle M\rangle_s - \frac{\gamma}{p}(1+\ln p) < \infty. \tag{46}$$

მეორეს მხრივ (46)-ის და ფატუს ლემის გამოყენებით დავასრულებთ ლემის დამტკიცებას

$$E\left[\mathcal{E}_t\left(\int f_l'(u)dM\right)\ln \mathcal{E}_t\left(\int f_l'(u)dM\right)\right] =$$

$$= E \liminf_n \mathcal{E}_{t\wedge\sigma_n}\left(\int f_l'(u)dM\right)\ln \mathcal{E}_{t\wedge\sigma_n}\left(\int f_l'(u)dM\right) \leq$$

$$\leq \liminf_n E\left[\mathcal{E}_{t\wedge\sigma_n}\left(\int f_l'(u)dM\right)\ln \mathcal{E}_{t\wedge\sigma_n}\left(\int f_l'(u)dM\right)\right] \leq$$

$$\leq \frac{p\gamma}{p-\gamma}E e^{p\int_0^{T}\alpha_s d\langle M\rangle_s} + \frac{p\gamma}{p-\gamma}E^u \int_0^{T} |g(s,u_s)| d\langle M\rangle_s - \frac{\gamma}{p-\gamma}(1+\ln p) < \infty.$$

ლემა 2.12 დამტკიცებულია.

(45) უტოლობის და **ლემა 2.12**-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$E^u(Y^-)^* \le Ee^{\varepsilon(Y^-)^*} + \frac{1}{\varepsilon}E\left[\mathcal{E}_T\left(\int f_l'(u)dM\right)\ln\mathcal{E}_T\left(\int f_l'(u)dM\right)\right] - \frac{1+\ln\varepsilon}{\varepsilon} < \infty.$$

ასე რომ (44) უტოლობაში ფატუს ლემის გამოყენებით გვექნება

$$Y_t \ge E^u\left[\eta + \int_t^T g(s,u_s)d\langle M\rangle_s \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

ყოველი $u \in \widetilde{U}$-თვის, რაც იმას ნიშნავს, რომ $Y_t \ge \tilde{V}_t$.

ამჯერად საჩვენებელი დაგვრჩა შებრუნებული უტოლობა $Y_t \le \tilde{V}_t$. თავდაპირველად ვაჩვენოთ, რომ

$$E\left[\mathcal{E}_t\left(\int f_l'(Z)dM\right)\ln\mathcal{E}_t\left(\int f_l'(Z)dM\right)\right] < \infty,$$

სადაც Z არის (1) განტოლების (Y,Z,L) ამონახსნის მეორე კომპონენტი. აქედან ასევე მივიღებთ $\mathcal{E}_t(\int f_l'(Z)dM)$-ის თანაბრად ინტეგრებადობას. შემოვიღოთ გაჩერების მომენტები:

$$\tau_n = inf\left\{t \ge 0: \int_0^t f_l'^2(s,Z_s)d\langle M\rangle_s \vee \int_0^t Z_s^2 d\langle M\rangle_s \ge n\right\} \wedge T$$

და შესაბამისი ზომები $dQ^n = \mathcal{E}_{\tau_n}(\int f_l'(Z)dM)dP$. გამომდინარე იქიდან, რომ (Y,Z,L) წარმოადგენს (1) განტოლების ამონახსნს, ადგილი ექნება შემდეგ ტოლობებს:

$$Y_{t\wedge\tau_n} = Y_0 - \int_0^{t\wedge\tau_n}[f(s,Z_s) - Z_s f_l'(s,Z_s)]d\langle M\rangle_s + \int_0^{t\wedge\tau_n} Z_s(dM_s - f_l'(s,Z_s)d\langle M\rangle_s) + L_{t\wedge\tau_n}$$

და გირსანოვის თეორემის თანახმად

$$E^{Q^n}\left[Y_{t\wedge\tau_n} + \int_0^{t\wedge\tau_n}[f(s,Z_s) - Z_s f_l'(s,Z_s)]d\langle M\rangle_s\right] = EY_0.$$

ზუსტად ისევე, როგორც ეს გავაკეთეთ **ლემა 2.12**-ის დამტკიცებისას მივიღებთ, რომ

$$E\left[\mathcal{E}_{t\wedge\tau_n}\left(\int f_l'(Z)dM\right)\ln\mathcal{E}_{t\wedge\tau_n}\left(\int f_l'(Z)dM\right)\right] = \frac{1}{2}E^{Q^n}\left[\int_0^{t\wedge\tau_n} f_l'^2(s,Z_s)d\langle M\rangle_s\right] \le$$

$$\le \gamma E^{Q^n}\left[\int_0^{t\wedge\tau_n}\alpha_s d\langle M\rangle_s\right] + \gamma E^{Q^n}\left[\int_0^{t\wedge\tau_n}[Z_s f_l'(s,Z_s) - f(s,Z_s)]d\langle M\rangle_s\right] =$$

$$= \gamma E^{Q^n}\left[\int_0^{t\wedge\tau_n} \alpha_s d\langle M\rangle_s\right] + \gamma E^{Q^n}\left[Y_{t\wedge\tau_n}\right] - \gamma E Y_0 =$$

$$= \gamma E^{Q^n}\left[Y_{t\wedge\tau_n} + \int_0^{t\wedge\tau_n} \alpha_s d\langle M\rangle_s\right] - \gamma E Y_0 \leq$$

$$\leq \gamma E e^{p\left(Y_{t\wedge\tau_n} + \int_0^{t\wedge\tau_n} \alpha_s d\langle M\rangle_s\right)} - \frac{\gamma}{p}(1 + \ln p) - \gamma E Y_0 +$$

$$+ \frac{\gamma}{p} E\left[\mathcal{E}_{t\wedge\tau_n}\left(\int f_l'(Z) dM\right) \ln \mathcal{E}_{t\wedge\tau_n}\left(\int f_l'(Z) dM\right)\right].$$

აქედან კი გვექნება, რომ

$$\left(1 - \frac{\gamma}{p}\right) E\left[\mathcal{E}_{t\wedge\tau_n}\left(\int f_l'(Z) dM\right) \ln \mathcal{E}_{t\wedge\tau_n}\left(\int f_l'(Z) dM\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\gamma}{p}\right) E^{Q^n}\left[\int_0^{t\wedge\tau_n} {f_l'}^2(s, Z_s) d\langle M\rangle_s\right] \leq$$

$$\leq \gamma E e^{p\left(Y_{t\wedge\tau_n} + \int_0^{t\wedge\tau_n} \alpha_s d\langle M\rangle_s\right)} - \frac{\gamma}{p}(1 + \ln p) - \gamma E Y_0 \leq$$

$$\leq \gamma E e^{p\left(Y^+ + \int \alpha d\langle M\rangle\right)^*} - \frac{\gamma}{p}(1 + \ln p) - \gamma E Y_0 < \infty. \qquad (47)$$

მეორეს მხრივ ფატუს ლემის გამოყენებით მივიღებთ

$$E\left[\mathcal{E}_t\left(\int f_l'(Z) dM\right) \ln \mathcal{E}_t\left(\int f_l'(Z) dM\right)\right] =$$

$$= E \liminf_n \mathcal{E}_{t\wedge\tau_n}\left(\int f_l'(Z) dM\right) \ln \mathcal{E}_{t\wedge\tau_n}\left(\int f_l'(Z) dM\right) \leq$$

$$\leq \liminf_n E\left[\mathcal{E}_{t\wedge\tau_n}\left(\int f_l'(Z) dM\right) \ln \mathcal{E}_{t\wedge\tau_n}\left(\int f_l'(Z) dM\right)\right] \leq$$

$$\leq \frac{p\gamma}{p - \gamma} E e^{p\left(Y^+ + \int \alpha d\langle M\rangle\right)^*} - \frac{\gamma}{p - \gamma}(1 + \ln p) - \frac{p\gamma}{p - \gamma} E Y_0 < \infty.$$

ასე რომ $\{\mathcal{E}_t(\int f_l'(Z) dM)\}_{t\in[0;T]}$ თანაბრად ინტეგრებადი მარტინგალია და შეგვიძლია განვმარტოთ ახალი ალბათური ზომა $dQ = \mathcal{E}_T(\int f_l'(Z) dM) dP$.

ამჯერად ვაჩვენოთ, რომ $Z \in \widetilde{U}$. ფატუს ლემის და (47) უტოლობის თანახმად

$$E^Q \int_0^T {f_l'}^2(s, Z_s) d\langle M\rangle_s = E^Q \liminf_n \int_0^{\tau_n} {f_l'}^2(s, Z_s) d\langle M\rangle_s \leq$$

$$\leq \liminf_n E^Q \int_0^{\tau_n} {f_l'}^2(s, Z_s) d\langle M\rangle_s < \infty,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $\int_0^t f_l'(s, Z_s) dM_s - \int_0^t {f_l'}^2(s, Z_s) d\langle M\rangle_s$ კვადრატით ინტეგრებადი Q-მარტინგალია.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $E^Q\left[\int_0^T |f(s, Z_s) - Z_s f_l'(s, Z_s)| d\langle M\rangle_s\right] < \infty$. f-ის ამოზნექილობის და კვადრატულობის გამო ადგილი აქვს შემდეგ უტოლობას

$$f(s, Z_s) - Z_s f_l'(s, Z_s) \leq f(s, 0) \leq \alpha_s$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$E^Q\left[\int_0^T [f(s, Z_s) - Z_s f_l'(s, Z_s)]^+ d\langle M\rangle_s\right] \leq E^Q\left[\int_0^T \alpha_s d\langle M\rangle_s\right] \leq$$

$$\leq E e^{p\int_0^T \alpha_s d\langle M\rangle_s} + \frac{1}{p} E\left[\mathcal{E}_T\left(\int f_l'(Z) dM\right) \ln \mathcal{E}_T\left(\int f_l'(Z) dM\right)\right] - \frac{1 + \ln p}{p} < \infty. \quad (48)$$

შევნიშნოთ, რომ

$$E^Q\left[\int_0^T [f(s, Z_s) - Z_s f_l'(s, Z_s)] d\langle M\rangle_s\right] = E^Q\left[\int_0^T [f(s, Z_s) - Z_s f_l'(s, Z_s)]^+ d\langle M\rangle_s\right] -$$

$$-E^Q\left[\int_0^T [f(s, Z_s) - Z_s f_l'(s, Z_s)]^- d\langle M\rangle_s\right] = E^Q[Y_0 - Y_T]. \quad (49)$$

(48) და (49)-დან მივიღებთ

$$E^Q\left[\int_0^T [f(s, Z_s) - Z_s f_l'(s, Z_s)]^- d\langle M\rangle_s\right] = E^Q[Y_T] - EY_0 +$$

$$+E^Q\left[\int_0^T [f(s, Z_s) - Z_s f_l'(s, Z_s)]^+ d\langle M\rangle_s\right] \leq E^Q\left[Y_T^+ + \int_0^T \alpha_s d\langle M\rangle_s\right] - EY_0 \leq$$

$$\leq E^Q\left[\left(Y^+ + \int \alpha d\langle M\rangle\right)^*\right] - EY_0 \leq$$

$$\leq E e^{p\left(Y^+ + \int \alpha d\langle M\rangle\right)^*} + \frac{1}{p} E\left[\mathcal{E}_T\left(\int f_l'(Z) dM\right) \ln \mathcal{E}_T\left(\int f_l'(Z) dM\right)\right] - \frac{1 + \ln p}{p} - EY_0 < \infty.$$

ეს ნიშნავს, რომ $E^Q\left[\int_0^T |f(s,Z_s) - Z_s f_l'(s,Z_s)| d\langle M\rangle_s\right] < \infty$. ამჯერად ვაჩვენოთ, რომ $E^Q|\eta| < \infty$. ცხადია, რომ $\eta^+ \le (Y^+)^*$ და $\eta^- \le C + \int_0^T \alpha_s d\langle M\rangle_s$. შესაბამისად $E^Q[\eta^+] \le E^Q(Y^+)^* < \infty$ და $E^Q[\eta^-] \le C + E^Q\left[\int_0^T \alpha_s d\langle M\rangle_s\right] < \infty$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ Z პროცესი ეკუთვნის $\widetilde{U}$ მართვათა კლასს. ახლა, რადგან $\int_0^t f_l'(s,Z_s) dM_s - \int_0^t f_l'^2(s,Z_s) d\langle M\rangle_s$ კვადრატით ინტეგრებადი Q-მარტინგალია, გირსანოვის თეორემის გამოყენებით მივიღებთ რომ

$$Y_t = E^Q\left[\eta + \int_t^T [f(s,Z_s) - Z_s f_l'(s,Z_s)] d\langle M\rangle_s \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

და $Y_t \le \widetilde{V}_t$, რადგან $Z \in \widetilde{U}$.

შენიშვნა. ცხადია, რომ $V_t = \widetilde{V}_t$, რადგან **წინადადება 3.6**-იდან გამომდინარე V არის (1) განტოლების ამონახსნი $\aleph$ კლასიდან.

თეორემა 2.3 დამტკიცებულია.

თეორემა 2.3-ის დამტკიცებიდან გამოდის, რომ თუ $Y \in \aleph$, მაშინ $\mathcal{E}_t(\int f_l'(Z) dM)$ თანაბრად ინტეგრებადი მარტინგალია. საინტერესოა იმის გარკვევა, თუ რა შემთხვევაში იქნება $\mathcal{E}_t(\int Z dM)$ თანაბრად ინტეგრებადი. შემდეგი წინადადება ნაწილობრივ გვაძლევს პასუხს ამ კითხვაზე.

წინადადება 2.7 დავუშვათ f კვადრატული გენერატორია $|f(s,x)| \le \alpha_s + \frac{\gamma}{2} x^2$ და (Y, Z, L) (1) განტოლების ამონახსნია ისეთი, რომ

$$E e^{p(Y^+ + \int \alpha d\langle M\rangle)^*} < \infty$$

რომელიღაც $p > \gamma$-თვის. მაშინ ყოველი $\beta \in (p - \sqrt{p(p-\gamma)}\ ;\ p + \sqrt{p(p-\gamma)})$-თვის $\mathcal{E}(\beta \int Z dM + \beta L)$ თანაბრად ინტეგრებადი მარტინგალია $[0;T]$-ზე.

დამტკიცება: შემოვიღოთ გაჩერების მომენტები

$$\tau_n = \inf\left\{t \ge 0 : \int_0^t Z_s^2 d\langle M\rangle_s + \langle L\rangle_t \ge n\right\} \wedge T$$

და შესაბამისი ალბათური ზომები $dQ_\beta^n = \mathcal{E}_{\tau_n}(\beta \int Z dM + \beta L) dP$, სადაც $\beta > \frac{\gamma}{2}$. ჩვენი მიზანია ვაჩვენოთ, რომ $\left\{\mathcal{E}_{\tau_n}(\beta \int Z dM + \beta L)\right\}_{n \ge 1}$ ოჯახი თანაბრად ინტეგრებადია, საიდანაც გამომდინარეობს $\mathcal{E}(\beta \int Z dM + \beta L)$-ს თანაბრად ინტეგრებადობა. რადგან (Y, Z, L) (1) განტოლების ამონახსნია, ამიტომ

$$Y_{\tau_n} = Y_0 - \int_0^{\tau_n} f(s, Z_s) d\langle M\rangle_s + \beta \int_0^{\tau_n} Z_s^2 d\langle M\rangle_s + \beta \langle L\rangle_{\tau_n} +$$

$$+ \int_0^{\tau_n} Z_s (dM_s - \beta Z_s d\langle M\rangle_s) + L_{\tau_n} - \beta \langle L\rangle_{\tau_n}$$

და ამასთან გირსანოვის თეორემის თანახმად მივიღებთ, რომ

$$E^{Q_\beta^n}\left[Y_{\tau_n} - Y_0\right] = E^{Q_\beta^n} \int_0^{\tau_n} [\beta Z_s^2 - f(s, Z_s)] d\langle M\rangle_s + \beta E^{Q_\beta^n} \langle L\rangle_{\tau_n} \geq$$

$$\geq E^{Q_\beta^n} \int_0^{\tau_n} \left[\beta Z_s^2 - \frac{\gamma}{2} Z_s^2 - \alpha_s\right] d\langle M\rangle_s + \beta E^{Q_\beta^n} \langle L\rangle_{\tau_n} =$$

$$= \left(\beta - \frac{\gamma}{2}\right) E^{Q_\beta^n} \int_0^{\tau_n} Z_s^2 d\langle M\rangle_s + \beta E^{Q_\beta^n} \langle L\rangle_{\tau_n} - E^{Q_\beta^n} \int_0^{\tau_n} \alpha_s d\langle M\rangle_s.$$

რადგან $\beta > \frac{\gamma}{2}$, ამიტომ უკანასკნელი უტოლობა შემდეგი სახით შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$\frac{1}{2} E^{Q_\beta^n} \int_0^{\tau_n} Z_s^2 d\langle M\rangle_s + \frac{\beta}{2\beta - \gamma} E^{Q_\beta^n} \langle L\rangle_{\tau_n} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\beta - \gamma} E^{Q_\beta^n} \left[Y_{\tau_n} + \int_0^{\tau_n} \alpha_s d\langle M\rangle_s\right] - \frac{1}{2\beta - \gamma} E Y_0.$$

გამომდინარე იქიდან, რომ $\beta > \frac{\gamma}{2}$-თვის $\frac{\beta}{2\beta - \gamma} > \frac{1}{2}$ მივიღებთ, რომ

$$\frac{1}{2} E^{Q_\beta^n} \left[\int_0^{\tau_n} Z_s^2 d\langle M\rangle_s + \langle L\rangle_{\tau_n}\right] \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\beta - \gamma} E^{Q_\beta^n} \left[Y_{\tau_n} + \int_0^{\tau_n} \alpha_s d\langle M\rangle_s\right] - \frac{1}{2\beta - \gamma} E Y_0. \tag{50}$$

თუ მიმდევრობით გამოვიყენებთ $\mathcal{E}(\beta \int Z dM + \beta L)$-ის განმარტებას, გირსანოვის თეორემასა და (50) და (45) უტოლობებს, მაშინ მივიღებთ:

$$E\left[\mathcal{E}_{\tau_n}\left(\beta \int Z dM + \beta L\right) \ln \mathcal{E}_{\tau_n}\left(\beta \int Z dM + \beta L\right)\right] = \frac{\beta^2}{2} E^{Q_\beta^n} \left[\int_0^{\tau_n} Z_s^2 d\langle M\rangle_s + \langle L\rangle_{\tau_n}\right] \leq$$

$$\leq \frac{\beta^2}{2\beta - \gamma} E^{Q_\beta^n} \left[Y_{\tau_n} + \int_0^{\tau_n} \alpha_s d\langle M\rangle_s\right] - \frac{\beta^2}{2\beta - \gamma} E Y_0 \leq$$

$$\leq \frac{\beta^2}{2\beta-\gamma} E e^{p\left(Y_{\tau_n}+\int_0^{\tau_n} \alpha_s d\langle M\rangle_s\right)} - \frac{\beta^2}{2\beta-\gamma} EY_0 - \frac{1+\ln p}{p} +$$

$$+\frac{\beta^2}{2\beta-\gamma}\cdot\frac{1}{p} E\left[\mathcal{E}_{\tau_n}\left(\beta\int ZdM+\beta L\right)\ln\mathcal{E}_{\tau_n}\left(\beta\int ZdM+\beta L\right)\right].$$

გადავწეროთ უკანასკნელი უტოლობა შემდეგი ფორმით:

$$\left(1-\frac{\beta^2}{2\beta-\gamma}\cdot\frac{1}{p}\right) E\left[\mathcal{E}_{\tau_n}\left(\beta\int ZdM+\beta L\right)\ln\mathcal{E}_{\tau_n}\left(\beta\int ZdM+\beta L\right)\right] \leq$$

$$\leq \frac{\beta^2}{2\beta-\gamma} E e^{p\left(Y_{\tau_n}+\int_0^{\tau_n} \alpha_s d\langle M\rangle_s\right)^*} - \frac{\beta^2}{2\beta-\gamma} EY_0 - \frac{1+\ln p}{p}.$$

ანუ თუ $1-\frac{\beta^2}{2\beta-\gamma}\cdot\frac{1}{p}>0$, მაშინ რადგანაც

$$E e^{p\left(Y_{\tau_n}+\int_0^{\tau_n} \alpha_s d\langle M\rangle_s\right)} \leq E e^{p\left(Y^+ + \int \alpha d\langle M\rangle\right)^*} < \infty$$

მივიღებთ, რომ $\left\{\mathcal{E}_{\tau_n}(\beta\int ZdM+\beta L)\right\}_{n\geq 1}$ ოჯახი თანაბრად ინტეგრებადია. ასე რომ უნდა შევარჩიოთ ისეთი $\beta>\frac{\gamma}{2}$, რომლისთვისაც

$$\frac{\beta^2}{2\beta-\gamma}<p.$$

უკანასკნელი უტოლობა ექვივალენტურია $\beta^2-2p\beta+p\gamma<0$ უტოლობისა, რომლისთვისაც

$$\beta\in\left(p-\sqrt{p(p-\gamma)}\ ;\ p+\sqrt{p(p-\gamma)}\right).$$

საბოლოოდ რადგანაც $p-\sqrt{p(p-\gamma)}>\frac{\gamma}{2}$, ამიტომ მივიღებთ, რომ $\mathcal{E}(\beta\int ZdM+\beta L)$ თანაბრად ინტეგრებადი მარტინგალია ყოველი $\beta\in\left(p-\sqrt{p(p-\gamma)}\ ;\ p+\sqrt{p(p-\gamma)}\right)$-თვის.

წინადადება 2.7 დამტკიცებულია.

შენიშვნა. ადვილი შესამოწმებელია, რომ თუ $p>\gamma$, მაშინ $\gamma\in\left(p-\sqrt{p(p-\gamma)}\ ;\ p+\sqrt{p(p-\gamma)}\right)$, ამიტომ თუ $\gamma=1$, მაშინ $\mathcal{E}(\int ZdM+L)$ იქნება თანაბრად ინტეგრებადი მარტინგალი.

§ 2.7 დანართი

ლემა 2.13: თუ ამოზნექილ f გენერატორს z-ის მიმართ გააჩნია არაუმეტეს კვადრატული ზრდისა, მაშინ ასევე არაუმეტეს კვადრატული ზრდა ექნება z-ით მის მარცხენა წარმოებულსაც. ანუ თუ არსებობს ისეთი ჭვრეტადი პროცესი $\alpha_t \geq 0$ და ისეთი მუდმივი $\gamma \geq 0$, რომ ყოველი (t, ω, z)-თვის: $|f(t, \omega, z)| \leq \alpha_t(\omega) + \frac{\gamma}{2} z^2$, მაშინ ასევე ადგილი ექნება უტოლობას:

$$|f_l'(t, \omega, z)| \leq \gamma + 2\alpha_t(\omega) + \frac{3\gamma}{2} z^2.$$

დამტკიცება: f-ის ამოზნექილობის გამო ყოველი $z_1 < z_2 < z_3$-თვის სამართლიანია უტოლობა:

$$\frac{f(t, \omega, z_2) - f(t, \omega, z_1)}{z_2 - z_1} \leq f_l'(t, \omega, z_2) \leq \frac{f(t, \omega, z_3) - f(t, \omega, z_2)}{z_3 - z_2}.$$

თუ ავიღებთ $z_1 = z - 1,\ z_2 = z,\ z_3 = z + 1$, მივიღებთ შემდეგ ორმხრივ უტოლობას:

$$f(t, \omega, z) - f(t, \omega, z - 1) \leq f_l'(t, \omega, z) \leq f(t, \omega, z + 1) - f(t, \omega, z).$$

აქედან გამომდინარე f_l'-თვის შეგვიძლია დავწეროთ შეფასება:

$$|f_l'(t, \omega, z)| \leq max(|f(t, \omega, z + 1) - f(t, \omega, z)|\,;\ |f(t, \omega, z) - f(t, \omega, z - 1)|).$$

შევაფასოთ ეს ორი სიდიდე:

$$|f(t, \omega, z) - f(t, \omega, z - 1)| \leq |f(t, \omega, z)| + |f(t, \omega, z - 1)| \leq$$

$$\leq \alpha_t(\omega) + \frac{\gamma}{2} z^2 + \alpha_t(\omega) + \frac{\gamma}{2}(z - 1)^2 \leq 2\alpha_t(\omega) + \frac{\gamma}{2} z^2 + \gamma(z^2 + 1) = \gamma + 2\alpha_t(\omega) + \frac{3\gamma}{2} z^2.$$

ზუსტად ასევე მივიღებთ, რომ $|f(t, \omega, z + 1) - f(t, \omega, z)| \leq \gamma + 2\alpha_t(\omega) + \frac{3\gamma}{2} z^2$.

ლემა 2.13 დამტკიცებულია.

გავიხსენოთ, რომ U არის შემოსაზღვრულ, ჭვრეტად მართვათა კლასი.

ლემა 2.14: თუ $|f(s, x)| \leq \alpha_s + \frac{\gamma}{2} x^2$ და $M, \int \alpha dM \in BMO$, მაშინ ყოველი $u \in U$-თვის $\int f_l'(u) dM \in BMO$.

დამტკიცება: ლემა 2.13-ის თანახმად $|f_l'(t, x)| \leq \gamma + 2\alpha_t + \frac{3\gamma}{2} x^2$ და რადგანაც $u \in U$, ამიტომ არსებობს ისეთი მუდმივი $D \geq 0$, რომ $|u_s| \leq D$. ასე რომ გვექნება

$$\int_t^T |f_l'(s,u_s)|^2 d\langle M\rangle_s \le \int_t^T \left|2\alpha_s + \gamma + \frac{3\gamma}{2}u_s^2\right|^2 d\langle M\rangle_s \le$$

$$\le 3\int_t^T 4\alpha_s^2 d\langle M\rangle_s + 3\int_t^T \gamma^2 d\langle M\rangle_s + 3\int_t^T \frac{9\gamma^2}{4}u_s^4 d\langle M\rangle_s \le$$

$$\le 12\int_t^T \alpha_s^2 d\langle M\rangle_s + 3\gamma^2(\langle M\rangle_T - \langle M\rangle_t) + \frac{27\gamma^2}{4}D^4(\langle M\rangle_T - \langle M\rangle_t).$$

აქედან კი რადგან $M, \int \alpha dM \in BMO$, ამიტომ მივიღებთ, რომ $\int f_l'(u)dM \in BMO$.

ლემა 2.14 დამტკიცებულია.

ლემა 2.15: ვთქვათ U_n n-ით შემოსაზღვრულ ჭვრეტად მართვათა კლასია: $U_n = \{u \in U : |u_s(\omega)| \le n\}$. მაშინ ყოველი თ. ყ. სასრული და ჭვრეტადი ψ პროცესისათვის სრულდება შემდეგი ტოლობა:

$$\underset{u\in U_n}{ess\ sup}\,[f(s,u_s) + f_l'(s,u_s)(\psi_s - u_s)] = f(s,\psi_s^n) + f_l'(s,\psi_s^n)(\psi_s - \psi_s^n) = g^n(s,\psi_s)$$

სადაც $\psi_s^n = n1_{\{\psi_s > n\}} + \psi_s 1_{\{|\psi_s| \le n\}} - n1_{\{\psi_s < -n\}}$ და

$$g^n(s,x) = 1_{\{x>n\}}[f(s,n) + f_l'(s,n)(x-n)] + 1_{\{|x|\le n\}}f(s,x) +$$
$$+1_{\{x<-n\}}[f(s,-n) + f_l'(s,-n)(x+n)].$$

დამტკიცება: განვიხილოთ სამი შემთხვევა:

1). თუ $|\psi_s| \le n$ მაშინ გვექნება:

$$f(s,\psi_s^n) + f_l'(s,\psi_s^n)(\psi_s - \psi_s^n) = f(s,\psi_s) \ge f(s,u_s) + f_l'(s,u_s)(\psi_s - u_s) \qquad \forall\ u \in U_n.$$

2). თუ $\psi_s > n$ მაშინ f-ის ამოზნექილობის გამო ყოველი $u \in U_n$-თვის გვაქვს უტოლობა:

$$f(s,u_s) - f(s,n) + f_l'(s,u_s)(\psi_s - u_s) \le f(s,u_s) - f(s,n) + \frac{f(s,n) - f(s,u_s)}{n - u_s}\cdot(\psi_s - u_s) =$$

$$= \big(f(s,n) - f(s,u_s)\big)\left(\frac{\psi_s - u_s}{n - u_s} - 1\right) = \frac{f(s,n) - f(s,u_s)}{n - u_s}\cdot(\psi_s - n) \le f_l'(s,n)(\psi_s - n)$$

ანუ როდესაც $\psi_s > n$, $\forall\ u \in U_n$-თვის ადგილი აქვს უტოლობას:

$$f(s,u_s) + f_l'(s,u_s)(\psi_s - u_s) \le f(s,n) + f_l'(s,n)(\psi_s - n).$$

3). თუ $\psi_s < -n$ მაშინ, ასევე f-ის ამოზნექილობის გამო ყოველი $u \in U_n$-თვის მივიღებთ:

$$f(s,u_s) - f(s,-n) + f_l'(s,u_s)(\psi_s - u_s) \le f(s,u_s) - f(s,-n) +$$

$$+\frac{f(s,u_s)-f(s,-n)}{n+u_s}\cdot(\psi_s-u_s)=\big(f(s,u_s)-f(s,-n)\big)\left(1+\frac{\psi_s-u_s}{n+u_s}\right)=$$
$$=\frac{f(s,u_s)-f(s,-n)}{n+u_s}\cdot(\psi_s+n)\leq f_l'(s,-n)(\psi_s+n).$$

ესე იგი, როდესაც $\psi_s<-n$, $\forall\ u\in U_n$-თვის ადგილი აქვს უტოლობას:

$$f(s,u_s)+f_l'(s,u_s)(\psi_s-u_s)\leq f(s,-n)+f_l'(s,-n)(\psi_s+n).$$

ამ სამი შემთხვევის განხილვის შედეგად შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ სამართლიანია უტოლობა:

$$f(s,\psi_s^n)+f_l'(s,\psi_s^n)(\psi_s-\psi_s^n)\geq f(s,u_s)+f_l'(s,u_s)(\psi_s-u_s)\qquad\forall\ u\in U_n.$$

მეორეს მხრივ, რადგანაც $\psi^n\in U_n$, ცხადია, რომ

$$f(s,\psi_s^n)+f_l'(s,\psi_s^n)(\psi_s-\psi_s^n)\leq \underset{u\in U_n}{ess\ sup}\,[f(s,u_s)+f_l'(s,u_s)(\psi_s-u_s)].$$

საბოლოოდ კი მივიღებთ ტოლობას:

$$\underset{u\in U_n}{ess\ sup}\,[f(s,u_s)+f_l'(s,u_s)(\psi_s-u_s)]=f(s,\psi_s^n)+f_l'(s,\psi_s^n)(\psi_s-\psi_s^n)=g^n(s,\psi_s).$$

ლემა 2.15 დამტკიცებულია.

ლემა 2.16 ყოველი თ. ყ. სასრული და ჭვრეტადი φ პროცესისათვის სრულდება შემდეგი ტოლობა:

$$\underset{u\in U}{ess\ sup}\,[f(s,u_s)+f_l'(s,u_s)(\varphi_s-u_s)]=f(s,\varphi_s).$$

დამტკიცება: ლემა 2.15-ის თანახმად გვექნება შემდეგი ტოლობები:

$$\underset{u\in U}{ess\ sup}[f(s,u_s)+f_l'(s,u_s)(\varphi_s-u_s)]=$$
$$=\sup_n\left\{\underset{u\in U_n}{ess\ sup}[f(s,u_s)+f_l'(s,u_s)(\varphi_s-u_s)]\right\}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\underset{u\in U_n}{ess\ sup}[f(s,u_s)+f_l'(s,u_s)(\varphi_s-u_s)]=$$
$$=\lim_{n\to\infty}g^n(s,\varphi_s)=f(s,\varphi_s).$$

ლემა 2.16 დამტკიცებულია.

ლემა 2.17 თუ ამოზნექილი f გენერატორი აკმაყოფილებს კვადრატული ზრდის $|f(s,x)| \leq \alpha_s + \frac{\gamma}{2}x^2$ პირობას, მაშინ f-ის მარცხენა წარმოებულის კვადრატისათვის ადგილი აქვს შემდეგ შეფასებას:

$$\frac{1}{2}{f_l'}^2(s,y) \leq \gamma\alpha_s + \gamma(yf_l'(s,y) - f(s,y)).$$

დამტკიცება: f-ის ამოზნექილობის გამო ყოველი x და y-თვის ადგილი აქვს უტოლობას $f(s,y) + f_l'(s,y)(x-y) \leq f(s,x)$. აქედან და f-ის კვადრატულობიდან ადვილად მივიღებთ, რომ

$$xf_l'(s,y) \leq f(s,x) + yf_l'(s,y) - f(s,y) \leq \alpha_s + \frac{\gamma}{2}x^2 + yf_l'(s,y) - f(s,y).$$

ახლა თუ უკანასკნელ უტოლობაში ჩავსვამთ $x = \frac{1}{\gamma}f_l'(s,y)$, გვექნება

$$\frac{1}{\gamma}{f_l'}^2(s,y) \leq \alpha_s + \big(yf_l'(s,y) - f(s,y)\big) + \frac{1}{2\gamma}{f_l'}^2(s,y)$$

საიდანაც მარტივად მივიღებთ უტოლობას

$$\frac{1}{2}{f_l'}^2(s,y) \leq \gamma\alpha_s + \gamma(yf_l'(s,y) - f(s,y)).$$

ლემა 2.17 დამტკიცებულია.

თ ა ვ ი 3

არსებობის და ერთადერთობის თეორემების გამოყენება წრფივი რეგულატორის ამოცანაში და კავშირი ბელმან-ჩიტაშვილის განტოლებასთან

განვიხილოთ წრფივი რეგულატორის ამოცანა (LQR): ვთქვათ A გადაწყვეტილებების სიმრავლეა, ხოლო M უწყვეტი ლოკალური მარტინგალია. ყოველ $a \in A$-ს შევუსაბამოთ ლოკალური მარტინგალი $M^a = aM$. მართვები იყოს ჭვრეტადი ასახვები $u : \Omega \times [0;T] \to A$ და შესაბამისი ალბათური ზომები $dP^u = \mathcal{E}_T(M^u)dP$, სადაც $M^u = \int_0^t u_s dM_s$ ისეთია, რომ $\mathcal{E}(M^u)$ თანაბრად ინტეგრებადი მარტინგალია. დავუშვათ ფასის კრიტერიუმი შემდეგი სახისაა $r(t,a) = -g(t)a^2 + h(t)$ და განვიხილოთ ოპტიმიზაციის ამოცანა

$$\sup E\left[\mathcal{E}_T\left(\int udM\right)\left(\eta + \int_0^T [h(s) - g(s)u_s^2]d\langle M\rangle_s\right)\right], \tag{51}$$

სადაც η $\mathcal{F}_T$-ზომადი შემთხვევითი სიდიდეა, ხოლო sup აიღება მართვათა შემდეგი კლასიდან:

$$U = \left\{u_t : E\mathcal{E}_T\left(\int udM\right) = 1\,;\; E^u\left[|\eta| + \int_0^T |h(s) - g(s)u_s^2| d\langle M\rangle_s\right] < \infty\right\}.$$

შემოვიღოთ (LQR) ამოცანის ფასის ფუნქცია

$$V_t = \underset{u\in U}{ess\ sup}\, E^u\left[\eta + \int_t^T [h(s) - g(s)u_s^2]d\langle M\rangle_s \middle| \mathcal{F}_t\right].$$

V_t პროცესისათვის შეგვიძლია ფორმალურად გამოვიყვანოთ შესაბამისი $BSDE$ რ. ჩიტაშვილის შედეგის გამოყენებით, რომელმაც გამოიყვანა შესაბამისი შექცეული განტოლება მარტინგალების ზოგადი $(M^a\,;\, a \in A)$ სისტემისათვის.

თეორემა (ჩიტაშვილი [9]) დავუშვათ $(M^a\,;\, a \in A)$ უწყვეტი, ლოკალური მარტინგალების ოჯახია ისეთი, რომ $\langle M^a\rangle_t \ll K_t$, $t \in [0;T]$ რომელიღაც ჭვრეტადი და ზრდადი K პროცესისათვის. დავუშვათ, რომ რადონ-ნიკოდიმის წარმოებული $\frac{d\langle M^a\rangle_t}{dK_t}$ უწყვეტია a-ს მიმართ $dK_t \times dP$ თ. ყ. და ამასთან

$$\int_0^t \max_{a\in A} \frac{d\langle M^a\rangle_s}{dK_s} dK_s \in A^+_{loc}. \tag{52}$$

მაშინ ფასის პროცესი

$$V_t = \underset{u\in U}{ess\ sup}\, E^u\left[\eta + \int_t^T r(s,u_s)dK_s \middle| \mathcal{F}_t\right], \quad t\in[0;T]$$

წარმოადგენს შემდეგი განტოლების ამონახსნს:

$$\begin{cases} V_t = V_0 - \int\limits_0^t \max\limits_{a\in A}\left[r(s,a) + \dfrac{d\langle m, M^a\rangle_s}{dK_s}\right]dK_s + m_t, \\ \qquad V_T = \eta. \end{cases} \tag{53}$$

(53) განტოლების ამონახსნს ვუწოდებთ (V,m) წყვილს, სადაც V სემიმარტინგალია, m ლოკალური მარტინგალია, ხოლო (V,m) წყვილი აკმაყოფილებს (53) განტოლებას.

ჩვენს შემთხვევაში $A=R$, $r(s,a) = -g(s)a^2 + h(s)$, $M^a = aM$ და $K=\langle M\rangle$. თუ m-თვის გამოვიყენებთ კუნიტა-ვატანაბეს გაშლას, მაშინ მივიღებთ:

$$m_t = \int_0^t Z_s dM_s + L_t \tag{54}$$

სადაც Z ჭვრეტადი, M-ით ინტეგრებადი პროცესია ხოლო L M-ის ორთოგონალური ლოკა-ლური მარტინგალია. ყველაფერ ამის გამოყენებით მივიღებთ

$$\max_{a\in A}\left[r(s,a) + \frac{d\langle m, M^a\rangle_s}{dK_s}\right] = \max_{a\in R}\left[-g(s)a^2 + h(s) + \frac{d\langle\int ZdM + L, aM\rangle_s}{d\langle M\rangle_s}\right] =$$

$$= \max_{a\in R}[-g(s)a^2 + h(s) + aZ_s] = h(s) + \frac{1}{4g(s)}Z_s^2.$$

ასე რომ ჩვენს შემთხვევაში (53) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\begin{cases} Y_t = Y_0 - \int\limits_0^t \left[h(s) + \dfrac{1}{4g(s)}Z_s^2\right]d\langle M\rangle_s + \int\limits_0^t Z_s dM_s + L_t, \\ \qquad Y_T = \eta. \end{cases} \tag{55}$$

შევნიშნოთ, რომ ჩვენს შემთხვევაში არ სრულდება (52) პირობა და, შესაბამისად, (55) განტოლების ამონახსნის არსებობა არ გამომდინარეობს რ. ჩიტაშვილის თეორემიდან ([9]). მაგრამ ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ წინა თავში დამტკიცებული არსებობისა და ერთადერთობის თეორემები. მართლაც (55) განტოლების შემთხვევაში გენერატორს აქვს შემდეგი სახე $f(s,z) = h(s) + \frac{z^2}{4g(s)}$ და აკმაყოფილებს კვადრატული ზრდის პირობას

$$|f(s,z)| \le |h(s)| + \frac{1}{4\varepsilon}z^2 = |h(s)| + \frac{\gamma}{2}z^2$$

სადაც $g(s) \geq \varepsilon > 0$ ყოველი s-თვის და $\gamma = \frac{1}{2\varepsilon}$. ასე რომ თუ სრულდება პირობები

(i) $\quad M, \int |h| dM \in BMO$

(ii) $\quad Ee^{p\left(\eta^+ + \int |h| d\langle M \rangle\right)^*} < \infty$ და $\eta + \int_0^T h(s) d\langle M \rangle_s \geq -D > -\infty$

მაშინ **თეორემა 2.1** და **2.3**-ის თანახმად არსებობს (55) განტოლების ერთადერთი ამონახსნი $(\tilde{V}, \varphi, L)$, სადაც პირველი კომპონენტი $\tilde{V}$ წარმოიდგინება შემდეგი სახით:

$$\tilde{V}_t = \underset{u \in \widetilde{U}}{ess\,sup}\, E\left[\mathcal{E}_{t,T}\left(\int \frac{u}{2g} dM\right)\left(\eta + \int_t^T \left[h(s) - \frac{u_s^2}{4g(s)}\right] d\langle M \rangle_s\right) \middle| \mathcal{F}_t\right] \tag{56}$$

ხოლო მართვათა $\widetilde{U}$ კლასი კი შემდეგნაირია:

$$\widetilde{U} = \left\{u_t :\ E\mathcal{E}_T\left(\int \frac{u}{2g} dM\right) = 1\ ;\ \ E\left[\mathcal{E}_T\left(\int \frac{u}{2g} dM\right)\left(|\eta| + \int_0^T \left|h(s) - \frac{u_s^2}{4g(s)}\right| d\langle M \rangle_s\right)\right] < \infty\right\}.$$

თეორემა 2.3-ში ასევე დავამტკიცეთ, რომ $(\tilde{V}, \varphi, L)$ სამეულის მეორე კომპონენტი φ ეკუთვნის $\widetilde{U}$ კლასს და ის ოპტიმალურია. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $\tilde{V}$ ჩაიწერება შემდეგი ფორმით:

$$\tilde{V}_t = E\left[\mathcal{E}_{t,T}\left(\int \frac{\varphi}{2g} dM\right)\left(\eta + \int_t^T \left[h(s) - \frac{\varphi_s^2}{4g(s)}\right] d\langle M \rangle_s\right) \middle| \mathcal{F}_t\right]. \tag{57}$$

თეორემა 3.1 თუ სრულდება (i) და (ii) პირობები, მაშინ ჭვრეტადი $\frac{\varphi}{2g}$ პროცესი წარმოადგენს ოპტიმალურ მართვას (51) ოპტიმიზაციის ამოცანისათვის.

დამტკიცება: ცხადია, რომ $u \in \widetilde{U} \Longrightarrow \frac{u}{2g} \in U$ და $u \in U \Longrightarrow 2gu \in \widetilde{U}$. აქედან დავასკვნით, რომ $\frac{\varphi}{2g} \in U$. ამიტომ საჩვენებელი დაგვრჩა, რომ (51)-ში მაქსიმუმი მიიღწევა $\frac{\varphi}{2g}$-ზე. ავიღოთ ნებისმიერი $u \in U$. მაშინ $2gu \in \widetilde{U}$. ამიტომ (58) და (57)-ის თანახმად ყოველი $u \in U$-თვის

$$E\left[\mathcal{E}_T\left(\int \frac{\varphi}{2g} dM\right)\left(\eta + \int_0^T \left(h(s) - \frac{\varphi_s^2}{4g(s)}\right) d\langle M \rangle_s\right)\right] \geq$$

$$\geq E\left[\mathcal{E}_T\left(\int \frac{2gu}{2g} dM\right)\left(\eta + \int_0^T \left(h(s) - \frac{(2g(s)u_s)^2}{4g(s)}\right) d\langle M \rangle_s\right)\right] =$$

$$= E\left[\mathcal{E}_T\left(\int u dM\right)\left(\eta + \int_0^T (h(s) - g(s)u_s^2) d\langle M \rangle_s\right)\right].$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $\frac{\varphi}{2g}$ წარმოადგენს ოპტიმალურ მართვას (51) ოპტიმიზაციის ამოცანისათვის.

თეორემა 3.1 დამტკიცებულია.

ზოგადობისათვის შეგვიძლია განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც $M^a = M^0 + aM$, სადაც M^0 M-ის ორთოგონალური უწყვეტი ლოკალური მარტინგალია. რადგანაც M და M^0 ორთოგონალური ლოკალური მარტინგალებია, ამიტომ

$$\mathcal{E}_t(M^u) = \mathcal{E}_t\left(M^0 + \int udM\right) = \mathcal{E}_t(M^0) \cdot \mathcal{E}_t\left(\int udM\right).$$

ასე რომ თუ $\mathcal{E}_t(M^0)$ მარტინგალია, მაშინ (51) ოპტიმიზაციის ამოცანა შეგვიძლია ჩავწეროთ $d\tilde{P} = \mathcal{E}_T(M^0)dP$ ზომის მიმართ:

$$\sup E\left[\mathcal{E}_T\left(M^0 + \int udM\right)\left(\eta + \int_0^T [h(s) - g(s)u_s^2]d\langle M\rangle_s\right)\right] =$$

$$= \sup \tilde{E}\left[\mathcal{E}_T\left(\int udM\right)\left(\eta + \int_0^T [h(s) - g(s)u_s^2]d\langle M\rangle_s\right)\right] \tag{58}$$

სადაც მართვათა U კლასი შემდეგნაირია: $u \in U$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\mathcal{E}(\int udM)$ თანაბრად ინტეგრებადი $\tilde{P}$-მარტინგალია და ამასთან

$$\tilde{E}\left[\mathcal{E}_T\left(\int udM\right)\left(|\eta| + \int_0^T |h(s) - g(s)u_s^2|d\langle M\rangle_s\right)\right] < \infty.$$

შევნიშნოთ, რომ $\langle M^a\rangle_t \ll \langle M\rangle_t + \langle M^0\rangle_t \equiv K_t$ $t \in [0;T]$ ყოველი $a \in R$-თვის. იმისათვის, რომ გამოვიყენოთ **ჩიტაშვილის თეორემა [9]**, (58) ოპტიმიზაციის ამოცანა უნდა ჩავწეროთ K პროცესის მიმართ:

$$\sup \tilde{E}\left[\mathcal{E}_T\left(\int udM\right)\left(\eta + \int_0^T [h(s) - g(s)u_s^2]d\langle M\rangle_s\right)\right] =$$

$$= \sup \tilde{E}\left[\mathcal{E}_T\left(\int udM\right)\left(\eta + \int_0^T [h(s) - g(s)u_s^2]\frac{d\langle M\rangle_s}{dK_s}dK_s\right)\right]$$

ხოლო ფასის პროცესი კი შემდეგნაირად:

$$V_t = \underset{u\in U}{ess\,sup}\, \tilde{E}\left[\mathcal{E}_{t,T}\left(\int udM\right)\left(\eta + \int_t^T [h(s) - g(s)u_s^2]\frac{d\langle M\rangle_s}{dK_s}dK_s\right)\middle| \mathcal{F}_t\right].$$

ამჯერად თუ გამოვიყენებთ (54) გაშლას მივიღებთ, რომ

$$\max_{a\in A}\left[r(s,a)\frac{d\langle M\rangle_s}{dK_s}+\frac{d\langle m,M^a\rangle_s}{dK_s}\right]=h(s)\frac{d\langle M\rangle_s}{dK_s}+\frac{1}{4g(s)}Z_s^2\frac{d\langle M\rangle_s}{dK_s}+\frac{d\langle L,M^0\rangle_s}{dK_s}$$

ხოლო (53) განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} Y_t=Y_0-\int\limits_0^t\left[h(s)+\frac{1}{4g(s)}Z_s^2\right]d\langle M\rangle_s+\int\limits_0^t Z_s dM_s+L_t-\langle L,M^0\rangle_t, \\ Y_T=\eta. \end{cases} \quad (59)$$

გირსანოვის თეორემის თანახმად M და $L-\langle L,M^0\rangle$ ორთოგონალური $\tilde{P}$-მარტინგალებია, ამიტომ ისღა დაგვრჩენია, რომ (59) განტოლება ამოვხსნათ $\tilde{P}$ ზომის მიმართ. ასე რომ თუ სრულდება

$(i)'$ $\quad M,\int|h|dM\in BMO(\tilde{P})$

$(ii)'$ $\quad \tilde{E}e^{p\left(\eta^{+}+\int|h|d\langle M\rangle\right)^{*}}<\infty$ და $\eta+\int_0^T h(s)d\langle M\rangle_s\geq -D>-\infty$

პირობები, მაშინ **თეორემა 2.1** და **2.3**-ის თანახმად არსებობს (59) განტოლების ერთადერთი ამონახსნი $(\tilde{V},\tilde{\varphi},\tilde{L})$ და სამართლიანია შემდეგი თეორემა:

თეორემა 3.1′ დავუშვათ M^0 M-ის ორთოგონალური უწყვეტი ლოკალური მარტინ-გალია ისეთი, რომ $\mathcal{E}(M^0)$ ზომის მომცემი მარტინგალია. ამასთან თუ სრულდება $(i)'$ და $(ii)'$ პირობები, მაშინ ჭვრეტადი $\frac{\tilde{\varphi}}{2g}$ პროცესი წარმოადგენს ოპტიმალურ მართვას (58) ოპტიმიზაციის ამოცანისათვის.

გამოყენებული ლიტერატურა

[1] S. Ankirchner, P. Imkeller and G. Reis, "Classical and variational differentiability of BSDEs with quadratic growth", *Electronic Journal of Probability* **12** (2007), 1418-1453.

[2] P. Barrieu, N. Cazanave and N. El Karoui, "Closedness results for BMO semi-martingales and application to quadratic BSDEs," *Comptes Rendus Mathematique* **346** (2008), 881-886.

[3] J. M. Bismut, Conjugate convex functions in optimal stochastic control, *J. Math. Anal. Appl.* **44** (1973), 384-404.

[4] J. M. Bismut, "Controle des systemes linearies quadratiques: applications de l'integrale stochastique," *seminaire de Probabilites XII (eds.: C. Dellacherie, P. A. Meyer, and M. Weil), Lecture Notes im Mathematics 649, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg* (1978), 180-264.

[5] P. Briand and Y. Hu, Quadratic BSDEs with convex generators and unbounded terminal conditions, *Probab. Theory Related Fields* **141**: 3-4 (2008), 543-567.

[6] B. Chikvinidze, "Backward stochastic differential equations with a convex generator," *Georgian Mathematical Journal* **19** (2012), 63-92.

[7] B. Chikvinidze, Semimartingale Backward Equations with Convex Generator, *Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences*, (2011), vol. 5, no. 3.

[8] B. Chikvinidze and M. Mania, "On the Girsanov transformation of BMO martingales", *Reports of Enlarged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics,* (2012), Volume 26.

[9] R. Chitashvili, Martingale ideology in the theory of controlled stochastic processes, in: *Probability theory and mathematical statistics (Tbilisi,* 1982*),* 73-92, Lecture notes im Math., 1021, Springer, Berlin, 1983.

[10] R. Chitashvili and M. Mania, Optimal locally absolutely continuous change of measure. Finite set of decisions. I, *Stochastics* **21**:2 (1987), 131-185.

[11] F. Delbaen, Y. Hu and A. Richou, On the uniqueness of solutions to quadratic BSDEs with convex generators and unbounded terminal conditions, *Ann. Inst. Henri Poincare Probab. stat.* **47**:2 (2011), 559 – 574.

[12] F. Delbaen, P. Monat, W. Schachermayer, M. Schweizer and C. Stricker, "Weighted norm inequalities and hedging in incomplete markets", *Finance and Stochastics* **1** (1997) 181-227.

[13] F. Delbaen and S. Tang, "Harmonic analysis of stochastic equations and backward stochastic differential equations", *Probability Theory and Related Fields* **146** (2010) 291-336.

[14] C. Dellacherie and P. A. Meyer, *Probabilities and Potential. B. Theory of Martingales,* Translated from the French by J. P. Wilson. North-Holland Mathematics Studies, 72. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1982.

[15] C. Doleans-Dade and P. A. Meyer, “Inegalites de normes avec poids”, *Universite de Strasbourg Seminaire de Probabilites,* XIII, (1979) 313-331.

[16] N. El Karoui, Les aspects probabilistes du controle stochastique, in: *Ninth Saint Flour Probability Summer School* – 1979 (*Saint Flour,* 1979), pp. 73-238, Lecture Notes in Math.,876, Springer, Berlin-New York, 1981.

[17] R. J. Elliott, *Stochastic Calculus and Applications,* Applications of Mathematics (New York), 18. Springer-Verlag, New York, 1982.

[18] C. Frei, M Mocha and N. Westray, "BSDEs in Utility Maximization with BMO Market Price of Risk", *Working Paper*, arXiv:1107.0183v1, 2011.

[19] Y. Hu, P. Imkeller, and M. Muller, "Utility maximization in incomplete markets," *Annals of Applied Probability* **15** (2005) 1691-1712.

[20] N. Kazamaki, "On transforming the class of BMO-martingales by a change of law," *Tohoku Mathematical Journal* **31** (1979) 117-125.

[21] N. Kazamaki, *Continuous Exponential Martingales and BMO*, Lecture Notes in Mathematics, 1579. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[22] M. Kobylanski, Backward stochastic differential equations and partial differential equations with quadratic growth, *Ann. Probab.* **28**:2 (2000) 558-602.

[23] M. Kohlmann and S. Tang, “Minimization of risk and linear quadratic optimal control theory”, *SIAM Journal on Control and Optimization* **42** (2003) 1118-1142.

[24] H. Kunita and S. Watanabe, On square integrable martingales, *Nagoya Math. J.* **30** (1976), 209-245.

[25] J. P. Lepeltier and J. San Martin, Existence for BSDE with superlinear-quadratic coefficient, *Stochastics Stochastics Rep.* **63**:3-4 (1998) 227-240.

[26] M. Mania and M. Schweizer, "Dynamic exponential indifference valuation," *Annals of Applied Probability* **15** (2005) 2113-2143.

[27] M. Mania and R. Tevzadze, "A semimartingale Bellman equation and the variance-optimal martingale measure," *Georgian Mathematical Journal* **7** (2000) 765-792.

[28] M. Mania and R. Tevzadze, "Martingale equation of exponential type," *Electronic communication in probability* **11** (2006) 206-216.

[29] M. Mania, M. Santacroce and R. Tevzadze, "A semimartingale BSDE related to the minimal entropy martingale measure", *Finance and Stochastics* **7** No. 3, (2003) 385-402.

[30] M. A. Morlais, Quadratic BSDEs driven by a continuos martingale and applications to the utility maximization problem, *Finance Stoch.* **13**:1 (2009), 121-150.

[31] E. Pardoux and S. G. Peng, Adapted solution of a backward stochastic differential equation, *Systems Control Lett.* **14**:1 (1990), 55-61.

[32] R. Tevzadze, Solvability of backward stochastic differential equations with quadratic growth, *Stochastic Process. Appl.* **118**:3 (2008), 503-515.

[33] W. Schachermayer, “A characterization of the closure of H_∞ in BMO”, *Seminaire de Probabilites XXX, Lecture Notes in Mathematics 1626,* Springer, Berlin, (1996) 344-356.